

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СХЕМ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ К ВИДУ, УДОБНОМУ ДЛЯ КОНТРОЛЯ

В. Н. Носков

Введение

Известно [1, 2], что многие управляющие системы неудобны для контроля правильности их функционирования. Даже минимальные тесты, контролирующие эти системы, имеют такую высокую сложность, что, применяя их, невозможно проверить системы в реальное время. Одним из наиболее перспективных направлений развития теории тестов представляется направление, связанное с поиском методов синтеза легко тестируемых систем. С. Редди [3], А. П. Горяшко [2], В. И. Шевченко [4], Н. П. Редькин [5] и ряд других авторов предложили методы синтеза таких схем. Обычно ограничиваются рассмотрением неисправностей, связанных с неправильной работой базисных элементов схемы. Предложенные методы синтеза схем накладывают ограничения на класс допустимых неисправностей (самым изученным оказался класс константных неисправностей на входах и выходах элементов схем). Кроме того, применение этих методов, как правило, возможно лишь при использовании элементного базиса, на который кроме требования функциональной полноты накладываются и другие весьма существенные ограничения.

В [6–8] мы предложили новые методы синтеза удобных для контроля комбинационных схем, для которых класс допустимых неисправностей значительно шире, чем обычно предполагается, а на элементный базис не накладывается никаких ограничений, кроме условия функциональной полноты. Эти методы позволяют строить легко тестируемые схемы, реализующие булевы функции. При этом для почти всех булевых функций синтезируемые схемы таковы, что они имеют сложность, асимптотически совпадающую со сложностью минимальных схем, к которым не предъявляется требований, связанных с удобством их тестирования.

Метод синтеза схем, предлагаемый в настоящей статье, позволяет преобразовать произвольную заданную схему из функциональных элементов в легко тестируемую схему. Наряду с этим в работе дана и верхняя оценка сложности преобразованной схемы.

Преобразования схем могут быть применены и к произвольной части схемы с сохранением неизменной оставшейся части. Получаемая схема может мало отличаться по сложности от исходной, если выделенная часть имеет относительно малую сложность по сравнению со сложностью исходной схемы. Такие постановки естественны для ряда практических задач,

где добиваются быстрого контроля наиболее ответственной части всей системы.

Возможность эффективного контроля выделенной части схемы приводит и к следующему полезному применению указанных преобразований схем. Оно связано с синтезом самокорректирующихся схем из функциональных элементов. Все методы синтеза таких схем предполагают реализацию некоторой части схемы только надежными элементами, что на практике не всегда возможно. Используя эффективный контроль соответствующей части схемы, мы можем заменить ее схемой из обычных (не высоконадежных) элементов, которая, однако, является легко тестируемой. Полагая, что при достаточно частой диагностике схемы обеспечивается заданный уровень ее надежности на короткие временные промежутки между проверками схемы, мы сможем преобразовать известные методы синтеза самокорректирующихся схем с заданным уровнем надежности к методам построения подобных схем в ненадежных базисах.

Преобразованная схема моделирует исходную. Она имеет на три входа больше, чем исходная, и один дополнительный выход. Причем если зафиксированы постоянные значения на дополнительных входах, то на основных выходах преобразованной схемы реализуются те же функции, что и на выходах исходной схемы.

Пусть S — произвольная схема из функциональных элементов, реализующая в некотором произвольном базисе функциональных элементов $\mathfrak{B} = \{\varphi_i\}$, $i = 1, \dots, p$, систему q произвольных булевых функций от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$. Обозначим через $a_1, \dots, a_q$ выходы схемы S . Выделим в S произвольное подмножество ее функциональных элементов и обозначим его через B . Множество оставшихся в S элементов обозначим через A . Представим схему S в виде соединения частей A и B , как это показано на рис. 1.

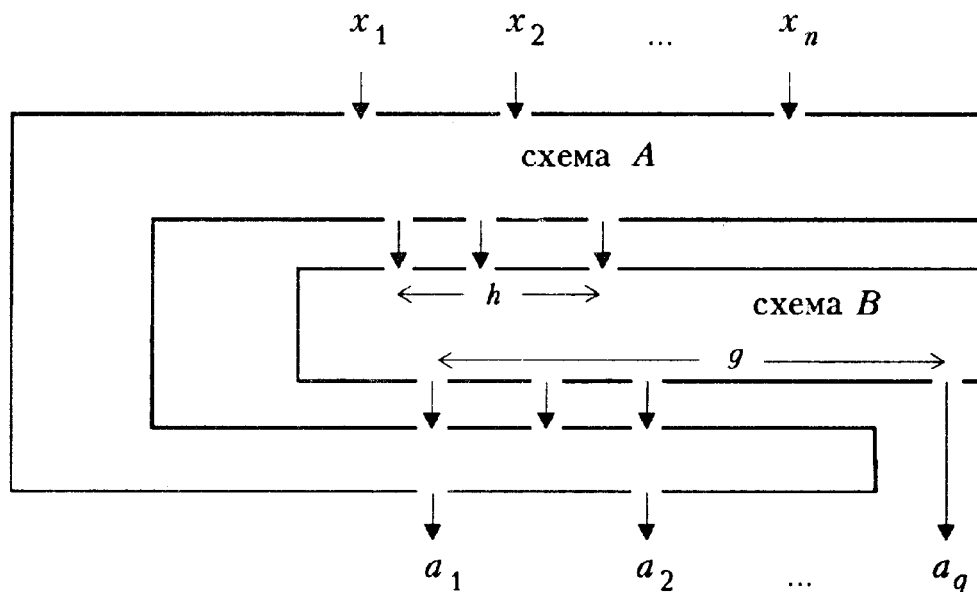


Рис. 1. Схема $S(A, B, x_1, \dots, x_n)$

Обозначим через $S(A, B, x_1, \dots, x_n)$ схему S с выделенными в ней частями A и B . Пусть схема B имеет h входов, g выходов. Пусть C — некоторая схема из функциональных элементов, имеющая $h + n + 3$ входов и $g + 1$ выходов. Образует схему $S(A, C, x_1, \dots, x_{n+3})$, заменив в

$S(A, B, x_1, \dots, x_n)$ схему B схемой C . Схема $S(A, C, x_1, \dots, x_{n+3})$ показана на рис. 2.

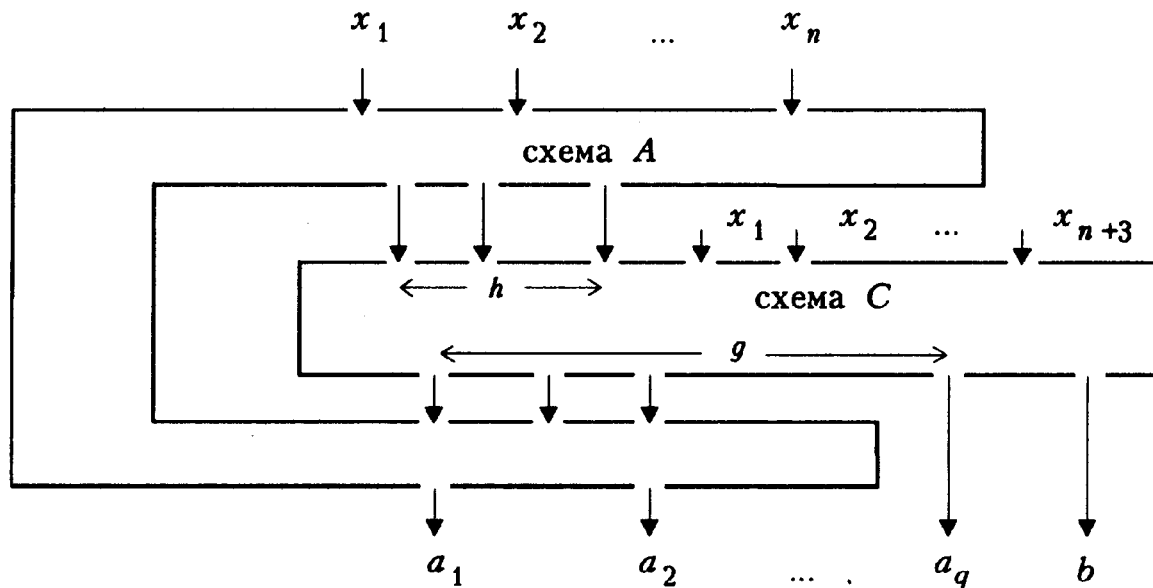


Рис. 2. Схема $S(A, C, x_1, \dots, x_{n+3})$

Обозначим через $S_a(A, C, x_1, \dots, x_{n+3})$ и $S_a(A, B, x_1, \dots, x_n)$ вектор-функции, реализующиеся на выходах $a_1, \dots, a_q$ схем $S(A, C, x_1, \dots, x_{n+3})$ и $S(A, B, x_1, \dots, x_n)$ соответственно, а через $S_b(A, C, x_1, \dots, x_{n+3})$ — функцию, реализующуюся на выходе b схемы $S(A, C, x_1, \dots, x_{n+3})$.

Допустимые неисправности в схеме $S(A, C, x_1, \dots, x_{n+3})$. Полагаем, что в подсхеме A схемы $S(A, C, x_1, \dots, x_{n+3})$ могут возникать только такие неисправности, что неисправная схема A остается комбинационной с теми же входными и выходными полюсами.

Пусть β — один из элементов схемы C , имеющий t входов и один выход, а $v_1, \dots, v_t$ — входные полюса элемента β . При функционировании схемы C через эти полюса проходят сигналы двух видов: 0 и 1. Считаем $v_1, \dots, v_t$ булевыми переменными. В схеме C на выходе элемента β реализуется булева функция $\beta(v_1, \dots, v_t)$. Полагаем также, что при появлении в схеме C неисправностей элемент β может превратиться в элемент β^* , реализующий произвольную булеву функцию $\beta^*(v_1, \dots, v_t)$, зависящую от переменных $v_1, \dots, v_t$. Условимся, что в схеме C могут быть неисправными одновременно не более m элементов. Описанные здесь неисправности схем A и C будем называть *допустимыми*.

Введем следующие обозначения:

- ◇ A^* — одна из схем, в которую может превратиться схема A при появлении в ней допустимых неисправностей;
- ◇ C^* — одна из схем, в которую может превратиться схема C при появлении в ней допустимых неисправностей;
- ◇ $S(A^*, C^*, x_1, \dots, x_{n+3})$ — схема, в которую превращается схема $S(A, C, x_1, \dots, x_{n+3})$, когда ее подсхемы A и C превращаются в схемы A^* и C^* соответственно;
- ◇ $|T|$ — мощность множества T ;
- ◇ $L(D)$ — сложность произвольной схемы D ;
- ◇ $r = \max_{i=1, \dots, \rho} r(i)$, где $r(i)$ — число входов базисного элемента φ_i .

Сформулируем основное утверждение данной статьи.

Теорема 1. Пусть $m < n$, $r < n$. Тогда в произвольном полном базисе можно построить схему C и указать в $\{0, 1\}^{n+3}$ такое подмножество T , что

- (а) если при всех $(x_1, \dots, x_{n+3}) \in T$ для любых A^* и C^* выполняется равенство $S_b(A^*, C^*, x_1, \dots, x_{n+3}) = S_b(A, C, x_1, \dots, x_{n+3})$, то

$$S_a(A^*, C^*, x_1, \dots, x_n) = S_a(A^*, B, x_1, \dots, x_n, 0, 0, 0)$$

при любых $(x_1, \dots, x_n) \in 0, 1^n$;

- (б) сложность $L(C)$ схемы C допускает оценку

$$L(C) \leq \begin{cases} km(L(S) + mn), & \text{если схемы } B \text{ и } S(A, B, x_1, \dots, x_n) \text{ совпадают,} \\ km^2 L(B) & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где k — константа, зависящая от базиса;

- (в) мощность множества T равна $3 \cdot 2^{r+1} + 2^{m+1}$.

§ 1. Схема C в $S(A, C, x_1, \dots, x_{n+3})$

Всюду далее предполагается, что выполнены неравенства $m < n$, $r < n$. Схема C есть соединение двух схем, обозначаемых через B_2 и B_3 . Множества входов и выходов схемы B являются соответственно подмножествами множеств входов и выходов схемы B_2 . Некоторые полюса схемы B_2 (а именно полюса из множества $\mathfrak{A}$) являются входами схемы B_3 . Соединение схем A , B_2 , B_3 показано на рис. 3.

