ДЕРЕВЬЯ РЕШЕНИЙ С КВАЗИЛИНЕЙНЫМИ ПРОВЕРКАМИ *)

М. Ю. Мошков

В работе устанавливаются верхние оценки сложности деревьев решений с квазилинейными проверками. Алгоритмы такого вида могут быть использованы для решения разнообразных задач распознавания и оптимизации.

Понятие дерева решений с квазилинейными проверками является обобщением понятия линейного разделяющего алгоритма. Суть такого алгоритма в следующем.

Пусть гиперплоскости $H_1, \ldots, H_k$ разбивают пространство $\mathbb{R}^n$ на области, перенумерованные некоторым образом. По произвольной точке множества $B \subseteq \mathbb{R}^n$ требуется определить номер области, в которой данная точка содержится. Эту задачу будем называть $\langle n, k \rangle$*-задачей.*

Линейный разделяющий алгоритм — алгоритм, каждая элементарная операция которого состоит в определении положения точки из множества B относительно некоторой гиперплоскости H. Мерой сложности такого алгоритма служит его глубина — число элементарных операций, выполненных в «худшем» случае.

Имеется ряд исследований, в которых получены верхние оценки сложности линейных разделяющих алгоритмов.

Для случая $B = \mathbb{R}^n$ Д. Добкин и Р. Дж. Липтон показали [1], что при $n \geqslant 2$ для любой $\langle n, k \rangle$-задачи существует решающий ее линейный разделяющий алгоритм, глубина которого не превосходит числа $(3 \cdot 2^{n-2} + n - 2)(\log_2 k + 1)$.

Автором установлено [2], что если $B = \mathbb{Q}^n$, а коэффициенты уравнений гиперплоскостей $H_1, \ldots, H_k$ и H суть целые числа, то для любой $\langle n, k \rangle$-задачи существует решающий ее линейный разделяющий алгоритм, глубина которого не превосходит числа $(2(n+2)^3 \log_2(k + 2n + 2))/\log_2(n+2)$. В [3] содержится полное доказательство верхней оценки $4(n+2)^3 \ln(k+2n+2)$ для рассматриваемого случая. Ф. Мейер получил [4] аналогичную верхнюю оценку в предположении, что B — куб в пространстве $\mathbb{R}^n$, коэффициенты уравнений гиперплоскостей $H_1, \ldots, H_k$ — целые числа, а коэффициенты уравнений гиперплоскостей H, используемых алгоритмом, — действительные числа. Насколько известно автору, вопрос о существовании подобных верхних оценок для произвольных гиперплоскостей $H_1, \ldots, H_k$ остается открытым.

В настоящей статье обобщаются приведенные выше результаты. В частности, дается положительный ответ на вопрос о верхних оценках глубины алгоритмов для случая произвольных гиперплоскостей. Методы доказательства оценок сходны с методами, использованными в [3].

---

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93–012–488).

Работа состоит из шести параграфов. В § 1 определяются понятия системы квазилинейных проверок, задачи и дерева решений с квазилинейными проверками, а также формулируется основной результат — верхние оценки сложности деревьев решений. В § 2 рассматриваются шесть классов задач с квазилинейными проверками и приводятся следствия теоремы. В § 3 обсуждается тестовый подход к исследованию деревьев решений. В § 4 доказываются предварительные результаты, а в § 5 — основные леммы, используемые в доказательстве теоремы. Доказательство теоремы приводится в § 6.

Основой для изучения деревьев решений служит теория тестов, начало которой было положено работой С. В. Яблонского и И. А. Чегис [5]. Ал. А. Марков указал на возможность использования понятий и результатов теории тестов при исследовании алгоритмов решения задач дискретной оптимизации.

§ 1. Определения и основной результат

Обозначим

$$\mathbb{R}^+ = \{a \mid a \in \mathbb{R}, a \geqslant 0\}; \qquad E_q\{0,1,\dots,q-1\}, \quad q \geqslant 2.$$

- Множество K называется *числовым кольцом с единицей*, если $K \subseteq \mathbb{R}$, $1 \in K$ и $a+b \in K$, $a \times b \in K$ и $-a \in K$ для любых $a, b \in K$.

Определим функцию $s\colon \mathbb{R} \to E_3$ формулой

$$s(a) = \begin{cases} 0, & \text{если } a < 0, \\ 1, & \text{если } a = 0, \\ 2, & \text{если } a > 0. \end{cases}$$

1.1. Системы квазилинейных проверок. Пусть A — непустое множество, $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — функции, заданные на A и принимающие значения в $\mathbb{R}$, K — числовое кольцо с единицей. Введем обозначения

$$L(A, K, \varphi_1, \dots, \varphi_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i(x) + a_{n+1} \,\middle|\, a_i \in K,\ i = 1, \dots, n+1,\ \sum_{i=1}^{n+1} |a_i| > 0 \right\};$$

$$S(A, K, \varphi_1, \dots, \varphi_n) = \{s(g) \mid g \in L(A, K, \varphi_1, \dots, \varphi_n)\}.$$

Функции из множества $L(A, K, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ определены на A и принимают значения в $\mathbb{R}$.

- Две функции $g_1(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i(x) + a_{n+1}$ и $g_2(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i\varphi_i(x) + b_{n+1}$ из $L(A, K, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ *равны*, если $a_i = b_i$ для любого i, $1 \leqslant i \leqslant n+1$.

Функции из множества $S(A, K, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ определены на A и принимают значения из E_3.

- Две функции $f_1(x) = s(g_1(x))$ и $f_2(x) = s(g_2(x))$ из $S(A, K, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ *равны*, если равны функции g_1 и g_2.
- Множество функций $S(A, K, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ назовем *системой квазилинейных проверок*, а его элементы — *проверками*.

Определим отображение

$$r\colon L(A,K,\varphi_1,\ldots,\varphi_n)\cup S(A,K,\varphi_1,\ldots,\varphi_n)\to \mathbb{R}.$$

Пусть

$$g\in L(A,K,\varphi_1,\ldots,\varphi_n),$$
$$g(x)=\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi_i(x)+a_{n+1}.$$

Тогда

$$r(g)=\max\{0,\max\{\log_2|a_1|\mid i\in\{1,\ldots,n+1\},a_i\neq 0\}\}.$$

Далее, пусть $f\in S(A,K,\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ и $f(x)=s(g(x))$. Тогда $r(f)=r(g)$.

1.2. Задачи с проверками из $S(A,K,\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$. Пусть $S=S(A,K,\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ — система квазилинейных проверок.

- *Задачей над* A будем называть пару $\langle B,\psi\rangle$, где B — непустое подмножество множества A и ψ — отображение B в $\mathbf{N}$ с конечным множеством значений.

Задача $\langle B,\psi\rangle$ состоит в определении по произвольному элементу $a\in B$ значения $\psi(a)$.

- Если существует отображение $\nu\colon E_3^m\to\mathbf{N}$ такое, что справедливо $\psi(a)=\nu(f_1(a),\ldots,f_m(a))$ для любого $a\in B$, то конечное множество проверок $\{f_1,\ldots,f_m\}\subset S$ будем называть *разделяющим множеством задачи* $\langle B,\psi\rangle$, набор $\langle B,\nu,f_1,\ldots,f_m\rangle$ — *представлением задачи* $\langle B,\psi\rangle$ *с проверками из* S, а саму задачу — *задачей с проверками из* S.

Пусть $k\in\mathbf{N}$ и $t\in\mathbb{R}^+$.

- Задачу $\langle B,\psi\rangle$ будем называть $\langle n,k,t\rangle$*-задачей с проверками из* S, если для нее существует разделяющее множество $\{f_1,\ldots,f_m\}\subset S$ такое, что $m\leqslant k$ и $r(f_i)\leqslant t$, $1\leqslant i\leqslant m$.

1.3. Деревья решений с проверками из $S(A,K,\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$.

- *Конечным ориентированным деревом с корнем* называется конечное ориентированное дерево, в котором только в одну вершину не входят дуги. Эта вершина называется *корнем* дерева. Вершины дерева, из которых не выходят дуги, называются *концевыми*, а вершины, не являющиеся концевыми, — *рабочими*.
- *Полным путем* конечного ориентированного дерева с корнем называется последовательность $\xi=v_1,d_1,\ldots,v_m,d_m,v_{m+1}$ его вершин и дуг, в которой v_1 — корень дерева, v_{m+1} — концевая вершина и для $i=1,\ldots,m$ дуга d_i выходит из вершины v_i и входит в вершину v_{i+1}.

Пусть $S=S(A,K,\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ — система квазилинейных проверок.

- *Деревом решений с проверками из* S назовем помеченное конечное ориентированное дерево с корнем, в котором
  — каждой рабочей вершине приписана проверка из S;
  — каждой дуге приписано число из E_3, причем дугам, выходящим из одной и той же вершины, приписаны попарно различные числа;
  — каждой концевой вершине приписано натуральное число.

Пусть Γ — дерево решений с проверками из S; $F(\Gamma)$ — множество проверок, приписанных рабочим вершинам Γ; $\Xi(\Gamma)$ — множество полных путей дерева решений Γ; $r(\Gamma) = \max\{r(f) \mid f \in F(\Gamma)\}$ и $h(\Gamma)$ (*глубина* дерева решений Γ) — максимальная длина полного пути Γ.

Каждому пути $\xi \in \Xi(\Gamma)$ сопоставим подмножество $A(\xi)$ множества A. Если в пути ξ нет ни одной рабочей вершины, то $A(\xi) = A$. Если в пути ξ имеется $m > 0$ рабочих вершин, $\xi = v_1, d_1, \ldots, v_m, d_m, v_{m+1}$ и для $i = 1, \ldots, m$ вершине v_i приписана функция f_i, а дуге d_i — число δ_i, то $A(\xi)$ — множество решений на A системы уравнений $\{f_1(x) = \delta_1, \ldots, f_m(x) = \delta_m\}$.

Дереву решений Γ сопоставим частичную функцию $\Phi_\Gamma \colon A \to \mathbb{N}$.

- Пусть $A(\Gamma) \bigcup_{\xi\in\Xi(\Gamma)} A(\xi)$. Если $a \in A \backslash A(\Gamma)$, то значение $\Phi_\Gamma(a)$ не определено. Если $a \in A(\Gamma)$, то существует ровно один полный путь ξ в дереве решений Γ такой, что $a \in A(\xi)$. В этом случае $\Phi_\Gamma(a) = t$, где t — число, приписанное концевой вершине пути ξ. Будем говорить, что дерево решений Γ *реализует* функцию Φ_Γ.
- Пусть $\langle B, \psi \rangle$ — задача с проверками из S и Γ — дерево решений с проверками из S. Будем говорить, что дерево решений Γ *решает* задачу $\langle B, \psi \rangle$, если $B \subseteq A(\Gamma)$ и $\psi(a) = \Phi_\Gamma(a)$ для любого $a \in B$.

1.4. Основной результат.

Теорема 1.1. *Пусть $S(A, K, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ — система квазилинейных проверок. Тогда при всех $k \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}^+$ для любой $\langle n, k, t \rangle$-задачи с проверками из $S(A, K, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ существует решающее ее дерево решений Γ с проверками из $S(A, K, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ такое, что*

$$h(\Gamma) \leqslant (2(n+2)^3 \log_2(k + 2n + 2))/(\log_2(n+2)),$$
$$r(\Gamma) \leqslant 2(n+1)^2(1 + t + \log_2(n+1)).$$

§ 2. Примеры и следствия

Предположим, что элементы множеств $\{-1, +1\}^n$, E_q^n и Π_n (подстановок n-й степени) перенумерованы числами от 1 до 2^n, от 1 до q^n и от 1 до $n!$ соответственно.

Если K — числовое кольцо с единицей, то используем следующие обозначения:

$$L_n(K) = L(\mathbb{R}^n, K, x_1, \ldots, x_n),$$
$$S_n(K) = S(\mathbb{R}^n, K, x_1, \ldots, x_n).$$

2.1. Достаточное условие принадлежности задачи множеству задач с квазилинейными проверками.

Предложение 2.1. *Пусть $S = S(A, K, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ — система квазилинейных проверок; $\langle B, \psi \rangle$ — задача над A; D — конечное подмножество множества $\mathbb{N}$ такое, что $\{\psi(a) : a \in B\} \subseteq D$; $\{f_1, \ldots, f_k\}$ — непустое* *конечное подмножество множества S такое, что при любом $i \in D$ множество $W(i) = \{a \mid a \in B, \psi(a) = i\}$ является объединением множеств решений на B некоторых систем уравнений вида $\{f_{i_1}(x) = \sigma_1, \dots, f_{i_m}(x) = \sigma_m\}$, где $i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, k\}$ и $\sigma_1, \dots, \sigma_m \in E_3$. Тогда множество $\{f_1, \dots, f_k\}$ является разделяющим множеством задачи $\langle B, \psi \rangle$, а сама задача $\langle B, \psi \rangle$ — задачей с проверками из S.*

Доказательство. Для произвольного $\bar{\delta} = \langle \delta_1, \dots, \delta_k \rangle \in E_3^k$ обозначим через $H(\bar{\delta})$ множество решений на B системы уравнений $\{f_1(x) = \delta_1, \dots, f_k(x) = \delta_k\}$. Допустим, что C — система уравнений $\{f_{i_1}(x) = \sigma_1, \dots, f_{i_m}(x) = \sigma_m\}$, где $i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, k\}$, $\sigma_1, \dots, \sigma_m \in E_3$. Обозначим

$$U(C) = \{\langle \delta_1, \dots, \delta_k \rangle \mid \langle \delta_1, \dots, \delta_k \rangle \in E_3^k,\ \delta_{i_1} = \sigma_1, \dots, \sigma_{i_m} = \delta_m\}.$$

Нетрудно заметить, что множество решений на B системы C совпадает с множеством $\bigcup_{\bar{\delta} \in U(C)} H(\bar{\delta})$.

Пусть $i \in D$ и множество $W(i)$ является объединением множеств решений t систем уравнений вида C. Обозначим эти через системы $C_1, \dots, C_t$. Далее, пусть $V(i) = \bigcup_{j=1}^{t} U(C_j)$ и $V = \bigcup_{i \in D} V(i)$. Ясно, что $W(i) = \bigcup_{\bar{\delta} \in V(i)} H(\bar{\delta})$.

Определим отображение $\nu\colon E_3^k \to \mathbb{N}$. Пусть $\bar{\delta} \in E_3^k$. Если $\bar{\delta} \notin V$, то $\nu(\bar{\delta}) = 1$, а если $\bar{\delta} \in V$, то $\nu(\bar{\delta}) = \min\{j \mid j \in D, \bar{\delta} \in V(j)\}$.

Покажем, что $\psi(a) = \nu(f_1(a), \dots, f_k(a))$ для любого $a \in B$. Пусть $\bar{\delta} = \langle f_1(a), \dots, f_k(a) \rangle$ и $\psi(a) = i$. Тогда $a \in W(i)$. Поэтому существует набор $\bar{\sigma} \in V(i)$ такой, что $a \in H(\bar{\sigma})$. Очевидно, что $\bar{\sigma} = \bar{\delta}$. Поэтому $\bar{\delta} \in V(i)$. Пусть $j \in D$, $j \neq i$, и $\bar{\delta} \in V(j)$. Тогда $\psi(a) = j$, что невозможно. Следовательно, $\{j \mid j \in D, \bar{\delta} \in V(j)\} = \{i\}$ и $\nu(\bar{\delta}) = i$. Таким образом, $\{f_1, \dots, f_k\}$ является разделяющим множеством задачи $\langle B, \psi \rangle$, а набор $\langle B, \nu, f_1, \dots, f_k \}$ — ее представлением с проверками из S. Предложение 2.1 доказано.

Ниже рассматриваются шесть классов задач с квазилинейными проверками. Для произвольной задачи из каждого класса на основе предложения 2.1 строится разделяющее множество. Представление задачи не приводится. Однако его можно построить, применяя способ, используемый при доказательстве предложения 2.1.

Всюду в этом параграфе через S обозначена произвольная система квазилинейных проверок $S(A, K, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ и через L — соответствующее системе S множество функций $L(A, K, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$.

2.2. Определение значений. Пусть $f_1, \dots, f_k \in S$, $t \in \mathbb{R}^+$ и $r(f_j) \leqslant t$ для любого j, $1 \leqslant j \leqslant k$.

Задача 2.1 (об определении значений $f_1, \dots, f_k$ на элементе множества A). *По произвольному $a \in A$ требуется определить номер набора $\langle f_1(a), \dots, f_k(a) \rangle$.*

Для этой задачи положим $D = \{1, \dots, 3^k\}$. Пусть $i \in D$ и $\langle \delta_1, \dots, \delta_k \rangle \in E_3^k$ — набор с номером i. Видно, что множество $W(i)$ совпадает с множеством решений на A системы уравнений $\{f_1(x) = \delta_1, \dots, f_k(x) = \delta_k\}$.

