# ИТЕРАТИВНЫЙ АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ В ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ОБМЕНА

*В. И. Шмырев, Н. В. Шмырева*

Проблема численного нахождения состояния равновесия в линейной модели обмена принципиально решается алгоритмами, предложенными в [1, 2], которые позволяют найти точное решение проблемы за конечное число шагов. В [1] Б. Ивес сводит вопрос к некоторой задаче линейной комплементарности с последующим применением алгоритма Лемке [3]. При этом осложняющим обстоятельством является сравнительно большая размерность возникающей задачи комплементарности — порядка произведения числа участников модели на число продуктов. Более компактная схема, основанная на общей идее полиэдральной комплементарности, была предложена В. И. Шмыревым [2, 4]. В алгоритме, описанном в [2], размерность решаемых на каждом шаге систем линейных уравнений общего вида не превосходит минимума из числа участников и числа продуктов.

Проблема упрощается, когда речь идет о моделях обмена с фиксированными бюджетами. В этом случае проблема отыскания равновесия сводится к некоторой задаче математического программирования с линейными ограничениями. Такое сведе́ние описано в книге [5]. Однако эффективных конечных алгоритмов для задач возникающего типа предложено не было. Развивая подход [4] и используя принципиально иное сведе́ние проблемы к задаче математического программирования, базирующееся на рассмотрении порождаемых моделью специальных транспортных задач, В. И. Шмырев [6] предложил достаточно простой и эффективный конечный алгоритм, не требующий решения систем линейных уравнений общего вида.

Простота случая с фиксированными бюджетами явилась мотивом разработки излагаемого в этой работе итеративного алгоритма для общей модели обмена. Идея подхода состоит в том, чтобы на каждом шаге процесса решать задачу отыскания равновесия при исходных предпочтениях участников обмена, но с фиксированными бюджетами, равными выручке от продажи начальных запасов участников по ценам, задаваемым текущим приближением. Полученные равновесные цены принимаются в качестве следующего приближения.

В § 1 дается описание проблемы. В § 2 излагается версия алгоритма для модели с фиксированными бюджетами, несколько отличающаяся от алгоритма [6]. В § 3 исследуется основной алгоритм с фиксацией бюджетов для общей модели обмена. В предположении, что среди участников модели имеется такой, который обладает положительными запасами всех товаров, устанавливается сходимость процесса к искомому равновесию исходной модели. Модификация процесса для более общего класса

© 1994 Шмырев В. И., Шмырева Н. В.

моделей (процесс с усреднением) исследуется в § 4. Некоторые другие модификации намечаются в § 5.

## § 1. Описание модели

Пусть $I = \{1, 2, \ldots, m\}$ — множество номеров участников и $J = \{1, 2, \ldots, n\}$ — множество номеров продуктов модели. Для каждого $i \in I$ заданы векторы $c^i, d^i \in \mathbb{R}^n_+$. Компонента $d^i_j$ вектора $d^i$ указывает количество $j$-го товара, которым располагает для обмена $i$-й участник, а компонента $c^i_j$ характеризует полезность для него единицы этого товара. При этом предполагается, что полезность линейно зависит от количества товаров, т. е. полезность набора товаров в количествах $x_j$, $j \in J$, для $i$-го участника характеризуется величиной $\sum\limits_{j \in J} c^i_j x_j$. Обмен осуществляется по неотрицательным ценам $p_j$, образующим вектор цен $p \in \mathbb{R}^n_+$. *Состояние равновесия* по определению задается вектором цен $p$ и совокупностью векторов $\widehat{x}^i \in \mathbb{R}^n$ таких, что

— при каждом $i \in I$ вектор $\widehat{x}^i$ является решением задачи

$$(c^i, x^i) \longrightarrow \max!,$$

$$(p, x^i) \leqslant (p, d^i), \quad x^i \geqslant 0;$$

— выполняется условие баланса

$$\sum_{i \in I} \widehat{x}^i = \sum_{i \in I} d^i;$$

при этом вектор $p$ называется *равновесным вектором цен*. Ввиду однородности можно считать вектор цен $p$ нормированным:

$$\sum_{j \in J} p_j = 1, \tag{1.1}$$

т. е. ограничиться рассмотрением векторов $p$ из симплекса цен $\sigma$, задаваемого условием (1.1) и требованием неотрицательности цен.

Естественно предполагать, что векторы $c^i$ ненулевые и при каждом $j \in J$ имеет место неравенство

$$\max_{i \in I} c^i_j > 0. \tag{1.2}$$

При этом предположении непосредственно из определения следует, что все компоненты равновесного вектора цен строго положительны.

Без ограничения общности можно также считать, что все векторы $d^i$ ненулевые и выполняется равенство

$$\sum_{i \in I} d^i_j = 1, \quad j \in J.$$

Необходимое и достаточное условие существования равновесных состояний в описанной модели получено Д. Гейлом [7]. Оно состоит в отсутствии собственных подмножеств $I' \subset I$ и $J' \subset J$ таких, что участники из $I'$ обладают уже всей совокупностью товаров из $J'$, располагая в то же время некоторыми количествами других товаров, которые для них не представляют интереса:

$$d^i_j = 0, \quad (i,j) \in (I \setminus I') \times J', \qquad \sum_{i \in I'} \sum_{j \in J \setminus J'} d^i_j > 0,$$
$$c^i_j = 0, \quad (i,j) \in I' \times (J \setminus J').$$

Модели, в которых такие множества $I'$ и $J'$ существуют, называются *сводимыми.*

В частном случае $d^i = \lambda_i e$, $e = (1, \dots, 1)$, имеем

$$(p, d^i) = \lambda_i (p, e) = \lambda_i \quad \forall p \in \sigma.$$

Поэтому такая модель называется *моделью с фиксированными бюджетами.* Для нее задача отыскания равновесия может быть сведена [5, с. 350–360] к задаче максимизации функции

$$\psi(x^1, \dots, x^m) = \prod_{i \in I} (c^i, x^i)^{\lambda_i}$$

на множестве, описываемом условиями

$$\sum_{i \in I} x^i = e, \quad x^i \geqslant 0, \quad i \in I.$$

Используемый нами подход базируется на рассмотрении иной оптимизационной задачи, приводимой ниже.

## § 2. Алгоритм для модели с фиксированными бюджетами

Главная идея исследуемого итеративного алгоритма для общей модели обмена предполагает многократное использование конечного алгоритма для модели с фиксированными бюджетами. Для полноты изложения в этом параграфе приводится один из таких алгоритмов, базирующийся на идеях общего подхода [4]. Этот алгоритм в определенном смысле развивает алгоритм [6] и примыкает к алгоритму [8]. Он представляет также некоторый самостоятельный интерес.

