О ПРЕДЕЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН, ПОРОЖДАЕМЫХ ОГРАНИЧЕННЫМИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМИ

А. А. Сапоженко

Пусть при каждом $n \geqslant 0$ заданы последовательность положительных чисел $\{\sigma_{n,j}\}_{j=0}^{\infty}$ и положительное число α_n.

- Последовательность $\{\sigma_{n,j}\}_{n,j=0}^{\infty}$ будем называть
  - — *α_n-ограниченной*, если при любом j выполняется неравенство
$$(j+1)\,\sigma_{n,j+1} \leqslant \sigma_{n,j}\alpha_n; \tag{1}$$
  - — *ограниченной*, если при любом $n \geqslant 0$ последовательность $\{\sigma_{n,j}\}_{j=0}^{\infty}$ является α_n-ограниченной.

Ограниченные последовательности возникают в задачах о числе независимых множеств в двудольных графах, о числе монотонных функций на частично упорядоченных множествах и в ряде других (см. [1, 2]). Мы будем рассматривать случайные величины ξ_n такие, что $P(\xi_n = j) = \sigma_{n,j}/\sigma_n$, где $\sigma_n = \sum_{j\geqslant 0}\sigma_{n,j}$. Цель данной работы — получение предельных распределений случайных величин ξ_n для α_n-ограниченных последовательностей $\{\sigma_{n,j}\}$ при некоторых предположениях относительно α_n. Некоторые понятия и полученные результаты иллюстрируются простейшими примерами ограниченных последовательностей типа биномиальных коэффициентов и их степеней.

- Будем говорить, что последовательность $\{\alpha_{n,j}\}$ *порождена последовательностью* $\{\sigma_{n,j}\}$, если $\alpha_{n,j} = (j+1)\sigma_{n,j+1}/\sigma_{n,j}$.

Заметим, что если последовательность $\{\alpha_{n,j}\}$ порождена последовательностью $\{\sigma_{n,j}\}$, то неравенство (1) равносильно неравенству $\alpha_{n,j} \leqslant \alpha_n$.

Лемма 1. *Пусть последовательность $\{\sigma_{n,j}\}$ является α_n-ограниченной и $\sigma_n = \sum_{j\geqslant 0}\sigma_{n,j}$. Тогда*

$$\sigma_{n,j} \leqslant \sigma_{n,0}(\alpha_n)^j/j!, \tag{2}$$

$$\sigma_n \leqslant \sigma_{n,0}\exp\{\alpha_n\}. \tag{3}$$

Доказательство. В силу неравенства (1)

$$\frac{\sigma_{n,j+1}}{\sigma_{n,j}} \leqslant \frac{\alpha_n}{j+1}. \tag{4}$$

Следовательно,

$$\sigma_{n,j} = \sigma_{n,0} \prod_{\nu=0}^{j-1} \frac{\sigma_{n,\nu+1}}{\sigma_{n,\nu}} \leqslant \sigma_{n,0}(\alpha_n)^j/j!. \tag{5}$$

Неравенство (2) доказано. Неравенство (3) вытекает из (2). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть $\varepsilon > 0$, $\theta = (1+\varepsilon)\alpha$, $t = \lfloor \theta \rfloor$ и последовательность $\{\sigma_j\}$ такова, что при всех $j \geqslant t$*

$$(j+1)\sigma_{j+1} \leqslant \sigma_j \alpha. \tag{6}$$

Тогда справедливо неравенство

$$\sum_{j>\theta} \sigma_j \leqslant \varepsilon^{-1}\sigma_t. \tag{7}$$

Доказательство. В силу (6) при любом $j > t$ имеем

$$\sigma_j = \sigma_t \prod_{\nu=t}^{j-1} \frac{\sigma_{\nu+1}}{\sigma_\nu} \leqslant \sigma_t \prod_{\nu=t}^{j-1} \frac{\alpha}{\nu+1} \leqslant \sigma_t \Big(\frac{\alpha}{t+1}\Big)^{t-j}. \tag{8}$$

Так как $\alpha = \theta/(1+\varepsilon) < (t+1)/(1+\varepsilon)$, имеем

$$\sum_{j>\theta} \sigma_j \leqslant \sigma_t \sum_{\nu=1}^{\infty} (1+\varepsilon)^{-\nu} = \varepsilon^{-1}\sigma_t.$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть $\omega > 0$, $\theta = \alpha + \omega\sqrt{\alpha}$, $m = \lceil \alpha \rceil$, $s = \lfloor \theta \rfloor - m - 1$ и последовательность $\{\sigma_j\}$ удовлетворяет неравенству (6) при всех $j \geqslant m$. Тогда*

$$\sum_{j>\theta} \sigma_j \leqslant \sigma_m(\sqrt{\alpha}/\omega) \exp\Big\{ -\frac{s(s+1)}{2\alpha}\Big(1 - \frac{2s+1}{6\alpha}\Big)\Big\}. \tag{9}$$

Доказательство. Полагая $\varepsilon = \omega/\sqrt{\alpha}$, $t = \lfloor \theta \rfloor$ и используя соотношение (7), получаем

$$\sum_{j>\theta} \sigma_j \leqslant (\sqrt{\alpha}/\omega)\sigma_t. \tag{10}$$

С другой стороны, аналогично (8) имеем

$$\sigma_t \leqslant \sigma_m \prod_{\nu=m}^{t-1} \frac{\alpha}{\nu+1} \leqslant \sigma_m \prod_{i=1}^{t-m-1} \frac{\alpha}{\alpha+i}. \tag{11}$$