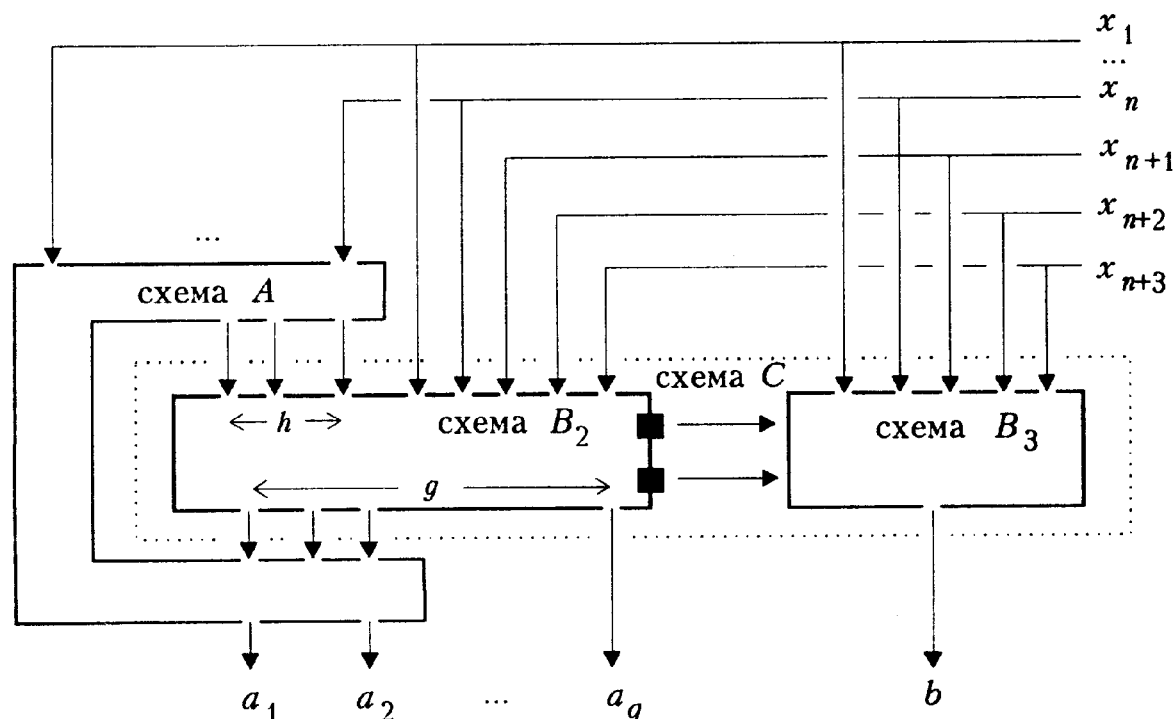


Рис. 3. Схема $S(A, C, x_1, \dots, x_{n+3})$

Ниже (в пп. 1.1–1.3) описана структура схем B_2 , B_3 и приведены оценки их сложности. Оценки даны для схем в базисе $(\vee, \wedge, -)$. Это не ограничивает общности рассуждений, поскольку при переходе к другому конечному базису в верхних оценках меняются лишь константы, связанные с базисом.

Опишем структуру B_2 и B_3 . Схема B_2 как часть схемы $S(A, C, x_1, \dots, x_{n+3})$ может быть получена двумя последовательными преобразованиями схемы $S(A, B, x_1, \dots, x_n)$.

1.1. Первое преобразование схемы $S(A, B, x_1, \dots, x_n)$. При этом преобразовании схема B преобразуется в схему B_1 .

(а) Пусть B совпадает с $S(A, B, x_1, \dots, x_n)$. Тогда полагаем, что первое преобразование является тождественным: оно сохраняет неизменной схему $S(A, B, x_1, \dots, x_n)$, т. е. схема B_1 совпадает со схемой B . Поэтому

$$L(B_1) = L(B). \quad (1.1)$$

(б) Пусть B не совпадает со всей схемой $S(A, B, x_1, \dots, x_n)$. Рассмотрим схему R (рис. 4). Опишем ее подсхемы Q , D и приведем верхние оценки сложности их реализации в базисе $(\vee, \wedge, -)$.

Схема Q . Если на 1-, 2-, 3-й входы подаются значения u, v, w соответственно, то на выходе реализуется функция $\bar{u}v \vee uw$. Ясно, что Q можно реализовать схемой, сложность $L(Q)$ которой удовлетворяет неравенству

$$L(Q) \leq 4. \quad (1.2)$$

Схема D . Она осуществляет отображение $(a_1, \dots, a_{2m+1}) \rightarrow b$, где

$$b = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{i=1}^{2m+1} a_i > m, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (1.3)$$

Функция, определяемая соотношением (1.3), является симметрической булевой функцией от $2m + 1$ переменных. Известно (см., например, [9, теорема 8]), что симметрическую булеву функцию можно реализовать в базисе $(\vee, \wedge, -)$ схемой сложности $L(D)$ так, что выполняется неравенство

$$L(D) < C_0 m, \quad C_0 = \text{const.} \quad (1.4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из структуры схемы R легко увидеть, что если в этой

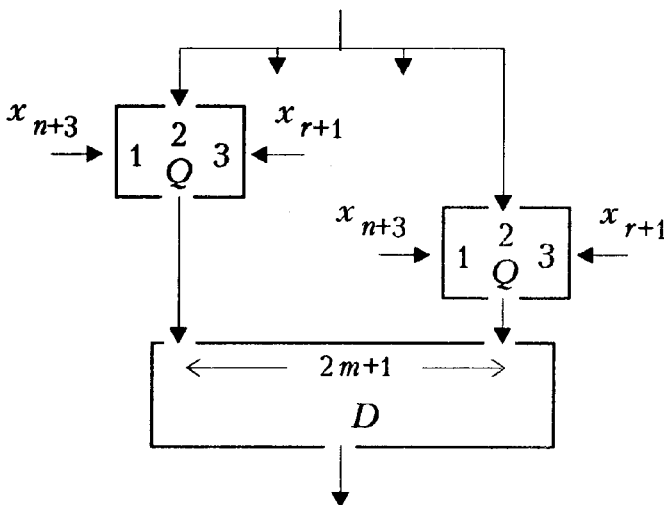


Рис. 4. Схема R

схеме неисправны не более чем m схем типа Q , а схема D исправна, то R самокорректирующаяся.

Пусть $u_1, \dots, u_h$ — полюса схемы A , к которым в $S(A, B, x_1, \dots, x_n)$ подключены входные полюса схемы B . Выполним следующие преобразования. Вход схемы B отключим от полюса u_1 и подключим к выходу схемы R (см. рис. 4), а вход U схемы R подключим к полюсу u_1 . Аналогичные подключения проведем для полюсов $u_2, \dots, u_h$, используя каждый раз новый экземпляр схемы R .

В результате на линиях между полюсами $u_1, \dots, u_h$ и входными полюсами схемы B появятся h одинаковых схем R .

Будем называть описанное преобразование *первым преобразованием* схемы $S(A, B, x_1, \dots, x_n)$. Преобразованная схема изображена на рис. 5. Пунктирной линией ограничена схема, которую считаем схемой B_1 .

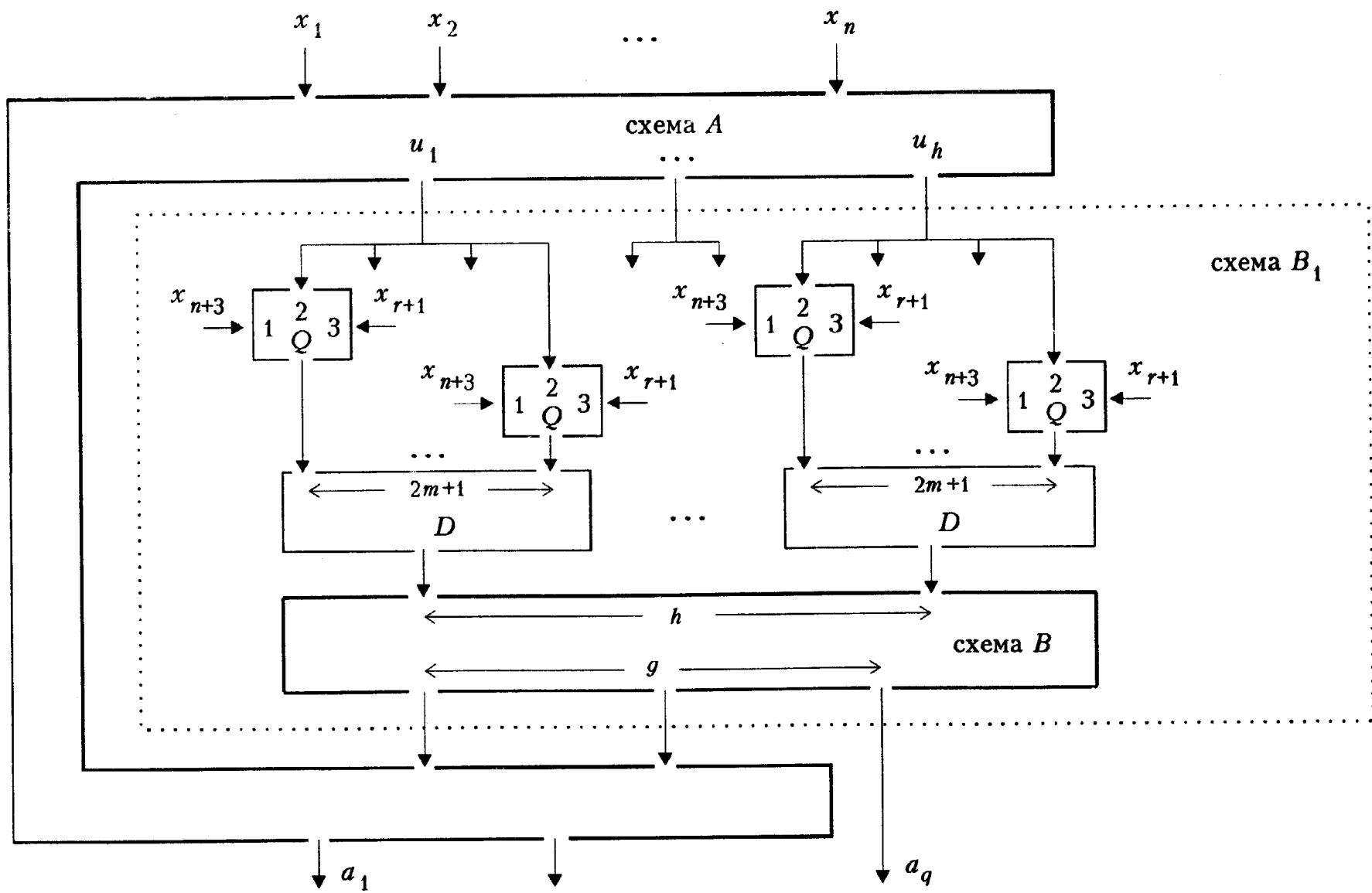


Рис. 5. Схема, полученная из $S(A, B, x_1, \dots, x_n)$ первым преобразованием

Сложность схемы B . Из рис. 5 видно, что

$$L(B_1) = L(B) + \{(2m + 1)L(Q) + L(D)\}h.$$

Ввиду (1.2), (1.3), (1.4) получаем неравенство

$$L(B_1) \leq L(B) + \{4(2m + 1) + C_0 m\}h.$$

Поскольку $h \leq rL(B)$, имеем

$$L(B_1) < c_1 mL(B), \quad (1.5)$$

где c_1 — константа, зависящая лишь от базиса схемы.

