МОДЕЛИ И ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО СИНТЕЗА ОДНОРОДНЫХ ИЕРАРХИЧЕСКИХ СИСТЕМ *)

А. И. Гладышев, В. Т. Дементьев, А. И. Ерзин

§ 1. Оптимизация структуры системы управления однородными объектами

1.1. Постановка задачи. Требуется синтезировать оптимальную (минимальную по стоимости) структуру управления над заданным множеством V_0 элементов нулевого уровня. Элементы множества V_0 являются однородными, и каждый из них должен быть связан с одним элементом первого уровня управления. В свою очередь, элементы первого уровня (которые также считаются однородными) должны быть связаны с элементами второго уровня и т. д. Элементы $(l-1)$-го уровня должны быть связаны с единственным элементом l-го уровня. Количество уровней управления l и количество x_{ki} элементов $(k-1)$-го уровня, связанных с i-м элементом k-го уровня, являются неизвестными величинами. Так как элементы одного уровня однородны, индекс i переменных x_{ki} необходим для учета неоднородности структуры (с разными элементами одного уровня иерархии может быть связано разное количество элементов предыдущего уровня).

Пусть затраты на создание пункта управления и на связь x_{ki} элементов $(k-1)$-го уровня с i-м элементом k-го уровня характеризуются функцией $f^k(x_{ki})$. Введем обозначения: n_k $(k=0,\dots,l)$ — количество элементов k-го уровня иерархии, $n_0 = |V_0|$, где $|V|$ — мощность множества V. Математическая постановка рассматриваемой задачи может быть записана в следующем виде:

$$\sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{n_k} f^k(x_{ki}) \longrightarrow \min_{\{x_{ki},n_k,l\}}, \tag{1.1}$$

$$\sum_{i=1}^{n_k} x_{ki} = n_{k-1}, \quad k=1,\dots,l, \tag{1.2}$$

$$1 = n_l \leqslant n_{l-1} \leqslant \dots \leqslant n_1 \leqslant n_0, \tag{1.3}$$

$$l \leqslant L, \tag{1.4}$$

$$l, x_{ki}, n_k \in \mathbb{Z}^+, \quad k=1,\dots,l, \ \ i=1,\dots,n_k; \tag{1.5}$$

здесь и далее $\mathbb{Z}^+$ — множество целых положительных чисел.

---

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 94-01-00706).

1.2. Метод решения. Поставленную задачу можно решать с помощью метода динамического программирования (ДП). Действительно, рассмотрим задачу

$$\sum_{i=1}^{n_k} f^k(x_{ki}) \longrightarrow \min_{\{x_{ki}\}}, \tag{1.6}$$

$$\sum_{i=1}^{n_k} x_{ki} = n_{k-1}, \tag{1.7}$$

$$x_{ki} \in \mathbb{Z}^+, \quad i = 1, \ldots, n_k, \tag{1.8}$$

которая при фиксированных значениях n_{k-1} и n_k является известной задачей «о ранце».

Будем обозначать через $\langle n_{k-1}, n_k \rangle$ задачу (1.6)–(1.8) при фиксированных n_{k-1} и n_k, а через $F^k(n_{k-1}, n_k)$ — оптимальное значение целевой функции этой задачи. Рассмотрим задачи $\langle y, r \rangle$ при $y = 1, \ldots, n$, $r = 1, \ldots, n$ $(y \geqslant r)$ и запишем рекуррентные соотношения, связывающие значения целевой функции этих задач:

$$F^k(y, 1) = f^k(y), \quad y = 1, \ldots, n,$$

$$F^k(y, r) = \min_{\{r-1 \leqslant x \leqslant y-1\}} \{F^k(x, r-1) + f^k(y - x)\}, \quad y = 1, \ldots, n.$$

Можно показать [1], что за $O(Ln^3)$ арифметических операций с памятью $O(Ln^2)$ будут вычислены значения функций $F^k(n_{k-1}, n_k)$ при $n_{k-1} = 1, \ldots, n$, $n_k = 1, \ldots, n_{k-1}$, $k = 1, \ldots, L$.

Теперь для решения задачи (1.1)–(1.5) достаточно решить задачу

$$\sum_{k=1}^{l} F^k(n_{k-1}, n_k) \longrightarrow \min_{\{n_k, l\}}, \tag{1.9}$$

$$1 = n_l \leqslant n_{l-1} \leqslant \ldots \leqslant n_1 \leqslant n_0 = n, \tag{1.10}$$

$$l \leqslant L, \tag{1.11}$$

которая является задачей «о ближайшем соседе». Ее также можно решить методом ДП с трудоемкостью $O(Ln^2)$ и памятью $O(Ln)$. Следовательно, трудоемкость решения исходной задачи (1.1)–(1.5) равна $O(Ln^3)$, а память — $O(Ln^2)$.

Замечание 1.1. Если функции затрат $f^k(x)$ не зависят от уровня, то задача (1.1)–(1.5) решается с помощью ДП за $O(n^2(n + L))$ арифметических операций и с памятью, равной $O(n(n + L))$ [1].

1.3. Частные случаи. Рассмотрим свойства задачи (1.1)–(1.5) при выполнении некоторых дополнительных условий на функции $f^k(x)$.

Пусть функции затрат $f^k(x)$ выпуклые (вогнутые).

Определение 1.1. Иерархическая структура называется *равномерной*, если элементы одного уровня связаны с тем же или отличающимся не более чем на единицу числом элементов нижнего уровня (подчиненными).

Утверждение 1.1. *Если функции $f^k(x)$ выпуклые при $x \geqslant 1$, то существует равномерная иерархическая структура, соответствующая оптимальному решению задачи* (1.1)–(1.5).