Положим $s = t - m - 1$. Из неравенств (10) и (11) следует, что

$$\sum_{j>\theta} \sigma_j \leqslant \sigma_m(\sqrt{\alpha}/\omega) \prod_{i=1}^{s} \frac{\alpha}{\alpha+i}. \tag{12}$$

Далее,

$$\prod_{i=1}^{s}\frac{\alpha}{\alpha+i}=\exp\Big\{-\sum_{i=1}^{s}\ln\left(1+(i/\alpha)\right)\Big\}$$

$$\leqslant \exp\Big\{-\sum_{i=1}^{s}i/\alpha+\sum_{i=1}^{s}i^2/(2\alpha^2)\Big\}=\exp\Big\{-\frac{s(s+1)}{2\alpha}\Big(1-\frac{2s+1}{6\alpha}\Big)\Big\}. \quad (13)$$

Из (12) и (13) вытекает (9). Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть последовательность* $\{\sigma_j\}$ *удовлетворяет неравенству* (6) *при* $m-\delta\sqrt{\alpha}\leqslant j\leqslant m$, *где* $m=\lceil\alpha\rceil, 0<\delta\leqslant 1$, $\sigma=\sum_{j\geqslant 0}\sigma_j$. *Тогда*

$$\delta\sigma_m\sqrt{\alpha}\leqslant 2e\sigma. \quad (14)$$

Доказательство. Очевидно, что (14) справедливо при $\alpha\leqslant(2e/\delta)^2$. Допустим, что $\alpha>(2e/\delta)^2$. Положим $s=m-j$ и покажем, что при $m-\delta\sqrt{\alpha}\leqslant j\leqslant m$ справедливо неравенство

$$\sigma_j\geqslant\sigma_m\exp\{-s(s+1)/\alpha\}. \quad (15)$$

Аналогично (11) при $m>j$ имеем

$$\sigma_m\leqslant\sigma_j\prod_{\nu=j}^{m-1}\frac{\alpha}{\nu+1}\leqslant\sigma_j\prod_{\nu=0}^{m-j-1}\frac{\alpha}{m-\nu}\leqslant\sigma_j\prod_{\nu=0}^{m-j-1}\frac{\alpha}{\alpha-\nu-1}. \quad (16)$$

Так как $s\leqslant\lfloor\delta\sqrt{\alpha}\rfloor\leqslant\alpha/2$ при $\alpha>(2e/\delta)^2$ и $0<\delta\leqslant 1$, имеем

$$\prod_{\nu=0}^{m-j-1}\frac{\alpha}{\alpha-\nu-1}=\exp\Big\{-\sum_{\nu=1}^{s}\ln\Big(1-\frac{\nu}{\alpha}\Big)\Big\}\leqslant\exp\Big\{\sum_{\nu=1}^{s}\sum_{i\geqslant 1}\Big(\frac{\nu}{\alpha}\Big)^i\Big\}$$

$$\leqslant\exp\Big\{\sum_{\nu=1}^{s}\frac{\nu}{\alpha-\nu}\Big\}\leqslant\exp\Big\{\sum_{\nu=1}^{s}\frac{2\nu}{\alpha}\Big\}\leqslant\exp\Big\{\frac{s(s+1)}{\alpha}\Big\}.$$

Отсюда и из (16) вытекает (15). Полагая $q=\lfloor\delta\sqrt{\alpha}\rfloor$, в силу (15) и с учетом того, что $\delta<1$ и $\exp\{-\alpha^{-1/2}\}\geqslant 1/2$, получаем

$$\sigma=\sum_{j\geqslant 0}\sigma_j\geqslant\sum_{m\geqslant j\geqslant m-q}\sigma_j\geqslant\sigma_m\sum_{q\geqslant s\geqslant 0}\exp\Big\{-\frac{s(s+1)}{\alpha}\Big\}$$

$$\geqslant\sigma_m(q+1)\exp\Big\{-\frac{q(q+1)}{\alpha}\Big\}\geqslant\sigma_m\delta\frac{\sqrt{\alpha}}{2e}.$$

Лемма 4 доказана.

Теорема 1. *Пусть последовательность* $\{\sigma_{n,j}\}$ *является* α_n*-ограниченной, т. е. удовлетворяет* (1). *Пусть* $\lim_{n\to\infty}\omega_n=\infty$, $\theta_n=\alpha_n+\omega_n\sqrt{\alpha_n}$, $\sigma_n=\sum_{j\geqslant 0}\sigma_{n,j}$. *Тогда*

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n^{-1}\sum_{j>\theta_n}\sigma_{n,j}=0. \quad (17)$$

Доказательство. Рассмотрим три случая в зависимости от отношения $\omega_n/\sqrt{\alpha_n}$. Здесь и далее в доказательствах индексы n, как правило, опускаем. Положим $\log_2 x=\log x$, $m=\lceil\alpha\rceil$, $t=\lfloor\theta\rfloor$, $s=t-m$.

Случай 1: $0 < \sqrt{\alpha} \leqslant 8\omega^{-1}\log\omega$. Поскольку $\theta > 0$, в силу (2) имеем

$$\sum_{j>\theta}\sigma_j \leqslant \sum_{j\geqslant 1}\sigma_j \leqslant \sigma_0\sum_{j\geqslant 1}\alpha^i = \sigma_0\alpha(1-\alpha)^{-1} = O(\sigma_0\omega^{-2}\log^{-2}\omega). \quad (18)$$

Поскольку $\sigma \geqslant \sigma_0$, из (18) вытекает (17).