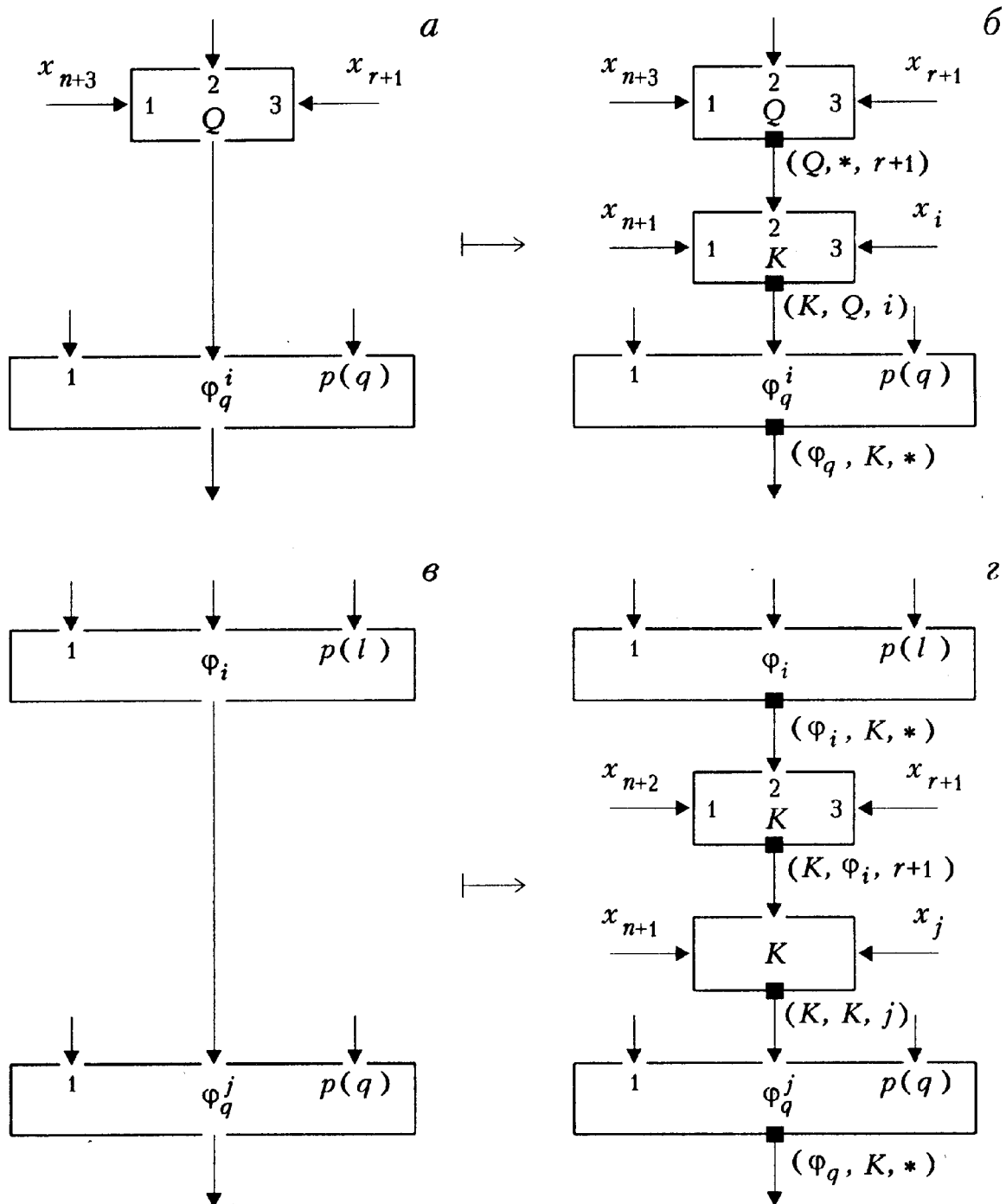


Рис. 6.1. Фрагменты второго преобразования:
a — схема U , *б* — схема U^1 , *в* — схема V , *г* — схема V^1

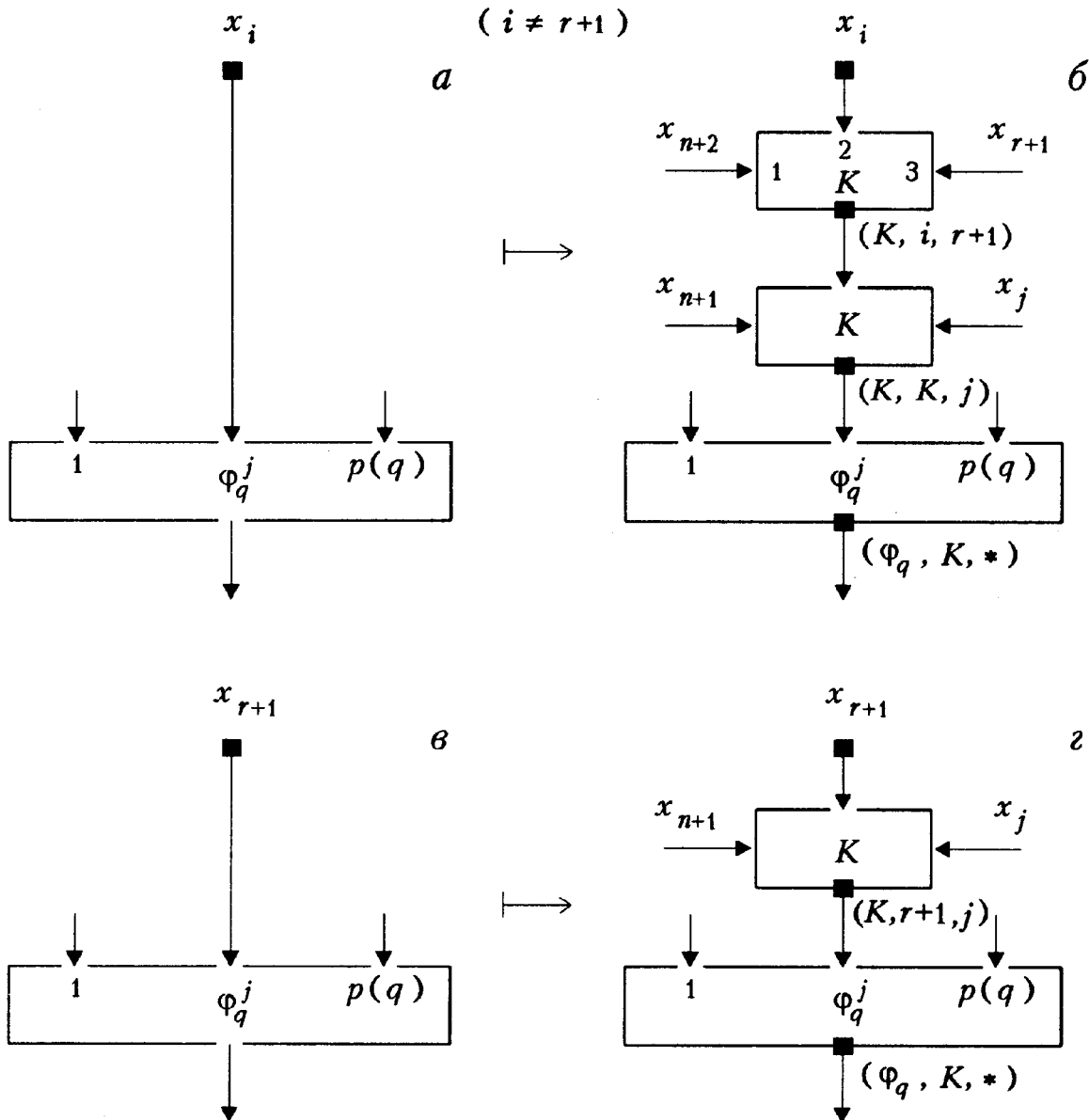


Рис. 6.2. Фрагменты второго преобразования:
a — схема *W*, *б* — схема *W*¹, *в* — схема *Z*, *г* — схема *Z*¹

1.2. Второе преобразование схемы $S(A, B, x_1, \dots, x_n)$. Дальнейшее рассмотрение связано с добавлением схем типа K на линиях, соединяющих некоторые пары элементов в схеме B_1 . При этом преобразовании схема B_1 преобразуется в схему B_2 . Выходы некоторых элементов схемы B_2 получают метки, являющиеся трехразрядными векторами. Эти операции показаны на рис. 6.1 и 6.2.

Пусть U, V, W, Z — фрагменты схемы B_1 , а φ_i, φ_q — базисные элементы. Тогда U^1, V^1, W^1, Z^1 — схемы, которые замещают соответственно U, V, W, Z при рассматриваемом преобразовании $S(A, B, x_1, \dots, x_n)$. Причем, для всех фрагментов схемы B_1 типа U, V, W, Z (см. рис. 6.1, *a, в* и 6.2, *a, в*), а также для всех схем, полученных из B_1 такими операциями, аналогичные преобразования проводятся до тех пор, пока в результате не получится схема, не содержащая ни одного фрагмента вида, показанного на рис. 6.1, *a, в* и 6.2, *a, в*. Отметим, что преобразование вида $V \mapsto V^1$ (рис. 6.1, *a, г*) проводится только в случаях, когда базисный элемент φ_i , изображенный на рис. 6.1, *в*, находится вне блоков Q и K .

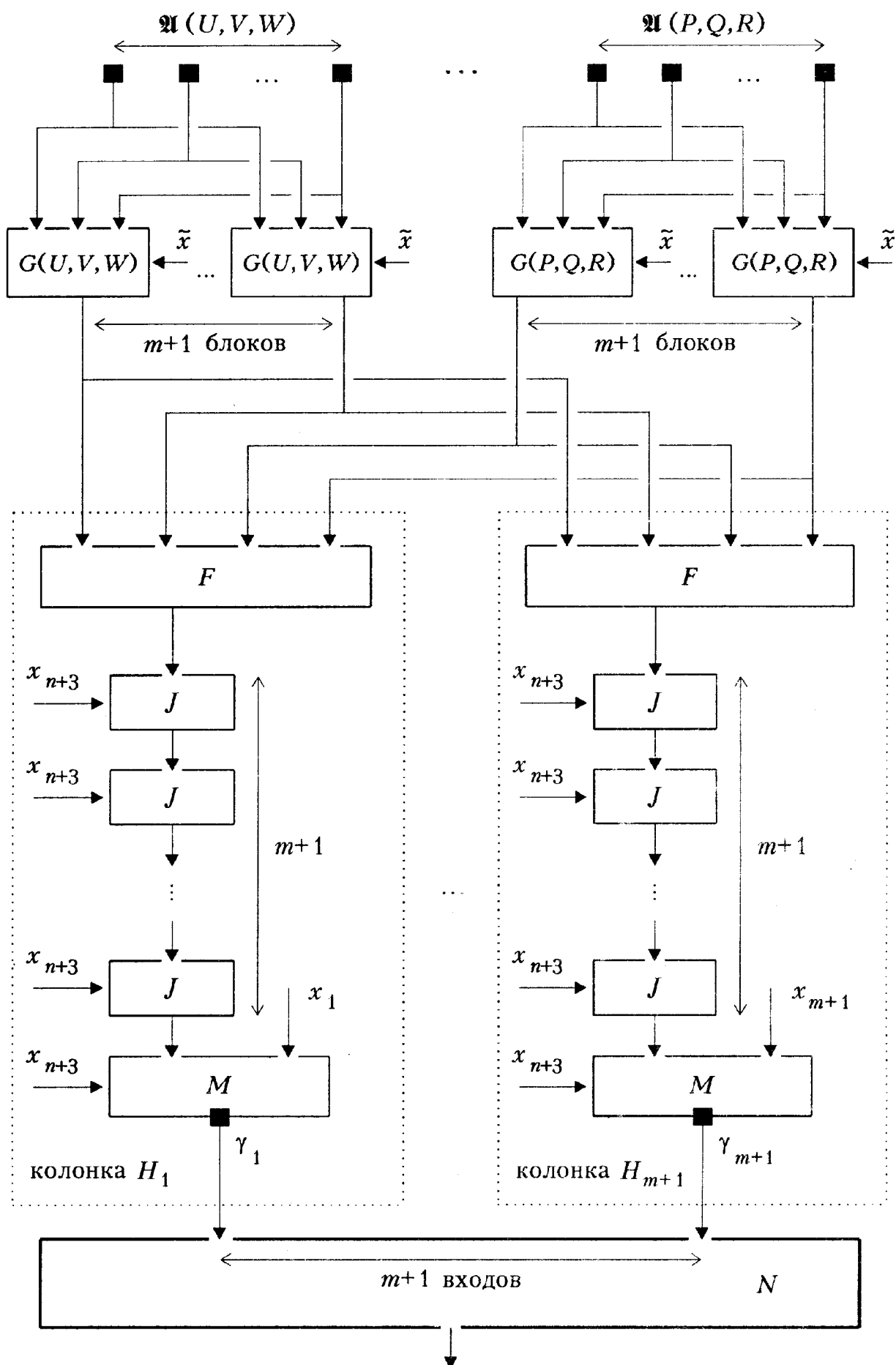


Рис. 7. Схема В

Опишем схему K , фигурирующую на этих рисунках. Схема K имеет три входа и один выход. Пусть на входы с номерами 1, 2, 3 схемы K подаются значения x, y, z соответственно. Тогда на выходе схемы K реализуется функция $\bar{x}y \vee xz$.

Обозначим через B_2 схему, полученную из схемы B_1 с помощью указанных процедур, которые в итоге задают *второе преобразование схемы* $S(A, B, x_1, \dots, x_n)$.

- Элементы схемы B_2 , находящиеся вне схем K и Q , назовем *выделенным*.