Доказательство. Заметим, что если функция $f(x)$ выпуклая и $a \in \mathbb{R}^+$, $x + a \leqslant y$, то $f(x) + f(y) \geqslant f(x+a) + f(y-a)$. Действительно, $f(x) + f(y) = (\alpha + \beta)(f(x) + f(y)) = \alpha f(x) + \beta f(y) + \alpha f(y) + \beta f(x) \geqslant f(\alpha x + \beta y) + f(\alpha y + \beta x)$ при $\alpha \geqslant 0, \beta \geqslant 0, \alpha + \beta = 1$. Подберем числа α и β так, чтобы выполнялось условие $\alpha x + \beta y = x + a$. Тогда $\beta y = \beta x + a$ и $\alpha y + \beta x = \alpha y + \beta y - a = y - a$, $\alpha x + \beta y = x + a$. Аналогично если функция $f(x)$ вогнутая и $a \in \mathbb{R}^+$, $x + a \leqslant y$, то $f(x) + f(y) \leqslant f(x+a) + f(y-a)$.

Предположим, что построена оптимальная иерархическая структура, в которой нарушено условие равномерности на k-м уровне. Ввиду вышеизложенного, меняя только значения переменных x_{ki} без нарушения ограничений (1.2)–(1.5), можно построить иерархическую структуру с меньшим значением целевой функции, что противоречит условию оптимальности первоначальной структуры. Утверждение 1.1 доказано.

Пусть l^* — оптимальное значение переменной l в задаче (1.1)–(1.5). Тогда справедливы следующие утверждения.

(i) *Если существует k такое, что функция $f^k(x)$ вогнута при $x \geqslant 0$, то $l^* \leqslant k$.*

Действительно, в силу вогнутости функции имеем

$$f^k(x) + f^k(y) = f^k((y+x) - x) \geqslant f^k(0) + f^k(y+x) = f^k(y+x),$$

поэтому в оптимальном решении $n_k^* \leqslant 1$, откуда следует справедливость утверждения (i).

(ii) *Для справедливости* (i) *достаточно выполнения неравенства*

$$f^k(x) + f^k(y) \geqslant f^k(x+a) + f^k(y-a),$$

для всех $x, y, a \in \mathbb{Z}^+$, $x + a \leqslant y$.

Аналогичными свойствами обладают вогнутые функции затрат [1].

Пусть функции $f^k(x)$ выпуклые. Как показано выше, в этом случае оптимальная структура для задачи (1.1)–(1.5) равномерна. Следовательно, задача (1.6)–(1.8) решается аналитически и

$$\begin{aligned} F^k(n_{k-1}, n_k) = (n_k - n_{k-1} + [n_{k-1}/n_k]n_k) f^k([n_{k-1}/n_k]) \\ + (n_{k-1} - [n_{k-1}/n_k]n_k) f^k([n_{k-1}/n_k] + 1); \end{aligned}$$

здесь и ниже через $[r]$ обозначена целая часть числа r. Трудоемкость решения задачи (1.1)–(1.5) в этом случае совпадает с трудоемкостью решения задачи (1.9)–(1.11) и равна $O(Ln^2)$. Память ограничена величиной $O(Ln)$.

Рассмотрим случай, когда функции затрат выпуклые и не зависят от номера уровня, т. е. $f^k(x) = f(x)$. Введем понятие иерархической подструктуры. Пусть задано дерево, соответствующее l-уровневой иерархической структуре, т. е. его корень соответствует пункту верхнего l-го уровня, а все висячие вершины связаны с ним цепями, состоящими ровно из l ребер.

Определение 1.2. Любое поддерево, включающее вершину i уровня k в качестве корня, назовем *иерархической подструктурой*, если все его висячие вершины связаны с i-й вершиной цепями, состоящими из $l' < l$ ребер, и принадлежат одному уровню $k' < k$ исходной иерархической структуры.

Справедливо

Утверждение 1.2. *В оптимальной иерархической структуре любая иерархическая подструктура оптимальна.*

Доказательство (см. [2]). Пусть для $n = n_0$ однородных объектов построена структура управления с минимальными затратами

$$S^{l^*}_{\min} = F(n_0, n_1) + F(n_1, n_2) + \ldots + F(n_{l^*-1}, n_{l^*}),$$

где l^* — оптимальное число уровней. Рассмотрим два случая.

Случай 1: подструктура получается из оптимальной иерархической структуры отсечением нижних уровней. Тогда выражения стоимостных затрат для подструктур можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} F(n_0, n_1) + F(n_1, n_2) + \ldots + F(n_{l^*-2}, n_{l^*-1}) + F(n_{l^*-1}, n_{l^*}), \\ F(n_1, n_2) + \ldots + F(n_{l^*-2}, n_{l^*-1}) + F(n_{l^*-1}, n_{l^*}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F(n_{l^*-2}, n_{l^*-1}) + F(n_{l^*-1}, n_{l^*}), \\ F(n_{l^*-1}, n_{l^*}), \end{aligned}$$

каждое из них имеет минимальное значение. Следовательно, подструктуры такого вида являются оптимальными.

Случай 2: рассматривается подструктура, в которой в качестве управляющего элемента верхнего уровня взят элемент k-го ($k = 1, \ldots, l^*$) уровня. Элементами нулевого уровня являются те первоначальные объекты оптимальной иерархической структуры, которыми управляет выбранный элемент. В такой подструктуре будет k уровней.