Используя предложение 2.1, получаем, что $\{f_1, \dots, f_k\}$ является разделяющим множеством рассматриваемой задачи, а сама задача — $\langle n, k, t\rangle$-задачей с проверками из S.

Пример 2.1 (распознавание пороговой функции, зависящей от n аргументов). По произвольному набору $\langle a_1, \dots, a_{n+1}\rangle \in \mathbb{R}^{n+1}$ для каждого набора $\langle \delta_1, \dots, \delta_n\rangle \in \{0,1\}^n$ требуется определить значение $s(\sum_{i=1}^n \delta_i a_i - a_{n+1})$. Множество $\{s(\sum_{i=1}^n \delta_i x_i - x_{n+1}) \mid \langle \delta_1, \dots, \delta_n\rangle \in \{0,1\}^n\}$ является разделяющим множеством этой задачи, а сама задача — $\langle n+1, 2^n, 0\rangle$-задачей с проверками из $S_{n+1}(\mathbb{Z})$.

2.3. Проверка выполнения условий. Пусть имеются m систем уравнений $C_1, \dots, C_m$ таких, что $C_j = \{f_{j1}(x) = \delta_{j1}, \dots, f_{jR_j}(x) = \delta_{jP_j}\}$ при любом j, $1 \leqslant j \leqslant m$, и $f_{ji} \in S$, $\delta_{ji} \in E_3$ при любом i, $1 \leqslant i \leqslant p_j$.

Задача 2.2 (о совместности систем уравнений $C_1, \dots, C_m$ на элементе множества A). *По произвольному элементу $a \in A$ установить, является ли a решением хотя бы одной из систем $C_1, \dots, C_m$. (Если да, то ответ задачи равен 1, если нет, то 2.)*

Для этой задачи $D = \{1,2\}$. Нетрудно заметить, что множество $W(1)$ совпадает с объединением множеств решений на A систем $C_1, \dots, C_m$, а множество $W(2)$ — с объединением множеств решений на A всевозможных систем вида $\{f_{1i_1}(x) = \sigma_1, \dots, f_{mi_m}(x) = \sigma_m\}$, где $1 \leqslant i_j \leqslant p_j$, $\sigma_j \in E_3$ и $\sigma_j \neq \delta_{ji_j}$ при любом j, $1 \leqslant j \leqslant m$. Используя предложение 2.1, получаем, что $F = \{f_{11}, \dots, f_{1p_1}, \dots, f_{m1}, \dots, f_{mp_m}\}$ является разделяющим множеством рассматриваемой задачи, а сама задача — $\langle n, |F|, t\rangle$-задачей с проверками из S, где $t = \max\{r(f) \mid f \in F\}$.

Пример 2.2 (задача «0-1-целочисленное программирование» размерности $(n+1)m$ в формулировке из [6]). По $a_{ij} \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n+1$, требуется установить, существует ли набор $\langle \delta_1, \dots, \delta_n\rangle \in \{0,1\}^n$ такой, что $\sum_{j=1}^n a_{ij}\delta_j = a_{in+1}$ при любом i, $1 \leqslant i \leqslant m$. Эта задача является задачей о совместности систем $\{s(\sum_{j=1}^n x_{ij}\delta_j - x_{in+1}) \mid 1 \leqslant i \leqslant m\}$, где $\langle \delta_1, \dots, \delta_n\rangle \in \{0,1\}^n$, на элементе множества $\mathbb{Z}^{(n+1)m}$. Поэтому множество

$$\left\{s\Bigl(\sum_{j=1}^n x_{ij}\delta_j - x_{in+1}\Bigr) \,\Big|\, 1 \leqslant i \leqslant m, \langle \delta_1, \dots, \delta_n\rangle \in \{0,1\}^n\right\}$$

является разделяющим множеством рассматриваемой задачи, а сама задача — $\langle (n+1)m, m2^n, 0\rangle$-задачей с проверками из множества $S(\mathbb{Z}^{(n+1)m}, \mathbb{Z}, x_{11}, \dots, x_{mn+1})$.

Пример 2.3 (задача о системе полиномиальных неравенств). Пусть $P(n,d)$ — множество полиномов с целочисленными коэффициентами степени не выше d, зависящих от переменных $x_1, \dots, x_n$, и $g_1, \dots, g_k \in P(n,d)$. По произвольному $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ требуется определить, будет ли $\bar{a}$ решением системы неравенств $\{g_1(\bar{x}) \geqslant 0, \dots, g_k(\bar{x}) \geqslant 0\}$. Эта задача является задачей о совместности систем $\{s(g_1(\bar{x})) = \delta_1, \dots, s(g_k(\bar{x})) = \delta_k\}$, где $\langle \delta_1, \dots, \delta_k\rangle \in \{1,2\}^k$, на элементе из $\mathbb{R}^n$. Поэтому множество

$\{s(g_1(\bar{x})),\dots,s(g_k(\bar{x}))\}$ является разделяющим множеством рассматриваемой задачи, а сама задача — $\langle\alpha(n,d),k,t\rangle$-задачей с проверками из множества $S(\mathbb{R}^n,\mathbb{Z},x_1,\dots,x_n^d)$, где $\alpha(n,d)=\sum_{i=1}^{d}\binom{n+i-1}{i}$ и $t=\max\{r(g_i)\mid i=1,\dots,k\}$.

2.4. Упорядочивание. Пусть $g_1,\dots,g_k$ — попарно различные функции из множества L такие, что $r(g_j)\leqslant t$ при любом j, $1\leqslant j\leqslant k$.

Задача 2.3 (об упорядочивании значений функций $g_1,\dots,g_k$ на элементе множества A). *По произвольному $a\in A$ найти минимальный номер подстановки k-й степени π такой, что* $g_{\pi(1)}(a)\leqslant g_{\pi(2)}(a)\leqslant\dots\leqslant g_{\pi(k)}$.

Для этой задачи положим $D=\{1,\dots,k!\}$. Пусть $i\in D$. Обозначим через π_i подстановку k-й степени с номером i. Нетрудно заметить, что множество $W(i)$ является объединением множеств решений на A всевозможных систем уравнений вида

$$\{s(g_{\pi_i(n)}(x)-g_{\pi_i(n+1)}(x))=\delta_n\mid 1\leqslant n\leqslant k-1\}$$
$$\cup\,\{s(g_{\pi_j(n_j)}(x)-g_{\pi_j(n_j+1)}(x))=2\mid 1\leqslant j\leqslant i-1\},$$

где $\langle\delta_1,\dots,\delta_{k-1}\rangle\in\{0,1\}^{k-1}$ и $1\leqslant n_j\leqslant k-1$ при любом j, $1\leqslant j\leqslant i-1$. Используя предложение 2.1, получаем, что множество $\{s(g_i(x)-g_j(x))\mid 1\leqslant i,\ j\leqslant k;\ i\neq j\}$ является разделяющим множеством рассматриваемой задачи, а сама задача — $\langle n,k^2,t+1\rangle$-задачей с проверками из S.

Пример 2.4 (задача упорядочивания значений функций множества

$$\Big\{s\Big(\sum_{j=1}^{n}\delta_j\sin(jx)\Big)\,\Big|\,\langle\delta_1,\dots,\delta_n\rangle\in E_{q+1}^n\Big\}$$

на элементе множества $\mathbb{R}$). Множество

$$\Big\{s\Big(\sum_{j=1}^{n}\delta_j\sin(jx)\Big)\,\Big|\,\langle\delta_1,\dots,\delta_n\rangle\in\{-q,\dots,-1,0,1,\dots,q\}^n,\sum_{j=1}^{n}|\delta_j|>0\Big\}$$

является разделяющим множеством рассматриваемой задачи, а сама задача — $\langle n,(2q+1)^n,\log_2 q\rangle$-задачей с проверками из множества $S(\mathbb{R},\mathbb{Z},\sin x,\sin 2x,\dots,\sin nx)$.

2.5. Безусловная оптимизация. Пусть $g_1,\dots,g_k$ — попарно различные функции из L такие, что $r(g_j)\leqslant t$ при любом j, $1\leqslant j\leqslant k$.

Задача 2.4 (о безусловной оптимизации значений функций $g_1,\dots,g_k$ на элементе множества A). *По произвольному $a\in A$ определить минимальное число $i\in\{1,\dots,k\}$ такое, что $g_i(a)=\min\{g_j(a)\mid 1\leqslant j\leqslant k\}$.*

Для этой задачи положим $D=\{1,\dots,k\}$. Пусть $i\in D$. Нетрудно заметить, что множество $W(i)$ есть объединение множеств решений на A всевозможных систем уравнений вида $\{s(g_i(x)-g_j(x))=\delta_j\mid 1\leqslant j\leqslant k,\ i\neq j\}$, где $\delta_j=0$ при $j\in\{1,\dots,i-1\}$ и $\delta_j\in\{0,1\}$ при $j\in\{i+1,\dots,k\}$. Используя предложение 2.1, получаем, что множество $\{s(g_i(x)-g_j(x))\mid 1\leqslant i,\ j\leqslant k,\ i\neq j\}$ является разделяющим множеством рассматриваемой задачи, а сама задача — $\langle n,k^2,t+1\rangle$-задачей с проверками из S.

Пример 2.5 (задача коммивояжера с n городами). Пусть G_n — полный граф с $n \geqslant 3$ вершинами. Полагаем, что ребра графа G_n перенумерованы числами от 1 до $n(n-1)/2$, а гамильтоновы циклы — числами от 1 до $(n-1)!/2$. Пусть для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant n(n-1)/2$, ребру графа G_n с номером i сопоставлено число $a_i \in \mathbb{R}$ — длина ребра. Требуется найти минимальный номер гамильтонова цикла в G_n минимальной длины. Для каждого j, $1 \leqslant j \leqslant (n-1)!/2$, гамильтонову циклу с номером j сопоставим функцию

$$g_j(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n(n-1)/2} \delta_{ji} x_i,$$

где $\delta_{ji} = 1$, если i-е ребро входит в j-й цикл, и $\delta_{ji} = 0$ в противном случае. Очевидно, что рассматриваемая задача является задачей безусловной оптимизации значений функций $g_1, \dots, g_{(n-1)!/2}$ на элементе множества $\mathbb{R}^{n(n-1)/2}$. Поэтому множество

$$\{s(g_i(x) - g_j(x)) \mid i,\ j = 1, \dots, (n-1)!/2,\ i \neq j\}$$

является разделяющим множеством задачи коммивояжера с n городами, а сама задача — $\langle n(n-1)/2, ((n-1)!/2)^2, 0\rangle$-задачей с проверками из $S_{n(n-1)/2}(\mathbb{Z})$.

Пример 2.6 (квадратичная задача о назначениях размерности n). По $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant i,\ j \leqslant n$, требуется найти минимальный номер подстановки π степени n, минимизирующей величину $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{\pi(i)\pi(j)}$. Очевидно, эта задача является задачей безусловной оптимизации значений функций из множества $\{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} y_{\pi(i)\pi(j)} \mid \pi \in \Pi_n\}$ на элементе множества $\mathbb{R}^{2n^2}$. Поэтому множество

$$\Big\{ s\Big(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} y_{\pi(i)\pi(j)} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} y_{\tau(i)\tau(j)} \Big) \Big| \pi, \tau \in \Pi_n, \pi \neq \tau \Big\}$$

является разделяющим множеством этой задачи, а сама задача — $\langle n^4, (n!-1)n!/2, 0\rangle$-задачей с проверками из $S(\mathbb{R}^{2n^2}, \mathbb{Z}, x_{11}y_{11}, \dots, x_{nn}y_{nn})$.

2.6 Безусловная оптимизация абсолютных значений. Пусть $g_1, \dots, g_k \in L$, $r(g_j) \leqslant t$ при любом j, $1 \leqslant j \leqslant k$, и если $i \neq j$, то $g_i \neq \pm g_j$.

Задача 2.5 (о безусловной оптимизации абсолютных значений функций $g_1, \dots, g_k$ на элементе множества A). *По произвольному $a \in A$ определить минимальное число $i \in \{1, \dots, k\}$ такое, что*

$$|g_i(a)| = \min\{|g_j(a)| \mid 1 \leqslant j \leqslant k\}.$$

Для этой задачи положим $D = \{1, \dots, k\}$. Пусть $i \in D$. Нетрудно заметить, что $|g_i(a)| < |g_j(a)|$ тогда и только тогда, когда $(g_i(a) + g_j(a))(g_i(a) - g_j(a)) < 0$, и $|g_i(a)| = |g_j(a)|$ тогда и только тогда, когда $(g_i(a)+g_j(a))(g_i(a)-g_j(a)) = 0$. Следовательно, множество $W(i)$ совпадает с объединением множеств решений на A всевозможных систем уравнений вида

$$\{s(g_i(x) + g_j(x)) = \delta_{j1},\ s(g_i(x) - g_j(x)) = \delta_{j2} \mid 1 \leqslant j \leqslant k,\ i \neq j\},$$

где

$$\langle \delta_{j1}, \delta_{j2}\rangle \in \begin{cases} E_3^2 \setminus \{\langle 0,0\rangle, \langle 2,2\rangle\} & \text{при } j \in \{i+1,\dots,k\}, \\ \{\langle 0,2\rangle, \langle 2,0\rangle\} & \text{при } j \in \{1,\dots,i-1\}. \end{cases}$$

В силу предложения 2.1 множество $\{s(g_i(x)+g_j(x)),\ s(g_i(x)-g_j(x)) \mid 1 \leqslant i,\ j \leqslant k,\ i \neq j\}$ является разделяющим множеством рассматриваемой задачи, а сама задача — $\langle n, 2k^2, t+1\rangle$-задачей с проверками из S.

Пример 2.7 (задача разбиения n чисел). По произвольному набору $\langle a_1,\dots,a_n\rangle \in \mathbb{R}^n$ определить минимальный номер набора $\langle \delta_1,\dots,\delta_n\rangle \in \{-1,1\}^n$ такой, что величина $|\sum_{i=1}^n \delta_i a_i|$ принимает минимальное значение. Очевидно, что эта задача является задачей безусловной оптимизации абсолютных значений функций множества $\{\sum_{i=1}^n \delta_i x_i \mid \langle \delta_1,\dots,\delta_n\rangle \in \{-1,1\}^n\}$ на элементе множества $\mathbb{R}^n$. Поэтому множество

$$\Big\{s\Big(\sum_{i=1}^n \delta_i x_i\Big) \,\Big|\, \langle \delta_1,\dots,\delta_n\rangle \in \{-2,0,2\}^n,\ \sum_{i=1}^n |\delta_i| > 0\Big\},$$

а следовательно, и множество

$$\Big\{s\Big(\sum_{i=1}^n \delta_i x_i\Big) \,\Big|\, \langle \delta_1,\dots,\delta_n\rangle \in \{-1,0,1\}^n,\ \sum_{i=1}^n |\delta_i| > 0\Big\}$$

являются разделяющими множествами рассматриваемой задачи, а сама задача — $\langle n, 3^n, 0\rangle$-задачей с проверками из $S_n(\mathbb{Z})$.

2.7. Условная оптимизация. Пусть $G \subseteq \mathbb{R}$ и $g_1,\dots,g_k$ — попарно различные функции из L такие, что $r(g_j) \leqslant t$ при любом j, $1 \leqslant j \leqslant k$.

Задача 2.6 (об условной оптимизации значений функций $g_1,\dots,g_k$ на элементе множества A с m ограничениями из $A \times G$). *По*

$$\langle a_0, a_1,\dots,a_m, b_1,\dots,b_m\rangle \in A^{m+1} \times G^m$$

найти минимальное $i \in \{1,\dots,k\}$ такое, что

$$g_i(a_1) \leqslant b_1,\dots,g_i(a_m) \leqslant b_m,$$

$$g_i(a_0) = \max\{g_j(a_0) \mid g_j(a_1) \leqslant b_1,\dots,g_j(a_m) \leqslant b_m,\ j \in \{1,\dots,k\}\},$$

либо установить, что такого i не существует. (В последнем случае ответ задачи — число $k+1$.)