Метки полюсов в B_2 . Всем выходам схем Q, K и выходам выделенных элементов ставятся в соответствие трехразрядные векторы так, как это показано на рис. 6, а–б, г.

- ◇ Выходы схем Q получают метки $(Q, *, r + 1)$.
- ◇ Пусть вход схемы K подключен к выходу схемы Q , а выход схемы K подключен к i -му входу выделенного элемента. Тогда выход рассматриваемой схемы K получает метку (K, Q, i) .
- ◇ Выходам выделенных элементов φ_i даются метки $(\varphi_i, K, *)$, где $i = 1, \dots, p$.
- ◇ Выход схемы K , вход которой подключен к выходу базисного элемента φ_i ($i = 1, \dots, p$), получает метку $(K, \varphi_i, r + 1)$.
- ◇ Выход схемы K , вход которой подключен к полюсу x_i ($i \neq r + 1$), получает метку $(K, i, r + 1)$.
- ◇ Пусть вход схемы K подключен к полюсу x_{r+1} , а выход — к j -му входу выделенного элемента. Тогда выход схемы K получает метку $(K, r + 1, j)$.
- ◇ Пусть вход схемы K подключен к полюсу с меткой $(K, i, r + 1)$ или к полюсу с меткой $(K, \varphi_i, r + 1)$, а выход — к j -му входу выделенного элемента. Тогда выход схемы K получает метку (K, K, j) .

Множество полюсов $\mathcal{A}$. Множество всех полюсов с метками-векторами обозначим через $\mathcal{A}$.

Сложность схемы B_2 . Схема B_2 образуется из схемы B_1 добавлением к ней не более чем $2rL(B)$ схем типа K , каждая из которых имеет сложность, не превышающую 4. В силу (1.1), (1.5)

$$L(B_2) < c_2 L(S), \quad \text{если } B \text{ совпадает со всей схемой } S(A, B, x_1, \dots, x_n); \quad (1.6)$$

$$L(B_2) < c_2 mL(B) \quad \text{в остальных случаях,} \quad (1.7)$$

где $c_2 = \text{const}$.

1.3. Структура схемы B_3 . Общий вид схемы B_3 представлен на рис. 7. Схема B_3 является соединением схем типов $G(U, V, W)$, F , J , M , N , которые будут описаны ниже. Входами схемы B_3 служат внешние полюса $x_1, \dots, x_{n+3}$ схемы $S(A, C, x_1, \dots, x_{n+3})$, а также полюса множества $\mathcal{A}$ схемы B_2 . В основе сжатия информации, снимаемой с полюсов из $\mathcal{A}$ лежит работа схем $G(U, V, W)$, которые являются индикаторами правильности значений сигналов на некоторых внутренних полюсах схемы B_2 , появляющихся там при ее тестировании. Схемы F , N также служат сжатию информации, а части схемы B_3 , состоящие из схем типа J , M , — для организации контроля схемы N . Схема N — это единственная схема в B_3 , которая при тестировании схемы C подвергается контролю. Устойчивая работа схемы B_3 при допустимых неисправностях обеспечивается многократным дублированием некоторых ее частей.

Опишем подсхемы G, F, J, S, N схемы B_3 и оценим сложность их реализации в базисе $(\wedge, \vee, -)$.

Схемы $G(U, V, W)$. Разобьем множество полюсов $\mathfrak{A}$ на классы $\mathfrak{A}(U, V, W)$, объединяя в один класс полюса из $\mathfrak{A}$ с одинаковыми метками-векторами:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} = & \mathfrak{A}(Q, *, r+1) \cup \bigcup_{i=1}^r \mathfrak{A}(K, Q, i) \cup \bigcup_{i=1}^{\rho} \mathfrak{A}(\varphi_i, K, *) \cup \bigcup_{i=1}^{\rho} \mathfrak{A}(K, \varphi_i, r+1) \\ & \cup \bigcup_{i=1}^r \mathfrak{A}(K, K, i) \cup \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{A}(K, i, r+1) \cup \bigcup_{j=1}^r \mathfrak{A}(K, r+1, j). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Обозначим через $\Omega(\mathfrak{A})$ множество всех троек (U, V, W) , фигурирующих при задании всех непустых множеств $\mathfrak{A}(U, V, W)$. Очевидно, что

$$|\Omega(\mathfrak{A})| \leq 2p + 3r + 1 + \min(n, rL(B)). \quad (1.9)$$

(Здесь мы учли, что мощность множества тех троек $(K, i, r+1)$ из семейства $\{(K, i, r+1)\}_{i=1, \dots, n}$, которые порождают непустые множества $\mathfrak{A}(K, i, r+1)$, не превышает величины $\min(n, rL(B))$).

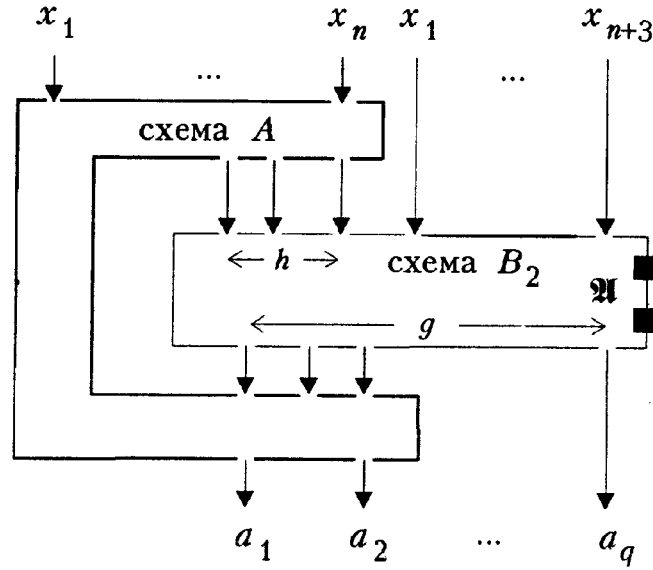


Рис. 8. Схема $S(A, B_2, x_1, \dots, x_{n+3})$

Рассмотрим схему $S(A, B_2, x_1, \dots, x_{n+3})$, изображенную на рис. 8. Схема получена из $S(A, B, x_1, \dots, x_n)$ заменой схемы B описанной выше схемой B_2 . Пусть $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{n+3})$, $\beta \in \mathfrak{A}$, и $\beta(A, B_2, \tilde{x})$ — функция, реализующаяся в схеме $S(A, B_2, x_1, \dots, x_{n+3})$ на полюсе β . Определим функции $g(A, B_2, U, V, W, \tilde{x})$:

$$g(A, B_2, Q, *, r+1, \tilde{x}) = \bigvee_{\gamma=0,1} x_{r+1}^{\gamma} \bigwedge_{\beta \in \mathfrak{A}(Q, *, r+1)} \beta^{\gamma}(A, B_2, \tilde{x}); \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} g(A, B_2, K, Q, j, \tilde{x}) = & \{(\bigvee_{\gamma=0,1} x_j^{\gamma} \bigwedge_{\beta \in \mathfrak{A}(K, Q, j)} \beta^{\gamma}(A, B_2, \tilde{x})) \vee \bar{x}_{n+1}\} \\ & \wedge \{(\bigvee_{\gamma=0,1} x_{r+1}^{\gamma} \bigwedge_{\beta \in \mathfrak{A}(K, Q, j)} \beta^{\gamma}(A, B_2, \tilde{x})) \vee x_{n+1}\}; \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$g(A, B_2, \varphi_i, K, *, \tilde{x}) = \left\{ \bigvee_{\gamma=0,1} \varphi_i^\gamma(x_1, \dots, x_{\rho(i)}) \bigwedge_{\beta \in \mathfrak{A}(\varphi_i, K, *)} \beta^\gamma(A, B_2, \tilde{x}) \right\} \vee \bar{x}_{n+1}; \quad (1.12)$$

$$g(A, B_2, K, \varphi_i, r+1, \tilde{x}) = \left\{ \left(\bigvee_{\gamma=0,1} x_{r+1}^\gamma \bigwedge_{\beta \in \mathfrak{A}(K, \varphi_i, r+1)} \beta^\gamma(A, B_2, \tilde{x}) \right) \vee \bar{x}_{n+2} \right\} \\ \wedge \left\{ \left(\bigvee_{\gamma=0,1} \varphi_i^\gamma(x_1, \dots, x_{\rho(i)}) \bigwedge_{\beta \in \mathfrak{A}(K, \varphi_i, r+1)} \beta^\gamma(A, B_2, \tilde{x}) \right) \vee \bar{x}_{n+1} \vee x_{n+2} \right\}; \quad (1.13)$$

$$g(A, B_2, K, K, j, \tilde{x}) = \left\{ \left(\bigvee_{\gamma=0,1} x_j^\gamma \bigwedge_{\beta \in \mathfrak{A}(K, K, j)} \beta^\gamma(A, B_2, \tilde{x}) \right) \vee \bar{x}_{n+1} \right\} \\ \wedge \left\{ \left(\bigvee_{\gamma=0,1} x_{r+1}^\gamma \bigwedge_{\beta \in \mathfrak{A}(K, K, j)} \beta^\gamma(A, B_2, \tilde{x}) \right) \vee (x_{n+1} \vee \bar{x}_{n+2}) \right\}; \quad (1.14)$$

$$g(A, B_2, K, i, r+1, \tilde{x}) = \left\{ \left(\bigvee_{\gamma=0,1} x_{r+1}^\gamma \bigwedge_{\beta \in \mathfrak{A}(K, i, r+1)} \beta^\gamma(A, B_2, \tilde{x}) \right) \vee \bar{x}_{n+2} \right\} \\ \wedge \left\{ \left(\bigvee_{\gamma=0,1} x_i^\gamma \bigwedge_{\beta \in \mathfrak{A}(K, i, r+1)} \beta^\gamma(A, B_2, \tilde{x}) \right) \vee x_{n+2} \right\}; \quad (1.15)$$

$$g(A, B_2, K, r+1, j, \tilde{x}) = \left\{ \left(\bigvee_{\gamma=0,1} x_j^\gamma \bigwedge_{\beta \in \mathfrak{A}(K, r+1, j)} \beta^\gamma(A, B_2, \tilde{x}) \right) \vee \bar{x}_{n+1} \right\} \\ \wedge \left\{ \left(\bigvee_{\gamma=0,1} x_{r+1}^\gamma \bigwedge_{\beta \in \mathfrak{A}(K, r+1, j)} \beta^\gamma(A, B_2, \tilde{x}) \right) \vee x_{n+1} \right\}. \quad (1.16)$$

Схема $G(U, V, W)$ имеет $|\mathfrak{A}(U, V, W)| + n + 3$ входов, подключенных в схеме C к полюсам из $\mathfrak{A}(U, V, W)$ и к полюсам $x_1, \dots, x_{n+3}$. В схеме $S(A, C, x_1, \dots, x_{n+3})$ на выходе подсхемы $G(U, V, W)$ реализуется функция $g(A, B_2, U, V, W, \tilde{x})$, определенная одним из равенств (1.10)–(1.16).

Схема F . Входы схемы F подключены ко всем выходам всех схем $G(U, V, W)$, где $(U, V, W) \in \Omega(\mathfrak{A})$. Схема F реализует на своем выходе конъюнкцию всех подаваемых на ее входы значений.

Схема J — это такая схема, что если на ее входы подаются значения x_{n+3} и y , то на ее выходе реализуется $x_{n+3}y$.

Схема M . Если на входы схемы M подаются значения x_{n+3} , y , x_j , как это показано на рис. 9, то на выходе схемы M реализуется функция $x_{n+3}y \vee \bar{x}_{n+3}x_j$.

Схема N имеет $m + 1$ входов. На выходе схемы N реализуется конъюнкция всех поданных на ее входы значений.

В средней части схемы B_3 выделены схемы, которые мы называем колонками H_j ($j = 1, \dots, m + 1$). На рис. 7 колонки отмечены пунктирными

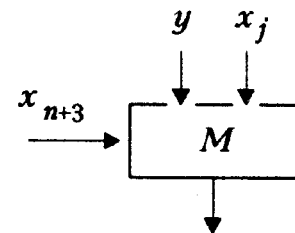


Рис. 9

линиями. В схеме B_3 выделим полюс b , который одновременно служит выходом всей схемы $S(A, C, x_1, \dots, x_{n+3})$. Через $\gamma_j(A, C, x_1, \dots, x_{n+3})$ обозначим функцию, реализующуюся в схеме $S(A, C, x_1, \dots, x_{n+3})$ на полюсе γ_j , являющемся выходом схемы M из j -й колонки.