Представим $S^{l^*}_{\min}$ в виде суммы

$$S^{l^*}_{\min} = S'_{\min} + S''_{\min},$$

где ($k = 1, \ldots, l^*$)

$$\begin{aligned} S'_{\min} &= F(n_0, n_1) + \ldots + F(n_{k-1}, n_k), \\ S''_{\min} &= F(n_k, n_{k+1}) + \ldots + F(n_{l^*-1}, n_{l^*}). \end{aligned}$$

Пусть $n_k = m$. Заметим, что затраты $S'_{\min}$ можно записать в виде $S'_{\min} = \sum\limits_{i=1}^{m} S_i$, где S_i — стоимость i-й подструктуры, т. е. подструктуры с корнем в вершине i. Очевидно, что для фиксированного числа нижних элементов подструктуры n_0^i минимальные затраты равны S_i, т. е. подструктура оптимальна.

Заметим, что любая подструктура может быть выделена с помощью этих двух случаев. Утверждение 1.2 доказано.

Пусть теперь S_l — затраты, соответствующие оптимальной структуре с фиксированным числом уровней l.

Утверждение 1.3. *Последовательность* $\{S_l\}_{l=1,2,\dots}$ *выпуклая.*

Доказательство (см. [2]). Решение рассматриваемой задачи записывается в виде

$$F(n_{k-1}, n_k) = (n_k - n_{k-1} + [n_{k-1}/n_k]n_k)f([n_{k-1}/n_k]) \\ + (n_{k-1} - [n_{k-1}/n_k]n_k)f([n_{k-1}/n_k]) + 1).$$

В [3] доказана теорема, утверждающая, что если для функции F в задаче «о ближайшем соседе» выполнено условие Глебова, то последовательность $\{S_i\}_{i=1,2,\dots}$ выпуклая. Поэтому достаточно показать, что функция F удовлетворяет *условию Глебова*, т. е. для любых $n_{k-1} \geqslant n_k \geqslant n_{k+1} \geqslant n_{k+2}$ имеет место неравенство

$$F(n_{k-1}, n_{k+2}) + F(n_k, n_{k+1}) \geqslant F(n_{k-1}, n_{k+1}) + F(n_k, n_{k+2}).$$

Введем обозначения $k_1 = n_{k-1}$, $k_2 = n_k/n_{k+1}$, $k_3 = n_{k+1}/n_{k+2}$, и пусть $\{x\}$ — дробная часть числа x. Тогда

$$F(n_{k-1}, n_{k+2}) = \frac{1}{k_1k_2k_3}(\{k_1k_2k_3\}f([k_1k_2k_3] + 1) \\ + (1 - \{k_1k_2k_3\})f([k_1k_2k_3])),$$

$$F(n_k, n_{k+1}) = \frac{1}{k_1k_2}(\{k_2\}f([k_2] + 1) + (1 - \{k_2\})f([k_2])),$$

$$F(n_{k-1}, n_{k+1}) = \frac{1}{k_1k_2k_3}(\{k_2k_3\}f([k_2k_3] + 1) + (1 - \{k_2k_3\})f([k_2k_3])),$$

$$F(n_k, n_{k+2}) = \frac{1}{k_1k_2}(\{k_1k_2\}f([k_1k_2] + 1) + (1 - \{k_1k_2\})f([k_1k_2])).$$

Выражения в скобках можно представить как функцию

$$G(x) = \{x\}f([x] + 1) + (1 - \{x\})f([x]).$$

Легко видеть, что функция $G(x)$ является непрерывной выпуклой и удовлетворяет неравенствам $k_3G(k_2) \leqslant G(k_2k_3)$, $k_3G(k_1k_2) \leqslant G(k_1k_2k_3)$, из которых следует выполнимость условия Глебова. Утверждение 1.3 доказано.

В силу утверждений 1.2 и 1.3 существует элементарный фрагмент структуры (ЭФС), состоящий из одного управляющего элемента и r связанных с ним пунктов соседнего нижнего уровня, который можно назвать основным элементарным фрагментом структуры (ОЭФС), формирующим почти всю иерархическую структуру. Очевидно, что не любое число $n = n_0$ можно разделить нацело на r. Следовательно, не все ЭФС будут одинаковыми. Однако они отличаются от ОЭФС на ± 1 и составляют незначительное количество фрагментов. Исключением могут быть ЭФС последнего верхнего уровня.

На основе вышеизложенного в работе [2] для решения рассматриваемой задачи предлагается метод, отличающийся от метода ДП. Сначала находим ОЭФС, затем — интервал из ближайших кратных r чисел, содержащий n_0. Возникает две возможности выбора n_1. Находим подобный интервал для n_1 и т. д. до $n_l = 1$. В результате получаем

$$\begin{gathered} n_l = 1, \\ m_{l-1} \leqslant n_{l-1} \leqslant m_{l-1} + 1, \\ rm_{l-1} \leqslant m_{l-r} \leqslant n_{l-r} \leqslant m_{l-r} + 1 \leqslant r(m_{l-1} + 1), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ rm_2 \leqslant m_1 \leqslant n_1 \leqslant m_1 + 1 \leqslant r(m_2 + 1), \\ rm_1 \leqslant n_0 \leqslant r(m_1 + 1). \end{gathered}$$

Теперь можно построить две альтернативные структуры, начиная с верхнего уровня, и выбрать ту из них, которая обладает наименьшим весом. Эта структура будет соответствовать оптимальному решению исходной задачи. Трудоемкость построения решения таким образом ограничена величиной $O(n)$, а память — $O(n)$.