Для этой задачи положим $D = \{1,\dots,k+1\}$. Будем использовать обозначения $x_0, x_1,\dots,x_m$ для переменных, принимающих значения из A, и $y_1,\dots,y_m$ — для переменных, принимающих значения из G. Нетрудно заметить, что множество $W(k+1)$ совпадает с объединением множеств решений на $A^{m+1} \times G^m$ всевозможных систем уравнений вида

$$\{s(g_1(x_{i_1}) - y_{i_1}) = 2,\dots,s(g_k(x_{i_k}) - y_{i_k}) = 2\},$$

где $1 \leqslant i_j \leqslant m$ при любом j, $1 \leqslant j \leqslant k$. Пусть $i \in \{1,\dots,k\}$. Тогда множество $W(i)$ совпадает с объединением множеств решений на $A^{m+1} \times G^m$ всевозможных систем уравнений вида

$$\begin{aligned} &\{s(g_i(x_0) - g_j(x_0)) = \delta_j \mid j \in C \setminus \{i\}\} \\ &\qquad \cup \Big[\bigcup_{j \in C} \{s(g_j(x_p) - y_p) = \delta_{jp} \mid 1 \leqslant p \leqslant m\}\Big] \\ &\qquad \cup \{s(g_j(x_{i_j}) - y_{i_j}) = 2 \mid j \in \{1,\dots,k\} \setminus C\}, \end{aligned}$$

где $C \subseteq \{1,\dots,k\}$, $C \neq 0$, $i \in C$; для $j \in C\backslash\{i\}$ если $j < i$, то $\delta_j = 2$, а если $j > i$, то $\delta_j \in \{1,2\}$; $\delta_{jp} \in \{0,1\}$ при $j \in C$ и $p \in \{1,\dots,m\}$; $1 \leqslant i_j \leqslant m$ при $j \in \{1,\dots,k\}\backslash C$. Используя предложение 2.1, получаем, что множество

$$\{s(g_i(x_0) - g_j(x_0)) \mid 1 \leqslant i < j \leqslant k\} \cup \left[\bigcup_{j=1}^{m} \{s(g_i(x_j) - y_j) \mid 1 \leqslant i \leqslant k\}\right]$$

является разделяющим множеством рассматриваемой задачи. Следовательно, эта задача есть $\langle m + n(m+1),\ mk + (k-1)k/2, t+1\rangle$-задача с проверками из

$$S(A^{m+1} \times G^m, K, \varphi_1(x_0), \dots, \varphi_n(x_0),$$
$$\varphi_1(x_1), \dots, \varphi_n(x_1), \dots, \varphi_1(x_m), \dots, \varphi_n(x_m), y_1, \dots, y_m).$$

Пример 2.8 (задача о 0–1-рюкзаке с n предметами). По произвольному набору $\langle a_1, \dots, a_{2n+1}\rangle \in \mathbf{Z}^{2n+1}$ требуется определить минимальный номер набора $\langle \delta_1, \dots, \delta_n\rangle \in \{0,1\}^n$, максимизирующего величину $\sum_{i=1}^{n} \delta_i a_i$ при условии $\sum_{i=1}^{n} \delta_i a_{n+i} \leqslant a_{2n+1}$. Эта задача является задачей условной оптимизации значений функций множества $\{\sum_{i=1}^{n} \delta_i x_i \mid \langle \delta_1, \dots, \delta_n\rangle \in \{0,1\}^n\}$ на элементе множества $\mathbf{Z}^{n+1}$ с одним ограничением из $\mathbf{Z}^n \times \mathbf{Z}$. Множество

$$\left\{s\Bigl(\sum_{i=1}^{n} \delta_i x_i\Bigr) \,\middle|\, \langle \delta_1, \dots, \delta_n\rangle \in \{-1,0,1\}^n, \sum_{i=1}^{n} |\delta_i| > 0\right\}$$
$$\cup \left\{s\Bigl(\sum_{i=1}^{n} \delta_i x_{n+i} - x_{2n+1}\Bigr) \,\middle|\, \langle \delta_1, \dots, \delta_n\rangle \in \{0,1\}^n\right\}$$

является разделяющим множеством рассматриваемой задачи, а сама задача — $\langle 2n+1, 3^n+2^n, 0\rangle$-задачей с проверками из $S(\mathbf{Z}^{2n+1}, \mathbf{Z}, x_1, \dots, x_{2n+1})$.

2.8. Следствия теоремы 1.1. Из теоремы 1.1 получаем следующие утверждения.

Следствие 2.1. *Существует дерево решений Γ_1 с проверками из множества $S_{n+1}(\mathbf{Z})$, которое решает задачу распознавания пороговой функции, зависящей от n переменных, и имеет параметры*

$$h(\Gamma_1) \leqslant 4(n+3)^4/\log_2(n+3),$$
$$r(\Gamma_1) \leqslant 2(n+2)^2(\log_2(n+2)+1).$$

Следствие 2.2. *Существует дерево решений Γ_2 с проверками из множества $S(\mathbf{Z}^{(n+1)m}, \mathbf{Z}, x_{11}, \dots, x_{mn+1})$, которое решает задачу «0–1-целочисленное программирование» размерности $(n+1)m$ в формулировке из [6] и имеет параметры*

$$h(\Gamma_2) \leqslant 4(nm+m+2)^4/\log_2(nm+m+2),$$
$$r(\Gamma_2) \leqslant 2(nm+m+1)^2(\log_2(nm+m+1)+1).$$

Следствие 2.3. *Существует дерево решений Γ_3 с проверками из множества $S_{n(n-1)/2}(\mathbf{Z})$, которое решает задачу коммивояжера с $n \geqslant 4$ городами и имеет параметры*

$$h(\Gamma_3) \leqslant n^8/\log_2 n,$$
$$r(\Gamma_3) \leqslant n^5.$$

Следствие 2.4. *Существует дерево решений Γ_4 с проверками из множества $S(\mathbf{R}^{2n^2}\mathbf{Z}, x_{11}y_{11}, \dots, x_{nn}y_{nn})$, которое решает квадратичную задачу о назначениях размерности $n \geqslant 4$ и имеет параметры*

$$h(\Gamma_4) \leqslant n(n^4+2)^3,$$
$$r(\Gamma_4) \leqslant 2(n^4+2)^2(\log_2(n^4+1)+1).$$

Следствие 2.5. *Существует дерево решений Γ_5 с проверками из множества $S_n(\mathbf{Z})$, которое решает задачу разбиения n чисел и имеет параметры*

$$h(\Gamma_5) \leqslant 8(n+2)^4/\log_2(n+2),$$
$$r(\Gamma_5) \leqslant 2(n+1)^2(\log_2(n+1)+1).$$

Следствие 2.6. *Существует дерево решений Γ_6 с проверками из множества $S(\mathbf{Z}^{2n+1}, \mathbf{Z}, x_1, \dots, x_{2n+1})$, которое решает задачу о 0–1-рюкзаке с n предметами и имеет параметры*

$$h(\Gamma_6) \leqslant 4(2n+3)^4/\log_2(2n+3),$$
$$r(\Gamma_6) \leqslant 8(n+1)^2(\log_2(n+1)+2).$$

§ 3. Тестовый подход к исследованию деревьев решений

3.1. Тестовые таблицы и условные тесты. Обозначим через $H_{3,k}$ множество всевозможных прямоугольных таблиц с k строками, заполненными числами из множества E_3, в каждой из которых столбцы попарно различны и каждому столбцу приписано натуральное число. Пусть $\Lambda \in H_{3,k}$, где Λ — пустая таблица. Положим $H_3 = \bigcup_{k=1}^{\infty} H_{3,k}$. Таблицы из H_3 будем называть *тестовыми*. Обозначим через НС множество всевозможных тестовых таблиц, в каждой из которых всем столбцам приписано одно и то же число. Предполагается, что $\Lambda \in$ НС.

Допустим, что $T \in H_{3,k}$. Для произвольных $i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, k\}$ и $\delta_1, \dots, \delta_m \in E_3$ обозначим через $T\langle i_1, \delta_1\rangle \dots \langle i_m, \delta_m\rangle$ подтаблицу таблицы T, состоящую из всех столбцов таблицы T, таких, что все элементы i_k-ой строки этой подтаблицы равны δ_k $(k = 1, \dots, m)$.

- Будем называть $\langle 3, k\rangle$-*схемой* помеченное конечное ориентированное дерево с корнем, в котором
  - — каждой рабочей вершине приписано некоторое число из множества $\{1, \dots, k\}$;
  - — каждой дуге приписано число из множества E_3, причем дугам, выходящим из одной и той же вершины, приписаны попарно различные числа;

— каждой концевой вершине приписано натуральное число.

Пусть $T \in H_{3,k}$, Γ — $\langle 3,k\rangle$-схема и ξ — полный путь схемы Γ. Таблице T и полному пути ξ сопоставим таблицу $T(\xi)$. Если в пути ξ нет ни одной рабочей вершины, то $T(\xi) = T$. Если же в пути ξ имеются $m > 0$ рабочих вершин, $\xi = v_1, d_1, \dots, v_m, d_m, v_{m+1}$ и для $j = 1, \dots, m$ вершине v_j приписано число i_j, а дуге d_j — число δ_j, то $T(\xi) = T\langle i_1, \delta_1\rangle \dots \langle i_m, \delta_m\rangle$. Как нетрудно заметить, для любого столбца таблицы T существует не более одного полного пути ξ схемы Γ такого, что рассматриваемый столбец содержится в таблице $T(\xi)$.

- *Условным тестом* таблицы $T \in H_{3,k}\backslash\{\Lambda\}$ назовем $\langle 3,k\rangle$-схему Γ, в которой для любого столбца таблицы T существует полный путь ξ, обладающий следующими свойствами:
  — рассматриваемый столбец содержится в таблице $T(\xi)$;
  — концевой вершине пути ξ приписано то же число, что и рассматриваемому столбцу.

Обозначим через $h(\Gamma)$ глубину $\langle 3,k\rangle$-схемы Γ (т. е. максимальную длину полного пути Γ). Если $T \neq \Lambda$, то через $h(T)$ обозначим минимальную глубину условного теста таблицы T и через $N(T)$ — число столбцов в таблице T. Положим $h(\Lambda) = N(\Lambda) = 0$. Для $T \in H_{3,k}\backslash\text{НС}$ обозначим через $M(T)$ минимальное натуральное число m, обладающее следующим свойством: для любого набора $\langle \delta_1, \dots, \delta_k\rangle \in E_3^k$ существуют числа $i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, k\}$ такие, что $T\langle i_1, \delta_{i_1}\rangle \dots \langle i_m, \delta_{i_m}\rangle \in \text{НС}$. Для любой таблицы $T \in \text{НС}$ положим $M(T) = 0$.

Предложение 3.1 [7, с. 144]. *Для любой таблицы T из H_3 справедливо соотношение*

$$h(T) \leqslant \begin{cases} M(T), & \text{если } M(T) \leqslant 1; \\ M(T) + 2\log_2(N(T)/2), & \text{если } 2 \leqslant M(T) \leqslant 3; \\ M(T) + (M(T)\log_2(N(T)/2))/\log_2 M(T), & \text{если } M(T) \geqslant 4. \end{cases}$$

3.2. Тестовый подход к исследованию деревьев решений. Допустим, что $S = S(A, K, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ — система квазилинейных проверок, $\langle B, \psi\rangle$ — задача с проверками из S, $\langle B, \nu, f_1, \dots, f_k\rangle$ — представление задачи $\langle B, \psi\rangle$ с проверками из S. Операцию транспонирования обозначим символом «$'$».

Пусть $T(B, \nu, f_1, \dots, f_k)$ — таблица из $H_{3,k}$, обладающая следующими свойствами:

- столбец $\langle \delta_1, \dots, \delta_k\rangle'$ входит в таблицу тогда и только тогда, когда на множестве B совместна система уравнений $\{f_1(x) = \delta_1, \dots, f_k(x) = \delta_k\}$;
- столбцу $\langle \delta_1, \dots, \delta_k\rangle'$ таблицы приписано число $\nu(\delta_1, \dots, \delta_k)$.

Допустим, что Γ — дерево решений с проверками из S такое, что $F(\Gamma) \subseteq \{f_1, \dots, f_k\}$.

- *Схемой дерева решений* Γ назовем $\langle 3,k\rangle$-схему, полученную из дерева решений Γ заменой функций $f_1, \dots, f_k$, приписанных рабочим вершинам Γ, числами $1, \dots, k$ соответственно.

Тестовый подход к исследованию деревьев решений заключается в поиске подходящего представления задачи, построении соответствующей тестовой таблицы и исследовании ее условных тестов.

Использование тестового подхода при анализе деревьев решений основано на следующем утверждении.

Предложение 3.2. *Пусть $S = S(A, K, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ — система квазилинейных проверок, $\langle B, \nu\rangle$ — задача с проверками из S, $\langle B, \nu, f_1, \dots, f_k\rangle$ — ее представление с проверками из S и Γ — дерево решений с проверками из S такое, что $F(\Gamma) \subseteq \{f_1, \dots, f_k\}$. Тогда Γ решает задачу $\langle B, \psi\rangle$ в том и только том случае, если схема дерева решений Γ является условным тестом таблицы $T(B, \nu, f_1, \dots, f_k)$.*

Доказательство. Допустим, что G — схема дерева решений Γ и $T = T(B, \nu, f_1, \dots, f_k)$. Если $a \in B$, то положим $\bar{\delta}(a)' = \langle f_1(a), \dots, f_k(a)\rangle'$. Пусть ξ — полный путь дерева решений Γ. Нетрудно заметить, что $a \in A(\xi)$ тогда и только тогда, когда столбец $\bar{\delta}(a)'$ содержится в таблице $T(\tau)$, где τ — полный путь схемы G, соответствующий полному пути ξ дерева решений Γ.

Пусть схема G является условным тестом таблицы T и $a \in B$. Тогда в схеме G существует полный путь τ, удовлетворяющий следующим условиям:

- ◇ столбец $\bar{\delta}(a)'$ содержится в таблице $T(\tau)$;
- ◇ концевой вершине пути τ приписано число $\nu(\bar{\delta}(a)')$.

Из первого условия следует, что $a \in A(\xi)$, где ξ — полный путь дерева решений Γ, соответствующий полному пути τ в схеме G. Используя второе условие, получаем $\Phi_\Gamma(a) = \nu(\bar{\delta}(a)') = \nu(f_1(a), \dots, f_k(a))$. Поэтому дерево решений Γ решает задачу $\langle B, \psi\rangle$.

Пусть схема G не является условным тестом таблицы T. Тогда существует столбец $\bar{\delta}' = \langle \delta_1, \dots, \delta_k\rangle'$ таблицы T, обладающий одним из следующих свойств:

- о в схеме G не существует полного пути τ такого, что столбец $\bar{\delta}'$ содержится в таблице $T(\tau)$;
- о в схеме G существует полный путь τ такой, что столбец $\bar{\delta}'$ содержится в таблице $T(\tau)$, но концевой вершине этого пути приписано число, отличное от числа $\nu(\delta_1, \dots, \delta_k)$.

Ясно, что имеется элемент $a \in B$, для которого $\bar{\delta}' = \bar{\delta}(a)'$. Если столбец $\bar{\delta}'$ обладает первым свойством, то $a \notin A(\xi)$ для любого полного пути ξ дерева решений Γ. Поэтому множество B не является подмножеством множества $A(\Gamma)$. Следовательно, дерево решений Γ не решает задачу $\langle B, \psi\rangle$. Пусть столбец $\bar{\delta}'$ обладает вторым свойством. Тогда $a \in A(\xi)$, где ξ — полный путь дерева решений Γ, соответствующий полному пути τ в схеме G. Поэтому $\Phi_\Gamma(a) \neq \nu(\delta_1, \dots, \delta_k) = \nu(f_1(a), \dots, f_k(a))$. Следовательно, дерево решений Γ не решает задачу $\langle B, \psi\rangle$. Предложение 3.2 доказано.

§ 4. Вспомогательные леммы

Положим

$$L_n(\mathbb{R}) = L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, x_1, \dots, x_n),$$
$$S_n(\mathbb{R}) = S(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, x_1, \dots, x_n),$$
$$f_1, \dots, f_k \in L_n(\mathbb{R}),$$
$$f_j(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i + a_{jn+1} = q_j(\bar{x}) + a_{jn+1}, \quad 1 \leqslant j \leqslant k.$$

- Максимальное число линейно независимых функций (над $\mathbb{R}$) в множестве $\{q_1, \dots, q_k\}$ называется *рангом* каждой из следующих систем:

$$\{f_1(\bar{x}) = 0, \dots, f_k(\bar{x}) = 0\}, \tag{4.1}$$
$$\{f_1(\bar{x}) \geqslant 0, \dots, f_k(\bar{x}) \geqslant 0\}, \tag{4.2}$$
$$\{f_1(\bar{x}) > 0, \dots, f_k(\bar{x}) > 0\}. \tag{4.3}$$

Лемма 4.1 [8, с. 83]. *Пусть U_1 — множество решений совместной системы (4.1) ранга t, U_2 — множество решений системы*

$$\{q_1(\bar{x}) = 0, \dots, q_k(\bar{x}) = 0\}, \tag{4.4}$$

отвечающей системе (4.1), $\bar{y}_0 \in U_1$. Тогда $U_1 = \{\bar{y}_0 + \bar{y} \mid \bar{y} \in U_2\}$ и максимальное число линейно независимых элементов в U_2 равно $n - t$.