Случай 2: $8\omega^{-1}\log\omega < \sqrt{\alpha} \leqslant \omega$. В этом случае $s+1 = t-m \geqslant \omega\sqrt{\alpha} \geqslant 8\log\omega$ и $(s+1)/\alpha \geqslant 1$. В силу (12) имеем

$$\sum_{j>\theta}\sigma_j \leqslant \sigma_m(\sqrt{\alpha}/\omega)\prod_{i=1}^{s}\alpha/(\alpha+i) \leqslant \sigma_m(\alpha/(\alpha+(s+1)/2))^{(s/2)-1}$$
$$\leqslant \sigma_m(2/3)^{(s/2)-1} \leqslant 3\sigma_m(2/3)^{4\log\omega} = O(\omega^{-2}\sigma). \quad (19)$$

Случай 3: $\omega < \sqrt{\alpha}$. Поскольку $s = t-m \leqslant \omega\sqrt{\alpha}+1$ и $\alpha \geqslant 3$, справедливо неравенство

$$2s+1 \leqslant 2(\omega\sqrt{\alpha}+1)+1 \leqslant 3\alpha.$$

В силу (9) и (14), где $\delta = 1$, имеем

$$\sum_{j>\theta}\sigma_j \lesssim \sigma_m(\sqrt{\alpha}/\omega)\exp\{-s(s+1)/4\alpha\} \leqslant 2e\sigma\omega^{-1}\exp\{-s(s+1)/4\alpha\}. \quad (20)$$

Отсюда и из неравенства $s \geqslant \omega\sqrt{\alpha}-1$ вытекает равенство (17). Теорема 1 доказана.

Лемма 5. *Пусть последовательность $\{\sigma_{n,j}\}$ является α_n-ограниченной, $\sigma_n = \sum_{j\geqslant 0}\sigma_{n,j}$, $\alpha_{n,j} = (j+1)\sigma_{n,j+1}/\sigma_{n,j}$, $\theta_n = \alpha_n + \omega_n\sqrt{\alpha_n}$, а $\beta_n = \min_{j\leqslant\theta_n}\{\alpha_{n,j}\}$. Тогда при всех $j \leqslant \theta_n$*

$$\sigma_{n,j} \geqslant \sigma_{n,0}(\beta_n)^j/j!, \quad (21)$$

а при $n \to \infty$

$$\sigma_n \gtrsim \sigma_{n,0}\exp\beta_n. \quad (22)$$

Доказательство. Неравенство (21) следует по индукции из неравенства

$$(j+1)\sigma_{n,j+1} \geqslant \sigma_{n,j}\beta_n, \quad (23)$$

справедливого для всех $j \leqslant \theta_n$, а из (21) следует, что

$$\sigma_n \geqslant \sum_{j\leqslant\theta_n}\sigma_{n,j} \geqslant \sigma_{n,0}\Big(\exp\{\beta_n\} - \sum_{j>\theta_n}(\beta_n^j/j!)\Big).$$

В силу того, что последовательность $\sigma_{n,j} = \beta_n^j/j!$ является β_n-ограниченной, равенство (17) справедливо при замене θ на $\theta_n' = \beta_n + \omega_n\sqrt{\beta_n}$. Поскольку $\beta_n \leqslant \alpha_n$ и, следовательно, $\theta_n' \leqslant \theta_n$, имеем

$$\sum_{j>\theta_n}\beta^j/j! \leqslant \sum_{j>\theta_n'}\beta^j/j! = O(\exp\{\beta_n\}).$$

Лемма 5 доказана.

Теорема 2. *Пусть последовательность* $\{\sigma_{n,j}\}$ *является* α_n*-ограниченной,* $\lim_{n\to\infty}\omega_n = \infty$, $\theta_n = \alpha_n + \omega_n\sqrt{\alpha_n}$, $\sigma_n = \sum_{j\geqslant 0}\sigma_{n,j}$, $\alpha_{n,j} = (j+1)\sigma_{n,j+1}/\sigma_{n,j}$, $\beta_n = \min_{j\leqslant\theta_n}\{\alpha_{n,j}\}$, $\gamma_n = \alpha_n - \beta_n$, *и пусть*

$$\lim\gamma_n = 0. \tag{24}$$

Тогда при $n\to\infty$

$$\sigma_n \sim \sigma_{n,0}\exp\{\alpha_n\} \sim \sigma_{n,0}\exp\{\beta_n\} \tag{25}$$

и при всех $j\leqslant\theta_n$, $j = o(\beta_n/\gamma_n)$

$$\sigma_{n,j} \sim \sigma_{n,0}(\alpha_n)^j/j! \sim \sigma_{n,0}(\beta_n)^j/j!, \tag{26}$$

$$\sigma_{n,j} \sim \sigma_n(\alpha_n)^j/j!\exp\{-\alpha_n\}. \tag{27}$$

Доказательство. Из неравенств (1) и (23) следует, что при $j\leqslant\theta_n$, $j = o(\beta_n/\gamma_n)$ и достаточно больших n

$$(\beta_n)^j/j! \leqslant \sigma_{n,j} \leqslant (\alpha_n)^j/j! = (\beta_n+\gamma_n)^j/j! \sim (\beta_n)^j/j!.$$

В силу определения величин β_n, α_n из (24), (26) имеем

$$\exp\{\beta_n\} = \sum_{j\geqslant 0}(\beta_n)^j/j! \leqslant (1+o(1))\sum_{j\leqslant\theta_n}(\beta_n)^j/j! \lesssim \sigma_n$$
$$\leqslant (1+o(1))\sum_{j\leqslant\theta_n}\sigma_{n,j} \leqslant (1+o(1))\sum_{j\leqslant\theta_n}(\alpha_n)^j/j! \sim \exp\{\alpha_n\}.$$

Теорема 2 доказана.