Рассмотрим следующий пример. Пусть функция затрат $f^k(x)$ представлена в виде суммы двух функций, связанных с затратами на создание пункта управления и затратами на связь с ним элементов нижнего уровня:

$$f^k(x) = f(x) = x + cx^t, \quad t \geqslant 0,\ c > 0.$$

Рассмотрим задачу

$$\sum_{k=1}^{l} \sum_{i=1}^{n_k} (x_{ki} + cx_{ki}^{2+s}) \longrightarrow \min_{\{x_{ki}, n_k, l\}}, \tag{1.12}$$

$$\sum_{i=1}^{n_k} x_{ki} = n_{k-1},\ k = 1, \dots, l, \tag{1.13}$$

$$x_{ki} \geqslant 2, \quad k = 1, \dots, l, \quad i = 1, \dots, n_k, \quad n_l = 1, \quad n_0 = n, \tag{1.14}$$

$$l, x_{ki}, n_k \in \mathbb{Z}^+, \quad k = 1, \dots, l, \quad i = 1, \dots, n_k, \tag{1.15}$$

где $-2 \leqslant s \leqslant +\infty$.

Заметим, что для $s \leqslant -1$ задача (1.12)–(1.15) решается тривиально. Действительно, в этом случае затраты на создание линий связи будут составлять бо́льшую часть в функционале, следовательно, $\{l = 1,\ n_1 = 1,\ x_{1i} = n\}$ будет оптимальным решением, на котором целевая функция примет значение, равное $W^* = n + cn^{2+s}$.

В случае $s \geqslant 0$ справедливы следующие утверждения при $c \geqslant 1$.

Предложение 1.1. *Для того чтобы построить оптимальное решение задачи* (1.12)–(1.15), *необходимо и достаточно положить $x_{ki} \leqslant 3$; причем для каждого $k = 1, \dots, l$ существует не более одного i такого, что $x_{ki} = 3$.*

Предложение 1.2. *Оптимальное значение целевой функции равно величине $W^* = (2 + 4c2^s)(n - m) + (1 + 9c3^s - 4c2^s)(m - 1)$, где m — количество ненулевых слагаемых в разложении числа n по степеням двойки.*

Доказательство предложения 1.1. Сначала покажем, что в оптимальной структуре T^* для всех $k = 1, \dots, l$ и $i = 1, \dots, n_k$ справедливы неравенства $x_{ki} \leqslant 3$. Пусть, напротив, в T^* существует $x_{ki} = A > 3$. Здесь возможны следующие варианты.

ВАРИАНТ А: $x_{ki} = A > 3$ и существует $x_{k+1\ j} = B \leqslant A - 2$. Перестроим структуру следующим образом. Введем новый элемент p на k-м уровне. Свяжем с ним два элемента $(k-1)$-го уровня из присоединенных ранее к элементы i. В свою очередь, элемент p свяжем с элементом j $(k+1)$-го уровня. После такой перестройки структуры значение целевой функции изменится на величину

$$\begin{aligned}
&1 + c((A-2)^{2+s} + 2^{2+s} + (B+1)^{2+s} - A^{2+s} - B^{2+s}) \\
&\quad \leqslant 1 + c((A-2)^{2+s} + 2^{2+s} + (A-1)^{2+s} - A^{2+s} - (A-2)^{2+s}) \\
&\quad \leqslant 1 + c(2^{2+s} + A^s(A^2 - 2A + 1) - A^{2+s}) \\
&\quad = 1 + c(2^{2+s} - A^s(2A+1)) \leqslant 1 + c(4 \cdot 2^s - 7 \cdot 4^s) < 0.
\end{aligned}$$

Если элемент i, для которого $x_{k'i} = B \leqslant A - 2$, находится на любом из $(k+1), \ldots, (L-1)$ уровней, то, делая аналогичную перестройку, уменьшающую значение целевой функции, можно добиться того, что в новой структуре пункт с B связанными с ним элементами будет на $(k+1)$-м уровне, и тогда, действуя по варианту **А**, можно уменьшить значение функционала.

ВАРИАНТ Б: $x_{ki} = A > 3$ и $x_{k'j} \geqslant B$, $A - 1 \leqslant B \leqslant A$, $k' = k+1, \ldots, l$. Изменим структуру следующим образом: A элементов, связанных с i-м пунктом k-го уровня, разобьем на $x'_{ki} = A - 2$ и $x''_{ki} = 2$. Введем на k-м уровне дополнительный (n_k+1)-й элемент и соединим с ним x''_{ki} элементов $(k-1)$-го уровня. Далее, n_k-й и (n_k+1)-й элементы k-го уровня свяжем с новым $(n_{k+1}+1)$-м элементом $(k+1)$-го уровня и т. д. Затем n_{l-1}-й и $(n_{l-1}+1)$-й элементы свяжем с новым (вторым) элементом l-го уровня. Первый и второй элементы l-го уровня соединим с новым пунктом $(l+1)$-го уровня.

Обозначим $B_{k'} = \min\limits_{j=\overline{1,n_k}} x_{k'j}$. Тогда значение целевой функции изменится на величину

$$\begin{aligned}
&l + 1 - k + c\,((A-2)^{2+s} + (l+1-k)2^{2+s} + (B_{k+1} - 1)^{2+s} + (B_{k+2} - 1)^{2+s} \\
&\qquad + \ldots + (B_{l-1} - 1)^{2+s} - B_{k+1}^{2+s} - B_{k+2}^{2+s} - \cdots - B_{l-1}^{2+s} - A^{2+s}) \\
&\leqslant l + 1 - k + c\,((A-2)^{2+s} + (l-1-k)2^{2+s} \\
&\qquad + (l-1-k)(A-2)^{2+s} - (l-1-k)(A-1)^{2+s} - A^{2+s}) \\
&\leqslant l + 1 - k + c\,(A^s(A^2 - 4A + 4) + (l+1-k)2^{2+s} + (l-1-k)(A-1)^s \\
&\qquad \times ((A-1)^2 - 2(A-1) + 1) - (l-1-k)(A-1)^{2+s} - A^{2+s}) \\
&= l + 1 - k + c\,(4A^s - 4A^sA + (l+1-k)2^{2+s} + (l-1-k)(3-2A)(A-1)^s) \\
&\leqslant l + 1 - k + c\,(12 \cdot 4^s + 4(l+1-k)2^s - 5(l+1-k)3^s + 10 \cdot 3^s)) \\
&< l + 1 - k + c\,(l+1-k)(4 \cdot 2^s - 5 \cdot 3^s) \leqslant 0.
\end{aligned}$$

