УДК 517.98

МАЖОРИРУЕМЫЕ ОПЕРАТОРЫ

А. Г. Кусраев

Семёну Самсоновичу Кутателадзе
к его пятидесятилетию

В основе понятия мажорируемого (доминированного) оператора лежит простая идея, восходящая, по крайней мере, к методу мажорант Коши. Грубо говоря, ее можно выразить следующим образом. Если рассматриваемый оператор (уравнение) мажорируется другим оператором (уравнением), называемым мажорантой или доминантой, то свойства последнего существенно влияют на свойства первого. Таким образом, оператор (или уравнение) с «хорошей» мажорантой, должен обладать «хорошими» свойствами. Математический аппарат, в рамках которого идея мажорирования принимает естественную и законченную форму, был предложен Л. В. Канторовичем в 1935–6 гг. (см. [29, 30, 33, 36]), который ввел фундаментальные понятия векторного пространства, нормированного элементами векторной решетки, и линейного оператора в таких пространствах, мажорируемого линейным положительным или сублинейным возрастающим оператором [30]. Он также применил эти понятия к решению функциональных уравнений (см. [33, 34, 109]).

В последующие годы многие авторы изучали различные частные случаи решеточно нормированных пространств и мажорируемых операторов. Однако эти исследования проводились в рамках и в духе теории векторных и нормированных решеток. Без преувеличения можно сказать, что мажорируемые операторы как самостоятельный объект исследования на полвека выпали из поля зрения специалистов. Вследствие этого важнейшие структурные свойства мажорируемых операторов были получены лишь в последнее время.

В начале 80-х годов в теории векторных решеток произошли определенные качественные изменения. Возникли новые методы исследования, область приложений существенно расширилась и обогатилась. Все это привело к возможности углубленного изучения мажорируемых операторов и к формированию самостоятельной теории мажорируемых операторов. Цель настоящей статьи — изложить основные результаты о мажорируемых операторах, полученные в последние десять лет и продемонстрировать определенную зрелость теории.

Первая глава посвящена строению решеточно нормированных пространств. Здесь рассмотрены вопросы расширения и пополнения таких пространств, а также представления посредством непрерывных банаховых расслоений или булевозначных моделей теории множеств. Даны примеры функциональных пространств, допускающих естественную векторную норму. В гл. 2 изучаются общие структурные свойства мажорируемых операторов. Важнейший результат здесь — разложимость векторной нормы мажорируемого оператора. В гл. 3 изучаются вопросы аналитического представления мажорируемых операторов. Рассмотрены мультипликативные, интегральные и псевдоинтегральные представления. В гл. 4 речь идет о некоторых классах операторов в банаховых пространствах со смешанной нормой. Затронуты также вопросы изометрической классификации пространств Лебега — Бохнера измеримых вектор-функций.

На протяжении всего текста широко используются методы и результаты теории векторных решеток и положительных операторов. Это направление функционального анализа хорошо представлено в математической литературе, и в частности в известных монографиях [21, 36, 35, 85, 126, 145, 163]. Необходимую информацию из теории булевых алгебр, а также из теории меры и интеграла можно найти в [19, 71] и [26, 35, 96, 97] соответственно.

Всюду ниже используются обозначения: $\mathbb{R}$ — поле действительных чисел, $\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел и $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел.

Глава 1. Решеточно нормированные пространства

В этой главе рассмотрены некоторые структурные свойства векторных пространств с нормой, принимающей значения из векторной решетки. Такие пространства принято называть решеточно нормированными (сокращенно РНП). Важнейшие особенности РНП связаны со свойством разложимости (1.1.1(4)). Оно позволяет, в частности, выделить в РНП полную булеву алгебру линейных проекторов, изоморфную и тесно связанную с булевой алгеброй порядковых проекторов нормирующей векторной решетки (1.1.3). Разбиения единицы в указанной булевой алгебре приводят к операции перемешивания элементов РНП (1.1.7). Если существует перемешивание любого ограниченного по (векторной) норме семейства, то такое РНП называют дизъюнктно полным (1.1.4). Таковыми будут, например, пространства Банаха — Канторовича (ПБК), т. е. разложимые и порядково полные РНП (1.1.7). При этом разложимое РНП порядково полно в том и только в том случае, когда оно дизъюнктно полно и полно относительно сходимости с регулятором (1.3.2). Кроме того, всякое РНП имеет порядковое пополнение, которое можно получить последовательным применением операций перемешивания и замыкания относительно сходимости с регулятором (1.3.8, 1.3.9).

Наиболее часто в анализе встречаются РНП, состоящие из непрерывных и измеримых вектор-фунций (§ 1.2). Более общий пример РНП — пространство сечений непрерывного банахова расслоения (1.4.7). Оказывается, что ПБК линейно изометрично пространству почти глобальных сечений однозначно определенного непрерывного банахова расслоения (1.4.10). Тем самым всякое РНП допускает функциональное представление.

Представления совсем иного типа связаны с булевозначными моделями теории множеств. Именно, если в булевозначной модели взять банахово пространство, то его изображение в стандартной модели, именуемое спуском, будет ПБК (1.5.2). Наоборот, для всякой РНП в подходящей булевозначной модели существует единственное с точностью до линейной изометрии банахово пространство, спуск которого служит расширением исходного РНП (1.5.5). Эти факты объясняют, в частности, почему и в чем именно параллельны теории банаховых и решеточно нормированных пространств.

§ 1.1. Основные понятия

В этом параграфе вводятся основные понятия и рассматриваются простейшие свойства векторных норм.

1.1.1. Рассмотрим векторное пространство X и вещественную векторную решетку E. Отображение $|\cdot| : X \to E_+$ назовем *векторной* (*E-значной*) *нормой*, если оно удовлетворяет аксиомам

(1) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad (x \in X)$,

(2) $|\lambda x| = |\lambda||x| \quad (\lambda \in \mathbb{R},\ x \in X)$,

(3) $|x + y| \leqslant |x| + |y| \quad (x, y \in X)$.

Векторную норму именуют *разложимой* или *нормой Канторовича*, если

(4) для любых $e_1, e_2 \in E_+$ и $x \in X$ из $|x| = e_1 + e_2$ следует существование таких $x_1, x_2 \in X$, что $x = x_1 + x_2$ и $|x_k| = e_k$ $(k := 1, 2)$.

В случае, когда условие (4) выполнено только для дизъюнктных $e_1, e_2 \in E_+$, говорят, что норма *дизъюнктно разложима* или, короче, *d-разложима.*

Тройку $(X, |\cdot|, E)$ (или, проще, (X, E), или $(X, |\cdot|)$, или X, опуская подразумеваемые параметры) называют *решеточно нормированным пространством*, если $|\cdot|$ есть E-значная норма на векторном пространстве X. Если норма $|\cdot|$ разложима (d-разложима), то и само пространство $(X, |\cdot|)$ называют *разложимым* (d-разложимым).