Предложенный в [4] подход к построению конечных алгоритмов отыскания равновесия в линейных моделях обмена приводит к рассмотрению специальной транспортной задачи — транспортной задачи модели. Для модели с фиксированными бюджетами в предположении положительности всех $c^i_j > 0$ эта задача имеет вид

$$\sum_i \sum_j z_{ij} \ln c^i_j \longrightarrow \max!,$$
$$\sum_j z_{ij} = \lambda_i, \quad i \in I, \tag{2.1}$$
$$\sum_i z_{ij} = p_j, \quad j \in J, \tag{2.2}$$

$$z_{ij} \geqslant 0, \quad (i,j) \in I \times J. \tag{2.3}$$

В предположении $\sum \lambda_i = 1$ эта задача разрешима при любом $p \in \sigma$ и, согласно теории параметрического линейного программирования, определяет на $\sigma$ кусочно-линейную вогнутую функцию $f(p)$ — оптимальное значение целевой функции задачи как функции вектора цен $p$.

Если не предполагать строгую положительность всех $c^i_j$, т. е. если множество $T = \{(i,j) \in I \times J \mid c^i_j > 0\}$ является собственным подмножеством множества $I \times J$, то в транспортной задаче модели появляются запрещенные связи, отвечающие $c^i_j = 0$. В этом случае транспортная задача модели разрешима, вообще говоря, не при всех $p \in \sigma$. Но множество $P \subset \sigma$ таких $p$ непусто, а при выполнении условия (1.2) непусто также множество $P \cap \sigma^\circ$, где $\sigma^\circ$ — относительная внутренность симплекса $\sigma$. Действительно, если $T_i = \{(k,j) \in T \mid k = i\}$ и $t_i = |T_i|$ — число элементов в $T_i$, то можно положить

$$\widehat{z}_{ij} = \lambda_i/t_i, \quad (i,j) \in T_i,$$

$$\widehat{z}_{ij} = 0, \quad (i,j) \notin T_i,$$

$$\widehat{p}_j = \sum_{i \in I} \widehat{z}_{ij} \quad \forall j \in J.$$

Ввиду (1.2) имеем $\widehat{p} \in \sigma^\circ$, при этом величины $\widehat{z}_{ij}$ образуют допустимое решение транспортной задачи модели при $p = \widehat{p}$. Ясно, что этого достаточно для существования оптимального решения. Таким образом, при $p = \widehat{p}$ функция $f$ определена.

Если для данного $p \in \mathbb{R}^n$ транспортная задача модели неразрешима, то естественно считать $f(p) = -\infty$. В результате получаем вогнутую функцию $f$ на $\mathbb{R}^n$, у которой эффективная область $\operatorname{dom} f = \{p \in \mathbb{R}^n \mid f(p) > -\infty\}$ совпадает с $P$ и представляет собой многогранное множество.

Пусть $h(p)$ — энтропия с противоположным знаком, т. е. выпуклая функция, задаваемая при $p \in \sigma^\circ$ формулой

$$h(p) = \sum_{j=1}^{n} p_j \ln p_j$$

и доопределяемая на границе симплекса $\sigma$ по непрерывности: $p_j \ln p_j$ считаем равным нулю, если $p_j = 0$. Для $p \notin \sigma$ полагаем $h(p) = +\infty$.

Введем выпуклую функцию $\varphi(p) = h(p) - f(p)$. Ее эффективная область $\operatorname{dom} \varphi = \{p \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(p) < +\infty\}$ совпадает с $P$. Функция $\varphi$ строго выпукла и непрерывна на $P$, поэтому имеет единственную точку минимума $p^*$.

**Теорема 2.1.** *Вектор $p^*$ является единственным равновесным вектором цен в рассматриваемой модели с фиксированными бюджетами.*

Доказательство. Так как $p^*$ — точка минимума функции $\varphi$, имеем $0 \in \partial\varphi(p^*)$. Для $\partial\varphi(p^*)$ по теореме Моро — Рокафеллара справедливо равенство где $\partial(-f)(p^*)$ — субдифференциал выпуклой функции $(-f)$ в точке $p^*$. Введем для вогнутой функции $f$ множество $\partial f(p^*) = -\partial(-f)(p^*)$. Тогда

$$\partial\varphi(p^*) = \partial h(p^*) - \partial f(p^*).$$

Ясно, что $p^* \in \sigma^\circ$, поскольку производная функции $\lambda \ln \lambda$ равна $1 + \ln \lambda$ и стремится к $-\infty$ при $\lambda \to +0$. Поэтому если $\widehat{p} \in \partial\sigma$ и $q$ — направление, ведущее из $\widehat{p}$ в $P \cap \sigma^\circ$, то $\partial h/\partial q(p)$ также стремится к $-\infty$ при $p = \widehat{p} + tq$ и $t \to +0$. В то же время $\partial f/\partial q(p)$ имеет конечный предел ($f$ кусочно-линейная). В результате $\varphi(\widehat{p} + tq)$ меньше $\varphi(\widehat{p})$ при малых положительных $t$, и следовательно, $\widehat{p}$ не является точкой минимума функции $\varphi$.

Для $p^* > 0$ имеем $\partial h(p^*) = \{\ln p^* + te \mid t \in \mathbb{R}\}$, где $e = (1, \dots, 1)$ и $\ln p^* = (\ln p_1^*, \dots, \ln p_n^*)$. Таким образом, условие $0 \in \partial\varphi(p^*)$ эквивалентно условию $(\ln p^* + te) \in \partial f(p^*)$ при некотором $t = t^0$. Но эффективная область функции $f$ лежит в гиперплоскости, задаваемой уравнением $\sum\limits_j p_j = 1$. Учитывая этот факт, из $g \in \partial f(p^*)$ получаем, что $(g + te) \in \partial f(p^*)$ при любом t. Поэтому условие $(\ln p^* + t_0 e) \in \partial f(p^*)$ эквивалентно условию $\ln p^* \in \partial f(p^*)$.

Множество $\partial f(p^*)$ легко описывается через оптимальные значения двойственных переменных следующим образом. Пусть $z_{ij}^*$ — оптимальное решение транспортной задачи модели при $p = p^*$. Это означает, что найдутся значения векторов двойственных переменных $u = u^* \in \mathbb{R}^m$ и $v = v^* \in \mathbb{R}^n$ такие, что

$$u_i^* + v_j^* \begin{cases} = \ln c_j^i, & \text{если } z_{ij}^* > 0, \\ \geqslant \ln c_j^i, & \text{если } z_{ij}^* = 0. \end{cases}$$

Легко показать, что все такие векторы $v^*$ формируют множество $\partial f(p^*)$. Поэтому в силу $\ln p^* \in \partial f(p^*)$ существует вектор $v = \bar{v}^*$ такой, что $\ln p^* = \bar{v}^*$. Пусть $\bar{u}^*$ — отвечающий $\bar{v}^*$ вектор $u^*$. Введем величины $\bar{y}_i$ равенством $\ln \bar{y}_i = \bar{u}_i^*$ и величины $\bar{x}_j^i = z_{ij}^*/p_j^*$. Легко убедиться, что $\bar{x}^i$ является допустимым вектором в задаче $i$-го участника:

$$(p^*, \bar{x}^i) = \lambda_i$$

$$\bar{y}_i p_j^* \begin{cases} = c_j^i & \text{при } \bar{x}_j^i > 0, \\ \geqslant c_j^i & \text{при } \bar{x}_j^i = 0, \end{cases}$$

что означает оптимальность вектора $\bar{x}^i$. Очевидно также, что $\sum\limits_i \bar{x}^i = e$. Следовательно, $p^*$ — равновесный вектор цен модели.

