ЗАДАЧА ОСНАЩЕНИЯ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ И СВЯЗИ *)

Э. Х. Гимади, Н. И. Глебов

В описываемой ниже модели в качестве основной цели функционирования системы управления и связи (системы УС) считается доведение управляющего сигнала от главного пункта управления до конечных пунктов-исполнителей. Предполагается, что необходимый уровень эффективности определяется математическим ожиданием числа конечных пунктов, до которых доведен требуемый сигнал управления. В качестве стоимостного критерия естественно рассматривать суммарные затраты на оснащение системы соответствующими техническими средствами. Затраты складываются из

— затрат на проведение научно-исследовательских и опытно-конструкторских разработок,
— затрат на организацию серийного производства технических средств,
— затрат в сфере использования этих средств в различных подсистемах УС, обеспечивающих в совокупности нормальное функционирование системы в целом.

Рассматриваемая задача заключается в минимизации указанных затрат на оснащение системы УС техническими средствами при условии, что обеспечивается заданный уровень математического ожидания числа конечных исполнителей, своевременно получивших управляющий сигнал. При этом должны быть найдены типаж и количественный состав технических средств, а также назначение комплектов (формирований) этих средств на соответствующие подсистемы, составляющие систему УС в целом. Понятно, что эта задача может решаться с помощью обратной задачи максимизации математического ожидания числа конечных исполнителей, своевременно получивших управляющий сигнал при заданном ограничении на величину суммарных затрат в сфере производства и в сфере использования соответствующих технических средств.

В настоящей статье рассмотрены некоторые случаи частично-однородных блочно-древесных структур как с прямыми связями между вершиной-передатчиком и конечным пунктом-приемником, так и без них. Построен и обоснован псевдополиномиальный алгоритм максимизации математического ожидания числа реализованных приказов при фиксированном типаже используемых технических средств. Предложен также алгоритм решения задачи выбора типажа и состава технических средств при оптимизации сложной иерархической структуры блочно-древесного типа.

---

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-012-489), а также при частичной финансовой поддержке Международного научного фонда (код проекта RPY000).

§ 1. Математическая модель

Поставим в соответствие рассматриваемой системе УС иерархическую многоуровневую, многотерминальную блочно-древесную структуру (БД-структуру).

Пункт (вершина) 0-го уровня является главным пунктом управления (ПУ). Из i-го ПУ, находящегося на уровне $r-1$, управляющий сигнал передается на пункты $j \in J_i$, находящиеся на следующем r-м уровне, $0 \leqslant r < R$. На последнем R-м уровне находится множество I^* пунктов-потребителей, которые далее будем нумеровать индексами ν, $\nu \in I^*$. Введем следующие обозначения:

I — множество ПУ на уровнях $0 \leqslant r < R$;
I_i — множество вершин-потомков вершины i, включая саму вершину i;
I_i^* — множество конечных потребителей-потомков i-го ПУ , $i \in I$.

Считаем, что i-й ПУ, находящийся на r-м уровне, $0 \leqslant r < R$, связан с каждым пунктом $j \in J_i$, а пункты-сыновья из множества J_i связаны между собой (каждый с каждым).

Для i-го ПУ, $i \in I$, подграф связей, порожденный множеством вершин $\{i\} \cup J_i$, обозначим через Δ_i. На каждую из подсистем, функционирующих на подсети Δ_i, можно назначить один из комплектов k из некоторого множества K_i. Каждый комплект k характеризуется набором технических средств связи (a_{ks}), где a_{ks} — количество технических средств (модулей) s-го вида в комплекте с номером k, $s = 1, \ldots, m$. В характеризацию комплекта можно включить также и способ формирования (структурирования) этих средств в рамках оснащаемой подсистемы.

При использовании в подсистеме Δ_i какого-либо комплекта k предполагается, что для любого $j \in J_i$ можно получить множество $L_{ij}^k = \{\mu_l\}$ независимых путей, связывающих вершину i верхнего r-го уровня с вершиной $j \in J_i$ следующего $(r+1)$-го уровня, $0 \leqslant r < R$. При этом для каждого такого пути μ_l известно время задержки t_{ij}^{kl} передачи сигнала и вероятность p_{ij}^{kl} прохождения сигнала по этому пути.