Из приведенных выкладок следует, что в оптимальной структуре $x_{ki} \leqslant 3$ для всех $k = 1, \ldots, l$, $i = 1, \ldots, n_k$. Покажем теперь, что в T^* для каждого k существует не более одного x_{ki}, равного 3. Допустим противное: в T^* существует более одного x_{ki} такого, что $x_{ki} = 3$, $i = 1, \ldots, n_k$. Рассмотрим возможные варианты.

ВАРИАНТ А$'$: $x_{ki} = 3$, $x_{kj} = 3$ и существует число r такое, что $x_{k+1\ r} = 2$. Перестроим структуру следующим образом. Один элемент

$(k-1)$-го уровня, связанный с пунктом i k-го уровня, и один элемент из пунктов, подчиненных пункту j k-го уровня, свяжем с новым элементом p $(k+1)$-го уровня. Остальные связи оставим без изменений. Значение функционала изменится на величину

$$1+c(3\cdot 2^{2+s}+3^{2+s}-2\cdot 2^{2+s}) = 1+c(2\cdot 2^{2+s}-3^{2+s}) = 1+c(8\cdot 2^s-9\cdot 3^s) \leqslant 0.$$

Причем равенство достигается при $c=1$ и $s=0$.

ВАРИАНТ Б$'$: $x_{k'j}=3$ для всех $k'=k+1,\dots,l$. Осуществим следующее преобразование структуры. Пусть $x_{ki}=3$ и $x_{kj}=3$. Свяжем один элемент из множества элементов, подчиненных пункту i, и один элемент из множества элементов, подчиненных пункту j, с новым элементом k-го уровня p_k. Элементы p_k и j k-го уровня свяжем с новым элементом $(k+1)$-го уровня p_{k+1} и т. д. Новый элемент $(l-1)$-го уровня p_{l-1} и один элемент $(l-1)$-го уровня свяжем с новым пунктом l-го уровня $p_l=2$. Первый и второй элементы l-го уровня свяжем с новым элементом $(l+1)$-го уровня. Оценим изменения значения целевой функции:

$$l+1-k+c(2(l+1-k)2^{2+s}-(l+1-k)3^{2+s}) = (l+1-k)(1+c\,(8\cdot 2^s-9\cdot 3^s)) \leqslant 0.$$

Равенство в последнем соотношении достигается при $c=1$ и $s=0$. Предложение 1.1 доказано.

Доказательство предложения 1.2. Рассмотрим сначала случай $n=2^{l+1}$. Тогда $x_{ki}=2$ для всех $k=1,\dots,l$, $i=1,\dots,n_k$. Стоимость связи двух элементов $(k-1)$-го уровня с одним элементом k-го уровня равна величине $x_{ki}+cx_{ki}^{2+s}=2+4c2^s$. Всего таких пар

$$\sum_{k=1}^{l} n/2^k = \sum_{k=1}^{\infty} n/2^k - \sum_{k=l+1}^{\infty} n/2^k = n - n/2^{l+1} = n-1.$$

Следовательно, если n есть степень двойки, т. е. $n=2^{l+1}$, то оптимальное значение целевой функции равно величине $W^*=(2+4c2^s)(n-1)$. Пусть теперь n — произвольное целое положительное число. Тогда его можно разложить в сумму по степеням двойки: $n=\sum\limits_{i=1}^{m}2^{k_i}$, где $k_i\geqslant 0$ и все k_i различны. В этом случае для 2^{k_i}, $i=1,\dots,m$, элементов независимо строим иерархическую подструктуру, полагая $x_{ki}=2$. При этом стоимость создания такой подструктуры равна величине $W_i=(2+4c2^s)(2^{k_i}-1)$, $i=1,\dots,m$. Пусть построено m независимых подструктур T_i. Так как $k_i\neq k_j$ при $i\neq j$, верхние элементы этих структур лежат на разных уровнях. Свяжем эти структуры в одну общую структуру следующим образом. Верхний элемент структуры T_i, лежащий на k-м уровне, свяжем с одним из элементов $(k+1)$-го уровня. По построению полученная структура оптимальна, а вес ее равен величине

$$\begin{aligned} W^* &= \sum_{i=1}^{m} W_i + (1+c(3^{2+s}-2^{2+s}))(m-1) \\ &= (2+4c2^s)(2^{k_1}-1+\ldots+2^{k_m}-1) + (1+c(3^{2+s}-2^{2+s}))(m-1) \\ &= (2+4c2^s)(n-m) + (1+9c3^s-4c2^s)(m-1). \end{aligned}$$

Предложение 1.2 доказано.

Замечание 1.2. Из приведенного доказательства следует, что при $s = 0$ и $c = 1$ оптимальная структура инвариантна относительно замены соответствующего количества соединений по два соединениями по три. Причем в этом случае W^* принимает вид $W^* = 6(n-1)$.

§ 2. Некоторые обобщения исходной задачи

2.1. Учет надежности функционирования системы. Рассмотрим некоторые задачи, связанные с учетом надежности функционирования информационной системы (ИС). Пусть по ИС передается некая информация. Причем надежность ее правильной передачи не абсолютна. Будем считать вероятность передачи информации одинаковой для всех линий связи между k-м и $(k+1)$-м ($k = 0, \dots, l-1$) уровнями и обозначим ее через p_k.