1.4. Сложность схемы B_3 . Оценим сверху $L(B_3)$ — сложность схемы B в базисе $(\wedge, \vee, -)$. Нетрудно установить, что при любых $(U, V, W) \in \Omega(\mathfrak{A})$ для реализации одной конкретной схемы $G(U, V, W)$ требуется не более $2 \cdot |\mathfrak{A}(U, V, W)| + 12$ элементов базиса. Пусть L_1 — число базисных элементов, достаточное для реализации всех схем $G(U, V, W)$, $(U, V, W) \in \Omega(\mathfrak{A})$ в B_3 . Учитывая приведенные оценки сложности реализации одной схемы и тот факт, что каждая схема $G(U, V, W)$ дублируется в B_3 $m + 1$ раз, получаем, что

$$L_1 \leq \sum_{(U, V, W) \in \Omega(\mathfrak{A})} (m + 1)(2|\mathfrak{A}(U, V, W)| + 12) \leq 2(m + 1)|\mathfrak{A}| + 12(m + 1)|\Omega(\mathfrak{A})|.$$

В выбранном базисе формула (1.9) принимает вид

$$|\Omega(\mathfrak{A})| \leq 13 + \min(n, 2L(B)). \quad (1.17)$$

Поэтому

$$L < 2(m + 1)L(B_2) + 12(m + 1)(13 + \min(n, 2L(B))). \quad (1.18)$$

Схема B_3 содержит $m + 1$ схем типа F . Схема F , как указано выше, подключена к выходам всех схем $G(U, V, W)$, где $(U, V, W) \in \Omega(\mathfrak{A})$. В схеме B_3 имеется $(m + 1)|\Omega(\mathfrak{A})|$ таких схем. Следовательно, в силу (1.18) в базисе $(\wedge, \vee, -)$ одну схему F можно реализовать, с помощью не более $(m + 1)|\Omega(\mathfrak{A})|$ элементов базиса, а для совместной реализации всех $m + 1$ схем типа F требуется не более $(m + 1)^2|\Omega(\mathfrak{A})|$ конъюнкторов. С учетом (1.17) получаем, что для совместной реализации всех схем типа F требуется не более $(m + 1)^2(13 + \min(n, 2L(B)))$ базисных элементов.

Для реализации $(m + 1)^2$ схем типа J достаточно $(m + 1)^2$ конъюнкторов. Для реализации $(m + 1)$ схем типа M достаточно $4(m + 1)$ элементов базиса. Для реализации схемы N достаточно m конъюнкторов.

Ввиду сказанного B_3 можно реализовать схемой, сложность $L(B_3)$ которой удовлетворяет неравенству

$$L(B_3) < 2(m + 1)L(B_2) + 12(m + 1)(13 + \min(n, 2L(B))) + (m + 1)^2(13 + \min(n, 2L(B))) + (m + 1)^2 + 4(m + 1) + m.$$

Учитывая (1.6), (1.7), получаем

$$L(B_3) \leq \begin{cases} c_3 m(L(S) + mn), & \text{если схемы } B \text{ и } S(A, B, x_1, \dots, x_n) \\ & \text{совпадают,} \\ c_3 m^2 L(B) & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (1.19)$$

где c_3 — некоторая константа.

1.5. Сложность схемы C . Пусть $L(C)$ — сложность схемы C . В силу (1.19), (1.6), (1.7)

$$L(C) \leq \begin{cases} km(L(S) + mn), & \text{если схемы } B \text{ и } S(A, B, x_1, \dots, x_n) \\ & \text{совпадают,} \\ km^2 L(B) & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (1.20)$$

где k — константа, зависящая лишь от базиса.

1.6. Отображение, реализуемое схемой $S(A^*, C, x_1, \dots, x_{n+3})$.
Из описания схемы B_2 видно, что при любых $(x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$

$$S_a(A^*, B_2, x_1, \dots, x_n, 0, 0, 0) = S_a(A^*, B, x_1, \dots, x_n). \quad (1.21)$$

Далее, из описания схемы B_3 легко увидеть, что

$$S_a(A^*, B_2, x_1, \dots, x_{n+3}) = S_a(A^*, C, x_1, \dots, x_{n+3}). \quad (1.22)$$

Из (1.21), (1.22) следует, что при любых $(x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$

$$S_a(A^*, B, x_1, \dots, x_n) = S_a(A^*, C, x_1, \dots, x_n, 0, 0, 0). \quad (1.23)$$

§ 2. Контроль схемы $S(A^*, C^*, x_1, \dots, x_{n+3})$

Пусть C^* — схема, в которую превратилась схема C при появлении в ней допустимых неисправностей. Будем считать, что обозначение C^* применимо и тогда, когда в схеме C нет неисправностей.

- Назовем *блоком* схемы C^* любую ее подсхему типа K или Q , а также любой элемент из подсхемы B_2 схемы C^* , находящийся вне K и Q .

Из приведенного выше описания способа расстановки меток выходов следует, что выходам всех блоков сопоставлены метки-векторы.

Пусть α и β — два блока в схеме C^* .

- Блок α *предшествует* в схеме C^* блоку β , если выполнено одно из условий:

- (а) выход блока α соединен с входом блока β ;
- (б) при некотором натуральном числе i в схеме C^* найдется совокупность блоков $\alpha_1, \dots, \alpha_i$ таких, что выход блока α_1 соединен с входом блока α_2 , выход блока α_2 — с входом блока α_3 , и т. д.; выход блока α_i подключен к входу блока β .

Обозначим через $\mathcal{A}_{A^*, C^*, \beta}$ совокупность отмеченных метками-векторами блоков в C^* , предшествующих блоку β .

Пусть на входы схем $S(A, C, x_1, \dots, x_{n+3})$ и $S(A^*, C^*, x_1, \dots, x_{n+3})$ одновременно подан некоторый вектор $\tilde{x} \in \{0, 1\}^{n+3}$, и пусть появившиеся при этом значения на выходах блоков, принадлежащих $\mathcal{A}_{A^*, C^*, \beta}$ в схеме C^* , совпадают со значениями на выходах соответствующих блоков из $\mathcal{A}_{A, C, \beta}$. Эту ситуацию будем обозначать так: $\mathcal{A}_{A^*, C^*, \beta}(\tilde{x}) = \mathcal{A}_{A, C, \beta}(\tilde{x})$.

Пусть J — некоторое подмножество в $\{0, 1\}^{n+3}$.

- Схема $S(A^*, C^*, x_1, \dots, x_{n+3})$ называется *J -правильной относительно блока β* , если при любых $\tilde{x} \in J$ верно $\mathcal{A}_{A^*, C^*, \beta}(\tilde{x}) = \mathcal{A}_{A, C, \beta}(\tilde{x})$.
- Схема $S(A^*, C^*, x_1, \dots, x_{n+3})$ называется *J -правильной*, если при любых $\tilde{x} \in J$, $\beta \in S^*$ выполняется равенство $\beta(A^*, C^*, \tilde{x}) = \beta(A, C, \tilde{x})$. (Здесь $\beta(A^*, C^*, \tilde{x})$, $\beta(A, C, \tilde{x})$ — функции, реализующиеся в схемах $S(A^*, C^*, x_1, \dots, x_{n+3})$ и $S(A, C, x_1, \dots, x_{n+3})$ на выходах блока β .)

Допустим, что β — блок в C^* с p входами. Обозначим через $S_\beta^*(\tilde{x}) = (\beta_1(\tilde{x}), \dots, \beta_p(\tilde{x}))$ набор значений, которые появляются соответственно на 1-, 2-, ..., p -м входах блока β тогда, когда на входы $S(A^*, C^*, x_1, \dots, x_{n+3})$

подаются $\tilde{x} \in \{0, 1\}^{n+3}$. Аналогично через $S_\beta(\tilde{x})$ обозначим соответствующий набор, появляющийся на соответствующих входах блока β в исправной схеме $S(A, C, x_1, \dots, x_{n+3})$.

Пусть $S_\beta = \cup S_\beta(\tilde{x})$, где объединение берется по всем $\tilde{x} \in \{0, 1\}^{n+3}$, и пусть J — некоторое подмножество в $\{0, 1\}^{n+3}$.

- Множество J полно относительно p -входного блока β , если для любого $\tilde{g} \in S_\beta$ найдется $\tilde{a} \in J$, при котором $S_\beta^*(\tilde{a}) = \tilde{g}$.

Пусть $B'(C^*)$ — совокупность блоков схемы C^* , которые не являются блоками типа Q .

Лемма 1. Если $S(A^*, C^*, x_1, \dots, x_{n+3})$ является J -правильной схемой и множество J полно относительно любого блока из $B'(C^*)$, то при любом $\tilde{x} \in \{0, 1\}^{n+3}$ справедливо равенство

$$S_a(A^*, C^*, x_1, \dots, x_{n+3}) = S_a(A^*, C, x_1, \dots, x_{n+3}).$$

Доказательство. В условиях леммы 1 в подсхеме $B'(C^*)$ блоки, очевидно, работают правильно. Неисправными могут быть лишь некоторые блоки Q , причем их число не превышает m . Поэтому при любом $\tilde{x} \in \{0, 1\}^{n+3}$ в схемах $S(A^*, C^*, x_1, \dots, x_{n+3})$ и $S(A^*, C, x_1, \dots, x_{n+3})$ на входы соответствующих схем типа D подаются векторы, отличающиеся друг от друга не более чем в m разрядах. Нормально работающие схемы типа D исправляют в C^* все ошибки, связанные с неправильной работой блоков типа Q (см. § 1, замечание 1). Поскольку в $B'(C^*)$ правильно работают все блоки, получаем утверждение леммы 1.

Множество P . Зададим множество P , обладающее полезным для тестирования свойством: если схема $S(A^*, C^*, x_1, \dots, x_{n+3})$ является P -правильной, то P полно относительно любого блока из $B'(C^*)$. Зададим с помощью таблицы множество P , элементами которого являются векторы $\tilde{x}$ из $\{0, 1\}^{n+3}$. Считаем, что строка таблицы, в которой находится символ P_1 , задает множество P_1 всех тех векторов из $\{0, 1\}^{n+3}$, у которых компоненты с номерами $r+2, r+3, \dots, n$ равны нулю, а компоненты с номерами $n+1, n+2, n+3$ равны единице. Очевидно, что множество P_1 состоит из 2^{r+1} векторов. Аналогично определяются множества P_2 и P_3 . Тем самым таблица задает в $\{0, 1\}^{n+3}$ подмножество, состоящее из $3 \cdot 2^{r+1}$ векторов.

Множество P

Таблица

	$x_1 x_2 \dots x_{r+1}$	$x_{r+2} x_{r+3} \dots x_n$	x_{n+1}	x_{n+2}	x_{n+3}
P_1	$\{0, 1\}^{r+1}$	$x_1 \dots x_1 \dots x_1$	1	1	1
P_2	$\{0, 1\}^{r+1}$	$x_1 \dots x_1 \dots x_1$	0	1	1
P_3	$\{0, 1\}^{r+1}$	$x_1 \dots x_1 \dots x_1$	1	0	1

Лемма 2. Если $S(A^*, C^*, x_1, \dots, x_{n+3})$ — P -правильная схема, то P полно относительно любого блока β из $B'(C^*)$.

Доказательство. Пусть $S(A^*, C^*, x_1, \dots, x_{n+3})$ — P -правильная схема и β — произвольный блок из $B'(C^*)$. Рассмотрим несколько вариантов, связанных с тем, какую метку имеет выход блока β .

1. Выход блока β имеет метку (K, Q, i) . В этом случае β является блоком типа K , ему предшествует в схеме блок типа Q . Пусть $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{n+3}) \in P_1 \cup P_2$ подается на входы схемы $S(A^*, C^*, x_1, \dots, x_{n+3})$. При $\tilde{x} \in P_1 \cup P_2$ выполняется $x_{n+3} = 1$, и на входы блока β с номерами 1, 2, 3 подаются значения x_{n+1}, x_{r+1}, x_i ($i \leq r$) соответственно. Из таблицы видно, что когда $\tilde{x}$ принимает всевозможные значения из множества $P_1 \cup P_2$, тройка переменных x_{n+1}, x_{r+1}, x_i принимает все восемь значений. Следовательно, множество P полно относительно β .