Лемма 4.2 [8, с. 57]. *Пусть $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n+1$, и элементы $\langle a_{11}, \dots, a_{1n}\rangle, \dots, \langle a_{n1}, \dots, a_{nn}\rangle$ линейно независимы. Тогда*

(а) *система*

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = a_{1n+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = a_{nn+1} \end{array}$$

имеет единственное решение $\langle d_1/d_0, \dots, d_n/d_0\rangle$, где $d_0 = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$, $d_0 \neq 0$ и d_j — определитель n-го порядка, полученный из определителя d_0 заменой j-го столбца столбцом $\langle a_{1n+1}, \dots, a_{nn+1}\rangle$, $1 \leqslant j \leqslant n$;

(б) *если M_j — определитель $(n-1)$-го порядка, полученный из определителя d_0 вычеркиванием последней строки и j-го столбца, $1 \leqslant j \leqslant n$, то элемент $\langle M_1, -M_2, M_3, -M_4, \dots, (-1)^{n-1}M_n\rangle$ является решением системы*

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-11}x_1 + \ldots + a_{n-1n}x_n = 0; \end{array}$$

любое другое решение этой системы пропорционально ему; кроме того, $\sum_{i=1}^{n} |M_i| > 0$.

Хорошо известны следующие утверждения, сформулированные в леммах 4.3–4.5.

Лемма 4.3. *Совместная система (4.1) ранга t содержит подсистему ранга t, которая эквивалентна системе (4.1) и состоит из t уравнений. Несовместная система (4.1) ранга t содержит несовместную подсистему, состоящую из $t+1$ уравнений.*

- *Плоскостью* пространства $\mathbb{R}^n$ называется множество решений на $\mathbb{R}^n$ произвольной совместной системы уравнений вида (4.1), ($f_1, \dots, f_k \in L_n(\mathbb{R})$). Если t — ранг этой системы, $t \leqslant n$, то число $n - t$ называется *размерностью* плоскости. Множество $U \subseteq \mathbb{R}^n$ назовем *t-мерным*, если существует t-мерная плоскость пространства $\mathbb{R}^n$, содержащая U, и не существует $(t-1)$-мерной плоскости, содержащей U, в случае, когда $t \geqslant 1$.

Лемма 4.4. *Конечное множество $\{\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_m\}$ элементов пространства $\mathbb{R}^n$ имеет размерность t тогда и только тогда, когда максимальное число линейно независимых элементов в множестве $\{\bar{b}_1 - \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_1 - \bar{b}_m\}$ равно t.*

Лемма 4.5. *Пусть множество $\{\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n\}$ элементов из $\mathbb{R}^n$ является $(n-1)$-мерным и две произвольные $(n-1)$-мерные плоскости пространства $\mathbb{R}^n$, каждая из которых содержит элементы $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n$, задаются уравнениями $a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_{n+1} = 0$, $c_1x_1 + \dots + c_nx_n + c_{n+1} = 0$. Тогда существует $p \in \mathbb{R}$ такое, что $\langle a_1, \dots, a_{n+1}\rangle = p\langle c_1, \dots, c_{n+1}\rangle$.*

Лемма 4.6 [9, с. 92]. *Если множество решений совместной системы (4.2) ненулевого ранга ограничено, то ее ранг равен n.*

- *Конечно-порожденным центроидом в пространстве* $\mathbb{R}^n$ называется произвольное множество вида

$$\left\{ \sum_{i=1}^{k} p_i\bar{a}_i \,\middle|\, p_i \in \mathbb{R}, p_i \geqslant 0, i = 1, \dots, k, \sum_{i=1}^{k} p_i = 1 \right\},$$

где $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k \in \mathbb{R}^n$ и $k < \infty$. Говорят, что этот центроид *порожден множеством элементов* $\{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k\}$, которые являются его *образующими элементами.*

- Элемент $\bar{a}_j$, $j \in \{1, \dots, k\}$, назовем *вершиной* рассматриваемого центроида, если центроид, порожденный множеством $\{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k\} \setminus \{\bar{a}_j\}$, не содержит элемент $\bar{a}_j$.
- Конечное множество $V \subset \mathbb{R}^n$, совпадающее с множеством вершин порожденного им центроида, называется *центроидально-независимым.*

Лемма 4.7 [9, с. 197]. *Конечно-порожденный центроид U пространства $\mathbb{R}^n$ имеет единственное центроидально независимое множество образующих элементов.*

- Решение системы (4.2) ранга $t > 0$ называется *узловым*, если неравенства системы (4.2), обращаемые этим решением в равенства, образуют систему ранга t.

Лемма 4.8 [9, с. 194, 196]. *Если множество U решений совместной системы (4.2) ограничено, то множество ее узловых решений конечно, центроидально-независимо и центроид, порожденный этим множеством, совпадает с U.*

- *Полупространством* пространства $\mathbb{R}^n$ называется множество решений произвольного неравенства вида $f(\bar{x}) \geqslant 0$, где f — функция из $L_n(\mathbb{R})$, не являющаяся постоянной. Плоскость, определяемая уравнением $f(\bar{x}) = 0$, называется *граничной* плоскостью этого полупространства.

Пусть U — конечно-порожденный n-мерный центроид в $\mathbb{R}^n$.

- *Крайней опорой* центроида U называется произвольное содержащее U полупространство пространства $\mathbb{R}^n$, граничная плоскость которого содержит не менее n вершин центроида U.

Лемма 4.9 [9, с. 197]. *Конечно-порожденный n-мерный центроид U пространства $\mathbb{R}^n$ совпадает с пересечением его крайних опор.*

Лемма 4.10 [9, с. 124]. *Пусть $f \in L_n(\mathbb{R})$ и неравенство $f(\bar{x}) \geqslant 0$ является следствием совместной системы (4.2). Тогда существуют неотрицательные числа $p_1, \dots, p_{k+1} \in \mathbb{R}$ такие, что $f(\bar{a}) = \sum_{i=1}^{k} p_i f_i(\bar{a}) + p_{k+1}$ для любого $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$.*

- Неравенство $f_j(\bar{x}) \geqslant 0$, $j \in \{1, \dots, k\}$, из совместной системы (4.2) называется *неустойчивым*, если неравенство $f_j(\bar{x}) \leqslant 0$ является следствием системы (4.2), и *устойчивым* в противном случае.

Лемма 4.11. *Если в системе (4.2) функция f_j не является постоянной при любом $j \in \{1, \dots, k\}$, то множество решений этой системы m-мерно тогда и только тогда, когда система (4.3), отвечающая системе (4.2), совместна.*

Доказательство. Пусть множество U решений системы (4.2) n-мерно. Убедимся, что для любого $j \in \{1, \dots, k\}$ найдется элемент $\bar{a}_j \in U$ такой, что $f_j(\bar{a}_j) > 0$. Действительно, пусть для некоторого $j \in \{1, \dots, k\}$ для любого $\bar{b} \in U$ выполняется равенство $f_j(\bar{b}) = 0$. Тогда поскольку функция f_j не является постоянной на $\mathbb{R}^n$, размерность множества U не превосходит числа $n - 1$, что противоречит предположению. Положим $\bar{a} = (1/k) \sum_{i=1}^{k} \bar{a}_i$. Тогда

$$f_j(\bar{a}) = (1/k) \sum_{i=1}^{k} f_j(\bar{a}_i) \geqslant f_j(\bar{a}_j)/k > 0$$

для любого $j \in \{1, \dots, k\}$. Следовательно, система (4.3), отвечающая системе (4.2), совместна.

Известно (см. [9, с. 311]), что если система (4.2) совместна и для любого $j \in \{1, \dots, k\}$ функция f_j не является постоянной, то множество решений этой системы n-мерно тогда и только тогда, когда в (4.2) нет неустойчивых неравенств. Пусть система (4.3), отвечающая системе (4.2), совместна. Тогда система (4.2) совместна и в ней нет неустойчивых неравенств. Кроме того, по предположению функции f_j, $1 \leqslant j \leqslant k$ не являются постоянными. Поэтому множество решений системы (4.2) n-мерно. Лемма 4.11 доказана.

- Система (4.2) называется *устойчиво совместной*, если совместна соответствующая ей система (4.3).
- Совместная система неравенств называется *несократимой*, если при удалении из нее любого неравенства множество решений системы изменяется.

Лемма 4.12 [9, с. 288]. *Устойчиво совместная система (4.2) несократима тогда и только тогда, когда несократима отвечающая ей система (4.3).*

Лемма 4.13 [9, с. 288]. *Если система (4.3) совместна и несократима, то для любого $j \in \{1, \dots, k\}$ система, полученная из (4.3) заменой неравенства $f_j(\bar{x}) > 0$ уравнением $f_j(\bar{x}) = 0$, совместна.*

Лемма 4.14 [9, с. 130]. *Несовместная система (4.3) ранга t содержит несовместную подсистему ранга t, состоящую из $t+1$ неравенств.*

Лемма 4.15. *Пусть P — множество решений совместной системы (4.1) ранга t. Тогда существует взаимно однозначное отображение ρ множества P на множество $\mathbb{R}^{n-t}$, обладающее следующими свойствами:*

(а) *для любой функции $f \in L_n(\mathbb{R})$ существует функция $f^* \in L_{n-t}(\mathbb{R})$ такая, что $f(\bar a) = f^*(\rho(\bar a))$ для любого $\bar a \in P$;*

(б) *если $\bar a_0, \bar a_1, \dots, \bar a_k \in P$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ — неотрицательные числа из $\mathbb{R}$ такие, что $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$, то $\bar a_0 = \sum_{i=1}^k \lambda_i \bar a_i$ тогда и только тогда, когда $\rho(\bar a_0) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \rho(\bar a_i)$;*

(в) *конечное множество $\{\bar a_1, \dots, \bar a_k\} \subset P$ является m-мерным в $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда множество $\{\rho(\bar a_1), \dots, \rho(\bar a_k)\}$ является m-мерным в $\mathbb{R}^{n-t}$.*

Доказательство. Пусть $t = n$. В силу леммы 4.1 система (4.1) имеет единственное решение. Нетрудно заметить, что в этом случае утверждение леммы выполняется.

Пусть $t < n$. По лемме 4.1 существуют линейно независимые решения $\bar y_1, \dots, \bar y_{n-t}$ системы (4.4), отвечающей системе (4.1), а также решение $\bar y_0$ системы (4.1) такое, что

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^{n-t} \alpha_i \bar y_i + \bar y_0 \,\middle|\, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-t} \in \mathbb{R} \right\}. \tag{4.5}$$

Определим отображение $\rho\colon P \to \mathbb{R}^{n-t}$. Из (4.5) следует, что если $\bar a \in P$, то существует набор $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_{n-t}\rangle \in \mathbb{R}^{n-t}$ такой, что $\bar a = \sum_{i=1}^{n-t} \alpha_i \bar y_i + \bar y_0$. Положим $\rho(\bar a) = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_{n-t}\rangle$. Из линейной независимости элементов $\bar y_1, \dots, \bar y_{n-t}$ и равенства (4.5) следует, что ρ является взаимно однозначным отображением множества P на пространство $\mathbb{R}^{n-t}$. Пусть

$$f(\bar x) = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + b_{n+1} = q(\bar x) + b_{n+1}, \qquad f \in L_n(\mathbb{R}).$$

Рассмотрим функцию

$$f^*(\bar x) = \sum_{i=1}^{n-t} q(\bar y_i) x_i + q(\bar y_0) + b_{n+1}, \qquad f^* \in L_{n-t}(\mathbb{R}).$$

Пусть

$$\bar a = \sum_{i=1}^{n-t} \alpha_i \bar y_i + \bar y_0, \qquad \bar a \in P.$$

Тогда

$$f(\bar a) = q\Big(\sum_{i=1}^{n-t} \alpha_i \bar y_i + \bar y_0\Big) + b_{n+1} = \sum_{i=1}^{n-t} \alpha_i q(\bar y_i) + q(\bar y_0) + b_{n+1} = f^*(\rho(\bar a)).$$

Значит, отображение ρ обладает свойством (а).

Пусть

$$\bar a_0, \bar a_1, \dots, \bar a_k \in P, \quad \bar a_j = \sum_{i=1}^{n-t} \alpha_{ji} \bar y_i + \bar y_0, \quad 0 \leqslant j \leqslant k,$$

и $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ — неотрицательные числа из $\mathbb{R}$ такие, что $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$. Пусть $\rho(\bar{a}_0) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \rho(\bar{a}_i)$. Тогда $\bar{a}_0 = \sum_{i=1}^k \lambda_i \bar{a}_i$. Если $\bar{a}_0 = \sum_{i=1}^k \lambda_i \bar{a}_i$, то из линейной независимости элементов $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{n-t}$ вытекает, что $\alpha_{0j} = \sum_{j=1}^k \lambda_j \alpha_{ji}$, $1 \leqslant i \leqslant n-t$. Поэтому $\rho(\bar{a}_0) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \rho(\bar{a}_i)$. Следовательно, отображение ρ обладает свойством (б).

Пусть $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k$ — произвольные элементы из P. Учитывая линейную независимость элементов $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{n-t}$, нетрудно показать, что элементы $\bar{a}_1 - \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_1 - \bar{a}_k$ линейно независимы тогда и только тогда, когда линейно независимы элементы $\rho(\bar{a}_1) - \rho(\bar{a}_2), \dots, \rho(\bar{a}_1) - \rho(\bar{a}_k)$. Отсюда и из леммы 4.4 следует, что отображение ρ обладает свойством (в). Лемма 4.15 доказана.

Пусть U — конечно-порожденный центроид и V — множество его вершин.

- Множество $D \subseteq V^{t+1}$ называем *вершинным* $(t+1)$*-покрытием множества* U, если D обладает следующими свойствами:
  - если $\langle \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{t+1} \rangle \in D$, то множество $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{t+1}\}$ имеет размерность t;
  - для любого элемента $\bar{a} \in U$ существует набор $\langle \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{t+1} \rangle \in D$ такой, что $\bar{a}$ содержится в центроиде, порожденном множеством элементов $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{t+1}\}$.

Лемма 4.16. *Если при $n \geqslant 1$ множество решений системы (4.2) является n-мерным конечно-порожденным центроидом в пространстве $\mathbb{R}^n$, то для него существует вершинное $(n+1)$-покрытие мощности не более k^{n-1}.*

Доказательство. Применим индукцию по параметру n. Нетрудно показать, что любой одномерный конечно-порожденный центроид в $\mathbb{R}^1$ имеет ровно две вершины. Следовательно, при $n = 1$ утверждение леммы выполняется.

Предположим, что $n \geqslant 2$ и для пространств размерности $1, \dots, n-1$ утверждение леммы справедливо. Покажем, что оно справедливо и для пространства размерности n. Пусть множество U решений системы (4.2) является n-мерным конечно-порожденным центроидом в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через V множество вершин центроида U. Выберем некоторую несократимую подсистему системы (4.2), множество решений которой совпадает с U. Не ограничивая общности, можно считать, что система (4.2) несократима. Из совместности и несократимости системы (4.2) следует, что при любом $j \in \{1, \dots, k\}$ функция f_j не является постоянной на $\mathbb{R}^n$. Возьмем произвольное $i \in \{1, \dots, k\}$. Обозначим через P_i множество решений на $\mathbb{R}^n$ системы

$$\{f_i(\bar{x}) = 0\}. \tag{4.6}$$

Поскольку функция f_i не является постоянной на $\mathbb{R}^n$, ранг системы (4.6) равен единице. Рассмотрим взаимно однозначное отображение ρ множества P_i на множество $\mathbb{R}^{n-1}$, обладающее свойствами (а)–(в) леммы 4.15. Из свойства (а) отображения ρ следует, что при любом $j \in \{1, \dots, k\}$ существует функция $f_j^* \in L_{n-1}(\mathbb{R})$ такая, что $f_j(\bar{a}) = f_j^*(\rho(\bar{a}))$ для любого $\bar{a} \in P_i$. Обозначим через U_i множество решений на $\mathbb{R}^n$ системы

$$\begin{matrix} f_1(\bar{x}) \geqslant 0, \dots, f_{i-1}(\bar{x}) \geqslant 0, & f_i(\bar{x}) \geqslant 0, \\ -f_1(\bar{x}) \geqslant 0, & f_{i+1}(\bar{x}) \geqslant 0, \dots, f_k(\bar{x}) \geqslant 0. \end{matrix} \tag{4.7}$$

Пусть U_i^* — множество решений на $\mathbb{R}^{n-1}$ системы

$$\begin{aligned} &f_1^*(\bar{x}) \geqslant 0, \dots, f_{i-1}^*(\bar{x}) \geqslant 0, \\ &f_{i+1}^*(\bar{x}) \geqslant 0, \dots, f_k^*(\bar{x}) \geqslant 0. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Покажем, что множество U_i^* является $(n-1)$-мерным конечно-порожденным центроидом в пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$.