1.1.2. Если $|x| \wedge |y| = 0$, то элементы $x, y \in X$ называют *дизъюнктными* и пишут $x \perp y$. Множество вида $M^{\perp} := \{x \in X : (\forall y \in\in M)\ x \perp y\}$, где $\varnothing \neq M \subset X$, называют, как и в случае векторной решетки, *компонентой* или *полосой.* Символом $\mathfrak{B}(X)$ обозначается множество всех компонент, упорядоченное по включению. Для $L \subset E$ и $M \subset X$ по определению положим $h(L) := \{x \in X : |x| \in L\}$ и $|M| := \{|x| : x \in M\}$. Как видно, $|h(L)| \subset L \cap |X|$.

(1) *Допустим, что каждая компонента векторной решетки $E_0 := |X|^{\perp\perp}$ содержит норму некоторого ненулевого элемента. Тогда $\mathfrak{B}(X)$ — полная булева алгебра, а отображение $L \mapsto h(L)$ осуществляет изоморфизм булевых алгебр $\mathfrak{B}(|X|^{\perp\perp})$ и $\mathfrak{B}(X)$.*

$\lhd$ Ясно, что отображение h сохраняет пересечение любого непустого семейства компонент. Тем самым h сохраняет точные нижние границы, совпадающие в рассматриваемых алгебрах с пересечением. Кроме того, $h(\{0\}) = \{0\}$ и $h(|X|^{\perp\perp}) = X$. Таким образом, достаточно установить, что $h(L^{\perp}) = h(L)^{\perp}$ для $L \in \mathfrak{B}(|X|^{\perp\perp})$. Включение $h(L^{\perp}) \subset h(L)^{\perp}$ очевидно. Если $0 \neq x \in h(L)^{\perp}$, то по определению $|x|$ дизъюнктен всем элементам из L вида $|y|$. В то же время $x \notin h(L^{\perp})$ означает, что $0 < e \leqslant |x|$ для некоторого $e \in L_+$. Поэтому в компоненте $\{e\}^{\perp\perp}$ нет ни одного элемента вида $|y|$, что противоречит нашему допущению. $\rhd$

(2) *Если элементы $x, y \in X$ дизъюнктны, то $|x + y| = |x| + |y|$.*

$\lhd$ В самом деле, из соотношений $|x| \wedge |y| = 0$ и $|x| \leqslant |x + y| + |y|$ выводим:

$$|x| \leqslant (|x + y| + |y|) \wedge |x| \leqslant |x + y| \wedge |x| \leqslant |x + y|.$$

Точно так же $|y| \leqslant |x + y|$, поэтому

$$|x| + |y| = |x| \vee |y| \leqslant |x + y|. \ \rhd$$

(3) *Предположим, что выполнены условия предложения* (1). *Пусть X d-разложимо и существует порядковый проектор π на компоненту $L \in \mathfrak{B}(E_0)$. Тогда на компоненту $K := h(L)$ существует проектор $h(\pi)$ параллельно компоненте $K^{\perp}$, причем $\pi|x| = |h(\pi)x|$ для всех $x \in X$.*

$\lhd$ Для любого $x \in X$ в силу условия d-разложимости найдутся такие $x_1, x_2 \in X$, что $x = x_1 + x_2$, $|x_1| = \pi|x|$ и $|x_2| = \pi^{\perp}|x|$. Это означает, что X есть прямая сумма компонент K и $K^{\perp}$. Пусть $h(\pi)$ — проектор на K параллельно $K^{\perp}$. По определению изоморфизма h имеем $h(\pi)x \in K = h(\pi E_0)$, или $|h(\pi)x| \in \pi E_0$. Тем самым $\pi^{\perp}|h(\pi)x| = 0$, или $\pi|h(\pi)x| = |h(\pi)x|$. Так как $h(\pi)x$ и $h(\pi^{\perp})x$ дизъюнктны, то в силу (2)

$$\pi|x| = \pi(|h(\pi)x| + |h(\pi^{\perp})x|) = \pi|h(\pi)x|.$$

Следовательно, $\pi|x| = \pi|h(\pi)x| = |h(\pi)x|$. $\rhd$

1.1.3. Всюду в дальнейшем под *булевой алгеброй проекторов* в векторном пространстве X подразумевается множество $\mathscr{B}$ коммутирующих линейных идемпотентных операторов, действующих в X. При этом булевы операции имеют вид

$$\pi \wedge \rho := \pi \circ \rho = \rho \circ \pi, \quad \pi \vee \rho = \pi + \rho - \pi \circ \rho, \quad \pi^* = I_x - \pi \quad (\pi, \rho \in \mathscr{B}),$$

а нулевой и тождественный операторы в X служат соответственно нулем и единицей булевой алгебры $\mathscr{B}$.

Допустим, что $E_0 := |X|^{\perp\perp}$ — решетка с проекциями, а пространство X d-разложимо. Тогда существуют полная булева алгебра $\mathscr{B}$ проекторов в X и изоморфизм h из $\mathfrak{P}(E_0)$ на $\mathscr{B}$ такие, что

$$b|x| = |h(b)x| \quad (b \in \mathfrak{P}(E_0), x \in X).$$

$\lhd$ Ненулевая компонента $L \in \mathfrak{B}(E_0)$ не может быть дизъюнктной множеству $|X|$. Значит, $|x| \notin L^\perp$ для некоторого $x \in X$. Если π — проектор на L, то элемент $\pi|x|$ отличен от нуля. Ввиду d-разложимости X для некоторого $x_0 \in X$ будет $|x_0| = \pi|x| \in L$. Итак, можно применить 1.1.2 (1,3). Каждая компонента $K \in \mathfrak{B}(X)$ допускает проектор π_K параллельно $K^\perp$. Положим $\mathscr{B} := \{\pi_K : K \in \mathfrak{B}(X)\}$. Ясно, что $\mathscr{B}$ — полная булева алгебра проекторов. Порядковому проектору $\rho \in \mathfrak{P}(E_0)$ поставим в соответствие проектор π_K, где $K := h(\rho E_0)$. Полученное отображение обозначим той же буквой h. Тогда h — изоморфизм булевых алгебр $\mathfrak{P}(E_0)$ и $\mathscr{B}$. Требуемое свойство изоморфизма h следует из (3). $\rhd$

В дальнейшем булевы алгебры $\mathfrak{P}(E_0)$ и $\mathfrak{P}(X) := \mathscr{B}$ отождествляем и пишем $\pi|x| = |\pi x|$ $(x \in X, \pi \in \mathfrak{P}(E_0))$.