2. Выход блока β имеет метку $(\varphi_i, K, *)$. В этом случае β есть базисный элемент φ_i . Пусть $p(i)$ — число входов блока β . Положим, что $\tilde{x} \in P_1$ и этот вектор подается на входы схемы $S(A^*, C^*, x_1, \dots, x_{n+3})$. Поскольку $x_{n+1} = 1$, на входы блока β с номерами 1, 2, ..., p подаются значения $x_1, \dots, x_{p(i)}$ соответственно. Таблица показывает, что когда $\tilde{x}$ принимает всевозможные значения из P_1 , набор $x_1, \dots, x_{p(i)}$ принимает все $2^{p(i)}$ значений. Из этого следует, что P полно относительно β .

3. Выход блока β имеет метку $(K, \varphi_i, r+1)$. Это означает, что β есть блок типа K , а ему предшествует в схеме блок φ_i . Пусть $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{n+3}) \in P_1 \cup P_3$ и $\tilde{x}$ подается на входы $S(A^*, C^*, x_1, \dots, x_{n+3})$. При выбранных значениях вектора $\tilde{x}$ его компонента x_{n+1} равна единице, следовательно, на входы блока β с номерами 1, 2, 3 подаются значения $x_{n+2}, \varphi_i(x_1, \dots, x_{p(i)}), x_{r+1}$ соответственно. Из таблицы видно, что когда $\tilde{x}$ принимает все значения из $P_1 \cup P_3$, набор $x_{n+2}, \varphi_i(x_1, \dots, x_{p(i)}), x_{r+1}$ принимает все значения из S_β . Это означает, что P полно относительно β .

4. Выход блока β имеет метку $(K, i, r+1), i \neq r+1$. В этом случае блок β является блоком типа K , на входы которого подаются значения переменных x_{n+2}, x_i, x_{r+1} . Если $\tilde{x}$ принимает все значения из множества $P_2 \cup P_3$, то тройка его компонент x_{n+2}, x_i, x_{r+1} принимает все восемь значений, что свидетельствует о полноте множества P относительно β .

5. Выход блока β имеет метку $(K, r+1, j)$. В этом случае β является блоком типа K , на входы которого подаются значения переменных x_{n+1}, x_{r+1}, x_j . Когда $\tilde{x}$ принимает всевозможные значения из множества $P_1 \cup P_2$, тройка переменных x_{n+1}, x_{r+1}, x_j принимает все восемь значений. Следовательно, P полно относительно β .

6. Выход блока β имеет метку (K, K, j) . В этом случае β является блоком типа K , а ему предшествует в схеме B_2 блок типа K с меткой выхода либо $(K, i, r+1)$, либо $(K, \varphi_t, r+1)$, где $i \in \{1, \dots, n\}, t \in \{1, \dots, p\}$. Когда $x_{n+2} = 1$, на входы блока β подаются значения переменных x_{n+1}, x_{r+1}, x_j . Если $\tilde{x}$ принимает все значения из $P_1 \cup P_2$, то $x_{n+2} = 1$, а тройка переменных x_{n+1}, x_{r+1}, x_j принимает все восемь значений. Это означает, что P полно относительно β .

Варианты 1–6 исчерпывают все возможности выбора меток блока β , когда $\beta \in B'(C^*)$. Лемма 2 доказана.

Очевидным следствием лемм 1, 2 является

Лемма 3. Если $S(A^*, C^*, x_1, \dots, x_{n+3})$ — P -правильная схема, то при любых $(x_1, \dots, x_{n+3}) \in \{0, 1\}^{n+3}$ имеет место соотношение

$$S_a(A^*, C^*, x_1, \dots, x_{n+3}) = S_a(A^*, C, x_1, \dots, x_{n+3}).$$

Лемма 4. При любых $(x_1, \dots, x_{n+3}) \in \mathbf{P}$ справедливо равенство

$$S_b(A, C, x_1, \dots, x_{n+3}) = 1.$$

Доказательство. Покажем сначала, что при любых $\tilde{x} \in \mathbf{P}$ выполняется равенство $g(A, B_2, U, V, W, \tilde{x}) = 1$, где $g(A, B_2, U, V, W, \tilde{x})$ определяется формулами (1.10)–(1.16).

Рассмотрим случай, когда функция $g(A, B_2, U, V, W, \tilde{x})$ определяется формулой (1.11):

$$g(A, B_2, K, Q, j, \tilde{x}) = \left\{ \left(\bigvee_{\gamma=0,1} x_j^\gamma \bigwedge_{\beta \in \mathfrak{A}(K, Q, j)} \beta^\gamma(A, B_2, \tilde{x}) \right) \vee \bar{x}_{n+1} \right\} \\ \wedge \left\{ \left(\bigvee_{\gamma=0,1} x_{r+1}^\gamma \bigwedge_{\beta \in \mathfrak{A}(K, Q, j)} \beta^\gamma(A, B_2, \tilde{x}) \right) \vee x_{n+1} \right\}.$$

(а) Пусть $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{n+3})$ и $x_{n+1} = 1$. Тогда $\beta(A, B_2, \tilde{x}) = x_j$ для всех $\beta \in \mathfrak{A}(K, Q, j)$. Поэтому

$$\left(\bigvee_{\gamma=0,1} x_j^\gamma \bigwedge_{\beta \in \mathfrak{A}(K, Q, j)} \beta^\gamma(A, B_2, \tilde{x}) \right) \vee \bar{x}_{n+1} = 1.$$

Поскольку при $x_{n+1} = 1$ имеет место равенство

$$\left(\bigvee_{\gamma=0,1} x_{r+1}^\gamma \bigwedge_{\beta \in \mathfrak{A}(K, Q, j)} \beta^\gamma(A, B_2, \tilde{x}) \right) \vee x_{n+1} = 1,$$

получаем $g(A, B_2, K, Q, j, \tilde{x}) = 1$.

(б) Пусть $x_{n+1} = 0$. Тогда

$$\left(\bigvee_{\gamma=0,1} x_j^\gamma \bigwedge_{\beta \in \mathfrak{A}(K, Q, j)} \beta^\gamma(A, B_2, \tilde{x}) \right) \vee \bar{x}_{n+1} = 1. \quad (2.1)$$

Поскольку $x_{n+3} = 1$ при любых $\tilde{x} \in \mathbf{P}$, для всех $\beta \in \mathfrak{A}(K, Q, j)$ выполняется равенство $x_{r+1} = \beta(A, B_2, \tilde{x})$. Поэтому

$$\left(\bigvee_{\gamma=0,1} x_{r+1}^\gamma \bigwedge_{\beta \in \mathfrak{A}(K, Q, j)} \beta^\gamma(A, B_2, \tilde{x}) \right) \vee x_{n+1} = 1. \quad (2.2)$$

Из (2.1), (2.2) получаем $g(A, B_2, K, Q, j, \tilde{x}) = 1$.

Рассуждая аналогично, убеждаемся, что $g(A, B_2, U, V, W, \tilde{x}) = 1$ при $\tilde{x} \in \mathbf{P}$ справедливо и в случаях, когда $g(A, B_2, U, V, W, \tilde{x})$ определяется формулами (1.10), (1.12)–(1.16).

Так как $g(A, B, U, V, W, \tilde{x}) = 1$ при любых $(U, V, W) \in \Omega$, получаем, что если на входы схемы $S(A, C, x_1, \dots, x_{n+3})$ подается $\tilde{x} \in \mathbf{P}$, то в подсхеме B_3 схемы $S(A, C, x_1, \dots, x_{n+3})$ на выходах всех схем F реализуется значение 1. При $\tilde{x} \in \mathbf{P}$ компонента x_{n+3} равна единице. Поэтому если на входы схемы $S(A, C, x_1, \dots, x_{n+3})$ подается $\tilde{x} \in \mathbf{P}$, то на все входы схемы N подаются единичные значения. Схема N реализует конъюнкцию своих входных значений. Значит, на ее выходе b реализуется значение 1, когда на входы схемы $S(A, C, x_1, \dots, x_{n+3})$ подается значение $\tilde{x} \in \mathbf{P}$. Лемма 4 доказана.

Обозначим через $\gamma_j(A^*, C^*, \tilde{x})$ функцию, реализующуюся в схеме $S(A^*, C^*, x_1, \dots, x_{n+3})$ на выходе колонки H_j .

Множество $\mathbf{K}$ определим как совокупность векторов $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{n+3})$ из $\{0, 1\}^{n+3}$, у которых $x_{m+2} = x_{m+3} = \dots = x_{n+3} = 0$. Очевидно, что это множество состоит из 2^{m+1} векторов.

Лемма 5. Если $\tilde{x} \in K$, то при любом $j \in \{1, \dots, m+1\}$ функция $\gamma_j(A^*, C^*, \tilde{x})$ совпадает с одной из четырех функций: x_j , $\bar{x}_j$, $\text{const} = \langle 0 \rangle$, $\text{const} = \langle 1 \rangle$.

Доказательство. В колонке H_j схемы $S(A^*, C^*, x_1, \dots, x_{n+3})$ среди схем типа J , количество которых равно $m+1$, есть по крайней мере одна исправная схема. На ее выходе при фиксированном значении переменной x_{n+3} , равном нулю, реализуется функция $\text{const} = \langle 0 \rangle$. Из способа соединения схем в $S(A^*, C^*, x_1, \dots, x_{n+3})$ видно, что если $x_{n+3} = 0$, то на входы всех схем в H_j , следующих за упомянутой исправной схемой, подаются значения, не зависящие от $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{n+3}$. Значит, $\gamma_j(A^*, C^*, \tilde{x})$ может зависеть лишь от x_j или совсем не зависеть от каких-либо переменных. В этом и состоит утверждение леммы 5.

Функции $g(A^*, B_2^*, U, V, W, \tilde{x})$, $(U, V, W) \in \Omega(\mathfrak{A})$. Пусть $\beta(A^*, B_2^*, \tilde{x})$ — функция, реализующаяся на полюсе β из $\mathfrak{A}$ в схеме $S(A^*, C^*, x_1, \dots, x_{n+3})$. Функции $g(A^*, B_2^*, U, V, W, \tilde{x})$, где $(U, V, W) \in \Omega(\mathfrak{A})$, определяются формулами (1.10)–(1.16) с предварительными заменами аргументов A и B_2 аргументами A^* и B_2^* соответственно в обозначениях всех функций, входящих в формулы. Ясно, что $g(A^*, B_2^*, U, V, W, \tilde{x})$ — это функция, реализующаяся в схеме $S(A^*, C^*, x_1, \dots, x_{n+3})$ на выходе ее исправной подсхемы $G(U, V, W)$.

- Схема $S(A^*, C^*, x_1, \dots, x_{n+3})$ называется **K-нормальной**, если при любом $\tilde{x} \in K$ имеет место равенство

$$S_b(A^*, C^*, x_1, \dots, x_{n+3}) = S_b(A, C, x_1, \dots, x_{n+3}).$$

Лемма 6. В K-нормальной схеме $S(A^*, C^*, x_1, \dots, x_{n+3})$ при любом $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{n+3}) \in P$ справедливо равенство

$$S_b(A^*, C^*, x_1, \dots, x_{n+3}) = \bigwedge_{(U, V, W) \in \Omega(\mathfrak{A})} g(A^*, B_2^*, U, V, W, \tilde{x}) \cdot \delta(A^*, C^*, \tilde{x}),$$

где $\delta(A^*, C^*, \tilde{x})$ — некоторая функция со значениями в $\{0, 1\}$.

Доказательство. Пусть $S_b(A^*, C^*, x_1, \dots, x_{n+3})$ — K-нормальная схема. Тогда при $\tilde{x} \in K$

$$S_b(A^*, C^*, x_1, \dots, x_{n+3}) = \bigwedge_{i=1}^{m+1} x_i. \quad (2.3)$$

Обозначим через $N(A^*, C^*, y_1, \dots, y_{m+1})$ функцию, реализуемую схемой N из $S(A^*, C^*, x_1, \dots, x_{n+3})$, когда на входы схемы N подаются значения $y_1, \dots, y_{m+1}$. В схеме $S(A^*, C^*, x_1, \dots, x_{n+3})$ выполняются равенства $y_i = \gamma_i(A^*, C^*, \tilde{x})$ при $i = 1, \dots, m+1$. Поэтому

$$S_b(A^*, C^*, x_1, \dots, x_{n+3}) = N(A^*, C^*, \gamma_1(A^*, C^*, \tilde{x}), \dots, \gamma_{m+1}(A^*, C^*, \tilde{x})). \quad (2.4)$$

Из (2.3), (2.4) и леммы 5 следует, что при $\tilde{x} \in K$ найдется набор констант $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m+1}$ из множества $\{0, 1\}$ таких, что

$$S_b(A^*, C^*, x_1, \dots, x_{n+3}) = N(A^*, C^*, x_1^{\varepsilon_1}, \dots, x_{m+1}^{\varepsilon_{m+1}}). \quad (2.5)$$

В схеме $S(A^*, C^*, x_1, \dots, x_{n+3})$ среди колонок $H_1, \dots, H_{m+1}$ найдется колонка, состоящая только из исправных схем. Пусть H_j — такая колонка. Тогда на ее выходе γ_j реализуется функция $\gamma_j(A^*, C^*, \tilde{x})$, определенная следующим образом:

- если на входы схемы $S(A^*, C^*, x_1, \dots, x_{n+3})$ подается $\tilde{x} \in \mathbf{P}$, то значение $\gamma_j(A^*, C^*, \tilde{x})$ равно конъюнкции значений, появившихся в схеме $S(A^*, C^*, x_1, \dots, x_{n+3})$ на выходах всех ее подсхем $G(U, V, W)$ при $(U, V, W) \in \Omega(\mathfrak{A})$;
- если на входы схемы $S(A^*, C^*, x_1, \dots, x_{n+3})$ подается $x \in \mathbf{K}$, то $\gamma_j(A^*, C^*, \tilde{x}) = x_j$.