Затраты, связанные с созданием пунктов управления и связи с ними подчиненных элементов нижнего (соседнего) уровня, зависят теперь не только от количества связанных с ним элементов, но и от надежности линий связи и задаются функцией $f^k(x_{ki}, p_k)$. Пусть $f^k(x,p)$ — положительные неубывающие функции своих аргументов, $1 \leqslant k \leqslant L$.

В исходной задаче добавим требование на надежность каждой цепи, связывающей элемент нижнего (нулевого) уровня с элементом верхнего (l-го) уровня, которое можно записать следующим образом: $\prod\limits_{k=1}^{l} p_k \geqslant P$, где P — заданное положительное число, не превосходящее единицы. Таким образом, можно поставить следующую задачу:

$$\sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{n_k} f^k(x_{ki}, p_k) \longrightarrow \min_{\{x_{ki}, n_k, l, p_k\}}, \tag{2.1}$$

$$\sum_{i=1}^{n_k} x_{ki} = n_{k-1}, \quad k = 1, \dots, l, \tag{2.2}$$

$$1 = n_l \leqslant n_{l-1} \leqslant \dots \leqslant n_1 \leqslant n_0 = n, \tag{2.3}$$

$$l \leqslant L, \tag{2.4}$$

$$\prod_{k=1}^{l} p_k \geqslant P, \tag{2.5}$$

$$0 \leqslant p_k \leqslant 1, \quad k = 1, \dots, l, \tag{2.6}$$

$$l, p_k, x_{ki}, n_k \in \mathbb{Z}^+, \quad k = 1, \dots, l, \quad i = 1, \dots, n_k. \tag{2.7}$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

Случай $f^k(x,p) = h^k(x)g^k(p)$. Пусть $h^k(x)$ и $g^k(p)$ — положительные неубывающие функции. Такое представление функции $f^k(x,p)$ позволяет осуществить декомпозицию рассматриваемой задачи и сначала решить задачи

$$\sum_{i=1}^{n_k} h^k(x_{ki}) \longrightarrow \min_{\{x_{ki}\}}, \tag{2.8}$$

$$\sum_{i=1}^{n_k} x_{ki} = n_{k-1}, \tag{2.9}$$

$$x_{ki} \in \mathbb{Z}^+, \quad i = 1, \ldots, n_k \tag{2.10}$$

при различных значениях n_k, n_{k-1}. Если $F^k(n_{k-1}, n_k)$ — значение целевой функции задачи (2.8)–(2.10), то для построения решения задачи (2.1)–(2.7) достаточно решить задачу

$$\sum_{k=1}^{l} g^k(p_k) F^k(n_{k-1}, n_k) \longrightarrow \min_{\{n_k, l, p_k\}}, \tag{2.11}$$

$$1 = n_l \leqslant n_{l-1} \leqslant \ldots \leqslant n_1 \leqslant n_0 = n, \tag{2.12}$$

$$l \leqslant L \tag{2.13}$$

$$\prod_{k=1}^{l} p_k \geqslant P, \tag{2.14}$$

$$0 \leqslant p_k \leqslant 1, \quad k = 1, \ldots, l, \tag{2.15}$$

Поставленная задача может быть решена методом двухпараметрического ДП. Обозначим через $S^k(m,p)$ оптимальное значение целевой функции задачи для k уровней (без требования $n_k = 1$), где m — число элементов на k-м уровне иерархии, а p — вероятность передачи информации от k-го уровня к 0-му. Тогда справедливы равенства

$$S_1(m,p) = F^1(n,m) g^1(p), \ 1 \leqslant m \leqslant n, \ P \leqslant p \leqslant 1,$$

$$S_k(m,p) = \min_{\{m \leqslant n_{k-1} \leqslant n\}, \{p \leqslant p_k \leqslant 1\}} S_{k-1}(n_{k-1}, p/p_k) + F^k(n_{k-1}, m) g^k(p_k),$$

$$1 \leqslant m \leqslant n, \ 1 \leqslant p \leqslant P, \ k = 1, \ldots, L.$$

Следовательно,

$$W^* = S_{l^*}(1,P) = \min_{1 \leqslant l \leqslant L} S_k(1,P).$$

Оптимальные значения переменных n_k и p_k определяются обратным ходом ДП.

Обозначим через M мощность ε-сети на отрезке $[P,1]$. Тогда трудоемкость решения задачи (2.11)–(2.15) равна $O(M^2LN^2)$, а память — $O(MLn)$.

Случай $f^k(x,p) = c^k(x) + x a^k(p)$ ($c^k(x)$ и $a^k(p)$ — неотрицательные неубывающие функции). С учетом ограничений

$$\sum_{i=1}^{n_k} x_{ki} = n_{k-1}, \ k = 1, \ldots, l,$$

целевую функцию задачи можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^{l} [n_{k-1} a^k(p_k) + \sum_{i=1}^{n_k} c^k(x_{ki})] \longrightarrow \min_{\{x_{ki}, \ n_k, \ l, \ p_k\}}.$$

Пусть

$$F^k(n_{k-1}, n_k) = \min_{\{x_{ki}\}} \sum_{i=1}^{n_k} c^k(x_{ki}),$$

где $\sum\limits_{i=1}^{n_k} x_{ki} = n_{k-1}$, $x_{ki} \in \mathbb{Z}^+$, $i = 1, \ldots, n_k$, и

$$S_t(n_t, Q) = \min_{\{n_k,\, p_k\}} \sum_{k=1}^{t} [F^k(n_{k-1}, n_k) + n_{k-1} a^k(p_k)],$$