1.1.4. Говорят, что сеть $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ *о-сходится* к элементу $x \in X$, и пишут $x = o\text{-}\lim x_\alpha$, если существует убывающая сеть $(e_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ в E такая, что $\inf_{\gamma\in\Gamma} e_\gamma = 0$ и для любого $\gamma \in \Gamma$ найдется индекс $\alpha(\gamma) \in A$, для которого $|x - x_\alpha| \leqslant e_\gamma$ при всех $\alpha \geqslant \alpha(\gamma)$. Пусть для некоторого элемента $e \in E_+$ выполнено условие: каково бы ни было число $\varepsilon > 0$ найдется индекс $\alpha(\varepsilon) \in A$ такой, что $|x - x_\alpha| \leqslant \varepsilon e$ при всех $\alpha \geqslant \alpha(\varepsilon)$. Тогда будем говорить, что (x_α) *r-сходится* к x и писать $x = r\text{-}\lim x_\alpha$. Сеть (x_α) *о-фундаментальна* (*r-фундаментальна*), если сеть $(x_\alpha - x_\beta)_{(\alpha,\beta)\in A\times A}$ o-сходится (r-сходится) к нулю. Решеточно нормированное пространство называют *о-полным* (*r-полным*), если всякая o-фундаментальная (r-фундаментальная) сеть в нем o-сходится (r-сходится) к элементу этого пространства.

Возьмем семейство $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ и свяжем с ним сеть $(y_\alpha)_{\alpha\in A}$, где $A := \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\Xi)$ — множество всех конечных подмножеств Ξ и $y_\alpha := \sum_{\xi\in\alpha} x_\xi$. Если существует $x := o\text{-}\lim y_\alpha$, то говорят, что семейство (x_ξ) *о-суммируемо* и его *суммой* является элемент x. При этом принято писать $x = o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} x_\xi$.

Множество $M \subset X$ называют *ограниченным по норме*, если существует $e \in E_+$, для которого $|x| \leqslant e$ при всех $x \in M$. Пространство X будем называть *d-полным* (= дизъюнктно полным), если в нем o-суммируемо всякое ограниченное по норме множество, состоящее из попарно дизъюнктных элементов.

1.1.5. Подпространство $X_0 \subset X$ называют *о-идеалом*, если для $x \in X$ и $x_0 \in X_0$ из $|x| \leqslant |x_0|$ следует $x \in X_0$. В этом пункте предполагаем, что X разложимо.

(1) *Подпространство $X_0 \subset X$ будет о-идеалом в том и только в том случае, если $X_0 = h(L)$ для некоторого о-идеала $L \subset E$.*

$\lhd$ Достаточность очевидна. Чтобы доказать необходимость, возьмем произвольный o-идеал $X_0 \subset X$. Пусть L — o-идеал, порожденный множеством $|X_0|$. Ясно, что $X_0 \subset h(L)$. Если $x \in h(L)$, то $|x| \leqslant |u_1| + \dots + |u_n|$ для подходящих $u_1, \dots, u_n \in X_0$. В силу разложимости X имеем представление $x = x_1 + \dots + x_n$, где $|x_k| \leqslant |u_k|$ $(k := 1, \dots, n)$. По определению o-идеала $x_k \in X_0$, значит, $x \in X_0$. Тем самым $X_0 = h(L)$. $\rhd$

(2) *Множество $|h(L)|$ минорантно в $|X|^{\perp\perp} \cap L$ для каждого о-идеала $L \subset E$. В частности, имеет место утверждение* 1.1.2 (1).

$\lhd$ В самом деле, если $0 < e \in |X|^{\perp\perp} \cap L$, то существует элемент $0 < e_0 \leqslant e$ такой, что $e_0 \leqslant |x_1| + \dots + |x_n|$ для некоторых $x_1, \dots, x_n \in X$. Ввиду разложимости X имеет место представление $e_0 = |u_1| + \dots + |u_n|$, где $u_1, \dots, u_n \in X$. Хотя бы для одного номера k будет $|u_k| \neq 0$. Так как $e \in L$ и $|u_k| \leqslant e$, то $u_k \in h(L)$. $\rhd$

(3) *Порядковый идеал $K \subset X$ будет компонентой в том и только в том случае, если он о-замкнут.*

$\lhd$ Необходимость очевидна. Допустим, что K — замкнутый о-идеал. Согласно (1) $K = h(L)$, где L — о-идеал в E. Покажем, что $K = h(L^{\perp\perp})$. Если $x \in h(L^{\perp\perp})$, то $|x| = \sup \mathscr{E}$, где $\mathscr{E} := \{e \in L : 0 \leqslant e \leqslant |x|\}$. Из-за разложимости X можно подобрать x_e так, что $|x - x_e| = |x| - e$, $|x_e| = e$. Множество $\mathscr{E}$ направлено вверх, а сеть $(x_e)_{e \in \mathscr{E}}$ о-сходится к x. Следовательно, $x \in K$ и $K \supset h(L^{\perp\perp})$. Обратное включение очевидно. $\rhd$

1.1.6. Предполагая, что (X, E) — разложимое РНП, установим два вспомогательных факта.

(1) *Допустим, что элемент x принадлежит X и возрастающая последовательность (a_n) лежит в E_+, причем $(a_n) \leqslant |x|$ $(n \in \mathbb{N})$. Тогда существует последовательность $(x_n) \subset X$ такая, что для всех $n \in \mathbb{N}$ и $m > n$*

$$|x_n| = a_n, \quad |x - x_n| = |x| - a_n, \quad |x_m - x_n| = a_m - a_n.$$

$\lhd$ Обозначим $b_n := |x| - a_n$ $(n \in \mathbb{N})$, $b_0 := |x|$. Ввиду разложимости X можно выбрать последовательности $(u_n) \subset X$ и $(v_n) \subset X$ так, что $x = u_1 + v_1$, $|u_1| = a_1$, $|v_1| = b_1$, $u_{n+1} + v_{n+1} = v_n$, $|v_{n+1}| = b_{n+1}$, $|u_{n+1}| = b_n - b_{n+1}$. Положим $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$. Тогда $x = x_n + v_n$ и выполнено неравенство

$$|x_n| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |u_k| = \sum_{k=1}^{n} (b_{k-1} - b_k) = b_0 - b_n = a_n.$$

В то же время $|x| \leqslant |x_n| + |v_n| \leqslant a_n + b_n = |x|$, следовательно, $|x_n| = a_n$. Тем самым для $m > n$ будет

$$|x_m - x_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} u_k \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} |u_k| = a_m - a_n \leqslant |x_m - x_n|. \ \rhd$$

(2) *Если пространство (X, E) d-полно и r-полно, то $E_0 := |X|^{\perp\perp}$ — K-пространство и $|X| = E_{0+}$.*

$\lhd$ Пусть $\widehat{E}$ — дедекиндово пополнение решетки E. Для $y \in X$ обозначим через $E(y)$ о-идеал в E, порожденный элементом $|y|$. Положим $X(y) := \{x \in X : |x| \in E(y)\}$. Легко понять, что $(X(y), E(y))$ — разложимое РНП.