Сначала убедимся, что размерность множества U_i^* равна $n-1$. Поскольку при любом $j \in \{1, \dots, k\}$ функция f_j не является постоянной на $\mathbb{R}^n$, учитывая n-мерность множества U и лемму 4.11, получаем, что система (4.3), соответствующая системе (4.2), совместна на $\mathbb{R}^n$. Поэтому, учитывая несократимость системы (4.2) и лемму 4.12, заключаем, что система (4.3) несократима. В силу несократимости и совместности системы (4.3), а также леммы 4.13 на $\mathbb{R}^n$ совместна система

$$\begin{aligned} &f_1(\bar{x}) > 0, \dots, f_{i-1}(\bar{x}) > 0, \quad f_i(\bar{x}) = 0, \\ &f_{i+1}(\bar{x}) > 0, \dots, f_k(\bar{x}) > 0. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Из совместности этой системы и выбора функций f_j^*, $1 \leqslant j \leqslant k$, следует, что на $\mathbb{R}^{n-1}$ совместна система

$$\begin{aligned} &f_1^*(\bar{x}) > 0, \dots, f_{i-1}^*(\bar{x}) > 0, \\ &f_{i+1}^*(\bar{x}) > 0, \dots, f_k^*(\bar{x}) > 0. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Значит, система (4.8) совместна. Обозначим через (4.8а) и (4.10а) системы, полученные соответственно из систем (4.8) и (4.10) удалением неравенств, в которых функции f_j^* являются постоянными на $\mathbb{R}^{n-1}$. Из совместности систем (4.8) и (4.10) следует, что множество решений системы (4.8а) совпадает с множеством решений системы (4.8), а множество решений системы (4.10а) — с множеством решений системы (4.10). Поскольку система (4.10а) совместна, а функции, входящие в неравенства этой системы, не являются постоянными на $\mathbb{R}^{n-1}$, из леммы 4.11 вытекает, что множество решений на $\mathbb{R}^{n-1}$ системы (4.8а) является $(n-1)$-мерным. Следовательно, размерность множества U_i^* равна $n-1$.

Теперь убедимся, что множество U_i^* является конечно-порожденным центроидом. Сначала покажем, что множество U_i является конечно-порожденным центроидом. Ввиду совместности на $\mathbb{R}^n$ системы (4.9) множество U_i непусто. Так как множество U является конечно-порожденным центроидом, множество U_i ограничено. Система (4.7) совместна и множество ее решений ограничено, поэтому ввиду леммы 4.8 множество U_i является конечно-порожденным центроидом. Обозначим через V_i множество вершин центроида U_i и положим $V_i^* = \{\rho(\bar{v}) \mid \bar{v} \in V_i\}$.

Покажем, что центроид, порожденный множеством V_i^*, совпадает с множеством U_i^*. Ввиду выбора функций f_j^*, $1 \leqslant j \leqslant k$, имеем включение $V_i^* \subseteq U_i^*$, используя которое, нетрудно показать, что центроид, порожденный множеством V_i^*, целиком содержится в множестве U_i^*. Покажем, что любой элемент $\bar{a}$ из U_i^* содержится в этом центроиде. Обозначим через ρ^{-1} отображение, обратное к ρ. Ввиду выбора функции f_j^*, $1 \leqslant j \leqslant k$, элемент $\rho^{-1}(\bar{a})$ содержится в центроиде U_i. В силу свойства (б) отображения ρ (см. лемму 4.15) элемент $\bar{a}$ содержится в центроиде, порожденном множеством V_i^*. Следовательно, U_i^* есть $(n-1)$-мерный конечно-порожденный центроид в пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$ и V_i^* — множество его образующих элементов.

По предложению индукции для центроида U_i^* существует вершинное n-покрытие мощности не более $(k-1)^{n-2}$. Обозначим его через D_i^*. Пусть

$$D_i = \{\langle \rho^{-1}(\bar{v}_1), \dots, \rho^{-1}(\bar{v}_n)\rangle \mid \langle \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\rangle \in D_i^*\}.$$

Покажем, что множество D_i является вершинным n-покрытием центроида U_i. По определению множество V_i центроидально-независимо. По свойству (б) отображения ρ (см. лемму 4.15) множество V_i^* центроидально-независимо. Поэтому V_i^* является центроидально-независимым множеством образующих центроида U_i^*. Ввиду леммы 4.7 V_i^* является множеством всех вершин центроида U^*. В силу равенства $V_i = \{\rho^{-1}(\bar{v}) \mid \bar{v} \in V_i^*\}$ и свойств (б), (в) (см. лемму 4.15) отображения ρ множество D_i является вершинным n-покрытием центроида U_i. Отметим, что

$$|D_i| \leqslant (k-1)^{n-2}, \tag{4.11}$$

где $|D_i|$ — мощность множества D_i.

Выберем некоторую вершину $\bar{v}^0$ центроида U. Допустим, что вершина $\bar{v}^0$ не принадлежит плоскостям $P_1, \dots, P_m$ и принадлежит плоскостям $P_{m+1}, \dots, P_k$. Для каждого $i \in \{m+1, \dots, k\}$ выберем вершину $\bar{v}^i$ центроида U, не принадлежащую плоскости P_i. Существование такой вершины следует из n-мерности множества U. Обозначим

$$D = \Big[\bigcup_{i=1}^{m}\{\langle \bar{v}^0, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\rangle \;\Big|\; \langle \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\rangle \in D_i\}\Big] \cup \Big[\bigcup_{i=m+1}^{k}\{\langle \bar{v}^i, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\rangle \;\Big|\; \langle \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\rangle \in D_i\}\Big].$$

Покажем, что множество D является вершинным $(n+1)$-покрытием центроида U. Пусть $\langle \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{n+1}\rangle$ — произвольный элемент множества D. Покажем, что множество $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{n+1}\}$ является n-мерным. Пусть

$$\bar{v}_1 = \bar{v}^0, \quad \langle \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_{n+1}\rangle \in D_1,$$

$$f_1(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} b_{1i}x_i + b_{1n+1} = q_1(\bar{x}) + b_{1n+1}.$$

По определению множества D_1 элементы $\bar{v}_2, \dots, \bar{v}_{n+1}$ являются решениями уравнения $f_1(\bar{x}) = 0$. Следовательно, элементы $\bar{v}_2 - \bar{v}_3, \dots, \bar{v}_2 - \bar{v}_{n+1}$ суть решения уравнения $q_1(\bar{x}) = 0$. Согласно определению D_1 множество $\{\bar{v}_2, \dots, \bar{v}_{n+1}\}$ является $(n-1)$-мерным. По лемме 4.4 элементы $\bar{v}_2 - \bar{v}_3, \dots, \bar{v}_2 - \bar{v}_{n+1}$ линейно независимы. Предположим, что элементы $\bar{v}_2 - \bar{v}^0, \bar{v}_2 - \bar{v}_3, \dots, \bar{v}_2 - \bar{v}_{n+1}$ линейно зависимы. Тогда элемент $\bar{v}_2 - \bar{v}^0$ (следовательно, и элемент $\bar{v}^0 - \bar{v}_2$) является решением уравнения $q_1(\bar{x}) = 0$. Поэтому элемент $\bar{v}^0 - \bar{v}_2 + \bar{v}_2 = \bar{v}^0$ — решение уравнения $f_1(\bar{x}) = 0$, что невозможно, так как по предположению элемент $\bar{v}^0$ не содержится в плоскости P_1. Следовательно, элементы $\bar{v}_2 - \bar{v}^0, \bar{v}_2 - \bar{v}_3, \dots, \bar{v}_2 - \bar{v}_{n+1}$ линейно независимы. Таким образом, ввиду леммы 4.4 множество $\{\bar{v}^0, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_{n+1}\}$ n-мерно.

Покажем, что для любого элемента $\bar{a} \in U$ существует такой набор $\langle \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{n+1} \rangle \in D$, для которого $\bar{a}$ содержится в центроиде, порожденном множеством $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{n+1}\}$. Пусть $\bar{a} \in U$ и $\bar{a} \notin P_{m+1} \cup \ldots \cup P_k$. Тогда $\bar{a} \neq \bar{v}^0$. По лемме 4.4 множество $\{\bar{a}, \bar{v}^0\}$ одномерно. Поэтому существуют функции $g_1, \dots, g_{n-1} \in L_n(\mathbb{R})$, для которых множество P решений на $\mathbb{R}^n$ системы $\{g_1(\bar{x}) = 0, \dots, g_{n-1}(\bar{x}) = 0\}$ является одномерной плоскостью, содержащей элементы $\bar{a}$ и $\bar{v}^0$. Нетрудно заметить, что множество решений на $\mathbb{R}^n$ системы

$$\begin{gathered} g_1(\bar{x}) \geqslant 0, \quad -g_1(\bar{x}) \geqslant 0, \dots, g_{n-1}(\bar{x}) \geqslant 0, \\ -g_{n-1}(\bar{x}) \geqslant 0, \quad f_1(\bar{x}) \geqslant 0, \dots, f_k(\bar{x}) \geqslant 0 \end{gathered} \tag{4.12}$$

непусто и ограничено. Из леммы 4.8 следует, что множество W решений на $\mathbb{R}^n$ системы (4.12) является конечно-порожденным центроидом. Учитывая, что W содержится в одномерной плоскости P и $\bar{a}$, $\bar{v}^0 \in W$, получаем, что W — одномерное множество. Используя лемму 4.4, нетрудно показать, что одномерный конечно-порожденный центроид имеет ровно две вершины. Учитывая совместность системы (4.2), ограниченность множества U и леммы 4.7, 4.8, получаем, что $\bar{v}^0$ — узловое решение системы (4.2). Из ограниченности множества U и из леммы 4.6 следует, что ранг системы (4.2) равен n. Следовательно, ранг системы (4.12) также равен n. Поэтому элемент $\bar{v}^0$ является узловым решением системы (4.12). Используя леммы 4.7 и 4.8, получаем, что $\bar{v}^0$ — вершина центроида W. Пусть $\bar{v}$ — вершина центроида W, отличная от $\bar{v}^0$. Из ограниченности W и из лемм 4.7, 4.8 следует, что $\bar{v}$ — узловое решение системы (4.12). Поскольку ранг системы (4.12) равен n, существует $i_0 \in \{1, \dots, k\}$, для которого $f_{i_0}(\bar{v}) = 0$. Нетрудно заметить, что $i_0 \in \{1, \dots, m\}$, так как в противном случае $\bar{a} \in P_{m+1} \cup \ldots \cup P_k$, что противоречит предположению. Поэтому существует $i_0 \in \{1, \dots, m\}$ такое, что $\bar{v} \in U_{i_0}$. Из свойств множества D_{i_0} следует, что существует набор $\langle \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n \rangle \in D_{i_0}$ такой, что элемент $\bar{v}$ содержится в центроиде, порожденном множеством $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$. Поскольку элемент $\bar{a}$ содержится в центроиде, порожденном множеством $\{\bar{v}^0, \bar{v}\}$, получаем, что $\bar{a}$ содержится в центроиде, порожденном множеством $\{\bar{v}^0, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$. Остается отметить, что $\langle \bar{v}^0, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n \rangle \in D$ по определению множества D.

Случай $\bar{a} \in P_i$, $i \in \{1, \dots, k\}$, рассматривается так же, как и предыдущий, но вместо вершины $\bar{v}^0$ нужно взять вершину $\bar{v}^i$. Следовательно, множество D является вершинным $(n+1)$-покрытием центроида U. Из определения множества D и (4.11) следует, что мощность множества D не превосходит k^{n-1}. Лемма 4.16 доказана.

§ 5. Основные леммы

Лемма 5.1. *Если $f_1, \dots, f_k \in S_n(\mathbb{R})$ и $\delta_1, \dots, \delta_k \in E_3$, то любая несовместная система уравнений вида*

$$f_1(\bar{x}) = \delta_1, \dots, f_k(\bar{x}) = \delta_k \tag{5.1}$$

содержит несовместную подсистему, состоящую не более чем из $n+1$ уравнений.

Доказательство. Пусть, для определенности,

$$\delta_1 = \ldots = \delta_m = 1, \quad \delta_{m+1} = \ldots = \delta_{m+p} = 0, \quad \delta_{m+p+1} = \ldots = \delta_k = 2.$$

Предположим, что для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$ верно равенство $f_j(\bar{x}) = s(g_j(\bar{x}))$, где $g_j \in L_n(\mathbb{R})$, и ранг системы

$$g_1(\bar{x}) = 0, \ldots, g_m(\bar{x}) = 0 \tag{5.2}$$

равен t. Предположим, что система (5.2) несовместна. Тогда по лемме 4.3 она содержит несовместную подсистему, состоящую из $t+1$ уравнений. Следовательно, система (5.1) также содержит несовместную подсистему, состоящую из $t+1$ уравнений. Поскольку $t \leqslant n$, утверждение леммы в рассматриваемом случае выполняется. Предположим, что система (5.2) совместна. В этом случае по лемме 4.3 она содержит некоторую подсистему ранга t

$$g_{j_1}(\bar{x}) = 0, \ldots, g_{j_t}(\bar{x}) = 0, \tag{5.3}$$

состоящую из t уравнений и эквивалентную системе (5.2). Пусть P обозначает множество решений системы (5.3). Ввиду леммы 4.15 существует взаимно однозначное отображение ρ множества P на множество $\mathbb{R}^{n-t}$ и функции $g_1^*, \ldots, g_k^* \in L_{n-t}(\mathbb{R})$ такие, что $g_j(\bar{a}) = g_j^*(\rho(\bar{a}))$ для любых $\bar{a} \in P$ и $j \in \{1, \ldots, k\}$. Из несовместности системы (5.1) и из выбора функций g_j^*, $1 \leqslant j \leqslant k$, следует, что на $\mathbb{R}^{n-t}$ несовместна система

$$\begin{aligned} &-g_{m+1}^*(\bar{x}) > 0, \ldots, -g_{m+p}^*(\bar{x}) > 0, \\ &g_{m+p+1}^*(\bar{x}) > 0, \ldots, g_k^*(\bar{x}) > 0, \end{aligned}$$

По лемме 4.14 эта система содержит несовместную подсистему, состоящую не более чем из $n-t+1$ неравенств. Пусть эта система имеет вид

$$\begin{aligned} &-g_{i_1}^*(\bar{x}) > 0, \ldots, -g_{i_s}^*(\bar{x}) > 0, \\ &g_{i_{s+1}}^*(\bar{x}) > 0, \ldots, g_{i_r}^*(\bar{x}) > 0, \end{aligned}$$

где $r \leqslant n-t+1$. Тогда на $\mathbb{R}^n$ несовместна система

$$\begin{aligned} &f_{j_1}(\bar{x}) = 1, \ldots, f_{j_t}(\bar{x}) = 1, \\ &f_{i_1}(\bar{x}) = 0, \ldots, f_{i_s}(\bar{x}) = 0, \\ &f_{i_{s+1}}(\bar{x}) = 2, \ldots, f_{i_r}(\bar{x}) = 2, \end{aligned}$$

состоящая не более чем из $n+1$ уравнений и являющаяся подсистемой системы (5.1). Лемма 5.1 доказана.

Лемма 5.2. *Допустим, что $f_1, \ldots, f_k \in S_n(\mathbb{R})$. Тогда имеются не более $2k^n+1$ различных наборов $\langle \delta_1, \ldots, \delta_k \rangle \in E_3^k$, для каждого из которых на $\mathbb{R}^n$ совместна система уравнений $f_1(\bar{x}) = \delta_1, \ldots, f_k(\bar{x}) = \delta_k$.*

Доказательство. Для произвольных $f_1, \ldots, f_k \in S_n(\mathbb{R})$ обозначим через $N(f_1, \ldots, f_k)$ число различных наборов $\langle \delta_1, \ldots, \delta_k \rangle \in E_3^k$ таких, что на $\mathbb{R}^n$ совместна система уравнений $f_1(\bar{x}) = \delta_1, \ldots, f_k(\bar{x}) = \delta_k$. Пусть

$$N(n, k) = \max\{N(f_1, \ldots, f_k) \mid f_1, \ldots, f_k \in S_n(\mathbb{R})\}.$$

Покажем, что для любых натуральных n и k

$$N(n,k) \leqslant 2k^n + 1. \quad (5.4)$$

Сначала убедимся, что для любых натуральных n и k

$$N(n+1,k+1) \leqslant N(n+1,k) + 2N(n,k). \quad (5.5)$$

Согласно определению величины $N(n+1,k+1)$ существуют функции $f_1,\dots,f_{k+1} \in S_{n+1}(\mathbb{R})$, для которых $N(f_1,\dots,f_{k+1}) = N(n+1,k+1)$. Очевидно, что среди функций $f_1,\dots,f_{k+1}$ имеется функция, не являющаяся постоянной на $\mathbb{R}^{n+1}$. Без ограничения общности таковой можно считать функцию f_{k+1}.