В качестве конкретизации вычисления вероятностно-временных характеристик (ВВХ) вершин $j \in J_i$ подсистемы Δ_i рассмотрим случай задания совокупности пар $\{(t_l^k, p_l^k)\}$ — времен задержек и вероятностей прохождения сигнала по дуге (ребру) l подсистемы Δ_i — при использовании в этой подсистеме k-го комплекта. Предполагая, что каждый из независимых путей в множестве L_{ij}^k содержит не более двух звеньев, получим формулы для вычисления требуемого набора ВВХ:

$$(t_{ij}^{kl}, p_{ij}^{kl}) = \begin{cases} (t_l^k, p_l^k), & \text{если путь состоит из звена } e = (i, j), \\ (t_{l'}^k + t_{l''}^k, t_{l'}^k + t_{l''}^k), & \text{если путь } \mu_l \text{ состоит из двух звеньев} \\ & e' = (i, j'),\ e'' = (j', j),\ j' \in J_i \setminus \{j\}. \end{cases}$$

Далее будем считать, что величины t_{ij}^{kl}, $l \in L_{ij}^k$, предварительно упорядочены по неубыванию: $t_{ij}^{k1} \leqslant t_{ij}^{k2} \leqslant \ldots \leqslant t_{ij}^{kD}$, $D = |L_{ij}^k|$.

Для каждого конечного пункта $\nu \in I^*$ задано максимально допустимое время t_ν^*. Сигнал считается дошедшим от вершины 0 до вершины ν, если он пришел за время, не превышающее t_ν^*.

Наряду с БД-структурой будем рассматривать также блочно-древесную структуру с прямыми связями (БДП-структуру), когда для каждого $i \in I$ i-й ПУ связан с конечным пунктом $\nu \in I_i^*$ как с помощью упомянутой БД-структуры, так и напрямую по дуге-коммуникации (i,ν); причем в этом случае для любого комплекта k в подсистеме Δ_i считаются известными вероятность $p_{i\nu}^k$ и время $t_{i,\nu}^k$ прохождения сигнала из пункта i в пункт ν.

Перейдем к описанию стоимостных факторов в рассматриваемой модели. Для технических средств s-го вида считаем известной производственную функцию $g_s(v)$ — стоимость производства технических средств s-го вида в количестве v штук. Без ограничения общности считаем эту функцию неубывающей, кусочно-линейной, вогнутой, в нуле равной нулю, с точками излома $0 = v_s^{(0)} < v_s^{(1)} < \ldots < v_s^{(Q_s)}$ и величинами $c_s^{(q)}$ — стоимостями производства единичного средства s-го вида при объеме производства v, $v_s^{(q-1)} < v \leqslant v_s^{(q)}$, $q = 1,\ldots,Q_s$. Значение величины производственной функции $g_s(v)$ задано хотя бы при одном значении объема производства $v_s^{(q)} > 0$. Известны также значения g_{si} — стоимости использования (эксплуатации) одного технического средства s-го вида в условиях подсистемы Δ_i. В качестве переменных величин в модели будем использовать компоненты вектора назначений $\overline{k} = (k_i,\ i \in I)$, где $k_i \in K_i$ — номер комплекта, оснащающего подсистему Δ_i. Введем следующие обозначения:

$\overline{k}_{i\nu}$ — набор комплектов в подсистемах на пути из вершины i в конечную вершину $\nu \in I_i^*$;

$\mathbf{P}_{i\nu}(t,\overline{k}_{i\nu})$ — вероятность прохождения сигнала из вершины i в конечную вершину $\nu \in I_i^*$ при комплектовании $\overline{k}_{i\nu}$ в подсистемах на пути из i в ν, если в вершину i он пришел с задержкой t.