Для произвольного ограниченного в $E(y)$ семейства (e_ξ) попарно дизъюнктных элементов найдется семейство $(x_\xi) \subset X$ такое, что $|x_\xi| = e_\xi$. Поэтому для $x = o\text{-}\sum x_\xi$ имеем

$$|x| = o\text{-}\sum |x_\xi| = \sup e_\xi \in E(y).$$

Таким образом, решетка $E(y)$ дизъюнктно полна. Известно, что d-полная архимедова векторная решетка является решеткой с проекторами (см. [15]). Отсюда получаем, что для любого $e \in \widehat{E}(y)_+$ найдется возрастающая последовательность $e_n \in E(y)_+$, которая r-сходится к e. Выберем соответствующую последовательность $(x_n) \subset X$ такую, что $|x_n| = e_n$, $|x_m - x_n| \leqslant e_m - e_n$ $(m > n)$ (см. (1)). Как видно, последовательность (x_n) r-фундаментальна, и ввиду r-полноты X найдется $x = r\text{-}\lim x_n \in X$. При этом $|x| = r\text{-}\lim e_n = e$. Следовательно, $E(y) = \widehat{E}(y)$. Пусть теперь e — произвольный положительный элемент из дедекиндова пополнения решетки $|X|^{\perp\perp}$. Тогда для любого максимального дизъюнктного семейства элементов $(e_\xi) \subset |X|$ можно выбрать такое разбиение (π_n^ξ) единичного проектора в $\widehat{E}$, что $\pi_n^\xi e \leqslant ne_\xi$, т. е. $\pi_n^\xi e \in |X|$. Поэтому найдутся семейство $(x_n^\xi) \subset X$ и элемент $x \in X$ такие, что $|x_n^\xi| = \pi_n^\xi e \leqslant e$ и $|x| = e$. Следовательно, $E_0 = \{p(X)\}^{dd}$ — K-пространство и $|X| = E_{0+}$. $\triangleright$

1.1.7. Разложимое o-полное решеточно-нормированное пространство называют ***пространством Банаха — Канторовича***. Пусть (X, E) — пространство Банаха — Канторовича, причем $E = |X|^{\perp\perp}$. Согласно 1.1.2 (2) булевы алгебры $\mathfrak{P}(E)$ и $\mathfrak{P}(X)$ отождествляются и $\pi|x| = |\pi x|$ $(\pi \in \mathfrak{P}(E),\ x \in X)$.

Для любых ограниченного семейства $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в X и разбиения единицы $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в $\mathfrak{P}(X)$ существует $x := o\text{-}\sum\limits_{\xi\in\Xi} \pi_\xi x_\xi$. При этом x — единственный элемент в X, удовлетворяющий соотношениям $\pi_\xi x = \pi_\xi x_\xi$ $(\xi \in \Xi)$.

$\triangleleft$ Если $e := \sup |x_\xi|$, то для $\alpha, \beta \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\Xi)$ будет

$$|y_\alpha - y_\beta| = \Big|\sum_{\xi\in\alpha\triangle\beta} \pi_\xi x_\xi\Big| \leqslant \Big(\sum_{\xi\in\alpha\triangle\beta} \pi_\xi\Big) e \leqslant e,$$

где $y_\gamma := \sum\limits_{\xi\in\gamma} \pi_\xi x_\xi$ и $\alpha\triangle\beta$ — симметрическая разность множеств α и β. Отсюда ясно, что сеть (y_α) o-фундаментальна, значит, существует $x := o\text{-}\lim y_\alpha$. $\triangleright$

Из этого утверждения видна, в частности, d-полнота ПБК. Кроме того, непосредственно из определений вытекает, что оно будет и r-полным. Итак, ПБК (X, E) d-полно и r-полно, поэтому в соответствии с 1.1.5 (2) $E = |X|^{\perp\perp}$ и $E_+ = |X|$.

1.1.8. Если $E = mE$, то ПБК (X, E) называют ***расширенным***. Это равносильно тому, что X — ПБК и всякое дизъюнктное семейство в нем o-суммируемо. ПБК (Y, F) называют ***максимальным расширением*** РНП (X, Y) при соблюдении следующих условий: 1) $F = mE$ (и, в частности, Y расширено); 2) существует линейная изометрия $i : X \to Y$; 3) если Z — разложимое o-полное подпространство Y и $i(X) \subset Z$, то $Z = Y$. Ниже будет показано, что максимальным расширением обладает всякое решеточно нормированное пространство.

§ 1.2. Примеры решеточно нормированных пространств

Рассмотрим важнейшие примеры функциональных пространств, допускающих естественную нормировку с помощью векторной решетки.

1.2.1. Начнем с простейших крайних случаев — векторных решеток и нормированных пространств. Если $X = E$, то в качестве векторной нормы можно взять модуль элемента: $|x| := |x| = x \vee (-x)$ $(x \in E)$. Разложимость такой нормы легко следует из леммы о двойном разбиении в векторной решетке.

Если же $E = \mathbb{R}$, то X — нормированное пространство. Будем использовать общепринятое обозначение для нормы $\|\cdot\|$, а в терминологии будем опускать указания на порядковую структуру нормирующей решетки.

1.2.2. Пусть Q — топологическое пространство, а Y — нормированное пространство. Пусть $X := C_b(Q, Y)$ — пространство непрерывных ограниченных вектор-функций из Q в Y. Положим $E := C_b(Q, \mathbb{R})$. Для $f \in X$ векторную норму $|f|$ введем соотношением $|f| : t \mapsto \|f(t)\|$ $(t \in Q)$. Тогда $|\cdot|$ — разложимая норма. В самом деле, допустим, что $|f| = h_1 + h_2$ для некоторых $h_1, h_2 \in E$. Определим вектор-функцию $f_1 : Q \to Y$ так, чтобы $f_1(t) = h_1(t) f(t)/\|f(t)\|$ при $f(t) \neq 0$ и $f_1(t) = 0$, если $f(t) = 0$. Тогда $f_1 \in X$ и $f_2 := f - f_1 \in X$, причем $|f_k| = h_k$ $(k := 1, 2)$. Пространство X r-полно в том и только в том случае, если Y банахово.

1.2.3. Пусть (Ω, Σ, μ) — пространство с σ-конечной мерой, Y — нормированное пространство, E — фундамент в $L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$. Пусть $L_0(\mu, Y)$ — пространство классов эквивалентности μ-измеримых вектор-функций, действующих из Ω в Y. Как обычно, вектор-функции эквивалентны, если они принимают равные значения почти во всех точках множества Ω. Если $z \in L_0(\mu, Y)$ — класс эквивалентности измеримой вектор-функции $z_0 : \Omega \to Y$, то символом $p(z) := |z|$ обозначим класс эквивалентности скалярной измеримой функции $t \mapsto \|z_0(t)\|$ $(t \in \Omega)$. Положим по определению

$$E(Y) := \{z \in L_0(\mu, Y) : |z| \in E\}.$$

Тогда $(E(Y), E)$ — решеточно нормированное пространство с разложимой нормой. Если Y банахово, то $E(Y)$ — пространство Банаха — Канторовича, а $L_0(\mu, Y)$ — его максимальное расширение.