Лемма 6. *Допустим, что последовательность* $\{\sigma_{n,j}\}$ *является* α_n*-ограниченной,* $\lim_{n\to\infty}\omega_n = \infty$, $\tilde{m} = \lfloor\alpha_n\rfloor + \lfloor\sqrt{\alpha_n}\rfloor$, $\sigma_n = \sum_{j\geqslant 0}\sigma_{n,j}$, $\alpha_{n,j} = (j+1)\sigma_{n,j+1}/\sigma_{n,j}$, $\tilde{\beta}_n = \min_{j\leqslant\tilde{m}}\{\alpha_{n,j}\}$, $\lfloor\tilde{\beta}_n\rfloor = p$. *Тогда*

$$\sigma_{n,p}\sqrt{\tilde{\beta}_n} \leqslant e\sigma_n. \tag{28}$$

Доказательство. Согласно определению $\tilde{\beta}_n$ при любом j $(i\leqslant j\leqslant m)$ справедливо соотношение

$$\sigma_i = \sigma_j\prod_{\nu=i+1}^{j}\frac{\sigma_{\nu-1}}{\sigma_\nu} \leqslant \sigma_j\prod_{\nu=i+1}^{j}\frac{\nu}{\tilde{\beta}}. \tag{29}$$

Полагая $i = p$ и $s = j-p$, имеем

$$\sigma_p = \sigma_j\prod_{\nu=1}^{s-1}\frac{p+\nu}{\tilde{\beta}} \leqslant \sigma_j\exp\left\{\sum_{\nu=1}^{s-1}\ln\left(1+\frac{\nu}{\tilde{\beta}}\right)\right\}$$
$$\leqslant \exp\left\{\sum_{\nu=1}^{s-1}\frac{\nu}{\tilde{\beta}}\right\} \leqslant \sigma_j\exp\left\{\frac{s(s-1)}{2\tilde{\beta}}\right\}. \tag{30}$$

Далее, полагая $q = \lfloor\sqrt{\tilde{\beta}}\rfloor$, получаем

$$\sigma \geqslant \sum_{p\leqslant j\leqslant p+q}\sigma_j \geqslant \sigma_p\sum_{0\leqslant s\leqslant q}\exp\{-s^2/2\tilde{\beta}\} \geqslant \sigma_p\sqrt{\tilde{\beta}}\exp\{-1/2\}.$$

Отсюда следует справедливость неравенства (28). Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Пусть последовательность* $\{\sigma_{n,j}\}$ *является* α_n*-ограниченной,* $\lim_{n\to\infty}\omega_n = \infty$, $\theta_n = \alpha_n + \omega_n\sqrt{\alpha_n}$, $\sigma_n = \sum_{j\geqslant 0}\sigma_{n,j}$, $\alpha_{n,j} = (j+1)\sigma_{n,j+1}/\sigma_{n,j}$, $\beta_n = \min_{j\leqslant\theta_n}\{\alpha_{n,j}\}$, $\tau_n = \beta_n - \omega_n\sqrt{\beta_n}$. *Тогда при* $n\to\infty$

$$\sum_{j\leqslant\tau_n}\sigma_{n,j} = O\left(\sigma_n\omega_n^{-1}\exp\{-\omega_n^2/2\}\right). \tag{31}$$

Доказательство. Если $\tau < 0$, то $\sum_{j\leqslant\tau}\sigma_j = 0$, $p = 0$, $\sigma_p = \sigma_0 > 0$ и (31) выполнено. Пусть $\tau\geqslant 0$. Тогда $\beta_n\geqslant\omega_n^2$, а значит, $\lim_{n\to\infty}\beta_n = \infty$. Полагая $s = p - j - 1$ $(j < p)$, аналогично (30) имеем

$$\sigma_j = \sigma_p\prod_{\nu=j+1}^{p}(\nu/\beta)\leqslant\sigma_p\exp\{s(s+1)/2\beta\}. \tag{32}$$

Заметим, что если $j\leqslant\tau$, то $s\geqslant p-\tau-1\geqslant\omega\sqrt{\beta}-2$ и $s(s+1)\geqslant\omega^2\beta-2\omega\sqrt{\beta}$. Полагая $q = \omega\sqrt{\beta}-2$, из (32) получаем

$$\sum_{j\leqslant\tau}\sigma_j\leqslant\sigma_p\sum_{s\geqslant q}\exp\{-(s+1)s/2\beta\}\leqslant\sigma_p\exp\{-\omega^2/2+\omega/\sqrt{\beta}\}\sum_{i\geqslant 0}e^{-qi/\beta}$$
$$= \sigma_p(1-e^{-q/\beta})^{-1}\exp\{-\omega^2/2+\omega/\sqrt{\beta}\} = O(\sigma_p\omega^{-1}\sqrt{\beta}\exp\{-\omega^2/2\}).$$

Отсюда и в силу (28) следует справедливость утверждения (31). Лемма 7 доказана.