В конечном итоге качество системы УС при выбранном наборе комплектов $\overline{k}$ можно характеризовать величинами $F(\overline{k})$ и $N(\overline{k})$, где $F(\overline{k})$ — суммарные затраты на создание УС, $N(\overline{k})$ — математическое ожидание числа сигналов, дошедших из вершины 0 до конечных пунктов I^*. С учетом введенных обозначений имеем

$$N(\overline{k}) = \sum_{\nu \in I^*} \mathbf{P}_{0\nu}(0,\overline{k}_{0\nu}).$$

Вычисление вероятностей $\mathbf{P}_{0\nu}(0,\overline{k}_{0\nu})$ можно осуществить с помощью последовательного пересчета вероятностей $\mathbf{P}_{i\nu}(t,\overline{k}_{i\nu})$ по рекуррентным формулам

$$\mathbf{P}_{i\nu}(t,\overline{k}_{i\nu}) = p_{i\nu}^{kt} + (1 - p_{i\nu}^{kt}) \sum_{l \in L} p_{ij}^{kl} \prod_{l'=1}^{l-1} (1 - p_{ij}^{kl'}) \mathbf{P}_{j\nu}(t + t_{ij}^{kl}, \overline{k}_{i\nu}),$$

где $L = L_{ij}^k$, $k = k_i$, $0 \leqslant t \leqslant t_\nu^*$, $i \in I$; j — вершина из множества J_i, принадлежащая пути из i в ν; $p_{i\nu}^{kt} = 0$ при $t + t_{i\nu}^k > t_\nu^*$ и $p_{i\nu}^{kt} = p_{i\nu}^k$ при $t + t_{i\nu}^k \leqslant t_\nu^*$ (в случае БД-структуры $p_{i\nu}^{kt} = 0$).

Для фиксированного вектора $\overline{k}$ можно вычислить объемы производства технических средств, требуемые для оснащения всей системы в целом, именно:

$$v_s = \sum_{i \in I} a_s(i, \overline{k}), \quad s = 1, \ldots, m,$$

где $a_s(i, \overline{k}) = a_{ks}$ при $k = k_i$, и затраты, связанные с функционированием каждой подсистемы Δ_i, $i \in I$,

$$c_i(\overline{k}) = \sum_{s=1}^{m} g_{si} a_s(i, \overline{k}), \quad i \in I.$$

Задавшись требуемым уровнем N^* математического ожидания числа конечных пунктов, получивших управляющий сигнал, можно записать математическую постановку задачи минимизации суммарных затрат на оснащение системы УС:

$$F(\overline{k}) = \sum_{i \in I} c_i(\overline{k}) + \sum_{s=1}^{m} g_s(v_s) \longrightarrow \min_{\overline{k}}, \tag{1}$$

$$k_i \in K_i, \quad i \in I, \tag{2}$$

$$\sum_{j \in I^*} \mathbf{P}_{0\nu}(0, \overline{k}_{0\nu}) \geqslant N^*. \tag{3}$$

Запишем целевую функцию в случае полулинейной производственной функции, когда для всякого $s = 1, \ldots, m$

$$g_s(v) = g_s^0 + c_s^{\text{пр}} v \text{ при } v > 0, \; g_s(0) = 0,$$

где $c_s^{\text{пр}}$ — стоимость производства единичного средства s-го вида, g_s^0 — начальные затраты на ввод в действие технического средства s-го вида,

$$\min_{\overline{k} \in K(s)} \Big\{ \sum_{s \in S} g_s^0 + \sum_{i \in I} c_i(\overline{k}, S) \Big\} \longrightarrow \min_{S \subseteq \{1, \ldots, m\}}, \tag{4}$$

где

$$c_i(\overline{k}, S) = \sum_{s \in S} (c_s^{\text{пр}} + g_{si}) a_s(i, \overline{k}),$$

$$K(S) = \{\overline{k} \mid \forall i \, \forall s \, (a_s(i, \overline{k}) > 0 \Longrightarrow s \in S)\}.$$

В случае неубывающей кусочно-линейной производственной функции целевую функцию можно записать в аналогичном виде, но с расширенным множеством возможных видов технических средств, когда каждое исходное техническое средство s-го вида представлено Q_s подвидами этого технического средства, каждое со своей полулинейной производственной функцией [1]:

$$g_{sq}(u) = g_{sq}^0 + c_s^{(q)} \text{ при } v > 0, \; q = 1, \ldots, Q_s, \quad g_{sq}(0) = 0,$$