где $n_t \leqslant n_{t-1} \ldots \leqslant n_0 = n$, n_t задано;

$$\prod_{k=1}^{t} p_k = Q;$$

$$0 \leqslant p_k \leqslant 1, \quad t,\ n_k \in \mathbb{Z}^+, \qquad k = 1, \ldots, t,$$
$$t = 1, \ldots, L, \quad P \leqslant Q \leqslant 1.$$

Запишем рекуррентные соотношения, связывающие $S_t(n_t, Q)$:

$$S_1(n_1, Q) = F^1(n, n_1) + n a^1(Q),\ P \leqslant Q \leqslant 1,\ 1 \leqslant n_1 \leqslant n,$$
$$S_t(n_t, Q) = \min_{n_t \leqslant m \leqslant n;\ Q \leqslant q \leqslant 1} S_{t-1}(m, Q/q) + F^t(m, n_t) + m a^t(q),$$
$$t = 2, \ldots, L,\ P \leqslant Q \leqslant 1,\ 1 \leqslant n_t \leqslant n.$$

В этом случае значение целевой функции на оптимальном решении равно величине $W^* = S_{l^*}(1, P) = \min\limits_{1 \leqslant t \leqslant L} S_t(1, P)$. Трудоемкость реализации алгоритма построения решения равна $O(Ln^2M^2)$, а память — $O(LnM)$, где M — мощность ε-сети на отрезке $[P, 1]$.

Пусть p_k^* — оптимальное значение переменной p_k, $k = 1, \ldots, l$. Отметим одно интересное свойство задачи (2.1)–(2.7).

Утверждение 2.1. *Если*

$$f^k(x, p) = c^k(x) + x a(p), \quad k = 1, \ldots, l,$$

то найдется оптимальное решение такое, что

$$p_1^* \leqslant p_2^* \leqslant \ldots \leqslant p_{l^*-1}^* \leqslant p_{l^*}^*, \tag{2.16}$$

т. е. надежность линий связи не убывает с увеличением номера уровня.

Доказательство. Пусть $p_{k+1} \leqslant p_k$. В сумме $n_{k-1}a(p_k) + n_k a(p_{k+1})$ поменяем местами p_k и p_{k+1}, т. е. вероятности передачи информации с k-го уровня на $(k+1)$-й присвоим значение p_{k+1}, а с $(k+1)$-го на k-й — значение p_k. Получим $n_{k-1}a(p_{k+1}) + n_k a(p_k)$. Имеем

$$\begin{aligned}(n_{k-1}a(p_k) &+ n_k a(p_{k+1})) - (n_{k-1}a(p_{k+1}) + n_k a(p_k)) \\ &= n_{k-1}(a(p_k) + a(p_{k+1})) - n_k(a(p_k) - a(p_{k+1})) \\ &= (n_{k-1} - n_k)(a(p_k) - a(p_{k+1})) \geqslant 0,\end{aligned}$$

так как $n_{k-1} \geqslant n_k$, а $a(p_k) \geqslant a(p_{k+1})$ в силу неубывания функции $a(p)$. Поэтому существует оптимальное решение, обладающее свойством (2.16). Утверждение 2.1 доказано.

2.2. Учет затрат на выполнение работ. Рассмотрим следующую задачу. Пусть имеется N одинаковых работ и n одинаковых исполнителей. Для нормальной работы исполнителей необходимо синтезировать однородную ИС, где исполнители составляют элементы нижнего уровня. Требуется назначить исполнителей на работы и построить структуру управления таким образом, чтобы общие затраты были минимальными. Здесь неотрицательная монотонно возрастающая функция $g(x_i)$ будет характеризовать затраты, связанные с выполнением x_i работ i-м исполнителем, а функции $f^k(x_{ki})$, обладающие теми же свойствами, что и ранее, связаны с затратами на создание управляющей ИС.

Математическую модель рассматриваемой задачи запишем в виде

$$\sum_{i=1}^{n} g(x_i) + \sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{n_k} f^k(x_{kj}) \longrightarrow \min_{\{x_i,\ x_{kj},\ n_k,\ l,\ n\}},$$

$$\sum_{j=1}^{n_k} x_{kj} = n_{k-1}, \quad k = 1,\dots,l,$$

$$1 = n_l \leqslant \ldots \leqslant n_0 = n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = N,$$

$$l \leqslant L,$$

$$l, x_i, x_{kj}, n_k, n \in \mathbb{Z}^+, \quad k = 1,\dots,n,\ j = 1,\dots,n_k;$$

здесь множество работ составляет нулевой уровень иерархии, множество исполнителей — первый уровень и т. д. Обозначим x_i через x_{1j}, а $g(x_{1j})$ через $f^1(x_{1j})$. В результате получим первоначальную задачу с дополнительным ограничением $n_1 \leqslant n$, которое, очевидно, не меняет природу самой задачи, а может лишь уменьшить трудоемкость в методе ДП.

Усложним задачу, отказавшись от однородности работ и исполнителей. Пусть X — совокупность работ, подлежащих выполнению, а U — множество потенциальных исполнителей. Обозначим через c_{ij} затраты на выполнение j-й работы i-м исполнителем, $i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,n$. Кроме того, пусть заданы начальные затраты c_i, связанные с использованием i-го исполнителя. Нужно выбрать множество исполнителей $I \subset U$ и построить для них управляющую ИС таким образом, чтобы затраты на синтез структуры управления и выполнение всех работ были минимальными. Математическая постановка этой задачи следующая:

$$\sum_{i\in I} c_i + \sum_{j\in X} \min_{i\in I} c_{ij} + \sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{n_k} f^k(x_{kj}) \longrightarrow \min_{\{I,\ x_{kj},\ n_k,\ l\}}, \tag{2.17}$$

$$1 = n_l \leqslant \ldots \leqslant n_1 \leqslant n_0 = |\, I\,|, \tag{2.18}$$

$$l \leqslant L, \tag{2.19}$$

$$l, x_{kj}, n_k \in \mathbb{Z}^+, \quad k = 1, \dots, n, \ j = 1, \dots, n_k. \tag{2.20}$$