1.2.4. Возьмем те же E и Y, а также нормирующее пространство $Z \subset Y'$, т. е. такое подпространство, что $\|y\| = \sup\{\langle y, y'\rangle : y' \in Z,\ \|y'\| \leqslant 1\}$ $(y \in Y)$. Здесь Y' — сопряженное пространство, а $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — каноническая билинейная форма двойственности $Y \leftrightarrow Y'$. Вектор-функцию $z : \Omega \to Y$ назовем *Z-измеримой*, если для каждого $y' \in Z$ измерима функция $t \mapsto \langle z(t), y'\rangle$ $(t \in \Omega)$. Класс эквивалентности последней функции обозначим символом $\langle z, y'\rangle$. Пусть $\mathscr{M}$ — множество Z-измеримых вектор-функций z, для которых множество $\{\langle z, y'\rangle : y' \in Z,\ \|y'\| \leqslant 1\}$ ограничено в $L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$. Буквой $\mathscr{N}$ обозначим множество таких $z \in \mathscr{M}$, что для каждого $y' \in Z$ измеримая функция $t \Rightarrow \langle z(t), y'\rangle$ равна нулю почти всюду, т. е. $\langle z', y\rangle = 0$. Для $z \in \mathscr{M}/\mathscr{N}$ положим

$$|z| := \sup\{\langle u, y'\rangle : y' \in Z,\ \|y'\| \leqslant 1\},$$

где u — произвольный представитель класса z, а супремум берется в K-пространстве $L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$. Определим теперь пространство

$$E_s(Y, Z) := \{z \in \mathscr{M}/\mathscr{N} : |z| \in E\}$$

с разложимой E-значной нормой $|\cdot|$. Важный частный случай возникает, если Y — сопряженное пространство, а Z — предсопряженное к нему: $Y = X'$, $Z = X \subset X''$. Принято обозначение $E_s(X') := E_s(X', X)$. Нетрудно установить, что $E_s(X')$ — ПБК.

1.2.5. Предположим, что E — фундамент расширенного K-пространства $C_\infty(Q)$, где Q — экстремальный компакт. Пусть $C_\infty(Q, Y)$ — множество классов эквивалентности непрерывных вектор-функций u, действующих из котощих подмножеств $\mathrm{dom}(u) \subset Q$ в нормированное пространство Y. *Котощим* называется множество, имеющее тощее дополнение. Вектор-функции u и v эквивалентны, если $u(t) = v(t)$ при $t \in \mathrm{dom}(u) \cap \mathrm{dom}(v)$. Для $z \in C_\infty(Q, Y)$ существует единственная функция $x_z \in C_\infty(Q)$ такая, что $\|u(t)\| = x_z(t)$ $(t \in \mathrm{dom}(u))$, каков бы ни был представитель u класса z. Положим $|z| := x_z$ и

$$E(Y) := \{z \in C_\infty(Q, Y) : |z| \in E\}.$$

Нетрудно видеть, что тем самым построено разложимое РНП. Если Y банахово, то $E(Y)$ — ПБК, а $C_\infty(Q, Y)$ — его максимальное расширение.

1.2.6. Возьмем то же Z, что и в 1.2.4. Обозначим символом $\mathscr{M}$ множество $\sigma(Y, Z)$-непрерывных вектор-функций $u : \mathrm{dom}(u) \to Y$ таких, что $\mathrm{dom}(u)$ — котощее множество в Q и множество $\{\langle u, y'\rangle : y' \in Z,\ \|y'\| \leqslant 1\}$ ограничено в K-пространстве $C_\infty(Q)$. Здесь $\langle u, y'\rangle$ — единственное непрерывное продолжение функции $t \mapsto \langle u(t), y'\rangle$ $(t \in Q)$ на все Q. Рассмотрим фактор-множество $\mathscr{M}/\sim$, где $u \sim v$ означает, что $u(t) = v(t)$ $(t \in \mathrm{dom}(u) \cap \mathrm{dom}(v))$. Для $z \in \mathscr{M}/\sim$ положим

$$|z| := \sup\{\langle u, y'\rangle : y' \in Z,\ \|y'\| \leqslant 1\}, \quad E_s(Y, Z) := \{z \in \mathscr{M}/\sim : |z| \in E\}.$$

В множествах $C_\infty(Q, Y)$ и $M/\sim$ естественно определяется структура модуля над кольцом $C_\infty(Q)$. При этом вновь получается разложимое РНП $E_s(Y, Z)$.

Так же, как и в 1.2.4, выделим частный случай $E_s(X') := E_s(X', X)$, возникающий при $Y := X'$ и $Z := X \subset X''$. Можно показать, что $E_s(X')$ — ПБК.

1.2.7. Возьмем те же E, Y и Z, что и в 1.2.4. Пусть X — еще одно нормированное пространство. Оператор-функцию $K : \Omega \to \mathscr{L}(X, Y)$ называют (Z-)*слабо измеримой*, если для любых $x \in X$ и $z \in Z$ измерима функция $\langle z, Kx\rangle : t \mapsto \langle z, K(t)x\rangle$ $(t \in \Omega)$. Обозначим через $\mathfrak{M}_\mu(X, Y)$ множество всех Z-слабо измеримых оператор-функций $K : \Omega \to \mathscr{L}(X, Y)$ таких, что $\|K(t)\| \leqslant a(t)$ почти всюду на Ω для некоторой измеримой функции a. Введем отношение эквивалентности $\sim$ в $\mathfrak{M}_\mu(X, Y)$, полагая $K \sim L$ в том и только в том случае, если для любых $x \in X$ и $z \in Z$ измеримые функции $\langle z, Kx\rangle$ и $\langle z, Lx\rangle$ совпадают почти всюду. Для $K \in \mathfrak{M}_\mu(X, Y)$, а также для соответствующего класса эквивалентности $\widetilde{K}$ положим

$$|K| = |\widetilde{K}| := \sup\{\langle z, Kx\rangle : \|x\| \leqslant 1,\ \|z\| \leqslant 1\},$$

где супремум берется в K-пространстве $L^0(\mu)$. Положим теперь

$$E_s(\mathscr{L}(X, Y)) := \{K \in \mathfrak{M}_\mu(X, Y)/\sim : |K| \in E\}.$$

Это обозначение согласуется с 1.2.4, ибо легко видеть, что $E_s(\mathscr{L}(X, Y)) = E_s(Y, Z)$, если $Y := \mathscr{L}(X, Y)$ и $Z := X \otimes Z$. Заметим также, что $E_s(\mathscr{L}(X, \mathbb{R})) = E_s(X')$.