Обратное утверждение получаем, повторяя вышеприведенные рассуждения в обратном порядке. Напомним, что непосредственно из определения и предположения (1.2) следует положительность равновесного вектора цен. Теорема 2.1 доказана.

Таким образом, отыскание равновесия в модели с фиксированными бюджетами сводится к минимизации выпуклой функции $\varphi$. Эта задача, в свою очередь, эквивалентна минимизации функции

$$\widetilde{\varphi}(p, z) = \sum_j p_j \ln p_j - \sum_{(i,j) \in T} z_{ij} \ln c_j^i$$

при ограничениях транспортной задачи модели и условии $p \in \sigma^{\circ}$.

Перейдем к описанию алгоритма отыскания равновесия. Заметим, что он близок к классическим транспортным алгоритмам и основан на направленном переборе определенных подмножеств базисных множеств транспортной задачи модели.

К началу $k$-го шага имеется множество $\mathcal{B}_k \subset T$, которому сопоставляется граф $\Gamma(\mathcal{B}_k)$ с множеством вершин $V = I \cup \{m+j \mid j \in J\}$ и множеством дуг $U = \{(i, m+j) \mid (i,j) \in \mathcal{B}_k\}$. Этот граф не содержит циклов и изолированных вершин. Имеется также текущее допустимое решение $(p^k, z^k)$, т. е. величины $z_{ij} = z_{ij}^k$ удовлетворяют условиям (2.1)–(2.3) при $p = p^k$. Это допустимое решение согласовано с множеством $\mathcal{B}_k$ в следующем смысле: $z_{ij} = z_{ij}^k$ удовлетворяют дополнительным условиям

$$z_{ij} = 0, \quad (i,j) \notin \mathcal{B}_k. \tag{2.4}$$

Если граф $\Gamma(\mathcal{B}_k)$ является связным (т. е. деревом), то $\mathcal{B}_k$ есть базисное множество транспортной задачи модели; но, вообще говоря, граф $\Gamma(\mathcal{B}_k)$ может иметь более одной компоненты связности. Пусть число компонент связности равно $\tau$ и $I_\nu \cup \{m+j \mid j \in J_\nu\}$ — множество вершин $\nu$-й компоненты. Поскольку $(p^k, z^k)$ — допустимое решение, имеем

$$\sum_{j \in J_\nu} p_j^k = \sum_{i \in I_\nu} \lambda_i, \quad \nu = 1, \ldots, \tau.$$

Выполнение итерации начинается с нахождения точки $p = r^k \in \sigma^{\circ}$, координаты которой удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\sum_{j \in J_\nu} p_j = \sum_{i \in I_\nu} \lambda_i, \quad \nu = 1, \ldots, \tau, \tag{2.5}$$

$$\frac{p_j}{c_j^i} = \frac{p_l}{c_l^i}, \quad (i,j), (i,l) \in \mathcal{B}_k. \tag{2.6}$$

Эта система имеет единственное решение, ибо из (2.6) переменные $p_j$, отвечающие $\nu$-й компоненте связности, определяются с точностью до постоянного множителя, который находится из $\nu$-го уравнения (2.5).

Уравнения (2.5) являются необходимым и достаточным условием совместности системы уравнений (2.1), (2.2) при дополнительных условиях (2.4). При этом величины $z_{ij}$, отвечающие $(i,j) \in \mathcal{B}_k$, определяются однозначно как аффинные функции параметров $p_j$:

$$z_{ij} = z_{ij}^{\mathcal{B}_k}(p).$$

Как уже отмечалось, вектор $p^k$ удовлетворяет (2.5). Ясно, что $z_{ij}^{\mathcal{B}_k}(p^k) = z_{ij}^k \geqslant 0$. Возможны два случая.

Случай 1: $p^k = r^k$. При каждом $i \in I$ однозначно определена величина $y_i = c_j^i / p_j^k$, $(i,j) \in \mathcal{B}_k$. Для таких $y_i$ проверяем выполнение неравенств

$$y_i p_j^k \geqslant c_j^i, \quad (i,j) \in T \setminus \mathcal{B}_k. \tag{2.7}$$

Если все эти неравенства выполняются, то величины $x_j^i = z_{ij}^k/p_j^k$ задают решения задач участников при $p = p^k$. Кроме того, ввиду $\sum\limits_i z_{ij}^k = p_j^k$ справедливо равенство $\sum\limits_i x_j^i = 1$, т. е. выполнено также условие баланса для каждого товара. Тем самым $p^k$ — искомый равновесный вектор цен.

Если какое-либо из неравенств (2.7) не выполняется, то пополним множество $\mathcal{B}_k$ соответствующей парой $(i,j) = (i_0, j_0)$. Получим множество $\mathcal{B}'_k = \mathcal{B}_k \cup \{(i_0, j_0)\}$. Если при этом дуга $(i_0, m+j_0)$ соединяет две различные компоненты графа $\Gamma(\mathcal{B}_k)$, то переходим к следующему шагу, полагая $\mathcal{B}_{k+1} = \mathcal{B}'_k, p^{k+1} = p^k, z^{k+1} = z^k$. Когда вершины $i_0$ и $(m+j_0)$ принадлежат одной и той же компоненте связности, добавление дуги $(i_0, m+j_0)$ замыкает цикл. В этом случае на этой компоненте выполняется обычная процедура метода потенциалов для транспортных задач, связанная с увеличением переменной $z_{i_0,j_0}$: значения переменных $z_{ij}$, отвечающие дугам образовавшегося цикла, увеличиваются или уменьшаются на одну и ту же величину в зависимости от направления прохода дуги при обходе цикла; при этом значения переменных должны оставаться неотрицательными. В результате определится исключаемая дуга $(i', m+j')$, размыкающая возникший цикл, и будут найдены новые значения $z_{ij}^{k+1}$. Принимая $p^{k+1} = p^k, \mathcal{B}_{k+1} = \mathcal{B}'_k \setminus \{(i', j')\}$, переходим к следующему шагу.

Случай 2: $p^k \neq r^k$. Рассмотрим при $t \in [0,1]$ переменный вектор $p(t) = (1-t)p^k + tr^k$ и найдем максимальное $t = t^*$, при котором выполняются неравенства $z_{ij}^{\mathcal{B}_k}(p(t)) \geqslant 0$, $(i,j) \in \mathcal{B}_k$.

Если $t^* = 1$, то положим $\mathcal{B}_{k+1} = \mathcal{B}_k$, $p^{k+1} = r^k$, $z_{ij}^{k+1} = z_{ij}^{\mathcal{B}_k}(r^k)$, и на следующем шаге будем иметь случай 1.