При любых $(U, V, W) \in \Omega(\mathfrak{A})$ в $S(A^*, C^*, x_1, \dots, x_{n+3})$ среди $m+1$ схем типа $G(U, V, W)$ найдется по крайней мере одна исправная. На ее выходе реализуется функция $g(A^*, B_2^*, U, V, W, \tilde{x})$. Поэтому $\gamma_j(A^*, C^*, \tilde{x})$ можно представить в виде:

(а) если $\tilde{x} \in \mathbf{P}$, то

$$\gamma_j(A^*, C^*, \tilde{x}) = \bigwedge_{(U, V, W) \in \Omega(\mathfrak{A})} g(A^*, B_2^*, U, V, W, \tilde{x}) \cdot \lambda(A^*, C^*, \tilde{x}), \quad (2.6)$$

где $\lambda(A^*, C^*, \tilde{x})$ — некоторая функция от $A^*, C^*, \tilde{x}$ со значениями в $\{0, 1\}$;

(б) если $\tilde{x} \in \mathbf{K}$, то

$$\gamma_j(A^*, C^*, \tilde{x}) = x_j. \quad (2.7)$$

Из (2.4), (2.6), (2.7) и леммы 5 при $\tilde{x} \in \mathbf{K}$ получим

$$S(A^*, C^*, x_1, \dots, x_{n+3}) = N(A^*, C^*, x_1^{\varepsilon_1}, \dots, x_{j-1}^{\varepsilon_{j-1}}, x_j, x_{j+1}^{\varepsilon_{j+1}}, \dots, x_{m+1}^{\varepsilon_{m+1}}) = (\text{см. (2.3)}) = \bigwedge_{i=1}^{m+1} x_i.$$

Эти равенства должны выполняться при любых $\tilde{x} \in \mathbf{K}$, т. е. когда набор $(x_1, \dots, x_{m+1})$ принимает все 2^{m+1} своих возможных значений. Тем самым для любого набора $(y_1, \dots, y_{m+1}) \in \{0, 1\}$ имеет место соотношение

$$N(A^*, C^*, y_1, \dots, y_{m+1}) = y_j \bigwedge_{i \in \{1, \dots, m+1\} \setminus j} y_i^{\varepsilon_i}. \quad (2.8)$$

Из (2.4), (2.6), (2.8) следует, что при $\tilde{x} \in \mathbf{K}$

$$S_b(A^*, C^*, x_1, \dots, x_{n+3}) = \bigwedge_{(U, V, W) \in \Omega(\mathfrak{A})} g(A^*, B_2^*, U, V, W, \tilde{x}) \cdot \lambda(A^*, C^*, \tilde{x}) \wedge \bigwedge_{i \in \{1, \dots, m+1\} \setminus j} \gamma_i^{\varepsilon_i}(A^*, C^*, \tilde{x}).$$

Обозначив $\lambda(A^*, C^*, \tilde{x}) \wedge \bigwedge_{i \in \{1, \dots, m+1\} \setminus j} \gamma_i^{\varepsilon_i}(A^*, C^*, \tilde{x})$ через $\delta(A^*, C^*, \tilde{x})$,

перепишем полученное выражение для $S_b(A^*, C^*, x_1, \dots, x_{n+3})$ в виде

$$S_b(A^*, C^*, x_1, \dots, x_{n+3}) = \bigwedge_{(U, V, W) \in \Omega(\mathfrak{A})} g(A^*, B_2^*, U, V, W, \tilde{x}) \cdot \delta(A^*, C^*, \tilde{x}).$$

Лемма 6 доказана.

Теорема 2. Если для всех $(x_1, \dots, x_{n+3}) \in \mathbf{P} \cup \mathbf{K}$ справедливо равенство $S_b(A^*, C^*, x_1, \dots, x_{n+3}) = S_b(A, C, x_1, \dots, x_{n+3})$, то при любых $(x_1, \dots, x_{n+3}) \in \{0, 1\}$ имеем

$$S_a(A^*, C^*, x_1, \dots, x_{n+3}) = S_a(A, C, x_1, \dots, x_{n+3}). \quad (2.9)$$

Доказательство. Достаточно убедиться в том, что если при некотором $\tilde{v} = (v_1, \dots, v_{n+3}) \in \{0, 1\}^{n+3}$ не выполняется равенство (2.9), то найдется $\tilde{w} = (w_1, \dots, w_{n+3}) \in \mathbf{P} \cup \mathbf{K}$, при котором $S_b(A^*, C^*, w_1, \dots, w_{n+3}) \neq S_b(A, C, w_1, \dots, w_{n+3})$. В зависимости от того, является ли $\mathbf{K}$ -нормальной схема $S(A^*, C^*, x_1, \dots, x_{n+3})$, рассмотрим два случая.

1. Схема $S(A^*, C^*, x_1, \dots, x_{n+3})$ не является $\mathbf{K}$ -нормальной. В этом случае утверждение теоремы верно, так как найдется $\tilde{w} \in \mathbf{K}$, для которого $S_b(A^*, C^*, w_1, \dots, w_{n+3}) \neq S_b(A, C, w_1, \dots, w_{n+3})$.

2. Схема $S(A^*, C^*, x_1, \dots, x_{n+3})$ является $\mathbf{K}$ -нормальной. Предположим, что $S_a(A^*, C^*, v_1, \dots, v_{n+3}) \neq S_a(A^*, C, v_1, \dots, v_{n+3})$ при некотором $\tilde{v} = (v_1, \dots, v_{n+3})$. Тогда из леммы 3 следует, что $S(A^*, C^*, x_1, \dots, x_{n+3})$ не является $\mathbf{P}$ -правильной схемой. Значит, множество отмеченных полюсов $\mathfrak{A}$ схемы C^* содержит подмножество $\mathfrak{B} = \{h_1, \dots, h_q\}$, где $q \neq 0$, состоящее из тех полюсов h_j , для которых существует $\tilde{w} \in \mathbf{P}$ такой, что

$$h_j(A^*, C^*, \tilde{w}) \neq h_j(A, C, \tilde{w}). \quad (2.10)$$

(Через $h_j(A^*, C^*, \tilde{w})$ и $h_j(A, C, \tilde{w})$ обозначены функции, реализующиеся на полюсах h_j в схемах $S(A^*, C^*, x_1, \dots, x_{n+3})$ и $S(A, C, x_1, \dots, x_{n+3})$ соответственно, когда на входы этих схем подается вектор $\tilde{w}$.)

Пусть полюса $h_1, \dots, h_q$ являются выходами блоков $\beta_1, \dots, \beta_q$. Обозначим через β^* тот блок из $\{\beta_1, \dots, \beta_q\}$, у которого в $\{\beta_1, \dots, \beta_q\}$ нет ни одного предшественника в смысле схемы C^* . При таком выборе β^* ясно, что $S(A^*, C^*, x_1, \dots, x_{n+3})$ является $\mathbf{P}$ -правильной схемой относительно β^* .

Пусть на выходе блока β^* в схеме $S(A^*, C^*, x_1, \dots, x_{n+3})$ реализуется функция $\beta^*(A^*, B_2^*, \tilde{x})$, а в схеме $S(A^*, C, x_1, \dots, x_{n+3})$ на выходе соответствующего блока β^* — функция $\beta^*(A^*, B_2, \tilde{x})$. Пусть $\tilde{w}$ — тот вектор в $\mathbf{P}$, при котором $\beta^*(A^*, B_2^*, \tilde{w}) \neq \beta^*(A^*, B_2, \tilde{w})$. По определению множества $\mathfrak{B}$ такой вектор в $\mathbf{P}$ найдется. Выход блока β^* имеет некоторую векторную метку. Рассмотрим ситуации, определяющиеся тем, какую именно метку имеет выход блока β^* .

(1) Выход блока β^* имеет метку $(Q, *, r+1)$. Заменим в формуле (1.10) $\tilde{x}$, A , B_2 на $\tilde{w}$, A^* , B_2^* соответственно. Получим

$$g(A^*, B_2^*, Q, r+1, \tilde{w}) = \bigvee_{\gamma=0,1} w_{r+1}^\gamma \bigwedge_{\beta \in \mathfrak{A}(Q, *, r, 1)} \beta^\gamma(A^*, B_2^*, \tilde{w}). \quad (2.11)$$

В силу определения β^* имеем $w_{r+1} \neq \beta^*(A^*, B_2^*, \tilde{w})$. Отсюда и из (2.11) следует, что $g(A^*, B_2^*, Q, *, r+1, \tilde{w}) = 0$. Пользуясь леммами 4 и 6, получаем

$$S_b(A^*, C^*, w_1, \dots, w_{n+3}) \neq S_b(A, C, w_1, \dots, w_{n+3}).$$

(2) Выход блока β^* имеет метку (K, Q, j) . Рассмотрим формулу (1.11),

заменяя $\tilde{x}$, A , B_2 на $\tilde{w}$, A^* , B_2^* . Получим

$$g(A^*, B_2^*, K, Q, j, \tilde{w}) = \{(\bigvee_{\gamma=0,1} w_j^\gamma \bigwedge_{\beta \in \mathfrak{A}(K, Q, j)} \beta^\gamma(A^*, B_2^*, \tilde{w})) \vee \overline{w}_{n+1}\} \\ \wedge \{(\bigvee_{\gamma=0,1} w_{r+1}^\gamma \bigwedge_{\beta \in \mathfrak{A}(K, Q, j)} \beta^\gamma(A^*, B_2^*, \tilde{w})) \vee w_{n+1}\}. \quad (2.12)$$

В зависимости от значений w_{n+1} рассмотрим два варианта.

(2.а) Пусть $w_{n+1} = 1$. Тогда

$$w_j \neq \beta^*(A^*, B_2^*, \tilde{w}), \quad (\bigvee_{\gamma=0,1} w_j^\gamma \bigwedge_{\beta \in \mathfrak{A}(K, Q, j)} \beta^\gamma(A^*, B_2^*, \tilde{w})) \vee \overline{w}_{n+1} = 0.$$

Отсюда и из (2.12) следует, что $g(A^*, B_2^*, K, Q, j, \tilde{w}) = 0$. Пользуясь леммами 4 и 6, заключаем, что

$$S_b(A^*, C^*, w_1, \dots, w_{n+3}) \neq S_b(A, C, w_1, \dots, w_{n+3}).$$

(2.б) Пусть $w_{n+1} = 0$. Тогда $w_{r+1} \neq \beta^*(A^*, B_2^*, \tilde{w})$. Следовательно,

$$(\bigvee_{\gamma=0,1} w_{r+1}^\gamma \bigwedge_{\beta \in \mathfrak{A}(K, Q, j)} \beta^\gamma(A^*, B_2^*, \tilde{w})) \vee w_{n+1} = 0.$$

Отсюда и из (2.12) следует, что $g(A^*, B_2^*, K, Q, j, \tilde{w}) = 0$. Пользуясь леммами 4, 6, заключаем, что $S_b(A^*, C^*, w_1, \dots, w_{n+3}) \neq S_b(A, C, w_1, \dots, w_{n+3})$.