1.2.8. Оператор-функцию $K : \Omega \to \mathscr{L}(X, Y)$ нызывают *просто измеримой*, если для каждого $x \in X$ измерима вектор-функция $Kx : t \mapsto K(t)x$ $(t \in \Omega)$. Как видно, просто измеримая оператор-функция слабо измерима. Пусть $\mathfrak{M}^s_\mu(X, Y)$ — часть $\mathfrak{M}_\mu(X, Y)$, состоящая из просто измеримых оператор-функций со значениями в $\mathscr{L}(X, Y)$ (как обычно, считаем, что $Y \subset Z'$ и $\mathscr{L}(X, Y) \subset \mathscr{L}(X, Z')$). Положим

$$E_{ss}(\mathscr{L}(X, Y)) := \{K \in \mathfrak{M}^s_\mu(X, Y)/\approx : |K| \in E\},$$

где $|K|$ то же, что и в 1.2.7, а эквивалентность $\approx$ определяется так: $L \approx K$ в том и только в том случае, если для каждого $x \in X$ измеримые вектор-функции Kx и Lx совпадают почти всюду. Если $K \in \mathfrak{M}^s_\mu(X, Y)$, то также

$$|K| = \sup\{\|Kx\| : \|x\| \leqslant 1\},$$

где $\|Kx\|$ — измеримая функция $t \mapsto \|K(t)x\|$ $(t \in \Omega)$. Заметим, что $E(Y) = E_{ss}(\mathscr{L}(\mathbb{R}, Y))$ и $E_s(X') = E_{ss}(\mathscr{L}(X, \mathbb{R}))$.

1.2.9. Пусть X, Y и Z те же, что и в 1.2.8, Q — экстремальный компакт, а E — фундамент в $C_\infty(Q)$. Обозначим через $\mathfrak{M}_Q(X, Y)$ множество всех оператор-функций $K : \mathrm{dom}(K) \to \mathscr{L}(X, Y)$, удовлетворяющих условиям: *a*) $Q_0 := \mathrm{dom}(K)$ — котощее подмножество Q, и функция $s \mapsto \langle K(s)x, z\rangle$ $(s \in Q_0)$ непрерывна для любых $x \in X$ и $z \in Z$; *b*) существует $\varphi \in C_\infty(Q)$ такой, что $\|K(s)\| \leqslant \varphi(s)$ $(s \in Q_0)$. Из *a*) вытекает, что для $x \in X$ и $z \in Z$ существует единственный элемент $u \in C_\infty(Q)$, для которого $u(s) = \langle K(s)x, z\rangle$ $(s \in Q_0)$. Положим $\langle Kx, z\rangle := u$. Из *b*) видно, что в K-пространстве $C_\infty(Q)$ существует

$$|K| := \sup\{\langle Kx, z\rangle : \|x\| \leqslant 1,\ \|z\| \leqslant 1\} \leqslant \varphi.$$

В $\mathfrak{M}_Q(X, Y)$ введем эквивалентность, полагая $K \sim L$, если $K(s) = L(s)$ для всех $s \in \mathrm{dom}(K) \cap \mathrm{dom}(L)$. Если $\widetilde{K}$ — класс эквивалентности оператор-функции, то полагаем $|\widetilde{K}| := |K|$. Это определение корректно, ибо $|K| = |L|$ для эквивалентных K и L. Введем теперь пространство

$$E_s(\mathscr{L}(X, Y), Z) := \{K \in \mathfrak{M}_Q(X, Y)/\sim : |K| \in E\}.$$

Нетрудно проверить, что $E_s(\mathscr{L}(X, Y), Z)$ — разложимое РНП. Оно совпадает с $E_s(Y, Z)$, если $Y := \mathscr{L}(X, Y)$ и $Z := X \otimes Z$. Важным частным случаем является пространство

$$E_s(\mathscr{L}(X, Y')) := E_s(\mathscr{L}(X, Y'), Y) := E_s((X \widehat{\otimes} Y)'),$$

где $X \widehat{\otimes} Y$ — проективное тензорное произведение пространств X и Y.

§ 1.3. Пополнение и расширение

Здесь мы коротко рассмотрим вопросы о пополнении и расширении решеточно нормированных пространств.

1.3.1. Пусть $\mathbb{B}$ — полная булева алгебра и A — произвольное непустое множество. Положим

$$\mathbb{B}(A) := \Big\{\nu : A \to \mathbb{B} : (\forall \alpha, \beta \in A)(\alpha \neq \beta \to \nu(\alpha) \wedge \nu(\beta) = 0) \wedge \bigvee_{\alpha \in A} \nu(\alpha) = 1\Big\}.$$

Таким образом, $\mathbb{B}(A)$ — множество всех разбиений единицы в $\mathbb{B}$, занумерованных элементами множества A. Если A — упорядоченное множество, то можно упорядочить и множество $\mathbb{B}(A)$:

$$\nu \leqslant \mu \leftrightarrow (\forall \alpha, \beta \in A)\,(\nu(\alpha) \wedge \mu(\beta) \neq 0 \to \alpha \leqslant \beta) \quad (\nu, \mu \in \mathbb{B}(A)).$$

Нетрудно показать, что введенное отношение в самом деле есть частичный порядок в $\mathbb{B}(A)$. Если A направлено вверх (вниз), то и $\mathbb{B}(A)$ направлено вверх (вниз). Пусть Q — стоуновский компакт алгебры $\mathbb{B}$. Отождествив элемент $\nu(\alpha)$ с открыто-замкнутым множеством в Q, построим отображение

$$\bar{\nu} : Q_\nu \to A, \ Q_\nu := \cup\{\nu(\alpha) : \alpha \in A\},$$

полагая $\bar{\nu}(q) = \alpha$ при $q \in \nu(\alpha)$. Итак, $\bar{\nu}$ — ступенчатая функция, принимающая значение α на $\nu(\alpha)$. При этом $\nu \leqslant \mu \to (\forall q \in Q_\nu \cap Q_\mu)\,(\bar{\nu}(q) \leqslant \bar{\mu}(q))$. Множеством $\mathbb{B}(A)$ воспользуемся в доказательстве важного критерия полноты, к изложению которого переходим.

1.3.2. Теорема. *Разложимое решеточно нормированное пространство порядково полно в том и только в том случае, если оно дизъюнктно полно и полно относительно сходимости с регулятором.*

$\lhd$ Необходимость указанных условий отмечена в 1.1.7. Докажем их достаточность. Предположим, что разложимое решеточно нормированное пространство X d-полно и r-полно. Согласно 1.1.6 (2), не умаляя общности, можем считать, что $E := |X|^{\perp\perp}$ — K-пространство. Возьмем o-фундаментальную сеть $(x_\alpha)_{\alpha \in A} \subset X$. Пусть $\mathbb{B} := \mathfrak{P}(X)$ — база X. Для $\nu \in \mathbb{B}(A)$ положим $x_\nu := \sum\limits_{\alpha \in A} \nu(\alpha)x)_\alpha$. Элемент x_ν определен корректно ввиду d-полноты X. Тем самым возникла новая сеть $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{B}(A)}$. Покажем, что она r-фундаментальна. Подберем убывающую сеть $(e_\alpha)_{\alpha \in A} \subset E$ так, чтобы $\inf e_\alpha = 0$ и $|x_\alpha - x_\beta| \leqslant e_\gamma \leqslant e$ при $\alpha, \beta \geqslant \gamma$ $(\alpha, \beta, \gamma \in A)$, где $e \in E$. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Существуют разбиение единицы $(\rho_\xi)_{\xi \in \Xi}$ в алгебре $\mathbb{B}$ и отображение $\varphi : \Xi \to A$ такие, что $\rho_\xi e_{\varphi(\xi)} \leqslant \varepsilon e$ $(\xi \in \Xi)$. Это легко выводится из свойств o-сходимости в K-пространстве. Положим $\pi_\alpha := \sup\{\rho_\xi : \varphi(\xi) = \alpha,\ \xi \in \Xi\}$ и $\pi_\alpha = 0$ при $\alpha \notin \operatorname{im}\varphi$. Тогда $(\pi_\alpha)_{\alpha \in A}$ — разбиение единицы в $\mathbb{B}$ и $\pi_\alpha e_\alpha \leqslant \varepsilon e$ $(\alpha \in A)$. Обозначим это разбиение единицы через $\nu(\varepsilon)$. Покажем, что $|x_{\nu'} - x_\nu| \leqslant \varepsilon e$, как только $\nu, \nu' \geqslant \nu(\varepsilon)$. Пусть $\nu = (\rho_\alpha)_{\alpha \in A}$, $\nu' = (\tau_\alpha)_{\alpha \in A}$. Если $\pi_\alpha \rho_\beta \tau_\gamma \neq 0$, то $\beta, \gamma \geqslant \alpha$, следовательно,