Теорема 3. *Пусть* $\{\sigma_{n,j}\}$ *является* α_n*-ограниченной последовательностью,* $\lim_{n\to\infty}\omega_n = \infty$, $\theta_n = \alpha_n+\omega_n\sqrt{\alpha_n}$, $\sigma_n = \sum_{j\geqslant 0}\sigma_{n,j}$, $\alpha_{n,j} = (j+1)\sigma_{n,j+1}/\sigma_{n,j}$, $\beta_n = \min_{j\leqslant\theta_n}\{\alpha_{n,j}\}$, $\tau_n = \beta_n-\omega_n\sqrt{\beta_n}$, $\tilde\sigma_n = \sum_{\tau_n\leqslant j\leqslant\theta_n}\sigma_{n,j}$. *Тогда при* $n\to\infty$

$$\tilde\sigma_n = \sigma_n(1-\varepsilon_n), \tag{33}$$

где $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$. *При этом* $\varepsilon_n = O(\exp\{-\omega_n^2/4\})$, *если* $\omega_n\leqslant\sqrt{\alpha_n}$, *и* $\varepsilon_n = O(\omega_n^{-1}\exp\{-\omega_n^2/2\})$, *если* $\omega_n = o((\alpha_n)^{1/6})$.

Справедливость теоремы следует из (17) и (31).

Замечание 1. Пусть последовательность $S = \{\sigma_{n,j}\}$ является α_n-ограниченной и $\alpha_{n,j} = (j+1)\sigma_{n,j+1}/\sigma_{n,j}$. Положим $\theta = \theta_n = \alpha_n+\omega_n\sqrt{\alpha_n}$, $m^* = m^*(S) = \min\{r\mid\sigma_{n,j+1} < \sigma_{n,j}$ при всех $j\geqslant r\}$ и $\alpha_n^* = \alpha_{n,m^*}$. Тогда $m^*\leqslant\alpha_n$ и $\alpha_{n,m^*-1}\geqslant m^*$.

Пример 1. Последовательность $S = \binom{n}{j}$ является α_n-ограниченной, причем $\alpha_n = n$, $m^* = \lceil n/2\rceil$ и $\alpha_n^* = \lfloor n/2\rfloor$.

Теорема 4. *Пусть* $\{\sigma_{n,j}\}$ *является* α_n*-ограниченной последовательностью,* $\alpha_{n,j} = (j+1)\sigma_{n,j+1}/\sigma_{n,j}$, $m^* = \min\{r\mid\sigma_{n,j+1} < \sigma_{n,j}$ *при всех* $j\geqslant r\}$, $\alpha_n^* = \alpha_{n,m^*}$, $\lim_{n\to\infty}\omega_n = \infty$, $\omega_n = o((\alpha_n^*)^{1/6})$. *Допустим, что* $q\geqslant 0$, $q = O\left((\alpha_n^*)^{1/4}\omega_n^{-2}\right)$, *и для каждого* j *такого, что* $|j-\alpha_n^*|\leqslant\omega_n(\alpha_n^*/(q+1))^{1/2}$, *справедливо*

$$|\alpha_{n,j}-\alpha_n^*+q(j-m^*| = O((\alpha_n^*)^{1/2}\omega_n^{-2}). \tag{34}$$

Тогда при $|j-\alpha_n^*| \leqslant \omega_n(\alpha_n^*/(q+1))^{1/2}$ *и* $n \to \infty$ *выполняется равенство*

$$\sigma_{n,j} = (1+\varepsilon)\sigma_{n,m^*} \exp\{-(q+1)(j-\alpha_n^*)^2/2\alpha_n^*\}, \tag{35}$$

где $\varepsilon = O\left(\omega_n^3(\alpha_n^*)^{-1/2} + \omega_n^{-1}\right)$.

Доказательство. Положим $\theta_n^* = \alpha_n^* + \omega_n(\alpha_n^*/(q+1))^{1/2}$ и $\delta = \alpha_{n,j} - \alpha_n^* + q(j-m^*)$. Тогда в силу (34) $\delta = O\left((\alpha_n^*)^{1/2}\omega_n^{-2}\right)$. Опуская индексы n, при $m^* \leqslant j \leqslant \theta^*$ имеем

$$\sigma_j = \sigma_{m^*} \prod_{\nu=m^*}^{j-1} \frac{\alpha_\nu}{\nu+1}. \tag{36}$$

Положим $s = j - m^*$, $\alpha = \alpha_n^*$ и $P_j = \prod_{\nu=m^*}^{j-1} \alpha_\nu/(\nu+1)$. Заметим, что в силу определений и неравенства (34)

$$\alpha - 1 \leqslant m^* \leqslant \alpha_{n,m^*-1} \leqslant \alpha + q + \delta \leqslant 2\delta. \tag{37}$$

Согласно (37) имеем

$$P_j \leqslant \prod_{\nu=m^*}^{j-1} \frac{\alpha - q(\nu-m^*)+\delta}{\nu+1} = \prod_{\nu=0}^{s-1} \frac{\alpha - q\nu + \delta}{m^*+\nu+1} \leqslant \prod_{\nu=0}^{s-1} \frac{\alpha - q\nu+\delta}{\alpha+\nu}. \tag{38}$$

Отсюда при $m^* \leqslant j \leqslant \theta^*$ получаем

$$\begin{aligned} \ln P_j &\leqslant \sum_{\nu=0}^{s-1}\left\{\ln\left(1-\frac{q\nu-\delta}{\alpha}\right) - \ln\left(1+\frac{\nu}{\alpha}\right)\right\} \\ &\leqslant \sum_{\nu=0}^{s-1}\left\{-\frac{q\nu-\delta}{\alpha} - \frac{\nu}{\alpha} - \frac{\nu^2}{2\alpha(\alpha-\nu)}\right\} \\ &= -\frac{(q+1)s(s-1)}{2\alpha} + \frac{\delta s}{\alpha} + O\left(\frac{s^3}{\alpha}\right) \\ &= -\frac{(q+1)(j-\alpha)^2}{2\alpha} + O\left(\frac{\omega^3}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\omega}\right). \end{aligned} \tag{39}$$