Если $t^* < 1$, то одно из указанных неравенств, а именно неравенство $z_{i_1,j_1}^{\mathcal{B}_k}(p(t)) \geqslant 0$, лимитирует дальнейшее увеличение $t$ (т. е. $z_{i_1,j_1}^{\mathcal{B}_k}(p(t))$ — убывающая функция, значение которой при $t = t^*$ равно нулю). Тогда $\mathcal{B}_{k+1} = \mathcal{B}'_k \setminus \{(i_1, j_1)\}, p^{k+1} = p(t^*)$ и $z_{ij}^{k+1} = z_{ij}^{\mathcal{B}_k}(p(t^*))$.

Вообще говоря, исключаемая пара $(i_1, j_1)$, как и пара $(i', j')$ в случае 1, определяется неоднозначно. Однако такое течение процесса следует рассматривать как вырожденное (аналогичная ситуация наблюдается в процедуре симплекс-метода линейного программирования). Но в данном случае это не вызывает осложнений с доказательством конечности процесса. Последнее основано на том, что значение функции $\widetilde{\varphi}(p,z)$ в течение процесса не возрастает и между двумя последовательными расширениями множества $\mathcal{B}_k$ обязательно реализуются шаги, на которых оно строго убывает. На детальном изложении доказательства здесь останавливаться не будем. Заметим лишь, что оно аналогично доказательству, приведенному в [8].

## § 3. Основной алгоритм с фиксацией бюджетов

Вернемся к рассмотрению итеративного алгоритма для отыскания равновесия в общей модели обмена. К началу $s$-й итерации, располагая некоторым вектором цен $p^s \in \sigma^\circ$, мы рассматриваем модель с фиксированными бюджетами $\lambda_i = (p^s, d^i)$, $i \in I$. Если $p^* = p^*(\lambda)$ — равновесный вектор цен этой модели, то для следующего шага принимаем $p^{s+1} = p^*$.

Для дальнейшего важно, что по описанному в § 2 алгоритму вместе с вектором $p^*$ будет определено множество $\mathcal{B} \subset T$, характеризующее равновесную структуру закупок участников модели: $x^i_j = 0$ при $(i, j) \notin \mathcal{B}$. Вектор $p^*$ однозначно определяется как решение линейной системы уравнений (2.5), (2.6), порожденной множеством $\mathcal{B}$.

Как уже отмечалось, система (2.6) определяет величины $p_j$ на каждой компоненте связности с точностью до положительного множителя:

$$p_j = \pi_\nu g_j, \quad j \in J\nu, \tag{3.1}$$

где $g_j$ — положительные числа. Без ограничения общности можно считать, что $\sum\limits_{j \in J_\nu} g_j = 1$. Подставляя (3.1) в (2.5), находим

$$\pi_\nu = \sum_{i \in I_\nu} \lambda_i. \tag{3.2}$$

Введем вектор $\pi$ с компонентами $\pi_\nu$ и перепишем (3.1) в виде

$$p = G\pi, \tag{3.3}$$

где $G$ — матрица, столбцы $G^\nu$ которой образованы компонентами

$$G^\nu_j = \begin{cases} 0, & \text{если } j \notin J_\nu, \\ g_j, & \text{если } j \in J_\nu. \end{cases}$$

Равенство (3.2) принимает вид

$$\pi = Q\lambda, \tag{3.4}$$

где $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, а $Q$ — $(r \times m)$-матрица с элементами

$$Q_{\nu i} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in I_\nu, \\ 0, & \text{если } i \notin I_\nu. \end{cases}$$

Введем матрицу $D$, строками которой являются векторы $d^i$. Учитывая, что $\lambda_i = (d^i, p^s)$, т. е. $\lambda = Dp^s$, из (3.3), (3.4) получаем

$$p^{s+1} = GQDp^s = H_s p^s.$$

Отметим, что квадратная матрица $H_s = GQD$ построена по следующему правилу: строки $d^i$ матрицы $D$, отвечающие номерам $i \in I_\nu$, суммируются, после чего умножаются на коэффициенты $g_j$, $j \in J_\nu$; результат дает $j$-ю строку матрицы $H_s$. Поэтому сумма строк этой матрицы, как и сумма строк матрицы $D$, равна вектору из единиц:

$$eH_s = e,$$

т. е. матрица, транспонированная к $H_s$, является стохастической.

Таким образом, исследуемый процесс является методом итераций, но, вообще говоря, с меняющейся от шага к шагу матрицей. Матрица $s$-го шага $H_s$ в общем случае определяется по вектору $p^s$ неоднозначно.

Причиной неоднозначности является неединственность множества $\mathcal{B}$, задающего равновесный вектор цен модели при данных бюджетах $\lambda_i$, $i \in I$. Такие множества $\mathcal{B}$ будем называть *равновесными*. Число различных равновесных множеств $\mathcal{B}$, полученных указанным способом при изменении вектора

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \Lambda^\circ = \{\lambda \in \operatorname{int} \mathbb{R}_+^m \mid \sum \lambda_i = 1\},$$

конечно. Обозначим совокупность этих множеств через $\mathfrak{B}$. Для каждого $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$ введем множество $\Lambda(\mathcal{B}) \subset \Lambda^\circ$ тех векторов $\lambda \in \Lambda^\circ$, при которых вектор $p = p(\mathcal{B}, \lambda)$, удовлетворяющий соответствующей системе (2.5), (2.6), является равновесным. Для равновесности вектора $p = p(\mathcal{B}, \lambda)$ требуется (см. § 2) выполнение двух групп условий:

— величины $z_{ij} = z_{ij}(p, \lambda)$, полученные однозначно из системы (2.1), (2.2) при дополнительных условиях

$$z_{ij} = 0, \quad (i,j) \in \mathcal{B}, \tag{3.5}$$

неотрицательны;

— выполняются неравенства

$$\frac{c_j^i}{p_j} \geqslant \frac{c_k^i}{p_k}, \quad (i,j) \in \mathcal{B}, \quad (i,k) \notin \mathcal{B}. \tag{3.6}$$

Первая группа обеспечивает существование неотрицательных векторов $x^i$, которые удовлетворяют условию баланса и бюджетным ограничениям $(p, x^i) = \lambda_i$ при дополнительных требованиях $x^i = 0$, $(i,j) \notin \mathcal{B}$. Вторая группа условий обеспечивает оптимальность таких векторов $x^i$.

Как легко видеть, множество $\Lambda(\mathcal{B})$ задается линейной системой неравенств ввиду того, что вектор $p(\mathcal{B}, \lambda)$ линейно зависит от $\lambda$ и функции $z_{ij}(p, \lambda)$ также линейные. Если вектор $\lambda$ генерировать по формуле $\lambda = Dp$ при изменяющемся $p \in \sigma^\circ$, то каждому множеству $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$ мы можем сопоставить множество $P(\mathcal{B}) = \{p \in \sigma^\circ \mid Dp \in \Lambda(\mathcal{B})\}$, которое также задается линейной системой неравенств, т. е. является многогранным (точнее, пересечением многогранного множества с $\sigma^\circ$ ).