Для любых $\bar\delta = \langle\delta_1,\dots,\delta_k\rangle \in E_3^k$ и $\sigma \in E_3$ введем обозначения

$$B(\bar\delta) = \{f_1(\bar x) = \delta_1,\dots,f_k(\bar x) = \delta_k\},$$
$$B_\sigma(\bar\delta) = \{f_1(\bar x) = \delta_1,\dots,f_k(\bar x) = \delta_k, f_{k+1}(\bar x) = \sigma\}.$$

Пусть $B \in \{B(\bar\delta),\ B_\sigma(\bar\delta) \mid \bar\delta \in E_3^k,\ \sigma \in E_3\}$. Положим

$$C(B) = \begin{cases} 0, & \text{если система } B \text{ несовместна на } \mathbb{R}^{n+1}, \\ 1, & \text{если система } B \text{ совместна на } \mathbb{R}^{n+1}. \end{cases}$$

Допустим, что $\bar\delta \in E_3^k$. Покажем, что если $C(B_0(\bar\delta)) + C(B_2(\bar\delta)) \geqslant 1$, то $C(B(\bar\delta)) = 1$, и если $C(B_0(\bar\delta)) + C(B_2(\bar\delta)) = 2$, то $C(B_1(\bar\delta)) = 1$. Пусть, например, $C(B_0(\bar\delta)) = 1$ и $\bar a$ — решение системы $B_0(\bar\delta)$. Тогда $\bar a$ является решением системы $B(\bar\delta)$ и, следовательно, $C(B(\bar\delta)) = 1$. Допустим, что $C(B_0(\bar\delta)) + C(B_2(\bar\delta)) = 2$, $\bar a_0$ — решение системы $B_0(\bar\delta)$, $\bar a_2$ — решение системы $B_2(\bar\delta)$, $f_{k+1}(\bar x) = s(g(\bar x))$, $g \in L_{n+1}(\mathbb{R})$. Тогда элемент

$$-\bar a_0(g(\bar a_2)/(g(\bar a_0) - g(\bar a_2))) + \bar a_2(1 + g(\bar a_2)/(g(\bar a_0) - g(\bar a_2)))$$

является решением системы $B_1(\bar\delta)$. Следовательно, $C(B_1(\bar\delta)) = 1$.

Из полученных соотношений вытекает, что для любого $\bar\delta \in E_3^k$

$$\sum_{\sigma\in E_3} C(B_\sigma(\bar\delta)) \leqslant C(B(\bar\delta)) + 2C(B_1(\bar\delta)).$$

Поэтому

$$\sum_{\bar\delta\in E_3^k}\sum_{\sigma\in E_3} C(B_\sigma(\bar\delta)) \leqslant \sum_{\bar\delta\in E_3^k} C(B(\bar\delta)) + 2\sum_{\bar\delta\in E_3^k} C(B_1(\bar\delta)). \quad (5.6)$$

Ввиду выбора функций $f_1,\dots,f_{k+1}$

$$\sum_{\bar\delta\in E_3^k}\sum_{\sigma\in E_3} C(B_\sigma(\bar\delta)) = N(n+1,k+1). \quad (5.7)$$

Нетрудно заметить, что $\sum_{\bar\delta\in E_3^k} C(B(\bar\delta)) = N(f_1,\dots,f_k)$. Следовательно,

$$\sum_{\bar\delta\in E_3^k} C(B(\bar\delta)) \leqslant N(n+1,k). \quad (5.8)$$

Покажем, что

$$\sum_{\bar\delta\in E_3^k} C(B_1(\bar\delta)) \leqslant N(n,k). \tag{5.9}$$

Допустим, что для любого $j \in \{1,\dots,k{+}1\}$ выполняется равенство $f_j(\bar x) = s(g_j(\bar x))$, где $g_j \in L_{n+1}(\mathbb{R})$. Обозначим через P множество решений системы $\{g_{k+1}(\bar x) = 0\}$. Поскольку функция f_{k+1} не является постоянной на $\mathbb{R}^{n+1}$, ранг этой системы равен единице. Рассмотрим отображение $\rho\colon P \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющее условиям леммы 44.15. Ввиду свойства (а) отображения ρ (см. лемму 4.15) для каждого $j \in \{1,\dots,k\}$ существует функция $g_j^* \in L_n(\mathbb{R})$ такая, что $g_j(\bar a) = g_j^*(\rho(\bar a))$ для любого $\bar a \in P$. Пусть $f_j^* = s(g_j^*)$, $1 \leqslant j \leqslant k$. Тогда

$$\sum_{\bar\delta\in E_3^k} C(B_1(\bar\delta)) = N(f_1^*,\dots,f_k^*).$$

Поскольку $N(f_1^*,\dots,f_k^*) \leqslant N(n,k)$, неравенство (5.9) выполняется. Из (5.6)–(5.9) вытекает (5.5).

Неравенство (5.4) докажем индукцией по величине $n+k$. Нетрудно проверить, что для любых натуральных n и k

$$N(1,k) = 2k+1, \tag{5.10}$$

$$N(n,1) = 3. \tag{5.11}$$

Следовательно, неравенство (5.4) выполняется при $n+k \leqslant 3$. Пусть $t \geqslant 4$. Предположим, что для любых натуральных n и k таких, что $n+k < t$, неравенство (5.4) верно. Пусть n^*, k^* — произвольные натуральные числа такие, что $n^* + k^* = t$. Покажем, что для них неравенство (5.4) также выполняется. Из (5.10), (5.11) следует, что если $n^* = 1$ или $k^* = 1$, то неравенство (5.4) верно. Поэтому можно считать, что для некоторых натуральных n, k имеют место равенства $n^* = n+1$, $k^* = k+1$. Из неравенства (5.5) и предположения индукции следует, что

$$\begin{aligned} N(n+1,k+1) &\leqslant 2k^{n+1} + 1 + 4k^n + 2 \\ &\leqslant 2(k^{n+1} + (n+1)k^n + 1) + 1 \leqslant 2(k+1)^{n+1} + 1. \end{aligned}$$

Тем самым неравенство (5.4) доказано. Лемма 5.2 доказана.

Произвольной функции $f \in S_n(\mathbb{R})$ сопоставим функцию $f^\varkappa \in S_{n+1}(\mathbb{R})$ такую, что если $f(\bar y) = s(\sum_{i=1}^n b_i y_i + b_{n+1})$, то $f^\varkappa(\bar x) = s(\sum_{i=1}^{n+1} b_i x_i)$.

Обозначим через C_n множество решений на $\mathbb{R}^n$ системы неравенств

$$x_1 + 2 > 0,\ 2 - x_1 > 0,\dots,x_n + 2 > 0,\ 2 - x_n > 0.$$

Лемма 5.3. *Пусть K — числовое кольцо с единицей, $f_1,\dots,f_k \in S_n(K)$ и $\nu\colon E_3^k \to \mathbb{N}$. Если дерево решений Γ_1 с проверками из $S_{n+1}(K)$ на множестве C_{n+1} реализует функцию $\nu(f_1^\varkappa,\dots,f_k^\varkappa)$, то существует дерево решений Γ с проверками из $S_n(K)$, которое на множестве $\mathbb{R}^n$ реализует функцию $\nu(f_1,\dots,f_k)$ и имеет параметры*

$$h(\Gamma) \leqslant h(\Gamma_1) + 2n, \quad r(\Gamma) \leqslant r(\Gamma_1) + 1.$$

Доказательство. Пусть $\psi = \nu(f_1, \dots, f_k)$, $\psi^{\varkappa} = \nu(f_1^{\varkappa}, \dots, f_k^{\varkappa})$ и дерево решений Γ_1 с проверками из $S_{n+1}(K)$ на множестве C_{n+1} реализует функцию $\psi^{\varkappa}$. Обозначим через $\Gamma_{m,\delta}$, $1 \leqslant m \leqslant n+1$, $\delta \in \{-1, 1\}$, дерево решений, полученное из Γ_1 следующей заменой функций, приписанных рабочим вершинам дерева решений Γ: если некоторой вершине Γ_1 приписана функция $s(\sum_{i=1}^{n+1} b_i x_i + b_{n+2})$, то соответствующей вершине дерева решений $\Gamma_{m,\delta}$ приписаны функция $s(\sum_{i=1}^{n} b_i x_i + b_{n+1} + b_{n+2})$ при $m = n+1$ и функция $s(\sum_{i=1}^{n} b_i x_i + \delta b_{n+2} x_m + b_{n+1})$ при $m \neq n+1$.

Определим отображение $q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{N}$ следующим образом. Допустим $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in \mathbb{R}^n$, $a_{n+1} = 1$ и m — минимальное число из множества $\{1, \dots, n+1\}$ такое, что $|a_m| = \max\{|a_i| \mid 1 \leqslant i \leqslant n+1\}$. Тогда $q(a_1, \dots, a_n) = 2^m 3^{s(a_m)}$. Нетрудно показать, что существует дерево решений Γ_0 с проверками из $S_n(K)$, реализующее на $\mathbb{R}^n$ функцию q и такое, что $h(\Gamma_0) = 2n$ и $r(\Gamma_0) = 0$.

Обозначим через Γ дерево решений с проверками из $S_n(K)$, построенное из деревьев решений Γ_0 и $\Gamma_{m,\delta}$ следующим образом. Корнем Γ объявляем корень Γ_0. Каждую концевую вершину дерева решений Γ_0 заменяем корнем следующего дерева решений: если концевой вершине приписано число $2^m\ 3^{\sigma}$, то заменяем ее корнем дерева решений $\Gamma_{m,\sigma-1}$. Нетрудно заметить, что

$$h(\Gamma) \leqslant h(\Gamma_1) + 2n, \tag{5.12}$$

$$r(\Gamma) \leqslant r(\Gamma_1) + 1. \tag{5.13}$$

Покажем, что дерево решений Γ на множестве $\mathbb{R}^n$ реализует функцию ψ. Определим отображение $\varkappa\colon \mathbb{R}^n \to C_{n+1}$ такое, что если $\bar{a} = \langle a_1, \dots, a_n \rangle \in \mathbb{R}^n$, $a_{n+1} = 1$, $v = \max\{|a_i| \mid 1 \leqslant i \leqslant n+1\}$, то $\varkappa(\bar{a}) = \langle a_1/v, \dots, a_n/v, 1/v \rangle$. Нетрудно показать, что для любого $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$

$$\psi(\bar{a}) = \psi^{\varkappa}(\varkappa(\bar{a})). \tag{5.14}$$

Обозначим через Φ (соответственно через Φ_1) функцию, которую реализует дерево решений Γ (соответственно Γ_1) на множестве $\mathbb{R}^n$ (соответственно C_{n+1}). Нетрудно показать, что для любого $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$

$$\Phi(\bar{a}) = \Phi_1(\varkappa(\bar{a})). \tag{5.15}$$

По предположению $\Phi_1(\bar{b}) = \psi^{\varkappa}(\bar{b})$ для любого $\bar{b} \in C_{n+1}$. Поэтому ввиду условия $\varkappa(\bar{a}) \in C_{n+1}$ для любого $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$, получаем, что равенство $\Phi_1(\varkappa(\bar{a})) = \psi^{\varkappa}(\varkappa(\bar{a}))$ справедливо для любого $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$.. Отсюда и из (5.14), (5.15) следует, что $\Phi(\bar{a}) = \psi(\bar{a})$ для любого $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$. Поэтому, учитывая (5.12), (5.13), получаем утверждение леммы. Лемма 5.3 доказана.

Пусть K — числовое кольцо с единицей и $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

- Конечное множество функций $\mathcal{F} \subset S_n(K)$ называем *функциональным* $\langle m, K \rangle$*-покрытием* множества U, если для любого $\bar{a} \in U$ существуют функции $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{F}$ и числа $\sigma_1, \dots, \sigma_m \in E_3$ такие, что $\bar{a}$ является решением системы уравнений $f_1(\bar{x}) = \sigma_1, \dots, f_m(\bar{x}) = \sigma_m$ и множество решений этой системы на $\mathbb{R}^n$ содержится в U.

Лемма 5.4. *Пусть K — числовое кольцо с единицей, $f_1, \dots, f_k \in S_n(K)$, $\delta_1, \dots, \delta_k \in E_3$ и W — непустое множество решений на C_n системы уравнений $f_1(\bar{x}) = \delta_1, \dots, f_k(\bar{x}) = \delta_k$. Тогда для W существует функциональное $\langle n+1, K \rangle$-покрытие $\mathcal{F}$ такое, что*

$$|\mathcal{F}| \leqslant (n+1)(k+2n)^{n-1},$$
$$\max\{r(f) \mid f \in \mathcal{F}\} \leqslant 2n^2(\log_2 n + 1 + \max\{r(f_j) \mid j = 1, \ldots, k\}) = 1.$$

Доказательство. Пусть $f_j = s(g_j^0)$, где $1 \leqslant j \leqslant k$, $g_j^0 \in L_n(K)$, и

$$\delta_1 = \ldots = \delta_m = 1, \quad \delta_{m+1} = \ldots = \delta_p = 2, \quad \delta_{p+1} = \ldots = \delta_k = 0.$$

Пусть

$$g_j = \begin{cases} g_j^0 & \text{при } j = 1, \ldots, p, \\ -g_j^0 & \text{при } j = p+1, \ldots, k, \\ x_{j-k} + 2 & \text{при } j = k+1, \ldots, k+n, \\ 2 - x_{j-k-n} & \text{при } j = k+n+1, \ldots, k+2n. \end{cases}$$

Тогда множество решений системы

$$\begin{aligned} &g_1(\bar{x}) = 0, \ldots, g_m(\bar{x}) = 0, \\ &g_{m+1}(\bar{x}) > 0, \ldots, g_{k+2n}(\bar{x}) > 0 \end{aligned} \tag{5.16}$$

на $\mathbb{R}^n$ совпадает с множеством W. Пусть U — множество решений системы

$$\begin{aligned} &g_1(\bar{x}) \geqslant 0, \ -g_1(\bar{x}) \geqslant 0, \ldots, g_m(\bar{x}) \geqslant 0, \ -g_m(\bar{x}) \geqslant 0, \\ &\qquad g_{m+1}(\bar{x}) \geqslant 0, \ g_{m+2}(\bar{x}) \geqslant 0, \ldots, g_{k+2n}(\bar{x}) \geqslant 0 \end{aligned} \tag{5.17}$$

на $\mathbb{R}^n$. Обозначим через P множество решений на $\mathbb{R}^n$ системы

$$g_1(\bar{x}) = 0, \ldots, g_m(\bar{x}) = 0. \tag{5.18}$$

Поскольку $W \neq \varnothing$, имеем $P \neq \varnothing$. Пусть ранг системы (5.18) равен t.

При $t = n$ из совместности системы (5.18) и леммы 4.1 следует, что множество P одноэлементно. Поскольку $W \neq \varnothing$ и $W \subseteq P$, имеем $W = P$. Ввиду совместности системы (5.18) и леммы 4.3 существует подсистема системы (5.18) ранга n, эквивалентная системе (5.18) и состоящая из n уравнений. Пусть эта система имеет вид $g_1(\bar{x}) = 0, \ldots, g_n(\bar{x}) = 0\}$. Тогда множество решений системы $f_1(\bar{x}) = 1, \ldots, f_n(\bar{x}) = 1$ на $\mathbb{R}^n$ совпадает с W. Пользуясь этим фактом, нетрудно показать, что множество $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_n\}$ является функциональным $(n+1, K)$-покрытием множества W, удовлетворяющим условиям леммы. Таким образом, при $t = n$ утверждение леммы справедливо.

При $t < n$ рассмотрим отображение $\rho\colon P \to \mathbb{R}^{n-t}$, обладающее свойствами, перечисленными в лемме 4.15. В силу свойства (а) отображения ρ (см. лемму 4.15) при каждом $j \in \{m+1, \ldots, k+2n\}$ существует функция $g_j^* \in L_{n-t}(\mathbb{R})$ такая, что $g_j(\bar{a}) = g_j^*(\rho(\bar{a}))$ для любого элемента $\bar{a} \in P$. Обозначим через U^* множество решений на $\mathbb{R}^{n-t}$ системы

$$g_{m+1}^*(\bar{x}) \geqslant 0, \ldots, g_{k+2n}^*(\bar{x}) \geqslant 0. \tag{5.19}$$

Нетрудно заметить, что U является ограниченным непустым множеством. По лемме 4.8 U является конечно-порожденным центроидом. Обозначим через V множество вершин центроида U, и пусть $V^* = \{\rho(\bar{v}) \mid \bar{v} \in V\}$.

Аналогично доказательству леммы 4.16 нетрудно показать, что U^* — конечно-порожденный центроид, а V^* — множество вершин центроида U^*.