$$\pi_\alpha \rho_\beta \tau_\gamma |x_\nu - x_{\nu'}| = \pi_\alpha |\rho_\beta \tau_\gamma x_\gamma - \rho_\beta \tau_\gamma x_\beta| = \pi_\alpha \rho_\beta \tau_\gamma |x_\gamma - x_\beta| \leqslant \pi_\alpha e_\alpha \leqslant \varepsilon e.$$

Суммирование по α, β и γ дает $|x_\nu - x_{\nu'}| \leqslant \varepsilon e$ при $\nu, \nu' \geqslant \nu(\varepsilon)$. Итак, сеть (x_ν) r-фундаментальна, и ввиду r-полноты существует $x := r\text{-}\lim x_\nu$. Ясно, что $|x - x_\nu| \leqslant \varepsilon e$ при $\nu \geqslant \nu(\varepsilon)$.

Для фиксированного индекса $\gamma \in A$ построим специальное разбиение единицы $\nu := (\rho_\alpha)_{\alpha \in A}$, полагая $\rho_\alpha = \pi_\alpha$ при $\alpha \neq \gamma$, $\alpha \neq \beta$, а также $\rho_\gamma = 0$ и $\rho_\beta := \pi_\gamma \vee \pi_\beta$, где $\beta \in A$ и $\beta \geqslant \gamma$. Тогда $\nu \geqslant \nu(\varepsilon)$ и

$$\pi_\gamma |x - x_\beta| = \pi_\gamma \rho_\beta |x - x_\nu| = \pi_\gamma |x - x_\nu| \leqslant \varepsilon e.$$

Стало быть, $\pi_\gamma |x - x_\beta| \leqslant \varepsilon e$ при всех $\beta, \gamma \in A$, $\beta \geqslant \gamma$. Положим

$$c_\gamma := \sup\{|x - x_\beta| : \beta \geqslant \gamma\}, \quad c := \inf\{c_\gamma : \gamma \in A\}.$$

Тогда $\pi_\gamma c \leqslant \pi_\gamma c_\gamma \leqslant \varepsilon e$. Так как $\gamma \in A$ и $\varepsilon > 0$ произвольны, то $c = 0$, значит, $o\text{-}\lim |x - x_\alpha| = 0$. $\rhd$

1.3.3. Пусть, как и раньше, mE — максимальное расширение векторной решетки E, причем фиксирована единица $\mathbf{1}$, а с ней и мультипликативная структура в mE. Возьмем решеточно нормированное пространство X с $|X|^{\perp\perp} = E$. Операторно-двойственное пространство X^* определим так. Оператор $x^* : X \to mE$ входит в X^* в том и только в том случае, если существует элемент $0 \leqslant c \in mE$ такой, что

$$\langle x, x^* \rangle := x^*(x) \leqslant c \cdot |x| \quad (x \in X).$$

Существует наименьший элемент $0 \leqslant c \in mE$, удовлетворяющий указанному соотношению. Этот элемент обозначается через $|x^*|$. Нетрудно видеть, что отображение $x^* \mapsto |x^*|$ является mE-значной нормой на X^* и выполняется неравенство

$$\langle x, x^* \rangle \leqslant |x|\,|x^*| \quad (x \in X).$$

(1) *Если $x^* \in X^*$, то $|\pi x^*| = \pi|x^*|$ для любого проектора $\pi \in \mathfrak{P}(mE)$.*

$\lhd$ Из неравенства $\langle x, x^* \rangle \leqslant c|x|$, очевидно, имеем $\langle x, \pi x^* \rangle \leqslant \pi c|x|$, поэтому $|\pi x^*| \leqslant \pi|x^*|$. С другой стороны, $\langle x, x^* \rangle \leqslant (|\pi x^*| + |\pi^\perp x^*|)|x|$ для всех $x \in X$, значит,

$$|x^*| \leqslant |\pi x^*| + |\pi^\perp x^*| \leqslant |\pi x^*| + \pi^\perp |x^*|.$$

Отсюда $\pi|x^*| \leqslant |\pi x^*|$. $\rhd$

(2) *Пространство X^* d-полно и r-полно.*

$\lhd$ Возьмем разбиение единицы (π_ξ) в $\mathfrak{P}(mE)$, семейство $(x^*_\xi) \subset X^*$ и элемент $x \in X$. В расширенном K-пространстве существуют $\langle x, x^* \rangle := \sum \pi_\xi \langle x, x^*_\xi \rangle$ и $e := \sum \pi_\xi |x^*_\xi|$, причем $\langle x, x^* \rangle \leqslant e|x|$. Отсюда видно, что $x^* \in X^*$. Так как $\pi_\xi x^* = \pi_\xi x^*_\xi$, то $x^* = \sum \pi_\xi x^*_\xi$ в силу (1). Тем самым обоснована d-полнота. Полнота относительно сходимости с регулятором в более общей ситуации устанавливается ниже (см. 2.4.2).

(3) *Пространство X^* представляет собой расширенное* ПБК.

$\lhd$ Из (1) в силу r-полноты следует разложимость X^*, и остается сослаться на теорему 1.3.2. $\rhd$

1.3.4. Согласно 1.3.3 (3) второе операторно сопряженное пространство X^{**} является расширенным ПБК. Каноническое вложение $\varkappa : X \to X^{**}$ определяется, как обычно, формулой

$$\langle x^*, \varkappa x \rangle := \varkappa x(x^*) = \langle x, x^* \rangle \quad (x^* \in X^*).$$

Каноническое вложение $\varkappa$ есть линейная изометрия.