В результате множество $\sigma^\circ$ покрывается множествами $P(\mathcal{B})$, $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$. Для $p^s \in P(\mathcal{B})$ множество $\mathcal{B}$ является равновесным при $\lambda_i = (p^s, d^i)$, $i \in I$, и порождает в качестве $H_s$ некоторую матрицу $H(\mathcal{B})$. Тем самым определено кусочно-постоянное отображение $\mathcal{H} : p \to \mathcal{H}(p)$, сопоставляющее каждой точке $p$ конечное множество матриц $H(\mathcal{B})$ таких, что $p \in P(\mathcal{B})$. Хотя множество $\mathcal{H}(p)$ не обязательно является одноэлементным, вектор $Hp$ не зависит от выбора $H \in \mathcal{H}(p)$ и определяется единственным образом как равновесный вектор при бюджетах $\lambda_i = (p, d^i)$. Таким образом, на $\sigma^\circ$ задано однозначное отображение

$$F \colon p \to Hp, \quad H \in \mathcal{H}(p), \tag{3.7}$$

являющееся непрерывным и кусочно-линейным с участками линейности $P(\mathcal{B})$, $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$.

**Теорема 3.1.** *Пусть среди заданных векторов $d^i$, $i \in I$, имеется строго положительный. Тогда процесс итераций, задаваемый формулой*

$$p^{s+1} = F(p^s),$$

*сходится,* $\lim\limits_{s\to\infty} p^s = p^*$*. При этом* $p^s$ *сходится к* $p^*$ *со скоростью геометрической прогрессии.*

Доказательство. Учитывая правило образования матриц $H_s$, можно утверждать, что каждая из них содержит положительную строку и, следовательно, осуществляет сжатие на $\sigma^\circ$ (см. [5, с. 343]):

$$\|H_s(p' - p'')\| \leqslant \theta_s \|p' - p''\| \quad \forall p', p'' \in \sigma^\circ,$$

где $\theta_s \in (0,1)$ и $\|x\| = \sum\limits_{j\in J} |x_j|$. Коэффициент сжатия $\theta_s$ зависит от равновесного множества $\mathcal{B}_s$, порождающего матрицу $H_s = H(\mathcal{B}_s)$. Ввиду конечности совокупности равновесных множеств можно указать число $\widehat{\theta} \in (0,1)$ такое, что $\theta_s \leqslant \widehat{\theta}$ при всех $s$.

Покажем, что отображение $F$, задаваемое формулой (3.7), также является сжатием на $\sigma^\circ$ с коэффициентом сжатия $\widehat{\theta}$:

$$\|F(p') - F(p'')\| \leqslant \widehat{\theta}\|p' - p''\| \quad \forall p', p'' \in \sigma^\circ. \tag{3.8}$$

Отрезок $[p', p'']$ можно «раздробить» на конечное множество более мелких отрезков, каждый из которых попадает уже целиком в одно из множеств $P(\mathcal{B})$, $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$. Точнее, найдутся множества $\mathcal{B}^i \in \mathfrak{B}$ и точки $\gamma^0 = p', \gamma^1, \dots, \gamma^k, \gamma^{k+1} = p''$ на отрезке $[p', p'']$ такие, что $[\gamma^i, \gamma^{i+1}] \subset P(\mathcal{B}^i)$, $i = 0, \dots, k$. При этом

$$H(\mathcal{B}^i)\gamma^i = H(\mathcal{B}^{i-1})\gamma^i, \quad i = 1, \dots, k.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\|F(p') - F(p'')\| &= \|H(\mathcal{B}^0)\gamma^0 - H(\mathcal{B}^0)\gamma^1 + H(\mathcal{B}^1)\gamma^1 \\ &\qquad - H(\mathcal{B}^1)\gamma^2 + \dots + H(\mathcal{B}^k)\gamma^k - H(\mathcal{B}^k)\gamma^{k+1}\| \\ &\leqslant \|H(\mathcal{B}^0)\gamma^0 - H(\mathcal{B}^0)\gamma^1\| + \dots + \|H(\mathcal{B}^k)\gamma^k - H(\mathcal{B}^k)\gamma^{k+1}\| \\ &\leqslant \widehat{\theta}(\|\gamma^0 - \gamma^1\| + \dots + \|\gamma^k - \gamma^{k+1}\|).\end{aligned}$$

Однако $\|\gamma^0 - \gamma^1\| + \dots + \|\gamma^k - \gamma^{k+1}\| = \|\gamma^0 - \gamma^{k+1}\|$, так как точки $\gamma^i$, $i = 0, \dots, k+1$, последовательно расположены на отрезке $[\gamma^0, \gamma^{k+1}] = [p', p'']$. В итоге получаем требуемое неравенство (3.8).

Дальнейшие рассуждения стандартны и опираются на сходимость последовательности $\{p^s\}$ в себе:

$$\begin{aligned}\|p^{m+l} - p^m\| &\leqslant \|p^{m+l} - p^{m+l-1}\| + \dots + \|p^{m+1} - p^m\| \\ &= \|F(p^{m+l-1}) - F(p^{m+l-2})\| + \dots + \|F(p^m) - F(p^{m-1}\| \\ &\leqslant (\widehat{\theta})^l\|p^m - p^{m-1}\| + \dots + \|p^m - p^{m-1}\| \\ &= \|p^m - p^{m-1}\|[(\widehat{\theta})^l + \dots + \widehat{\theta} + 1] \leqslant \|p^1 - p^0\|(\widehat{\theta})^m \frac{1}{1-\widehat{\theta}}.\end{aligned}$$

При достаточно большом $m$ величина $\|p^{m+l} - p^m\|$ сколь угодно мала вне зависимости от $l$. Таким образом, последовательность $\{p^s\}$ сходится в себе и предел $p^* = \lim\limits_{s\to\infty} p^s$ существует. Столь же стандартным образом показывается геометрическая скорость сходимости $p^s$ к $p^*$. Теорема 3.1 доказана.