Из совместности на $\mathbb{R}^n$ системы (5.16) и из выбора функций g_j^*, $m+1 \leqslant j \leqslant k+2n$, следует, что на $\mathbb{R}^{n-t}$ совместна система

$$g_{m+1}^*(\bar{x}) > 0, \dots, g_{k+2n}^*(\bar{x}) > 0. \tag{5.20}$$

Обозначим через (5.19a) и (5.20a) системы, полученные соответственно из систем (5.19) и (5.20) удалением неравенств, в которых функции g_j^* являются постоянными на $\mathbb{R}^{n-t}$. Так как системы (5.19) и (5.20) совместны, множество решений системы (5.19a) совпадает с множеством решений системы (5.19), а множество решений системы (5.20a) — с множеством решений системы (5.20). Поскольку функции, входящие в неравенства системы (5.20a), не являются постоянными на $\mathbb{R}^{n-t}$, в силу совместности (5.20a) и леммы 4.11 множество решений на $\mathbb{R}^{n-t}$ системы (5.19a) $(n-t)$-мерно. Поэтому U^* есть $(n-t)$-мерный конечно-порожденный центроид в пространстве $\mathbb{R}^{n-t}$. По лемме 4.16 для U^* существует вершинное $(n-t+1)$-покрытие D^* мощности не более $(k+2n-m)^{n-t-1}$. Поскольку ранг системы (5.18) равен t, имеем $m \geqslant t$. Поэтому мощность множества D^* можно оценить сверху величиной $(k+2n-t)^{n-t-1}$.

Пусть ρ^{-1} — отображение, обратное к ρ,

$$D = \{\langle \rho^{-1}(\bar{v}_1), \dots, \rho^{-1}(\bar{v}_{n-t+1})\rangle \mid \langle \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{n-t+1}\rangle \in D^*\}.$$

Аналогично доказательству леммы 4.16 нетрудно показать, что множество D является вершинным $(n-t+1)$-покрытием центроида U. Отметим, что

$$|D| \leqslant (k+2n-t)^{n-t-1}. \tag{5.21}$$

Пусть $a = 2^{\max\{1, \max\{r(f_j) \mid j=1,\dots,k\}\}}$ и $\bar{v}$ — произвольная вершина центроида U. Покажем, что $\bar{v} = \langle d_1/d_0, \dots, d_n/d_0\rangle$, где $d_j \in K$, $|d_j| \leqslant a^n n!$ при любом $j \in \{0, \dots, n\}$ и $d_0 \neq 0$. Из ограниченности множества U и из лемм 4.7, 4.8 получаем, что $\bar{v}$ является узловым решением системы (5.17). Так как множество U ограничено, из леммы 4.6 следует, что ранг системы (5.17) равен n. Поэтому существуют числа $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, k+2n\}$ такие, что элемент $\bar{v}$ является решением системы $g_{i_1}(\bar{x}) = 0, \dots, g_{i_n} = 0$, и ранг этой системы равен n. Из леммы 4.2 вытекает, что $\bar{v} = \langle d_1/d_0, \dots, d_n/d_0\rangle$, где d_j — определитель n-го порядка, составленный из коэффициентов функций $g_{i_1}, \dots g_{i_n}$, $0 \leqslant j \leqslant n$, и $d_0 \neq 0$. Коэффициенты функций $g_{i_1}, \dots, g_{i_n}$ являются числами из кольца K, по абсолютной величине не превосходящими числа a. Поэтому $d_j \in K$ и $|d_j| \leqslant a^n n!$ при любом $j \in \{0, \dots, n\}$. Рассмотрим произвольный набор $\langle \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{n-t+1}\rangle \in D$. Поскольку множество D является вершинным $(n-t+1)$-покрытием центроида U, размерность множества $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{n-t+1}\}$ равна $n-t$. Пусть $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ и $\Delta = \{\langle 0, \dots, 0\rangle, \langle 1, 0, \dots, 0\rangle, \dots, \langle 0, \dots, 0, 1\rangle\}$. По лемме 4.4 размерность множества Δ равна n. При $t > 0$ множество $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{n-t+1}\}$ дополним элементами $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_t \in \Delta$ до множества $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{n-t+1}, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_t\}$ размерности n. Покажем, что элементы $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_t \in \Delta$, обладающие этим свойством, существуют. Сначала убедимся, что имеется элемент $\bar{u}_1 \in \Delta$ такой, что множество $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{n-t+1}, \bar{u}_1\}$ имеет размерность $n-t+1$. Действительно, по лемме 4.4 для любого $\bar{u} \in \Delta$ размерность множества $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{n-t+1}, \bar{u}\}$ равна $n-t$ либо $n-t+1$. Предположим, что для любого $\bar{u} \in \Delta$ размерность множества $\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{n-t+1}, \bar{u}\}$ равна $n - t$. Используя лемму 4.4, нетрудно показать, что в этом случае множество Δ содержится в той же $(n - t)$-мерной плоскости, что и множество $\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{n-t+1}\}$. Тогда размерность множества Δ меньше n, что невозможно. Следовательно, имеется элемент $\bar{u}_1 \in \Delta$ такой, что размерность множества $\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{n-t+1}, \bar{u}_1\}$ равна $n - t + 1$. Аналогично доказывается существование элементов $\bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_t \in \Delta$, для которых размерность множества $\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{n-t+1}, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_t\}$ равна n.

Введем обозначение

$$\begin{aligned} D(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{n-t+1}) = \{&\langle \bar{v}_2, \bar{v}_3, \ldots, \bar{v}_{n-t+1}, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_t\rangle, \\ &\langle \bar{v}_1, \bar{v}_3, \ldots, \bar{b}_{n-t+1}, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_t\rangle, \ldots, \\ &\langle \bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_{n-t}, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_t\rangle\}. \end{aligned}$$

Каждому набору из этого множества сопоставим функцию из $S_n(K)$, равную единице на всех элементах, входящих в набор, и не являющуюся постоянной на P. Рассмотрим, например, набор $\langle \bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_{n-t}, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_t\rangle$. Как уже было показано, при $j = 1, \ldots, n - t$ выполняется равенство $\bar{v}_j = \langle d_{j1}/d_{j0}, \ldots, d_{jn}/d_{j0}\rangle$, где $d_{ji} \in K$,

$$|d_{ji} \leqslant a^n n!, \tag{5.22}$$

$0 \leqslant i \leqslant n$, $d_{j0} \neq 0$. Ясно, что элемент $\bar{u}_j$, $1 \leqslant j \leqslant t$, можно представить в виде $\bar{u}_j = \langle d_{n-t+j1}/d_{n-t+j0}, \ldots, d_{n-t+jn}/d_{n-t+j0}\rangle$, где $d_{n-t+ji} \in K$,

$$|d_{n-t+ji}| \leqslant a^n n! \tag{5.23}$$

при любом $i \in \{0, \ldots, n\}$ и $d_{n-t+j0} \neq 0$. Рассмотрим системы уравнений

$$\begin{aligned} &(d_{11}/d_{10})x_1 + \ldots + (d_{1n}/d_{10})x_n + x_{n+1} = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &(d_{n1}/d_{n0})x_1 + \ldots + (d_{nn}/d_{n0})x_n + x_{n+1} = 0; \end{aligned} \tag{5.24}$$

$$\begin{aligned} &(d_{11}/d_{10} - d_{21}/d_{20})x_1 + \ldots + (d_1n/d_{10} - d_{2n}/d_{20})x_n = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &(d_{11}/d_{10} - d_{n1}/d_{n0})x_1 + \ldots + (d_{1n}/d_{10} - d_{nn}/d_{n0})x_n = 0; \end{aligned} \tag{5.25}$$

$$\begin{aligned} &(d_{11}d_{20} - d_{21}d_{10})x_1 + \ldots + (d_{1n}d_{20} - d_{2n}d_{10})x_n = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &(d_{11}d_{n0} - d_{n1}d_{10})x_1 + \ldots + (d_{1n}d_{n0} - d_{nn}d_{10})x_n = 0. \end{aligned} \tag{5.26}$$

Так как множество $\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{n-t+1}, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_t\}$ является n-мерным, согласно лемме 4.4 множество $\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{n-t}, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_t\}$ является $(n-1)$-мерным. В силу леммы 4.4 ранг системы (5.25) равен $n - 1$. Ясно, что система (5.26) эквивалентна системе (5.25) и ранг системы (5.26) также равен $n - 1$. Следовательно, по лемме 4.2 существуют определители $M_1, \ldots, M_n$ порядка $n - 1$, составленные из коэффициентов уравнений системы (5.26) и такие, что элемент $\langle M_1, -M_2, M_3, -M_4, \ldots, (-1)^{n-1}M_n\rangle$ является решением системы (5.26) и $\sum_{i=1}^{n} |M_i| > 0$. Из (5.22) и (5.23) получаем, что при любом $j \in \{1, \ldots, n\}$

$$|M_j| \leqslant 2^{n-1} a^{2n(n-1)} (n!)^{2(n-1)} (n - 1)!. \tag{5.27}$$

Нетрудно заметить, что элемент

$$\langle M_1 d_{10}, -M_2 d_{10}, \ldots, (-1)^{n-1} M_n d_{10}, -\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} M_i d_{1i} \rangle \tag{5.28}$$

является решением системы (5.24). Обозначим через g функцию из $L_n(K)$ такую, что

$$g(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} M_i d_{10} x_i - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} M_i d_{1i}.$$

Так как элемент из (5.28) является решением системы (5.24), имеем

$$g(\bar{v}_1) = \ldots = g(\bar{v}_{n-t}) = g(\bar{u}_1) = \ldots = g(\bar{u}_t) = 0.$$

Поскольку $\sum_{i=1}^{n} |M_i| > 0$ и $d_{10} \neq 0$, функция g не является постоянной на $\mathbb{R}^n$. Покажем, что $g(\bar{v}_{n-t+1}) \neq 0$. Пусть $g(\bar{v}_{n-t+1}) = 0$. Тогда n-мерное множество $\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{n-t+1}, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_t\}$ содержится в множестве решений уравнения $g(\bar{x}) = 0$, которое является $(n-1)$-мерной плоскостью, что невозможно. Набору $\langle \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{n-t}, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_t \rangle \in D(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{n-t+1})$ сопоставим функцию $q = s(g)$. Она не является постоянной на множестве P, так как $q(\bar{v}_1) = \ldots = q(\bar{v}_{n-t}) = 1$ и $q(\bar{v}_{n-t+1}) \neq 1$. Из (5.22), (5.23), (5.27) и определения величины a следует, что

$$r(q) \leqslant 2n^2(\log_2 n + 1 + \max\{r(f_j) \mid j = 1, \ldots, k\}) - 1. \tag{5.29}$$

Каждому из остальных наборов множества $D(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{n-t+1})$ функция из $S_n(K)$, равная единице на всех элементах, входящих в набор, и не являющаяся постоянной на P, сопоставляется аналогично. Обозначим через $\mathcal{F}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{n-t+1})$ множество функций из $S_n(K)$, сопоставленных наборам из множества $D(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{n-t+1})$. По лемме 4.3 существует подсистема системы (5.18), эквивалентная системе (5.18) и состоящая из t уравнений. Пусть она имеет вид $g_1(\bar{x}) = 0, \ldots, g_t(\bar{x}) = 0$. Введем обозначение

$$\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_t\} \cup [\bigcup \mathcal{F}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{n-t+1})],$$

где второе объединение берется по всем $\langle \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{n-t+1} \rangle \in D$. В силу неравенства (5.21)

$$|\mathcal{F}| \leqslant (n+1)(k+2n)^{n-1}, \tag{5.30}$$

а в силу (5.29)

$$\max\{r(q) \mid q \in \mathcal{F}\} \leqslant 2n^2(\log_2 n + 1 + \max\{r(f_j) \mid j = 1, \ldots, k\}) - 1. \tag{5.31}$$

Покажем, что множество $\mathcal{F}$ является функциональным $(n-1, K)$-покрытием множества W. Пусть $\bar{a}_0 \in W$. Так как множество D есть вершинное $(n-t+1)$-покрытие множества U, существует набор $\langle \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{n-t+1} \rangle \in D$ такой, что элемент $\bar{a}_0$ содержится в центроиде, порожденном множеством $\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{n-t+1}\}$. Пусть

$$\mathcal{F}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{n-t+1}) = \{q_1, \ldots, q_{n-t+1}\}, \quad q_j = s(h_j), \quad 1 \leqslant j \leqslant n-t+1,$$

где $h_j \in L_n(K)$. Пусть, для определенности, при любых $j \in \{1, \ldots, n-t+1\}$ и $i \in \{1, \ldots, n-t+1\}$ справедливо неравенство $h_j(\bar{v}_i) \geqslant 0$. Ввиду свойства (а) отображения ρ (см. лемму 4.15) существует функция $h_j^* \in L_{n-t}(\mathbb{R})$, $1 \leqslant j \leqslant n-t+1$, такая, что $h_j(\bar{a}) = h_j^*(\rho(\bar{a}))$ для любого $\bar{a} \in P$.

Рассмотрим центроид U_0^*, порожденный множеством $\{\rho(\bar{v}_1), \dots, \rho(\bar{v}_{n-t+1})\}$. В силу свойства (б) отображения ρ (см. лемму 4.15) и определения множества D элементы $\rho(\bar{v}_1), \dots, \rho(\bar{v}_{n-t+1})$ центроидально-независимы. По лемме 4.7 получаем, что $\{\rho(\bar{v}_1), \dots, \rho(\bar{v}_{n-t+1})\}$ есть множество вершин центроида U_0^*. Так как множество $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{n-t+1}\}$ является $(n-t)$-мерным, ввиду свойства (в) отображения ρ (см. лемму 4.15) размерность множества $\{\rho(\bar{v}_1), \dots, \rho(\bar{v}_{n-t+1})\}$ равна $n-t$. Поэтому размерность центроида U_o^* также равна $n-t$. Так как функции $q_1, \dots, q_{n-t+1}$ не постоянны на P, функции $h_1^*, \dots, h_{n-t+1}^*$ не постоянны на $\mathbb{R}^{n-t}$. Пользуясь свойствами функций q_j, $1 \leqslant j \leqslant n-t+1$, и тем фактом, что размерность U_0^* равна $n-t$, получаем, что полупространство, определяемое неравенством $h_j^*(\bar{x}) \geqslant 0$, $1 \leqslant j \leqslant n-t+1$, является крайней опорой центроида U_0^*. Покажем, что других крайних опор у этого центроида нет. Рассмотрим произвольную крайнюю опору центроида U_0^*. Пусть она задается неравенством $h(\bar{x}) \geqslant 0$, где $h \in L_{n-t}(\mathbb{R})$ и функция h не является постоянной на $\mathbb{R}^{n-t}$. Тогда существуют $n-t$ вершин центроида U_0^*, содержащихся в $(n-t+1)$-мерной плоскости, определяемой уравнением $h(\bar{x}) = 0$. Пусть, для определенности, в этой плоскости содержатся вершины $\rho(\bar{v}_1), \dots, \rho(\bar{v}_{n-t})$. Кроме того, из выбора функций q_j, $1 \leqslant j \leqslant n-t+1$, следует, что для некоторого $j \in \{1, \dots, n-t+1\}$ вершины $\rho(\bar{v}_1), \dots, \rho(\bar{v}_{n-t})$ содержатся в плоскости, определяемой уравнением $h_j^*(\bar{x}) = 0$. Так как множество $\{\rho(\bar{v}_1), \dots, \rho(\bar{v}_{n-t+1})\}$ является $(n-t)$-мерным, из леммы 4.4 следует, что множество $\{\rho(\bar{v}_1), \dots, \rho(\bar{v}_{n-t})\}$ является $(n-t-1)$-мерным. Используя лемму 4.5, получаем, что существует $c \in \mathbb{R}$ такое, что $h_j^*(\bar{a}) = ch(\bar{a})$ для любого $\bar{a} \in \mathbb{R}^{n-t}$. Следовательно, крайняя опора, определяемая неравенством $h(\bar{x}) \geqslant 0$, совпадает с крайней опорой, определяемой неравенством $h_j^*(\bar{x}) \geqslant 0$. Поэтому множество полупространств, определяемых неравенствами $h_1^*(\bar{x}) \geqslant 0, \dots, h_{n-t+1}^*(\bar{x}) \geqslant 0$, совпадает с множеством крайних опор центроида U_0^*. Пользуясь этим фактом, леммой 4.9 и тем, что размерность центроида U_0^* равна $n-t$, убеждаемся, что множество решений на $\mathbb{R}^{n-t}$ системы $h_1^*(\bar{x}) \geqslant 0, \dots, h_{n-t+1}^*(\bar{x}) \geqslant 0$ совпадает с U_0^*. Отсюда, из выбора функций h_j^*, $1 \leqslant j \leqslant n-t+1$, и свойств отображения ρ следует, что множество решений на P системы $\{h_1(\bar{x}) \geqslant 0, \dots, h_{n-t+1}(\bar{x}) \geqslant 0\}$ совпадает с центроидом U_0, порожденным множеством $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{n-t+1}\}$. Следовательно, множество решений на $\mathbb{R}^n$ системы

$$\begin{aligned} &g_1(\bar{x}) = 0, \dots, g_t(\bar{x}) = 0, \\ &h_1(\bar{x}) \geqslant 0, \dots, h_{n-t+1}(\bar{x}) \geqslant 0 \end{aligned} \tag{5.32}$$

совпадает с U_0 и является подмножеством множества U.