Зафиксируем количество исполнителей $N = \mid I \mid$ работы и разобьем задачу (2.17)–(2.20) на две:

$$S_{\text{упр}}(N) = \min_{\{x_{kj},\ n_k,\ l\}} \sum_{k=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_k} f^k(x_{kj}),$$

$$\sum_{j=1}^{n_k} x_{kj} = n_{k-1}, \quad k = 1, \dots, l,$$

$$1 = n_l \leqslant \ldots \leqslant n_0 = N,$$

$$l, x_{kj}, n_k \in \mathbb{Z}^+, \quad k = 1, \dots, t, \ j = 1, \dots, n_k;$$

$$S_{\text{пр}}(N) = \min_{\{I\}} \left\{ \sum_{i \in I} c_i + \sum_{j \in X} \min_{i \in I} c_{ij} \right\}, \tag{2.21}$$

$$\mid I \mid = N, \tag{2.22}$$

где $S_{\text{упр}}$ — затраты, связанные с управлением, а $S_{\text{пр}}$ — с выполнением работ (производственные затраты). Оптимальное значение целевой функции равно величине

$$S^* = \min_{N=\overline{1,m}} \{S_{\text{упр}}(N) + S_{\text{пр}}(N)\}.$$

Для решения задачи (2.21), (2.22) введем одинаковые для всех исполнителей фиктивные затраты y. Рассмотрим функцию

$$S(y) = \min_{I \in U} \{ \sum_{i \in I} (c_i + y) + \sum_{j \in X} \min_{i \in I} c_{ij} \}.$$

Справедливо

Утверждение 2.2. *Функция $S(y)$ возрастающая, вогнутая, кусочно-линейная, непрерывная.*

Доказательство. Покажем вогнутость функции (остальные свойства очевидны). Пусть

$$S(y) = \min_{I \in U} \left\{ y \mid I \mid + \sum_{i \in I} c_i + \sum_{j \in X} \min_{i \in I} c_{ij} \right\} = y \mid I \mid + \sum_{i \in I'} c_i + \sum_{j \in X} \min_{i \in I'} c_{ij}.$$

Если на отрезке $[y, y + \Delta y]$, $\Delta y \geqslant 0$, значение функции $S(y)$ достигается на том же множестве I', то $S(y)$ на этом отрезке линейная с коэффициентом наклона $\mid I' \mid$, так как $(S(y + \Delta y) - S(y))/\Delta y = \mid I' \mid$. Если в точке $(y + \Delta y)$ значение функции $S(y)$ достигается как на множестве I', так и на некотором множестве $I'' \subset U$, $\mid I' \mid = \mid I'' \mid$, то точка $(y + \Delta y)$ является точкой излома. Очевидно, что $\mid I' \mid \geqslant \mid I'' \mid$. Следовательно, функция $S(y)$ вогнутая. Утверждение 2.2 доказано.

Вернемся к задаче (2.21), (2.22). Пусть $S_{\text{пр}}(A) = S_{\text{пр}}(A + h)$, $A, h \in \mathbb{Z}^+$. Тогда $S_{\text{пр}}(A) = S_{\text{пр}}(A + r)$, $r = 1, \dots, h$. Кроме того, $S_{\text{упр}}(A +$

$r) \geqslant S_{\text{упр}}(A)$, $r = 1, \ldots, h$. Следовательно, нет необходимости находить значения $S_{\text{упр}}(A + r)$ и $S_{\text{пр}}(A + r)$ при $r = 1, \ldots, h$, т. е. при $N \in [A + 1, A + h]$. Найдем

$$\min_{i \in U}\left(c_i + \sum_{j \in X} c_{ij}\right) = c_{i_0} + \sum_{j \in X} c_{i_0 j}.$$

Рассмотрим

$$Y = \max_{i \neq i_0,\, i \in U} \sum_{j \in X} (c_{ij} - c_{i_0 j}) - c_i.$$

Если $Y \leqslant 0$, то $I = i_0$ — оптимальный набор исполнителей в задаче размещения (2.21), т. е. $N = 1$. Поскольку при увеличении значения N величина $S_{\text{упр}}(N)$ может только увеличиться, задача (2.17)–(2.20) имеет тривиальное решение.

Пусть $Y > 0$. Тогда точка $y = Y$ является крайней правой точкой излома функции $S(y)$. Полагая $y = Y - h$, $y = Y - 2h$ и т. д. до тех пор, пока выполняется неравенство $y \geqslant 0$, при достаточно малых h найдем оптимальное $N = | I |$.

Задача нахождения значения $S(y)$ и множества I, на котором достигается это значение, является задачей размещения (или стандартизации), методы решения которой описаны в [3]. Эта задача принадлежит классу NP-трудных проблем и лишь в некоторых случаях (например, матрица $\| c_{ij} \|$ обладает свойством связности или квазивыпуклости [3]) может быть решена эффективно.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гладышев А. И., Дементьев В. Т.** Задачи оптимизации иерархических структур. Новосибирск, 1988. (Препринт / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 24).
2. **Боронина Т. А., Макаров И. В.** О задаче оптимизации иерархических структур // 30-я Междунар. науч. студ. конф. Новосибирск: Новосиб. ун-т, 1992.
3. **Береснев В. Л., Гимади Э. Х., Дементьев В. Т.** Экстремальные задачи стандартизации. Новосибирск: Наука, 1978.