где g_{s1}^0 заданы, а g_{sq}^0 при $q > 1$ определены рекуррентно

$$g_{sq}^0 = g_{s,q-1}^0 + v_s^{(q-1)} (c_s^{(q-1)} - c_s^{(q)}), \; 1 < q \leqslant Q_s.$$

§ 2. Максимизация $N(\overline{k})$ при ограниченных суммарных затратах

Рассмотрим сначала случай БД-структуры. Обозначим через $\mathrm{N}_i(t,\alpha)$ максимум математического ожидания числа доведенных сигналов управления из пункта i в конечные пункты $\nu \in I_i^*$ по всем комплектованиям с величиной суммарных затрат $\sum\{c_j(\overline{k}) \mid j \in I_i\} \leqslant \alpha$ при задержке t прихода управляющего сигнала в i-ю вершину, $i \in I$, и пусть A — верхняя граница величины суммарных затрат на комплектование подсистем Δ_i, $i \in I$. Нас интересует набор комплектов $\overline{k}^*$, максимизирующий величину $N(\overline{k})$. Таким образом,

$$\mathrm{N}_0(0,A) = N(\overline{k}^*).$$

Решение находится с помощью последовательного пересчета семейства

$$\{\mathrm{N}_i(t,\alpha) \mid 0 \leqslant t \leqslant t_{\max},\ 0 \leqslant \alpha \leqslant A,\ i \in I\}$$

по рекуррентным формулам

$$\mathrm{N}_i(t,\alpha) = \max\{\Phi_i(k,A_i) \mid A_i \in \Omega(i,k),\ k \in K_i\},$$

где

$$\Omega(i,k) = \{A_i \mid \sigma(A_i) = \alpha - c_{ik}\}; \quad A_i = (\alpha_j \mid j \in J_i),$$

$$\sigma(A_i) = \sum\{\alpha_j \mid j \in J_i\}; \quad \alpha_j \geqslant 0 \quad \forall j \in J_i,$$

$$\Phi_i(k,A_i) = \sum\left\{p_{ij}^{kl}\prod_{l'=1}^{l-1}(1-p_{ij}^{kl'})\mathrm{N}_j(t+t_{ij}^{kl},\alpha_j) \mid j \in J_i,\ l \in L_{ij}^k\right\}.$$

Время (трудоемкость) вычислений по этим формулам оценивается величиной $T = O(nt_{\max}qA^2)$, где $t_{\max} = \max\limits_{\nu\in I^*} t_\nu^*$, $n = |I|$, $q = \max\limits_{i\in I}|K_i|$, в предположении целочисленности времен прохождения сигнала и стоимостных характеристик.

В случае БДП-структуры предполагаем, что вероятности $p_{i\nu}^k$ прямого прохождения сигнала от пункта i до конечного пункта $\nu \in I_i^*$ зависят только от номера пункта управления i и типа комплекта k, используемого в подсистеме Δ_i: $p_{i\nu}^k = p_i^k$, $t_{i\nu}^k = t_i^k$, $i \in I$. При этом используемые в процессе вычисления рекуррентные формулы принимают вид

$$\mathrm{N}_i(t,\alpha) = \max\{p_i^k|I_i^*| + (1-p_i^k)\cdot\Phi_i(k,A_i) \mid A_i \in \Omega(i,k),\ k \in K_i\}.$$

§ 3. Метод решения основной задачи

Исходную задачу (1)–(3) или (2)–(4) будем называть прямой задачей (на минимум). Тогда задачу из § 2 можно рассматривать как обратную задачу. Введя в число аргументов функции N_0 множество S допустимых видов технических средств, имеем следующую задачу на максимум по S:

$$\mathrm{N}_0\Big(0, A - \sum_{s\in S} g_s^0\Big) \longrightarrow \max_{S\subseteq\{1,\dots,m\}}, \tag{5}$$

где A — верхняя граница величины суммарных затрат на ввод в действие видов технических средств из множества S и на оснащение подсистем соответствующими комплектами из этих технических средств.