Пусть $\eta_j = g_j$ при $j = 1, \dots, t$ и $\eta_{t+j} = h_j$ при $j = 1, \dots, n-t+1$. Пусть, для определенности, $\eta_{t+1}(\bar{a}_0) = \ldots = \eta_{t+p}(\bar{a}_0) = 0$ и $\eta_{t+p+1}(\bar{a}_0) > 0, \dots, \eta_{n+1}(\bar{a}_0) > 0$, и пусть W_0 обозначает множество решений на $\mathbb{R}^n$ системы $\eta_1(\bar{x}) = 0, \dots, \eta_{t+p}(\bar{x}) = 0$, $\eta_{t+p+1}(\bar{x}) > 0, \dots, \eta_{n+1}(\bar{x}) > 0$. Очевидно, $\bar{a}_0 \in W_0$. Покажем, что $W_0 \subseteq W$. Для этого достаточно показать, что для любого $\bar{a}_1 \in W_0$ и любого $j \in \{m+1, \dots, k+2n\}$ справедливо неравенство $g_j(\bar a_1) > 0$. Очевидно, множество решений системы

$$\begin{aligned} &\eta_1(\bar x) = 0, \dots, \eta_{t+p}(\bar x) = 0, \\ &\eta_{t+p+1}(\bar x) \geqslant 0, \dots, \eta_{n+1}(\bar x) \geqslant 0 \end{aligned} \tag{5.33}$$

является подмножеством множества решений системы (5.32). Следовательно, множество решений системы (5.33) является подмножеством множества U. Отсюда для любого $j \in \{m+1, \dots, k+2n\}$ неравенство $g_j(\bar x) \geqslant 0$ является следствием системы (5.33). Пусть $j \in \{m+1, \dots, k+2n\}$. Из леммы 4.10 следует, что существуют числа $\lambda_1, \dots, \lambda_{t+p} \in \mathbb{R}$ и неотрицательные числа $\lambda_{t+p+1}, \dots, \lambda_{n+1}$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ такие, что $g_j(\bar x) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \eta_i(\bar x) + \lambda_0$. Пусть $\bar a_1 \in W_0$. Тогда $\sum_{i=1}^{t+p} \lambda_i \eta_i(\bar a_1) = 0$, и если $\lambda_i > 0$ хотя бы для одного $i \in \{0, t+p+1, t+p+2, \dots, n+1\}$, то $g_j(\bar a_1) > 0$. Предположим, что $\lambda_i = 0$ для любого $i \in \{0, t+p+1, t+p+2, \dots, n+1\}$. Тогда $g_j(\bar a_1) = 0$ для любого $\bar a_1 \in W_0$. Это противоречит тому, что $g_j(\bar a_0) > 0$ и $\bar a_0 \in W_0$. Поэтому $W_0 \subseteq W$. Следовательно, в множестве решений на $\mathbb{R}^n$ системы $f_1(\bar x) = 1, \dots, f_t(\bar x) = 1$, $q_1(\bar x) = 1, \dots, q_p(\bar x) = 1$, $q_{p+1}(\bar x) = 1, \dots, q_{n-t+1}(\bar x) = 2$ содержится элемент $\bar a_0$, и множество решений является подмножеством множества W. Тем самым доказано, что $\mathcal{F}$ является функциональным $(n+1, K)$-покрытием множества W. Поэтому в силу (5.30) и (5.31) получаем утверждение леммы. Лемма 5.4 доказана.

§ 6. Доказательство теоремы 1.1

Докажем сначала частный случай теоремы.

Предложение 6.1. *Если K — числовое кольцо с единицей, $n, k \in \mathbb{N}$ и $t \in \mathbb{R}^+$, то для любой $\langle n, k, t\rangle$-задачи с проверками из $S_n(K)$ существует решающее ее дерево решений Γ с проверками из $S_n(K)$ такое, что*

$$\begin{gathered} h(\Gamma) \leqslant (2(n+2)^3 \log_2(k+2n+2))/(\log_2(n+2)), \\ r(\Gamma) \leqslant 2(n+1)^2(1+t+\log_2(n+1)). \end{gathered}$$

Доказательство. Пусть $n, k \in \mathbb{N}$ и $t \in \mathbb{R}^+$. Рассмотрим произвольную $\langle n, k, t\rangle$-задачу с проверками из $S_n(K)$. Очевидно, для нее существует представление $\langle \mathbb{R}^n, \nu, f_1, \dots, f_d\rangle$ с проверками из $S_n(K)$) такое, что $d \leqslant k$, $f_j \in S_n(K)$ и $r(f_j) \leqslant t$ для любого $j \in \{1, \dots, d\}$. Положим $\Phi = \nu(f_1, \dots, f_d)$ и $\Phi^\varkappa = \nu(f_1^\varkappa, \dots, f_d^\varkappa)$ (определение функции $f^\varkappa$ см. перед леммой 5.3). Обозначим через $H(f_1^\varkappa, \dots, f_d^\varkappa)$ множество всевозможных наборов $\langle \delta_1, \dots, \delta_d\rangle \in E_3^d$, для каждого из которых совместна система уравнений $f_1^\varkappa(\bar x) = \delta_1, \dots, f_d^\varkappa(\bar x) = \delta_d$ на C_{n+1} (определение этого множества см. перед леммой 5.3). Допустим, что $H(f_1^\varkappa, \dots, f_d^\varkappa) = \{\langle \delta_{11}, \dots, \delta_{1d}\rangle, \dots, \langle \delta_{m1}, \dots, \delta_{md}\rangle\}$. Обозначим через W_j, $1 \leqslant j \leqslant m$, множество решений на C_{n+1} системы уравнений $f_1^\varkappa(\bar x) = \delta_{j1}, \dots, f_d^\varkappa(\bar x) = \delta_{jd}$. Нетрудно заметить, что $r(f_j^\varkappa) = r(f_j)$ при любом $j \in \{1, \dots, d\}$. Поэтому $\max\{r(f_j^\varkappa) \mid j = 1, \dots, d\} \leqslant t$. Отсюда и из леммы 5.4 следует, что существует функциональное $(n+2, K)$-покрытие $\mathcal{F}_j$ множества W_j, $1 \leqslant j \leqslant m$, такое, что

$$|\mathcal{F}_j| \leqslant (n+2)(d+2n+2)^n, \tag{6.1}$$

$$\max\{r(f) \mid f \in \mathcal{F}_j\} \leqslant 2(n+1)^2(\log_2(n+1)+1+t)-1. \tag{6.2}$$

Положим $\mathcal{F} = \{f_1^{\varkappa}, \dots, f_d^{\varkappa}\} \cup [\bigcup_{j=1}^{m} \mathcal{F}_j]$, и пусть $p = |\mathcal{F}|$. Поскольку $m \leqslant 2d^{n+1}+1$ согласно лемме 5.2, пользуясь (6.1), получаем

$$p \leqslant d + (2d^{n+1}+1)(n+2)(d+2n+2)^n \leqslant (d+2n+2)^{2(n+1)} - 1. \tag{6.3}$$

Пусть $\mathcal{F} = \{g_1, \dots, g_p\}$, $g_j = f_j^{\varkappa}$, $1 \leqslant j \leqslant d$, и отображение $\nu_1 \colon E_3^p \to \mathbb{N}$ таково, что $\nu_1(\delta_1, \dots, \delta_p) = \nu(\delta_1, \dots, \delta_d)$ при любом $\langle \delta_1, \dots, \delta_p \rangle \in E_3^p$. Положим $\Phi_1 = \nu_1(g_1, \dots, g_p)$. Ясно, что для любого $\bar{a} \in C_{n+1}$

$$\Phi^{\varkappa}(\bar{a}) = \Phi_1(\bar{a}). \tag{6.4}$$

Обозначим $T = T(C_{n+1}, \nu_1, g_1, \dots, g_p)$. Из (6.3) и леммы 5.2 следует, что

$$N(T) \leqslant 2(d+2n+2)^{2(n+1)^2}. \tag{6.5}$$

Докажем, что

$$M(T) \leqslant n+2. \tag{6.6}$$

Достаточно показать, что для любого набора $\langle \delta_1, \dots, \delta_p \rangle \in E_3^p$ существуют числа $i_1, \dots, i_q \in \{1, \dots, p\}$ такие, что $q \leqslant n+2$ и $T\langle i_1, \delta_{i_1} \rangle \dots \langle i_q, \delta_{i_q} \rangle \in$ НС. Убедимся в справедливости последнего утверждения. Допустим, что $\langle \delta_1, \dots, \delta_p \rangle \in E_3^p$ и система

$$\{g_1(\bar{x}) = \delta_1, \dots, g_p(\bar{x}) = \delta_p\} \tag{6.7}$$

несовместна на C_{n+1}. Тогда на $\mathbb{R}^{n+1}$ несовместна система

$$\begin{aligned} g_1(\bar{x}) = \delta_1, \dots, g_p(\bar{x}) = \delta_p,\ s(x_1+2) = 2,& \\ s(2-x_1) = 2, \dots, s(x_{n+1}+2) = 2,\ s(2-x_{n+1}) = 2.& \end{aligned} \tag{6.8}$$

Используя лемму 5.1, получаем, что на $\mathbb{R}^{n+1}$ несовместна некоторая подсистема системы (6.8), состоящая из $n+2$ уравнений. Отбрасывая из этой системы уравнения, относящиеся к последним $2n+2$ уравнениям системы (6.8), получаем несовместную на C_{n+1} подсистему системы (6.7), содержащую не более $n+2$ уравнений. Пусть эта подсистема имеет вид $\{g_{i_1}(\bar{x}) = \delta_{i_1}, \dots, g_{i_q}(\bar{x}) = \delta_{i_q}\}$, где $q \leqslant n+2$ и $i_1, \dots, i_q \in \{1, \dots, p\}$. Тогда имеем $T\langle i_1, \delta_{i_1} \rangle \dots \langle i_q, \delta_{i_q} \rangle = \Lambda \in$ НС. Пусть система (6.7) совместна на C_{n+1} и $\bar{a}_0$ — некоторое решение этой системы, принадлежащее множеству C_{n+1}. Тогда для некоторого $j \in \{1, \dots, m\}$ имеем $\bar{a}_0 \in W_j$. Пусть, для определенности, $\bar{a}_0 \in W_1$. Тогда по определению множества $\mathcal{F}_1$ существуют функции $g_{i_1}, \dots, g_{i_{n+2}} \in \mathcal{F}_1$ и числа $\sigma_1, \dots, \sigma_{n+2} \in E_3$ такие, что элемент $\bar{a}_0$ является решением системы уравнений

$$g_{i_1}(\bar{x}) = \sigma_1, \dots, g_{i_{n+2}}(\bar{x}) = \sigma_{n+2}$$

и множество W решений этой системы на $\mathbb{R}^{n+1}$ является подмножеством множества W_1. Поскольку $g_{i_1}, \dots, g_{i_{n+2}} \in \mathcal{F}$, $\sigma_1 = \delta_{i_1}, \dots, \sigma_{n+2} = \delta_{i_{n+2}}$.

Нетрудно заметить, что на множестве W_1 функция $\Phi^{\varkappa}$ постоянна. Отсюда и из (6.4) следует, что на множестве W_1 функция Φ_1 также постоянна. Поэтому функция Φ_1 постоянна на множестве W. Следовательно, $T\langle i_1, \delta_{i_1}\rangle \dots \langle i_{n+2}, \delta_{i_{n+2}}\rangle \in \text{НС}$, т. е. выполняется неравенство (6.6).

Пусть $T^* \in H_3$, $M(T^*) \leqslant a$, $N(T^*) \leqslant 2b$, $a \geqslant 4$ и $b \geqslant 1$. Тогда, используя предложение 2.1, нетрудно показать, что $h(T^*) \leqslant a + (a \log_2 b)/\log_2 a$. Отсюда, из неравенства $d \leqslant k$ и (6.5), (6.6) следует, что

$$\begin{aligned} h(T) &\leqslant n + 3 + 2(n+3)(n+1)^2 \log_2(k + 2n + 2)/\log_2(n+3) \\ &\leqslant 2(n+2)^3 \log_2(k + 2n + 2)/\log_2(n+2) - 2n. \end{aligned} \tag{6.9}$$

С помощью предложения 3.2 убеждаемся в существовании дерева решений Г, реализующего на множестве C_{n+1} функцию Φ_1, такого, что $F(\Gamma_1) \subseteq \{g_1, \dots, g_p\}$ и

$$h(\Gamma_1) = h(T). \tag{6.10}$$

Используя неравенство (6.2), получаем

$$r(\Gamma_1) \leqslant 2(n+1)^2(1 + t + \log_2(n+1)) - 1. \tag{6.11}$$

Из (6.4) следует, что дерево решений Γ_1 реализует на множестве C_{n+1} функцию $\Phi^{\varkappa}$. Отсюда и из леммы 5.3 вытекает существование дерева решений Г с проверками из $S_n(K)$, реализующего на множестве $\mathbb{R}^n$ функцию Φ такого, что $h(\Gamma) \leqslant h(\Gamma_1) + 2n$ и $r(\Gamma) \leqslant r(\Gamma_1) + 1$. Пользуясь этим фактом и (6.9)–(6.11), имеем

$$\begin{aligned} h(\Gamma) &\leqslant (2(n+2)^3 \log_2(k + 2n + 2))/(\log_2(n+2)), \\ r(\Gamma) &\leqslant 2(n+1)^2(1 + t + \log_2(n+1)). \end{aligned}$$

Предложение 6.1 доказано.

Пусть $S = S(A, K, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ — система квазилинейных проверок. Определим взаимно однозначное отображение $\vartheta\colon S \to S_n(K)$. Допустим, что $f(x) = s(\sum_{i=1}^n a_i\varphi_i(x) + a_{n+1}) \in S$. Тогда $\vartheta f(\bar{x}) = s(\sum_{i=1}^n a_i x_i + a_{n+1})$. Отображение, обратное к ϑ, обозначим через ϑ^{-1}.

Доказательство теоремы 1.1. Пусть $k \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}^+$ и $\langle B, \psi\rangle$ является $\langle n, k, t\rangle$-задачей с проверками из S. Далее, пусть $\langle B, \nu, f_1, \dots, f_m\rangle$ — представление этой задачи с проверками из S такое, что $m \leqslant k$ и $r(f_i) \leqslant t$ при $i = 1, \dots, m$.

Обозначим через $\langle \mathbb{R}^n, \psi^*\rangle$ задачу с проверками из $S_n(K)$, представлением которой с проверками из $S_n(K)$ является набор $\langle \mathbb{R}^n, \nu, \vartheta f_1, \dots, \vartheta f_m\rangle$. Очевидно, эта задача является $\langle n, k, t\rangle$-задачей с проверками из $S_n(K)$. Из предложения 6.1 следует существование решающего задачу $\langle \mathbb{R}^n, \psi^*\rangle$ дерева решений Γ_1 с проверками из $S_n(K)$ такого, что

$$\begin{aligned} h(\Gamma_1) &\leqslant (2(n+2)^3 \log_2(k + 2n + 2))/(\log_2(n+2)), \\ r(\Gamma_1) &\leqslant 2(n+1)^2(1 + t + \log_2(n+1)). \end{aligned}$$

Для каждой рабочей вершины дерева решений Γ_1 приписанную ей проверку $f \in S_n(K)$ заменим проверкой $\vartheta^{-1} f \in S$. Пусть Г — дерево решений с проверками из S, полученное в результате этой замены. Нетрудно показать, что $r(\Gamma) = r(\Gamma_1)$, $h(\Gamma) = h(\Gamma_1)$ и дерево решений Г решает задачу $\langle B, \psi\rangle$. Теорема 1.1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Dobkin D., Lipton R. J.** Multidimensional searching problems // SIAM J. Comput. 1976. V. 5, N 2. P. 181–186.
2. **Мошков М. Ю.** Об условных тестах // Докл. АН СССР. 1982. Т. 265, № 3. С. 550–552.
3. **Мошков М. Ю.** Тестовый подход к экстремальным комбинаторным задачам. Дис... канд. физ.-мат. наук: 01.01.09. М., 1982.
4. **Meyer auf der Heide F.** A polynominal linear search algorithm for the n-dimensional knapsack problem // J. Assoc. Comput. Mach. 1984. V. 31, N 3. P. 668–676.
5. **Чегис И. А., Яблонский С. В.** Логические способы контроля работы электрических систем // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1958. Т. 51. С. 270–360.
6. **Karp R. M.** Reducibility among combinatorial problems // Complexity of computer computations. New York; London: Plenum Press, 1972. P. 85–103.
7. **Мошков М. Ю.** Условные тесты // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1983. Вып. 40. С. 131–170.
8. **Курош А. Г.** Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1975.
9. **Черников С. Н.** Линейные неравенства. М.: Наука, 1968.