**Теорема 3.2.** *Если* $\lim_{s\to\infty} p^s = p^* > 0$, *то* $p^*$ *— равновесный вектор цен модели. Если среди компонент* $p_j^*$ *есть нулевые, то модель сводима и равновесия в модели не существует.*

Доказательство. Какая-либо из матриц $H_s$ будет повторяться бесконечно много раз. Пусть $H_k = \widetilde{H}$, $k \in K \subset \{1,2,\dots\}$, $|K| = +\infty$. Учитывая равенства

$$p^{k+1} = \widetilde{H}p^k, \qquad k \in K,$$

в пределе получаем

$$p^* = \widetilde{H}p^*.$$

Матрица $\widetilde{H}$ порождается некоторым равновесным множеством $\widetilde{\mathcal{B}}$. Это означает, что при $k \in K$ выполняются неравенства

$$\frac{c_j^i}{p_j^k} \geqslant \frac{c_l^i}{p_l^k}, \qquad (i,j) \in \widetilde{\mathcal{B}},\ \ l = 1,\dots,n. \tag{3.9}$$

Кроме того, величины $z_{ij} = z_{ij}(\lambda, p)$, определяемые из (2.1), (2.2), (3.5) однозначно как линейные функции от $\lambda$ и $p$ при $\mathcal{B} = \widetilde{\mathcal{B}}$ и $\lambda = \lambda^k$, $p = p^k$, будут неотрицательны:

$$z_{ij}(\lambda^k, p^k) \geqslant 0, \qquad (i,j) \in \widetilde{\mathcal{B}}. \tag{3.10}$$

Если $p^* > 0$, то, переходя к пределу в (3.9) и (3.10), убеждаемся в том, что $p^*$ — равновесный вектор цен в модели с фиксированными бюджетами $\lambda_i = \lambda_i^* = (p^*, d^i)$ и, следовательно, в исходной модели.

Пусть теперь $p^* \not> 0$. Введем множества $J' = \{j \in J \mid p_j^* > 0\}$, $J'' = J \setminus J'$. Из равенства

$$p_i^* = (\widetilde{H}p^*)_i, \quad i \in J'',$$

следует $\widetilde{H}_{ij} = 0$ при $j \in J'$, $i \in J''$. Это означает, что если строки и столбцы с номерами из $J'$ поставить впереди, то матрица $\widetilde{H}$ примет вид

$$\widetilde{H} = \begin{array}{c} \begin{matrix} \quad J' & \qquad J'' \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{ccc} & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ J' \\ \\ J'' \end{array}.$$

Разбиению множества $J$ на $J'$ и $J''$ отвечает разбиение на две группы множества $\mathcal{N}$ компонент связности графа $\Gamma(\widetilde{\mathcal{B}})$: $\mathcal{N} = \mathcal{N}' \cup \mathcal{N}''$ и

$$J' = \bigcup_{\nu\in\mathcal{N}'} J_\nu, \qquad J'' = \bigcup_{\nu\in\mathcal{N}''} J_\nu.$$

Теперь введем множества

$$I' = \bigcup_{\nu\in\mathcal{N}'} I_\nu, \qquad I'' = I \setminus I'.$$

После надлежащей перестановки строк и столбцов получаем

$$D = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} J' & & J'' \end{array} & \\ \left[ \begin{array}{ccc} & \vdots & \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & \end{array} \right] & \begin{array}{c} I' \\ \\ I'' \end{array} \end{array} .$$

Остается показать, что

$$c^i_j = 0, \quad i \in I',\, j \in J''. \tag{3.11}$$

Это и будет означать сводимость модели, поскольку по предположению в матрице $D$ есть положительная строка и, следовательно, среди $d^i_j$, $i \in I'$, $j \in J''$, есть ненулевые элементы.

Покажем справедливость (3.11). Так как множества $I'$ и $J''$ порождаются различными компонентами связности графа $\Gamma(\widetilde{\mathcal{B}})$, пары вида $(i, l)$ при $i \in I'$, $l \in J''$ не входят в $\widetilde{\mathcal{B}}$. Рассмотрим неравенство (3.9) для $(i, j) \in \widetilde{\mathcal{B}}$, $i \in I'$ и $l \in J''$. При этом $j \in J'$ и $p^k_j \to p^*_j > 0$, а $p^k_l \to 0$. Поэтому из (3.9) следует (3.11). Теорема 3.2 доказана.

## § 4. Алгоритм с усреднением

Если не предполагать, что среди векторов $d^i$, $i \in I$, есть строго положительный, то в рассмотренном выше процессе матрицы $H_s$ не обязательно осуществляют сжатие на $\sigma^0$ и нельзя гарантировать сходимость $p^s$ к равновесному вектору цен модели. Несложно сконструировать примеры моделей, для которых описанный процесс зацикливается, хотя равновесие существует. Приведем один из таких примеров.

Рассмотрим модель с двумя участниками и двумя товарами:

$$c^1 = (3, 2), \qquad d^1 = (0, 1),$$
$$c^2 = (1, 4), \qquad d^2 = (1, 0).$$

Равновесный вектор цен $p^*$ имеет вид $p^* = (0.5, 0.5)$. При этом

$$(p^*, d^1) = \lambda^*_1 = 0.5, \qquad (p^*, d^2) = \lambda^*_2 = 0.5.$$

Оптимальными решениями задач участников при этих бюджетах являются векторы

$$\widehat{x}^1 = (1, 0), \qquad \widehat{x}^2 = (0, 1).$$

Полагая $p^0 = (0.55, 0.45)$, получим

$$\lambda^0_1 = (p^0, d^1) = 0.45, \qquad \lambda^0_2 = (p^0, d^2) = 0.55.$$

Решая задачу о равновесии с такими бюджетами, найдем равновесный вектор $p^1 = p(\lambda^0) = (0.45, 0.55)$. Далее, полагая

$$\lambda^1_1 = (p^1, d^1) = 0.55, \qquad \lambda^1_2 = (p^1, d^2) = 0.45,$$

приходим к равновесному вектору $p^2 = p(\lambda^1) = (0.55, 0.45) = p^0$. Процесс зацикливается.

Преодолеть указанный эффект зацикливания позволяет несложная модификация процесса, состоящая в следующем.

На $s$-м шаге процесса, вычислив бюджеты $\lambda_i^s = (p^s, d^i)$ и определив равновесный вектор цен $\bar{p}^s = p(\lambda^s)$ в полученной модели с фиксированными бюджетами, мы рассматриваем $\bar{p}^s = F(p^s)$ не в качестве $p^{s+1}$, а лишь как ориентир для сдвига из $p^s$:

$$p^{s+1} = p^s + \lambda(\bar{p}^s - p^s),$$

где $\lambda \in (0,1)$. Для простоты в дальнейшем принимаем $\lambda = 0.5$, т. е.

$$p^{s+1} = \frac{p^s + \bar{p}^s}{2}.$$

Тем самым итерации в рассматриваемом процессе осуществляются в соответствии с отображением $\overline{F}\colon p \to \frac{1}{2}(p + F(p))$, т. е.

$$p^{s+1} = \overline{F}(p^s) = \frac{1}{2}(E + H_s)p^s,$$

где $E$ — единичная матрица и $H_s \in \mathcal{H}(p^s)$. Введем матрицу $\overline{H}_s = \frac{1}{2}(E + H_s)$. Тогда

$$p^{s+1} = \overline{H}_s p^s.$$

Будем считать выполненным

**Предположение (!).** *Все матрицы $H(\mathcal{B})$, порождаемые равновесными множествами $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$, являются неразложимыми.*

При таком предположении все матрицы $H_s$, фигурирующие в процессе, будут неразложимыми, а матрицы $\overline{H}_s$ — примитивными, т. е. некоторая степень каждой такой матрицы является строго положительной, а значит, осуществляет сжатие на $\sigma^\circ$. Однако использование этого факта затруднительно, так как, вообще говоря, $\overline{H}_{s+1} \neq \overline{H}_s$. Поэтому обоснование процесса идет по иной схеме.