Обозначим через $W(A)$ оптимальное значение целевой функции в (5). Очевидно, функция $W(A)$ не убывает по A и не превышает числа конечных исполнителей $|I^*|$.

Тогда решение прямой задачи (1)–(3) или (2)–(4) можно получить в результате решения последовательности обратных задач (5) при $A = 1, 2, 3, \ldots$:

$$F(\overline{k}^*) = \min\{A \mid W(A) \geqslant N^*\}.$$

Для вычисления функции $W(A)$ может быть использована схема метода ветвей и границ, в значительной мере аналогично тому, как решается двухуровневая задача выбора типажа технических средств и набора комплектов, используемых для обслуживания подсистем [1].

§ 4. Случай частично-однородных блочно-древесных структур с прямыми связями

Под частично-однородной БДП-структурой будем понимать иерархическую систему УС с однородными (в пределах некоторого подмножества) коммуникациями, выходящими из вершин — пунктов управления. При этом предполагаем, что $t_\nu^* = t_{\max}$ и передача сигнала от i-го ПУ к подчиненному пункту $j \in J_i$ осуществляется только по дуге (i, j). Кроме того, будем использовать обозначение I^r для множества ПУ, находящихся на уровне r, $0 \leqslant r < R$.

Рассмотрим сначала подсистемно-однородную БДП-структуру, в которой однородность коммуникаций (i, j), $j \in J_i$, соблюдается по крайней мере в рамках одной подсистемы Δ_i. Понятно, что в нашем случае информация о комплектах представима в виде подсписков

$$\{(p_k, t_k, \tilde{p}_k, \tilde{t}_k, c_k) \mid k \in K_i)\}, \quad i \in I,$$

а основные рекуррентные соотношения, связывающие максимумы математического ожидания числа доведенных сигналов, можно переписать в виде

$$\mathrm{N}_i(t, \alpha) = \max_{k \in K_i}\{n_i \tilde{p}_k(t, \alpha) + (1 - \tilde{p}_k(t, \alpha)) p_k f_m^{(i)}(t + t_k, \alpha - c_k) \mid \\ t + t_k \leqslant t_{\max},\ c_k \leqslant \alpha\},$$

где для любого $k \in K_i$ и $j \in J_i$, $i \in I^r$, введены обозначения

$$p_k = p_{ij}^{k,1}, \quad \tilde{p}_k = p_i^k, \quad t_k = t_{ij}^{k,1}, \quad \tilde{t}_k = t_i^k,$$

$$c_k = c_{ik}, \quad m_i = |J_i|, \quad n_i = |I_i^*|,$$

$$\tilde{p}_k(t, \alpha) = \begin{cases} \tilde{p}_k & \text{при } \tilde{t}_k \leqslant t_{\max} - t,\ c_k \leqslant \alpha, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$f_m^{(i)}(t,\alpha)$ — оптимальное значение целевой функции в следующей подзадаче динамического программирования [2]:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\in J_i} \mathrm{N}_j(t,\alpha_j) \longrightarrow \max_{(\alpha_j)},\\
&\sum_{j\in J_i} \alpha_j \leqslant \alpha, \quad i\in\Gamma,\\
&\alpha_j \geqslant 0, \quad j\in J_i,
\end{aligned}$$

где $m = m_i$. Понятно также, что для подсистем самого нижнего уровня можно записать

$$\mathrm{N}_i(t,\alpha) = m_i \max_{k\in K_i}\{p_k \mid c_k \leqslant \alpha,\ t_k \leqslant t_{\max} - t\},$$

где $i \in I^{R-1}$, а m_i и n_i при $r = R-1$ совпадают.

Нас интересует значение $\mathrm{N}_0(0,A)$ максимума математического ожидания числа сигналов, доведенных из корневой вершины до конечных исполнителей за время, не меньшее $t_{\max}$, при ограничении сверху суммарных затрат величиной A, а также оптимальный набор комплектов $\{(k_i^*) \mid i\in I\}$, размещаемых на подсистемах Δ_i.

Алгоритм отыскания оптимального решения можно представить в виде двух основных этапов процедуры динамического программирования.