Оценим P_j снизу ($m^* \leqslant j \leqslant \theta^*$).

$$P_j \geqslant \prod_{\nu=m^*}^{j-1} \frac{\alpha - q(\nu-m^*)-\delta}{\nu+1} = \prod_{\nu=0}^{s-1} \frac{\alpha - q\nu - \delta}{m^*+\nu+1} \geqslant \prod_{\nu=0}^{s-1} \frac{\alpha - q\nu-\delta}{\alpha+\nu+2\delta+1}. \tag{40}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\ln P_j &\geqslant \sum_{\nu=0}^{s-1}\Big\{\ln\Big(1-\frac{q\nu+\delta}{\alpha}\Big)-\ln\Big(1+\frac{\nu+2\delta+1}{\alpha}\Big)\Big\}\\ &\geqslant \sum_{\nu=0}^{s-1}\Big\{-\frac{q\nu+\delta}{\alpha}-\frac{(q\nu+\delta)^2}{2\alpha(\alpha-q\nu-\delta)}-\frac{\nu+2\delta+1}{\alpha}\Big\}\\ &\geqslant -\frac{(q+1)s(s-1)}{2\alpha}-\frac{s(3\delta+1)}{\alpha}+O\Big(\frac{q^2s^3+\delta^2 s}{\alpha^2}\Big)\\ &= -\frac{(q+1)(j-\alpha)^2}{2\alpha}+O\Big(\frac{q^2\omega^3}{\sqrt{\alpha}}+\frac{\delta^2\omega}{\sqrt{\alpha^3}}+\frac{1}{\omega}\Big)\\ &= -\frac{(q+1)(j-\alpha)^2}{2\alpha}+O\Big(\frac{1}{\omega}\Big). \qquad (41)\end{aligned}$$

Из (39) и (41) следует, что (35) выполнено при $m^* \leqslant j \leqslant \theta^*$.

Пусть теперь $\tau^* \leqslant j < m^*$, где $\tau^* = \alpha - \omega(\alpha/(q+1))^{1/2}$. Имеем

$$\sigma_{n,j} = \sigma_{n,m^*}\prod_{\nu=j}^{m^*-1}\frac{\nu+1}{\alpha_\nu}.$$

Положим $s = m^* - j$ и $Q_j = \prod_{\nu=m^*}^{j-1}\frac{\nu+1}{\alpha_\nu}$. Тогда с учетом (34) и (37) при $\tau_* \leqslant j < m^*$ будет

$$Q_j = \prod_{\nu=0}^{s-1}\frac{m^*-\nu}{\alpha_{m^*-\nu-1}} \leqslant \prod_{\nu=0}^{s-1}\frac{m^*-\nu}{\alpha+q(\nu+1)-\delta} \leqslant \prod_{\nu=0}^{s-1}\frac{\alpha+2\delta-\nu}{\alpha+q(\nu+1)-\delta}. \qquad (42)$$

Далее,

$$\begin{aligned}\ln Q_j &\leqslant \sum_{\nu=0}^{s-1}\Big\{\ln\Big(1-\frac{\nu-2\delta}{\alpha}\Big)-\ln\Big(1+\frac{q(\nu+1)-\delta}{\alpha}\Big)\Big\}\\ &\leqslant \sum_{\nu=0}^{s-1}\Big\{-\frac{\nu-2\delta}{\alpha}-\frac{q(\nu+1)-\delta}{\alpha}+\frac{(q(\nu+1)-\delta)^2}{2\alpha^2}\Big\}\\ &= -\frac{(q+1)s(s+1)}{2\alpha}+\frac{3s\delta}{\alpha}+O\Big(\frac{q^2s^3+\delta^2s+s}{\alpha^2}\Big)\\ &= -\frac{(q+1)(j-\alpha)^2}{2\alpha}+O\Big(\frac{1}{\omega}\Big). \qquad (43)\end{aligned}$$

Оценим теперь Q_j снизу при $\tau^* \leqslant j < m^*$. В силу (34) и (37) имеем

$$Q_j = \prod_{\nu=0}^{s-1}\frac{m^*-\nu}{\alpha_{m^*-\nu-1}} \geqslant \prod_{\nu=0}^{s-1}\frac{\alpha-1-\nu}{\alpha+q(\nu+1)+\delta}.$$

Далее,

$$\ln Q_j \geqslant \sum_{\nu=0}^{s-1}\Big\{\ln\Big(1-\frac{\nu+1}{\alpha}\Big)-\ln\Big(1+\frac{q(\nu+1)+\delta}{\alpha}\Big)\Big\}$$

$$\geqslant \sum_{\nu=0}^{s-1}\Big\{-\frac{\nu+1}{\alpha}-\frac{(\nu+1)^2}{2\alpha(\alpha-\nu-1)}-\frac{q(\nu+1)+\delta}{\alpha}\Big\}$$

$$= -\frac{(q+1)s(s+1)}{2\alpha}-\frac{s\delta}{\alpha}+O\Big(\frac{s^3}{\alpha^2}\Big)$$

$$= -\frac{(q+1)(j-\alpha)^2}{2\alpha}+O\Big(\frac{\omega^3}{\sqrt{\alpha}}+\frac{1}{\omega}\Big). \tag{44}$$

Из (43) и (44) вытекает справедливость равенства (35) при $\tau^* \leqslant j < m^*$. Теорема 4 доказана.