**Лемма 4.1.** *Пусть $A, B$ — неотрицательные квадратные матрицы с положительными диагоналями, и пусть матрица $A$ неразложима. Тогда если $B \not> 0$, то ненулевых элементов у матрицы $AB$ больше, чем у матрицы $B$.*

Доказательство. Покажем, что если число ненулевых элементов матрицы $G = AB$ по сравнению с числом ненулевых элементов матрицы $B$ не возросло, то $B > 0$. Определим на $\mathbb{R}^n$ бинарное отношение предпорядка $\succeq$ следующим образом:

$$a \succeq b, \text{ если } b_j \neq 0 \Longrightarrow a_j \neq 0 \quad \forall j.$$

Этот предпорядок порождает отношение эквивалентности:

$$a \sim b \Longleftrightarrow a \succeq b \wedge b \succeq a,$$

т. е. $a \sim b$ в том и только том случае, когда расположение ненулевых элементов в векторах $a$ и $b$ одинаковое.

Пусть $a_{ij}$ — элемент матрицы $A$, а $g_i$ и $b_i$ — $i$-е строки матриц $G$ и $B$ соответственно. Так как

$$g_i = a_{ii}b_i + \sum_{j \neq i} a_{ij}b_j \tag{4.1}$$

и по предположению $a_{ii} > 0$, имеем $g_i \succeq b_i$. Поэтому предположение о невозрастании числа ненулевых элементов матрицы $G$ по сравнению с матрицей $B$ означает $g_i \sim b_i$ для всех $i \in I$. Возьмем произвольное непустое подмножество $I_1 \subset I$ такое, что все строки $b_i$ при $i \in I_1$ эквивалентны друг другу. Такое подмножество существует, ибо отношение эквивалентности рефлексивно, т. е. $b_i \sim b_i$ для всех $i \in I$, и можно взять $I_1 = \{i\}$. Если $I_1 = I$, то все строки матрицы $B$ эквивалентны между собой, и из положительности диагональных элементов матрицы $B$ следует $B > 0$.

Пусть $I_1 \neq I$ и $I_1' = I \setminus I_1$. Будем изображать сужение введенного бинарного отношения на множество строк матрицы $B$ графом, сопоставляя строке $b_i$ вершину $i$, а паре строк $b_i$, $b_k$ таких, что $b_i \succeq b_k$, — дугу $u = (i, k)$. Покажем, что при предположении о невозрастании числа ненулевых элементов из неразложимости матрицы $A$ следует существование дуги $u = (i, k)$, выводящей из множества $I_1$, т. е. $i \in I_1$, $k \in I_1'$. Не ограничивая общности, можно считать, что $I_1 = \{1, 2, \ldots, l\}$, т. е. строки с номерами из $I_1$ предшествуют остальным строкам матрицы $B$. Рассмотрим отвечающее разбиению $I$ на $I_1$ и $I_1'$ разбиение матрицы $A$ на блоки:

$$A = \begin{bmatrix} A_{I_1 I_1} & A_{I_1 I_1'} \\ A_{I_1' I_1} & A_{I_1' I_1'} \end{bmatrix}$$

Если на введенном графе нет дуг из $I_1$ в $I_1'$, то никакая строка $b_k$, $k \in I_1'$, не подчинена ни одной из строк $b_i$, $i \in I_1$. Следовательно, взвешенное суммирование с положительными множителями любых двух строк $b_i$ и $b_k$, $i \in I_1$, $k \in I_1'$, приводит к образованию новых ненулевых элементов по сравнению с $b_i$:

$$\lambda_i, \lambda_k > 0 \Longrightarrow \lambda_i b_i + \lambda_k b_k \succ b_i.$$

Но тогда если некоторый элемент $a_{ik}$, $i \in I_1$, $k \in I_1'$, строго положителен, то из (4.1) следует соотношение

$$g_i \succeq a_{ii}b_i + a_{ik}b_k \succ b_i,$$

что противоречит предположению $g_i \sim b_i$ при всех $i$. В результате получаем $A_{I_1 I_1'} = 0$, т. е. матрица $A$ разложима, что противоречит условию. Следовательно, исходящие из множества $I_1$ дуги на введенном графе существуют. Тем самым показано, что из каждой вершины графа исходит хотя бы одна дуга, так как в качестве $I_1$ можно взять одноэлементное множество $I_1 = \{i\}$ при произвольном $i \in I$. Это означает, что любой путь на графе можно продолжить.

Пусть теперь дуга $u = (i_0, k_0)$ выводит из множества $I_1$. Продолжая начатый этой дугой путь, мы либо вернемся в $I_1$, что приведет к появлению более широкого множества $I_2$ эквивалентных вершин ($I_2 \supset I_1$, $I_2 \neq I_1$), либо наращивание пути приведет к образованию цикла, не содержащегося в $I_1$. Тем самым будет получено новое множество эквивалентности $I_2$, $I_2 \cap I_1 = \varnothing$. Теперь повторяем рассуждения для множества $I_2$, отыскивая выводящую из него дугу, и т. д. Ясно, что такой процесс остановится лишь тогда, когда в качестве множества эквивалентности будет получено все множество $I$, что, как отмечалось выше, означает $B > 0$. Лемма 4.1 доказана.

**Следствие 4.1.** *Произведение достаточно большого числа матриц вида* $\overline{H}(\mathcal{B}) = \frac{1}{2}(E + H(\mathcal{B}))$ *(возможно, различных) осуществляет сжатие на* $\sigma^\circ$.

Покажем, что в силу следствия 4.1 свойством сжатия будет обладать и достаточно большая степень отображения $\overline{F}$.

**Лемма 4.2.** *При выполнении предположения* (!) *существует число* $N$ *такое, что отображение* $\widehat{F} = \overline{F}^N$ *осуществляет сжатие на* $\sigma^\circ$.