ЭТАП ПРЯМОГО ХОДА. Вычисляется семейство оптимумов подзадач:

$$\left.\begin{aligned}
&(\mathrm{N}_i(t,\alpha)),\ 0\leqslant t\leqslant t_{\max},\ 0\leqslant\alpha\leqslant A,\\
&(f_j^{(i)}(t,\alpha),\quad j\in J_i),\ 0\leqslant t\leqslant t_{\max},\ 0\leqslant\alpha\leqslant A,
\end{aligned}\right\}\quad i\in I.$$

ЭТАП ОБРАТНОГО ХОДА. Вычисляются следующие наборы:

(k_i^*) — комплекты технических средств на подсистемах,

(α_i^*) — распределения ресурсов на поддеревьях иерархической структуры системы УС,

(T_i) — времена задержек прохождения сигналов от корневой вершины до i-го ПУ в оптимальном решении, где $i\in I^r$, $0\leqslant r<R$.

Анализ рекуррентных соотношений, реализующих алгоритм в случае подсистемно-однородной БДП-структуры, приводит к следующим оценкам его трудоемкости: время $\sim nA^2t_{\max}$ и память $\sim nAt_{\max}$. (Здесь и далее предполагаем целочисленность времен задержек и стоимостных показателей.)

Подробнее остановимся на формализованном описании уровнево-однородной БДП-структуры, в которой однородность используемых вершин и коммуникаций имеет место во всех подсистемах одновременно в пределах каждого уровня r, $0\leqslant r<R$. Одинаковые для всех $i\in I^r$ численности $m_i = |J_j|$, $i\in I_j$, в этом случае будем обозначать через μ_r, $0\leqslant r<R$. В силу однородности вершин i и коммуникаций (i,j), $j\in J_i$, каждого уровня иерархической системы УС вместо прежних обозначений $\mathrm{N}_i(t,\alpha)$ и $\mathrm{N}_j(t+t_k,\alpha_j)$, $j\in J_i$, $i\in I^r$, в основном рекуррентном соотношении будем использовать новые обозначения, зависящие не от номеров вершин i и j, а непосредственно от номеров уровней их расположения: $\mathrm{N}(r,t,\alpha)$ и $\mathrm{N}(r+1,t+t_k,\alpha_j)$. В силу однородности вершин в пределах одного уровня информацию о комплектах можно задать в виде R подсписков

$$\{(p_k,t_k,\tilde p_k,\tilde t_k,c_k) \mid k\in K^{(r)}\},\quad 0\leqslant r<R,$$

а вместо семейств

$$\{(f_j^{(i)}(t,\alpha),\ i \in J_i) \mid 0 \leqslant t \leqslant t_{\max},\ 0 \leqslant \alpha \leqslant A\}$$

для каждой вершины $i \in I$ на этапе прямого хода вычислять семейства

$$\{(f_\lambda(r,t,\alpha),\ \lambda = 1,\dots,\mu_r) \mid 0 \leqslant t \leqslant t_{\max},\ 0 \leqslant \alpha \leqslant A\}$$

для каждого уровня r, $0 \leqslant r < R$.

Заметим, что если стандартная процедура динамического программирования при фиксированных r и t вычисляет набор

$$\{f_\lambda(r,t,\alpha) \mid \lambda = 1,\dots,\mu_r, \alpha = 1,\dots,A\}$$

за время $\sim \mu_r A^2$, то в силу максимизации одинаковых функций $\mathrm{N}(r+1,t,\alpha)$ в подзадаче динамического программирования решение (α_λ), $\lambda = 1,\dots,\mu_r$, можно искать в классе невозрастающих последовательностей $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \dots \geqslant \alpha_{\mu_r}$, что позволяет осуществить вычисление указанного набора по формулам

$$f_\lambda(r,t,\alpha) = \begin{cases} \mathrm{N}(r+1,t,\alpha) & \text{при } \lambda = 1, \\ \max\{f_{\lambda-1}(r,t,\alpha-\alpha_\lambda) + \mathrm{N}(r+1,t,\alpha_\lambda) \mid 0 \leqslant \alpha_\lambda \leqslant [\frac{\alpha}{\lambda}]\} & \\ & \text{при } 2 \leqslant \lambda \leqslant \mu_r \end{cases}$$

за время $\sim \sum\limits_{\alpha=1}^{A} \sum\limits_{\lambda=1}^{\mu_r} [\alpha/\lambda] \sim A^2 \ln \mu_r$.