Лемма 8. *Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда при $n \to \infty$*

$$\sum_{|j-\alpha_n^*|\leqslant\omega_n\sqrt{\alpha_n^*/(q+1)}} \sigma_{n,j} = (1+\varepsilon)\sqrt{2\pi\alpha_n^*/(q+1)}\,\sigma_{n,m^*}, \tag{45}$$

где $\varepsilon = O(\omega_n^{-1}+\omega_n^3(\alpha_n^*)^{-1/2})$.

Доказательство. Положим

$$\sigma_n^* = \sum_{|j-\alpha_n^*|\leqslant\omega_n\sqrt{\alpha_n^*/(q+1)}} \sigma_{n,j}, \qquad \alpha_n^* = \alpha,$$

$$\tau = \alpha-\omega_n\sqrt{\alpha/(q+1)}, \quad \theta = \alpha+\omega_n\sqrt{\alpha/(q+1)}.$$

В силу (35) при $|j-a| \leqslant \omega\sqrt{\alpha/(g+1)}$ имеем

$$\sigma^* = (1+\varepsilon)\sqrt{2\pi}\sigma_m \sum_{\tau\leqslant j\leqslant\theta}\varphi(x_j), \tag{46}$$

где $\varepsilon = O(\omega^{-1}+\omega^3\sqrt{\alpha})$. Далее, положим

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt \quad \text{и} \quad h = 1/\sqrt{\alpha/(q+1)}.$$

Из теоремы о среднем вытекает следующее равенство (см. [3, с. 188]):

$$h\varphi(x_j) = (1-O(\varepsilon_j))\{\Phi(x_j+h/2)-\Phi(x_j-h/2)\}, \tag{47}$$

где $\varepsilon_j = h(|x_j|+h/4)$. Заметим, что если $\tau \leqslant j \leqslant \theta$, то из условий теоремы следует, что $x_j = O(\omega)$, $h = O(\omega^{-1}\alpha^{-3/8})$, $\varepsilon_j = O(\alpha^{-3/8}) = o(1/\omega)$. Поэтому из (47) следует, что при $t = \lfloor\theta\rfloor$ и $s = \lceil\tau\rceil$

$$h\sum_{\tau\leqslant j\leqslant\theta}\varphi(x_j) = (1+O(\omega^{-1}))\{\Phi(x_t+h/2)-\Phi(x_s-h/2)\}. \tag{48}$$

Воспользуемся тем, что (см. [3, с. 196]) при $x \to \infty$ справедливо равенство

$$1 - \Phi(x) = (1 + O(x^{-2}))(2\pi)^{-1/2}x^{-1}e^{-x^2/2}. \quad (49)$$

Кроме того, учтем, что $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, $-h \leqslant x_s + x_t \leqslant h$ и

$$\Phi(x_s - h/2) = (1 + O(\omega^{-1}))(1 - \Phi(x_t + h/2)). \quad (50)$$

Теперь из (36), (48)–(50) получаем (45). Лемма 8 доказана.

Пусть $\{\sigma_{n,j}\}$ — ограниченная последовательность, $\sigma_n = \sum_{j\geqslant 0}\sigma_{n,j}$. Рассмотрим случайную величину ξ_n вида $P(\xi_n = j) = \sigma_{n,j}/\sigma_n$. Следующие две теоремы дают условия, при которых случайная величина ξ_n имеет в пределе при $n \to \infty$ распределение Пуассона или нормальное распределение.

Для произвольной последовательности $\{\rho_n\}_{n=0}^{\infty}$ положим $\sigma(\rho_n) = \sum_{j\leqslant\rho_n}\sigma_{n,j}$, $\alpha(\rho_n) = \max_{j\leqslant\rho_n}\{\alpha_{n,j}\}$, $\beta(\rho_n) = \min_{j\leqslant\rho_n}\{\alpha_{n,j}\}$, $\gamma(\rho_n) = \alpha(\rho_n) - \beta(\rho_n)$.

Теорема 5. *Пусть последовательность $\{\sigma_{n,j}\}$ является α_n-ограниченной, $\alpha_{n,j} = (j+1)\sigma_{n,j+1}/\sigma_{n,j}$, $\sigma_n = \sum_{j\geqslant 0}\sigma_{n,j}$ и выполнены следующие условия:*

$$\sigma_n \sim \sigma(\rho_n), \quad (51)$$

$$\lim_{n\to\infty}\gamma(\rho_n) = 0, \quad (52)$$

$$\lim_{n\to\infty}\rho_n\gamma(\rho_n)/\alpha(\rho_n) = 0. \quad (53)$$

Тогда для всех $j \leqslant \rho_n$

$$\lim_{n\to\infty}P(\xi_n = j) \sim ((\alpha(\rho_n))^j/j!)e^{-\alpha(\rho_n)}. \quad (54)$$

Доказательство. Аналогично (2) и (21) при $j \leqslant \rho_n$ имеем

$$\sigma_{n,0}(\beta(\rho_n))^j/j! \leqslant \sigma_{n,j} \leqslant \sigma_{n,0}(\rho_n)^j/j!\,. \quad (55)$$

С другой стороны, в силу (52) и (53) получаем, что при $j \leqslant \rho_n$

$$(\beta(\rho_n))^j = (\alpha(\rho_n) - \gamma(\rho_n))^j = (\alpha(\rho_n))^j(1 - (\gamma(\rho_n)/\alpha(\rho_n))^j)$$
$$\geqslant (\alpha(\rho_n))^j(1 - (\gamma(\rho_n)/\alpha(\rho_n))^{\rho_n} \sim (\alpha(\rho_n))^j. \quad (56)$$

Из (55), (56) и определения ξ_n вытекает (54). Теорема 5 доказана.