(3) Выход блока β^* имеет метку $(\varphi_i, K, *)$. Рассмотрим формулу (1.12), заменяя $\tilde{x}$, A , B_2 на $\tilde{w}$, A^* , B_2^* . Получим

$$g(A^*, B_2^*, \varphi_i, K, *, \tilde{w}) \\ = \{ \bigvee_{\gamma=0,1} \varphi_i^\gamma(w_1, \dots, w_{p(i)}) \bigwedge_{\beta \in \mathfrak{A}(\varphi_i, K, *)} \beta^\gamma(A^*, B_2^*, \tilde{w}) \} \vee \overline{w}_{n+1}. \quad (2.13)$$

(3.а) Пусть $w_{n+1} = 1$. Тогда

$$\varphi_i(w_1, \dots, w_{p(i)}) \neq \beta^*(A^*, B_2^*, \tilde{w}), g(A^*, B_2^*, \varphi_i, K, *, \tilde{w}) = 0, \\ S_b(A^*, C^*, w_1, \dots, w_{n+3}) \neq S_b(A, C, w_1, \dots, w_{n+3}).$$

(3.б) Пусть $w_{n+1} = 0$. Предположим, что в $S(A^*, C^*, x_1, \dots, x_{n+3})$ при $\tilde{x} = \tilde{w}$ на входы блока β^* подаются значения $\gamma_1, \dots, \gamma_{p(i)}$ (напомним, что в рассматриваемом случае β^* — базисный элемент $\varphi_i(w_1, \dots, w_{p(i)})$). Определим новый вектор $\tilde{u} = (u_1, \dots, u_{n+3})$ следующим образом:

$$u_j = \begin{cases} \gamma_j & \text{при } 1 \leq j \leq p(i), \\ 1 & \text{при } n+1 \leq j \leq n+3, \\ 0 & \text{при остальных } j. \end{cases}$$

Ясно, что $\tilde{u} \in \mathbf{P}$ (см. табл.). Так как $u_{n+1} = 1$, в $S(A^*, C^*, u_1, \dots, u_{n+3})$ на входах блока β^* реализуется кортеж $(u_1, \dots, u_{p(i)})$, который в соответствии с определением вектора $\tilde{u}$ совпадает с кортежем $\gamma_1, \dots, \gamma_{p(i)}$. Поэтому $\beta^*(A^*, B_2^*, \tilde{w}) = \beta^*(A^*, B_2^*, \tilde{u})$ и при замене $\tilde{w}$ на $\tilde{u}$ рассуждение сводится к варианту (3.а)

(4) Выход блока β^* имеет метку $(K, \varphi_i, r+1)$. Рассмотрим формулу (1.13) при $\tilde{x} = \tilde{w}$, заменив в ней символы A и B_2 символами A^* и B_2^* соответственно. Получим

$$g(A^*, B_2^*, K, \varphi_i, r+1, \tilde{w}) = \{(\bigvee_{\gamma=0,1} w_{r+1}^\gamma \bigwedge_{\beta \in \mathfrak{A}(K, \varphi_i, r+1)} \beta^\gamma(A^*, B_2^*, \tilde{w})) \vee \bar{w}_{n+2}\} \\ \wedge \{(\bigvee_{\gamma=0,1} \varphi_i^\gamma(w_1, \dots, w_{p(i)}) \bigwedge_{\beta \in \mathfrak{A}(K, \varphi, r+1)} \beta^\gamma(A^*, B_2^*, \tilde{w})) \vee (\bar{w}_{n+1} \vee w_{n+2})\}. \quad (2.14)$$

(4.a) Пусть $w_{n+2} = 1$. Поскольку β^* является блоком типа K , имеем $w_{r+1} \neq \beta^*(A^*, B_2^*, \tilde{w})$. В силу (2.14) $g(A^*, B_2^*, K, \varphi_i, r+1, \tilde{w}) = 0$, что вместе с утверждениями лемм 4, 6 приводит к соотношению

$$S_b(A^*, C^*, w_1, \dots, w_{n+3}) \neq S_b(A, C, w_1, \dots, w_{n+3}).$$

(4.б) Пусть $w_{n+2} = 0$ и одновременно $w_{n+1} = 1$. Поскольку блок β^* является блоком типа K , имеем $\varphi_i(w_1, \dots, w_{p(i)}) \neq \beta(A^*, B_2^*, \tilde{w})$. В силу (2.14) $g(A^*, B_2^*, K, \varphi_i, r+1, \tilde{w}) = 0$, что вместе с утверждениями лемм 4 и 6 приводит к соотношению

$$S_b(A^*, C^*, w_1, \dots, w_{n+3}) \neq S_b(A, C, w_1, \dots, w_{n+3}).$$

(4.в) Если $\tilde{w} \in \mathbf{P}$, то равенства $w_{n+1} = 0$ и $w_{n+2} = 0$ не могут выполняться одновременно (см. табл.).

(5) Выход блока β^* имеет метку $(K, i, r+1)$, $i \neq r+1$. Применим формулу (1.15) при $\tilde{x} = \tilde{w}$, заменив в ней символы A и B_2 символами A^* и B^* соответственно. Получим

$$g(A^*, B_2^*, K, i, r+1, \tilde{w}) = \{(\bigvee_{\gamma=0,1} w_{r+1}^\gamma \bigwedge_{\beta \in \mathfrak{A}(K, i, r+1)} \beta^\gamma(A^*, B_2^*, \tilde{w})) \vee \bar{w}_{n+2}\} \\ \wedge \{(\bigvee_{\gamma=0,1} w_i^\gamma \bigwedge_{\beta \in \mathfrak{A}(K, i, r+1)} \beta^\gamma(A^*, B_2^*, \tilde{w})) \vee w_{n+2}\}. \quad (2.15)$$

(5.a) Пусть $w_{n+2} = 1$. Поскольку β^* является блоком типа K , из (2.10) получаем $w_{r+1} \neq \beta^*(A^*, B_2^*, \tilde{w})$. Тем самым, в силу (2.15) имеет место равенство $g(A^*, B_2^*, K, i, r+1, \tilde{w}) = 0$, что вместе с утверждениями лемм 4 и 6 приводит к соотношению $S_b(A^*, C^*, w_1, \dots, w_{n+3}) \neq S_b(A, C, w_1, \dots, w_{n+3})$.

(5.б) Пусть $w_{n+2} = 0$. Поскольку β^* является блоком типа K , из (2.10) получаем $w_i \neq \beta^*(A^*, B_2^*, \tilde{w})$. В силу (2.15) $g(A^*, B_2^*, K, i, r+1, \tilde{w}) = 0$, что вместе с утверждениями лемм 4 и 6 приводит к соотношению $S_b(A^*, C^*, w_1, \dots, w_{n+3}) \neq S_b(A, C, w_1, \dots, w_{n+3})$.

(6) Выход блока β^* имеет метку $(K, r+1, j)$. Рассмотрим формулу (1.16) при $\tilde{x} = \tilde{w}$, заменив в ней символы A и B_2 символами A^* и B_2^* соответственно. Получим

$$g(A^*, B_2^*, K, r+1, j, \tilde{w}) = \{(\bigvee_{\gamma=0,1} w_j^\gamma \bigwedge_{\beta \in \mathfrak{A}(K, r+1, j)} \beta^\gamma(A^*, B_2^*, \tilde{w})) \vee \bar{w}_{n+1}\} \\ \wedge \{(\bigvee_{\gamma=0,1} w_{r+1}^\gamma \bigwedge_{\beta \in \mathfrak{A}(K, r+1, j)} \beta^\gamma(A^*, B_2^*, \tilde{w})) \vee w_{n+1}\}. \quad (2.16)$$

(6.а) Пусть $w_{n+1} = 1$. Так как β^* является блоком типа K , из (2.10) следует $w_j \neq \beta^*(A^*, B_2^*, \tilde{w})$. В силу (2.16) $g(A^*, B_2^*, K, r+1, j, \tilde{w}) = 0$, что вместе с утверждениями лемм 4 и 6 приводит к соотношению

$$S_b(A^*, C^*, w_1, \dots, w_{n+3}) \neq S_b(A, C, w_1, \dots, w_{n+3}).$$

(6.б) Пусть $w_{n+1} = 0$. Так как β^* является блоком типа K , из (2.10) следует $w_{r+1} \neq \beta^*(A^*, B_2^*, \tilde{w})$. В силу (2.16) $g(A^*, B_2^*, K, r+1, j, \tilde{w}) = 0$, что вместе с утверждениями лемм 4 и 6 приводит к соотношению

$$S_b(A^*, C^*, w_1, \dots, w_{n+3}) \neq S_b(A, C, w_1, \dots, w_{n+3}).$$

(7) Выход блока β^* имеет метку (K, K, j) . Рассмотрим формулу (1.14) при $\tilde{x} = \tilde{w}$, заменив в ней A и B_2 на A^* и B_2^* соответственно. Получаем

$$g(A^*, B_2^*, K, K, j, \tilde{w}) = \left\{ \left(\bigvee_{\gamma=0,1} w_j^\gamma \bigwedge_{\beta \in \mathfrak{A}(K, K, j)} \beta^\gamma(A^*, B_2^*, \tilde{w}) \right) \vee \bar{w}_{n+1} \right\} \\ \wedge \left\{ \left(\bigvee_{\gamma=0,1} w_{r+1}^\gamma \bigwedge_{\beta \in \mathfrak{A}(K, K, j)} \beta^\gamma(A^*, B_2^*, \tilde{w}) \right) \vee (w_{n+1} \vee \bar{w}_{n+2}) \right\}. \quad (2.17)$$

(7.а) Пусть $w_{n+1} = 1$. Поскольку β^* является блоком типа K , имеем $w_j \neq \beta^*(A^*, B_2^*, \tilde{w})$. В силу (2.17) $g(A^*, B_2^*, K, K, j, \tilde{w}) = 0$, что вместе с утверждениями лемм 4 и 6 приводит к соотношению

$$S_b(A^*, C^*, w_1, \dots, w_{n+3}) \neq S_b(A, C, w_1, \dots, w_{n+3}).$$

(7.б) Пусть $w_{n+1} = 0$, $w_{n+2} = 1$. Поскольку β^* является блоком типа K , имеем $w_{r+1} \neq \beta^*(A^*, B_2^*, \tilde{w})$. В силу (2.17) $g(A^*, B_2^*, K, K, j, \tilde{w}) = 0$, что вместе с утверждениями лемм 4 и 6 приводит к соотношению

$$S_b(A^*, C^*, w_1, \dots, w_{n+3}) \neq S_b(A, C, w_1, \dots, w_{n+3}).$$

(7.в) Если $\tilde{w} \in \mathbf{P}$, то равенства $w_{n+1} = 0$ и $w_{n+2} = 0$ не могут быть выполнены одновременно.

Мы доказали утверждение теоремы 2 при всех возможных вариантах выбора метки для блока β^* .

Подведем итог. Если в качестве схемы C выбрать рассмотренную в § 1 схему C , а в качестве множества $\mathbf{T}$ — множество $\mathbf{T} = \mathbf{P} \cup \mathbf{K}$, то

- из формул (1.23), (2.9) сразу следует утверждение (а) теоремы 1;
- неравенство (1.20) составляет утверждение (б) теоремы 1;
- из определений множеств $\mathbf{P}$ и $\mathbf{K}$ следуют равенства $|\mathbf{P}| = 3 \cdot 2^{r+1}$, $|\mathbf{K}| = 2^{m+1}$, поэтому $|\mathbf{T}| = 3 \cdot 2^{r+1} + 2^{m+1}$, что доказывает утверждение (в) теоремы 1. Тем самым, теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Яблонский С. В. Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. М.: Наука, 1988. Вып. 1. С. 5–25.
2. Горяшко А. П. Синтез диагностируемых схем вычислительных устройств. М.: Наука, 1987.
3. Reddy S. M. Easily testable realization for logic functions // IEEE Trans. Comput. 1972. V. 21, N 1. P. 124–141.

4. Шевченко В. И. О синтезе самокорректирующихся схем с малой трудоемкостью тестирования // Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике. Горький: Горьк. ун-т., 1985. С. 133–143.
5. Редькин Н. П. О схемах, допускающих короткие единичные диагностические тесты // Дискретная математика. 1989. Т. 1, вып. 3. С. 71–76.
6. Носков В. Н. Метод синтеза контролепригодных схем из функциональных элементов // Методы дискретного анализа в изучении булевых функций и графов. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1989. Вып. 48. С. 52–69.
7. Носков В. Н. Самокорректирующиеся комбинационные схемы, допускающие простой контроль // Методы дискретного анализа в оптимизации управляющих систем. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1989. Вып. 49. С. 42–59.
8. Носков В. Н. Метод синтеза удобных для контроля комбинационных схем // Дискретная математика. 1993. Т. 5, вып. 4. С. 3–23.
9. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986.
10. Лупанов О. Б. О синтезе некоторых классов управляющих систем // Проблемы кибернетики. 1963. Вып. 10. С. 63–97.