Доказательство. Возьмем в качестве $N$ число, которое фигурирует в следствии 4.1. Пусть $p', p''$ — произвольные точки из $\sigma^\circ$. Повторяя рассуждения, использованные при доказательстве теоремы 3.1, можно «раздробить» отрезок $[p', p'']$ на более мелкие отрезки так, что на каждом полученном отрезке отображение $\overline{F}$ линейно. К каждому отрезку можно применить ту же процедуру, получая еще более мелкое дробление отрезка $[p', p'']$, согласованное с участками линейности отображения $\overline{F}^2$. Поступая таким образом, мы за $N$ шагов получим совокупность точек

$$\gamma^0 = p', \gamma^1, \dots, \gamma^r, \gamma^{r+1} = p''$$

таких, что на каждом из отрезков $[\gamma^i, \gamma^{i+1}]$ линейным является отображение $\overline{F}^N$. Это означает, что если проделать $N$ итераций, отправляясь от точек $\gamma^i$ и $\gamma^{i+1}$ при помощи отображения $\overline{F}$, то на каждой итерации $l = 1, \dots, N$ точки $\gamma^{il} = \overline{F}^l(\gamma^i)$ и $\gamma^{i+1,l} = \overline{F}^l(\gamma^{i+1})$ будут попадать в одну зону линейности отображения $\overline{F}$. Тем самым образы точек $\gamma^{il}$ и $\gamma^{i+1,l}$ при отображении $\overline{F}$ можно представить как результат умножения соответственно $\gamma^{il}$ и $\gamma^{i+1,l}$ на одну и ту же матрицу $\overline{H}_{il} = \frac{1}{2}(E + H_{il})$, где $H_{il} \in \mathcal{H}(\gamma^{il})$, т. е.

$$\overline{F}^{l+1}(\gamma^i) = \overline{H}_{il}\overline{F}^l(\gamma^i), \quad \overline{F}^{l+1}(\gamma^{i+1}) = \overline{H}_{il}\overline{F}^l(\gamma^{i+1}).$$

Кроме того, ввиду непрерывности отображения $\overline{F}$

$$\overline{H}_{il}\overline{F}^l(\gamma^i) = \overline{H}_{i-1,l}\overline{F}^l(\gamma^i) \quad i = 1, \dots, k.$$

В результате имеем

$$\begin{aligned}
\overline{F}^N(p') - \overline{F}^N(p'') = \overline{F}^N(\gamma^0) - \overline{F}^N(\gamma^{r+1}) = \overline{F}^N(\gamma^0) - \overline{F}^N(\gamma^1) \\
+ \overline{F}^N(\gamma^1) - \dots - \overline{F}^N(\gamma^{r+1}) \\
= \overline{H}_{0,N-1} \dots \overline{H}_{00}(\gamma^0 - \gamma^1) + \overline{H}_{1,N-1} \dots \overline{H}_{10}(\gamma^1 - \gamma^2) + \dots \\
+ \overline{H}_{r,N-1} \dots \overline{H}_{r0}(\gamma^r - \gamma^{r+1}).
\end{aligned}$$

Но по лемме 4.1 матрицы

$$\widetilde{H}_0 = \overline{H}_{0,N-1} \dots \overline{H}_{00}, \ \dots, \ \widetilde{H}_r = \overline{H}_{r,N-1} \dots \overline{H}_{r0}$$

являются матрицами сжатия на $\sigma^0$. И если $\theta_0, \dots, \theta_r \in (0,1)$ — коэффициенты сжатия соответственно матриц $\widetilde{H}_0, \dots, \widetilde{H}_r$, то, продолжая предшествующую выкладку, как в доказательстве теоремы 3.1, получаем

$$\begin{aligned}\|\overline{F}^N(p') - \overline{F}^N(p'')\| &\leqslant \|\widetilde{H}_0(\gamma^0 - \gamma^1)\| + \ldots + \|\widetilde{H}_r(\gamma^r - \gamma^{r+1})\| \\ &\leqslant \max\{\theta_0, \dots, \theta_r\}(\|\gamma^0 - \gamma^1\| + \ldots + \|\gamma^r - \gamma^{r+1}\|) = \widehat{\theta}\|p' - p''\|,\end{aligned}$$

где $\widehat{\theta} \in (0,1)$ — некоторая мажоранта для коэффициентов сжатия всевозможных матриц $\widetilde{H}$, являющихся различными произведениями из $N$ матриц $\overline{H}(\mathcal{B})$, $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}$. Ясно, что ввиду конечности множества $\mathfrak{B}$ такая мажоранта существует. Лемма 4.2 доказана.

Ввиду вышеизложенного справедлива следующая

**Теорема 4.1.** *При выполнении предположения* (!) *алгоритм с усреднением порождает последовательность векторов* $\{p^s\}$, *сходящуюся к равновесному вектору цен модели со скоростью геометрической прогрессии.*

## § 5. Другие модификации алгоритма

Для преодоления зацикливания в основном алгоритме помимо описанного процесса с усреднением можно воспользоваться иной процедурой, которую условно назовем «алгоритм с дотациями». Речь идет о том, чтобы при использовании на очередном шаге основного алгоритма вспомогательной модели с фиксированными бюджетами формировать бюджеты участников с некоторой добавкой (дотацией) $\Delta > 0$:

$$\lambda_i^{s+1} = (p^s, d^i) + \Delta.$$

Можно показать, что при условии стабилизации структуры закупок участников достигается сходимость последовательности $\{p^s\}$ к искомому равновесному вектору цен по направлению.

Опыт практического использования описанных алгоритмов показывает, что такая стабилизация структуры закупок происходит довольно быстро. В этой связи отметим, что возможно и комбинированное использование изложенных алгоритмов с конечным алгоритмом [2], состоящее в том, что при повторении на очередном шаге прежней структуры закупок, т. е. при $\mathcal{B}_{s+1} = \mathcal{B}_s$, идет проверка $\mathcal{B}_s$ на равновесность в исходной модели. Для этого решается система линейных уравнений (2.5), (2.6), отвечающая $\mathcal{B}_s$, с заменой $\lambda_i$ в правой части (2.5) на $(p, d^i)$. Для полученного вектора $\widehat{p}$ проверяем условия равновесности так, как это описано в § 3: проверяем на неотрицательность величины $z_{ij}(\widehat{p}, \widehat{\lambda})$, полученные по $\widehat{\lambda}_i = (\widehat{p}, d^i)$, и проверяем для $p = \widehat{p}$ неравенства (3.6). Если вектор $\widehat{p}$ не оказался равновесным, процесс продолжается.

Представляется, что такая (конечная) процедура будет более экономичной, чем простое применение алгоритма [2].

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Eaves B. C.** A finit algorithm for the linear exchange model // J. Math. Econom. 1976. V. 3, N 2. P. 197–204.
2. **Шмырев В. И.** Алгоритм поиска равновесия в линейной модели обмена // Сиб. мат. журн. 1985. Т. 26, № 2. С. 163–175.
3. **Lemke C. E.** Bimatrix equilibrium points and math. programming //J. Management Sci. 1965. V. 11, N 7. P. 681–689.
4. **Шмырев В. И.** Об одном подходе к отысканию равновесия в простейших моделях обмена // Докл. АН СССР. 1983. Т. 268, № 5. С. 1062–1066.
5. **Гейл Д.** Теория линейных экономических моделей. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
6. **Шмырев В. И.** Алгоритмы отыскания равновесия в моделях обмена с фиксированными бюджетами // Оптимизация. 1983. Вып. 31. С. 137–155.
7. **Gale D.** The linear exchange model // J. Math. Econom. 1976. V. 3, N 2. P. 205–209.
8. **Шмырев В. И.** Об отыскании равновесия в линейной модели обмена с фиксированными бюджетами и дополнительными ограничениями финансового типа // Оптимизация. 1989. Вып. 45. С. 66–86.