Итак, в случае уровнево-однородной структуры мы имеем следующие основные рекуррентные соотношения:

$$\mathrm{N}(r,t,\alpha) = \begin{cases} \mu_{R-1} \max\{p_k \mid c_k \leqslant \alpha,\ t_k \leqslant t_{\max} - t\} & \text{при } r = R-1, \\ \max\{n_r \tilde{p}_k(t,\alpha) + (1-\tilde{p}_k(t,\alpha)) p_k f_{\mu_r}(r+1, t+t_k, \alpha - c_k)\} & \\ & \text{при } 0 \leqslant r < R-1\,, \end{cases}$$

где максимум берется по множеству

$$\tilde{K}^{(r)} = \{k \in K^{(r)} \mid c_k \leqslant \alpha,\ t_k \leqslant t_{\max} - t\}.$$

Формализуем запись алгоритма.

ПРЯМОЙ ХОД

1. Для всех (α, t), $0 \leqslant \alpha \leqslant A$, $0 \leqslant t \leqslant t_{\max}$ вычисляем

$$\mathrm{N}(R-1,t,\alpha) = \mu_{R-1} \max_{k \in K^{R-1}} \{p_k \mid c_k \leqslant \alpha,\ t_k \leqslant t_{\max} - 1\}\ ;$$

2. Для $r = R-2, R-1, \dots, 0$ циклически повторяем пп. 2.1–2.3.

 2.1. Для всех (α, t) полагаем $f_1(r,t,\alpha) = \mathrm{N}(r+1,t,\alpha)$.

 2.2. Для $\lambda = 2,\dots,\mu_r$ циклически осуществляем вычисления по всем (α, t):

$$f_\lambda(r,t,\alpha) = \max\{f_{\lambda-1}(r,t,\alpha-\alpha_\lambda) \\ + \mathrm{N}(r+1,t,\alpha_\lambda) \mid \alpha = 0,1,\dots,[\alpha/\lambda]\}\,.$$

2.3. Если $r > 0$, то для всех (α, t) вычисляем

$$\mathrm{N}(r,t,\alpha) = \max\{n_r\tilde{p}_k(t,\alpha) + (1-\tilde{p}_k(t,\alpha))p_k f_{\mu_r}(r, t+t_k, \alpha - c_k) \mid k \in \tilde{K}^{(r)}\}.$$

3. Находим оптимальное значение целевой функции

$$\mathrm{N}(0,0,A) = \max\{n_0\tilde{p}_k(0,A) + (1-\tilde{p}_k(0,A))p_k f_{\mu_0}(0,t_k,A-c_k) \mid k \in \tilde{K}^{(0)}\}$$

и аргумент k_0^*, максимизирующий выражение в фигурных скобках (оптимальный комплект в подсистеме Δ_0 верхнего уровня).

ОБРАТНЫЙ ХОД

Положив $T_0 = 0$, $\alpha_0^* = A$, для каждого уровня $r = 0, 1, \ldots, R-1$ и каждой вершины $i \in I^r$ с $\alpha_i^* > 0$ циклически повторяем пп. 4–6.

4. Находим оптимальный комплект для подсистемы Δ_i:

$$k_i^* = \arg\max\{n_r\hat{p}_k + (1-\hat{p}_k)p_k f_{\mu_r}(r+1, T_i + t_k, \alpha_i^* - c_k) \mid k \in \tilde{K}^{(r)}\}\,,$$

где $\hat{p}_k = \tilde{p}_k(T_i + t_k, \alpha_i^* - c_k)$.

5. Полагаем $k := k_i^*$, $T := T_i + t_k$, $\alpha := \alpha_i^* - c_k$, $J := J_i$.
6. Для $\lambda = \mu_r, \mu_r - 1, \ldots, 2$ повторяем пп. 6.1, 6.2.