Пример 2. Пусть $\sigma_{n,j} = \binom{n}{j}p^j$, $p = p(n)$ и ξ_n — случайная величина такая, что $P(\xi_n = j) = \sigma_{n,j}/\sigma_n$, где $\sigma_n = \sum_{j\geqslant 0}\sigma_{n,j}$. Тогда если $p = \varepsilon_n n^{-1/2}$, где $\varepsilon_n \to 0$, $1/\varepsilon_n = o(n^{1/4})$ при $n \to \infty$, то для всех $j \leqslant np + (np/\varepsilon_n)^{1/2}$ справедливо соотношение

$$\lim_{n\to\infty}P(\xi_n = j) \sim (np)^j/j!\exp\{-np\}. \quad (57)$$

В самом деле, $\sigma_{n,0} = 1$, а при $p = o(n^{-1/2})$

$$\sigma_n = \sum_{j\geqslant 0}\sigma_{n,j} = \sum_{j\geqslant 0}\binom{n}{j}p^j = (1+p)^n \sim \exp\{np\}.$$

Из определения $\alpha_{n,j}$ следует, что $\alpha_{n,j} = (n-j)p$. Пусть $\rho_n = np + \sqrt{np/\varepsilon_n}$. Тогда $\alpha(\rho_n) = np$, $\beta(\rho_n) = (n - np - (np/\varepsilon_n)^{1/2})p$, $\gamma(\rho_n) \sim np^2 \sim \varepsilon_n^2$. Далее, $\rho_n\gamma(\rho_n)/\alpha(\rho_n) \sim \gamma(\rho_n) \sim \varepsilon_n^2$, $\sigma(\rho_n) = \sigma_n(1 - O(e^{-1/2\varepsilon_n}))$. Условия (51)–(53) выполнены. Воспользовавшись (54), получаем (57). Заметим, что применение теоремы 2 здесь не позволяет получить асимптотику.

Теорема 6. *Пусть α_n-ограниченная последовательность $\{\sigma_{n,j}\}$ и последовательность ω_n удовлетворяют условиям теоремы 4. Пусть, кроме того,* $\sigma_n^* = \sum_{|j-\alpha_n^*|\leqslant\omega_n\sqrt{\alpha_n^*/(q+1)}} \sigma_{n,j}$, $\sigma_n = \sum_{j\geqslant 0}\sigma_{n,j}$,

$$\sigma_n^* \sim \sigma_n. \tag{58}$$

Тогда при $n\to\infty$ *и* $|j-\alpha_n^*| \leqslant \omega_n(\alpha_n^*/(q+1))^{1/2}$ *выполнено*

$$\sigma_{n,j} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha_n^*/(q+1)}}\sigma_n \exp\left\{-\frac{(q+1)(j-\alpha_n^*)^2}{2\alpha_n^*}\right\}. \tag{59}$$

Утверждение теоремы следует из (47) и (58).

Пример 3. Пусть требуется найти асимптотику суммы $\sigma_n = \sum_{j\geqslant 0}\sigma_{n,j}$, где $\sigma_{n,j} = \binom{n}{j}^3$. Воспользуемся леммой 8 и теоремами 4 и 6. Применяя обозначения теоремы 4, имеем $m^* = \lceil n/2\rceil$, $\alpha_n^* = (n-m^*)^3/(m^*+1)^2$. Далее,

$$\alpha_{n,j} - \alpha_n^* = (n-j)^3/(j+1)^2 - (n-m^*)^3/(m^*+1)^2 \sim 7(m^*-j).$$

Отсюда $q = 7$. Выберем $\omega_n = n^{1/7}$, чтобы удовлетворить условие $\omega_n = o((\alpha_n^*)^{1/6})$, и положим $\sigma_n^* = \sum_{|j-\alpha_n^*|\leqslant\omega_n\sqrt{\alpha_n^*/(q+1)}} \sigma_{n,j}$. Тогда по лемме 8 получаем, что

$$\sigma_n^* \sim \sqrt{2\pi\alpha_n/(q+1)}\,\sigma_{n,m^*} \sim \sqrt{\pi n/8}\binom{n}{\lceil n/2\rceil}^3 \sim (\pi n)^{-1}8^n.$$

Положим $\theta = \alpha_n^* + \omega_n\sqrt{\alpha_n^*/(q+1)}$, $\tau = \alpha_n^* - \omega_n\sqrt{\alpha_n^*/(q+1)}$, $t = \lfloor\theta\rfloor$, $s = \lceil\tau\rceil$. Нетрудно видеть, что $\sigma_n^* < \sigma_n \leqslant \sigma_n^* + n(\sigma_{n,t}+\sigma_{n,s})$. В силу (35) и выбора ω_n имеем $\sigma_{n,t} \sim \sigma_{n,s} \sim \sigma_{n,m^*}\exp\{-n^{2/7}\}$. Отсюда

$$\sum_{j\geqslant 0}\binom{n}{j}^3 \sim (\pi n)^{-1}8^n.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Сапоженко А. А.** О числе антицепей в ранжированных частично упорядоченных множествах // Дискретная математика. 1989. Т. 1, № 1. С. 74–93.
2. **Сапоженко А. А.** О числе антицепей в многослойных ранжированных множествах // Дискретная математика. 1989. Т. 1, № 2. С. 110–128.
3. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1967. Т. 1.