6.1. Берем вершину j из множества J, исключаем ее из этого множества: $J := J \backslash \{j\}$ — и полагаем $T_j := T$.

6.2. Если $J = \varnothing$, то полагаем $\alpha_j^* = \alpha$, в противном случае полагаем α_j^* равным корню уравнения

$$f_\lambda(r,T,\alpha) = f_{\lambda-1}(r,T,\alpha - x) + \mathrm{N}(r+1,T,x), \quad x = 0,1,\ldots,[\alpha/\lambda].$$

7. Выдача результатов счета:

$$\mathrm{N}(0,0,A), \quad \{(k_i^*, \alpha_i^*, T_i) \mid i \in I^r\}, \quad 0 \leqslant r < R\,.$$

§ 5. Замечания

1. Выбор вершин $i \in I^r$, $0 \leqslant r < R$, можно осуществить, перенумеровав эти вершины сверху вниз и слева направо так, что множества I^r представимы в виде сегментов

$$I^r = [i_r, i_{r+1}), \quad 0 \leqslant r < R\,,$$

где $i_0 = 0$; $i_{r+1} = i_r + \mu_r$, $0 < r < R$.

2. Выбор вершин j из множеств J_i, $i \in I^r$, $0 \leqslant r < R$, также можно осуществить, проведя несложную сегментную нумерацию этих вершин:

$$J_i^r = [j_i, j_{i+1}), \quad i \in I^r,\ 0 \leqslant r < R\,,$$

где

$$j_i = \begin{cases} i_{r+1} & \text{при } i = i_r, \\ j_{r-1} + m_r & \text{при } i_r < i < i_{r+1}. \end{cases}$$

3. Приведем оценки трудоемкости алгоритма при условии целочисленности времен задержки. Требуемая память определяется необходимостью хранения семейства величин

$$\{f_\lambda(r,t,\alpha) \mid \lambda = 1,\dots,\mu_r,\ 0 \leqslant r < R,\ 0 \leqslant t \leqslant t_{\max},\ 0 \leqslant \alpha \leqslant A\}$$

и равна

$$\Pi \sim \mu_{\max} R A t_{\max},$$

где $\mu_{\max} = \max\{\mu_r \mid 0 \leqslant r < R\}$. Оценим время работы этапа прямого хода, определяемое в основном п. 2:

$$T_{\text{пр}} \sim \sum_{r=0}^{R-1} \sum_{t=0}^{t_{\max}} \sum_{\alpha=0}^{A} \left(\sum_{\lambda=1}^{\mu_r} [\frac{\alpha}{\lambda}] + |K^{(r)}| \right)$$

$$\sim t_{\max} \left(\sum_{\alpha=0}^{A} \alpha \sum_{r=0}^{R-1} \ln \mu_r + A K_\Sigma \right) \sim t_{\max}(A^2 \ln n_0 + A K_\Sigma) ,$$

где n_0 — число конечных пунктов-исполнителей, K_Σ — суммарное число заданных комплектов.

Оценим время работы этапа обратного хода, учитывая, что

$$\sum_{i \in I^r} \alpha_i^* \leqslant A$$

для всякого r, $0 \leqslant r < R$:

$$T_{\text{обр}} \sim \sum_{r=0}^{R-1} \left(\sum_{i \in I^r} \alpha_i^* + |K^{(r)}| \right) < RA + K_\Sigma .$$

Таким образом, трудоемкость этапа обратного хода существенно ниже, чем для прямого хода, и это можно использовать в целях сокращения объема памяти, требуемой в п. 2, за счет некоторого увеличения времени счета на этапе обратного хода.

4. Ввиду того, что время реализации этапа обратного хода существенно меньше времени вычислений на этапе прямого хода, мы имеем возможность (используя результаты этапа прямого хода для $\alpha = A$) «почти бесплатно» получать результаты для любого интересующего нас значения α в пределах от 0 до A.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Береснев В. Л., Гимади Э. Х., Дементьев В. Т.** Экстремальные задачи стандартизации. Новосибирск: Наука, 1978.
2. **Гимади Э. Х., Глебов Н. И.** Экстремальные задачи принятия решений. Новосибирск: Новосиб. ун-т, 1982.