$\lhd$ Нужно лишь доказать, что $\varkappa$ сохраняет норму, т. е. что $|\varkappa x| = |x|$ ($x \in X$). Сначала заметим, что $|\varkappa x| \leqslant |x|$, ибо $\langle x^*, \varkappa x \rangle \leqslant |x| \cdot |x^*|$ ($x^* \in X^*$). Далее, так как оператор $|\cdot|$ сублинеен, то по теореме Хана — Банаха — Канторовича существует оператор $x^* : X \to mE$ такой, что $|x| = \langle x, x^* \rangle$ и $\langle y, x^* \rangle \leqslant |y|$ ($y \in Y$). Отсюда видно, что $|x^*| \leqslant \mathbf{1}$, поэтому $|x| = \langle x^*, \varkappa x \rangle \leqslant |\varkappa x| \cdot |x^*| \leqslant |\varkappa x|$. $\rhd$

1.3.5. *Максимальным расширением* (соответственно *порядковым пополнением* или, короче, *o-пополнением*) решеточно нормированного пространства (X, E) называют расширенное ПБК (Y, mE) (соответственно ПБК (Y, oE)) вместе с линейной изометрией $\imath : X \to Y$, если любое расширенное o-полное подпространство (Y, mE) (разложимое o-полное подпространство (Y, oE)), содержащее $\imath X$, совпадает с Y. Здесь oE — дедекиндово пополнение векторной решетки E, а mE, как и раньше, максимальное расширение oE, причем считаем $E \subset oE \subset mE$. Для множества U в решеточно нормированном пространстве Y положим

$$rU := \{y = r\text{-}\lim_{n \to \infty} y_n : \ (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset U\},$$

$$oU := \{y = o\text{-}\lim y_\alpha \ (y_\alpha)_{\alpha \in A} \subset U\},$$

$$dU := \Big\{ y = o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} \pi_\xi y_\xi : (y_\xi)_{\xi\in\Xi} \subset U \Big\},$$

где A — произвольное направленное множество, (π_ξ) — произвольное разбиение единицы в $\mathfrak{P}(Y)$, а пределы и сумма существуют в Y. Пусть $r_0(U)$ — часть $r(U)$, содержащая пределы последовательностей из U, сходящихся с регулятором $\mathbf{1}$. Обозначим $mX := rd(\varkappa X)$, где $\varkappa$ — каноническое вложение $X \to X^{**}$ из 1.3.4, а операции d и r вычисляются в расширенном ПБК (X^{**}, mE).

1.3.6. *Если Y — расширенное* ПБК, *то для $U \subset Y$ имеют место следующие соотношения:*

$$dd(U) = d(U); \tag{1}$$

$$dr_0d(U) = r_0d(U); \tag{2}$$

$$rd(U) = r_0d(U); \tag{3}$$

$$rrd(U) = rd(U). \tag{4}$$

$\lhd$ В каждом из требуемых равенств включение $\supset$ очевидно, поэтому следующие ниже рассуждения связаны с противоположным включением.

(1) Возьмем семейство $(y_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в $d(U)$ и разбиение единицы $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в алгебре $\mathfrak{P}(Y)$. Элемент $y_\xi \in d(U)$ представим в виде $y_\xi = \sum_{u\in U} \pi_{u,\xi} u$, где $(\pi_{u,\xi})_{u\in U}$ — разбиение единицы в $\mathfrak{P}(Y)$ при каждом $\xi \in \Xi$. Положим

$$y := \sum_{\xi\in\Xi} \pi_\xi y_\xi, \quad \pi_{(\xi,u)} := \pi_\xi \circ \pi_{u,\xi} \quad (\xi \in \Xi,\ u \in U).$$

Если $(\xi, u) \neq (\eta, v)$, то

$$\pi_{(\xi,u)} \circ \pi_{(\eta,v)} = \pi_\xi \circ \pi_\eta \circ \pi_{u,\xi} \circ \pi_{v,\eta} = 0.$$

В то же время

$$\bigvee_{(\xi,u)\in\Xi\times U} \pi_{(\xi,u)} = \bigvee_{\xi\in\Xi} \pi_\xi \circ \Big(\bigvee_{n\in U} \pi_{u,\xi}\Big) = \mathbf{1},$$

следовательно, $(\pi_\lambda)_{\lambda\in\Xi\times U}$ — разбиение единицы в $\mathfrak{P}(Y)$. Заметим, что

$$\pi_{(\xi,u)} y = \pi_{u,\xi}(\pi_\xi y) = \pi_{u,\xi}(\pi_\xi y_\xi) = \pi_\xi(\pi_{u,\xi} u) = \pi_{(\xi,u)} u.$$

Тем самым $y = \sum_{(\xi,u)} \pi_{(\xi,u)} u$, значит, $y \in d(U)$.

(2) Пусть теперь семейство (y_ξ) содержится в $r_0d(U)$. Зафиксируем число $\varepsilon > 0$ и для каждого $\xi \in \Xi$ подберем $u_\xi \in d(U)$ так, чтобы $|y_\xi - u_\xi| \leqslant \varepsilon\mathbf{1}$. Если $u = \sum \pi_\xi u_\xi$, а y то же, что и выше, то $|y - u| \leqslant \varepsilon\mathbf{1}$. Но в силу (1) $u \in d(U)$, поэтому $y \in r_0d(U)$.

(3) Допустим, что последовательность $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ из $d(U)$ сходится к элементу $y \in Y$ с регулятором $e \in mE$. Подберем разбиение единицы $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в $\mathfrak{P}(mE)$ так, чтобы $\pi_\xi e \leqslant \lambda_\xi \mathbf{1}$ при подходящих $\lambda_\xi > 0$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Для каждого $\xi \in \Xi$ существует номер $n(\xi) \in \mathbb{N}$ такой, что $\pi_\xi |y - y_{n(\xi)}| \leqslant \varepsilon\mathbf{1}$. Положим $u = \sum_{\xi\in\Xi} \pi_\xi y_{n(\xi)}$ и заметим, что $u \in d(U)$ согласно (1). Учитывая неравенство $|y - u| \leqslant \varepsilon\mathbf{1}$, приходим к заключению: $y \in r_0d(U)$.

(4) Сначала нужно заметить, что операция r_0 является топологическим замыканием, и поэтому $r_0r_0(A) = r_0(A)$ для каждого $A \subset Y$. Впрочем, последнее легко доказать и непосредственно. Далее, привлекая (2) и (3), можем написать

$$rrd(U) = rr_0d(U) = rdr_0d(U) = r_0dr_0d(U) = r_0r_0d(U) = r_0d(U) = rd(U). \ \rhd$$

1.3.7. Теорема. *Всякое решеточно нормированное пространство имеет единственное с точностью до линейной изометрии максимальное расширение. Пространство (mX, mE) служит максимальным расширением для (X, E).*

$\lhd$ Из 1.3.6 (2, 3) вытекает d-полнота пространства mX, а из 1.3.6 видна его r-полнота. По теореме 1.3.2 mX — ПБК. Кроме того, mX расширено, так как операция d в определении mX вычисляется в расширенном пространстве (X^{**}, mE) (см. 1.3.5). Вложение $\imath := \varkappa : X \to mX$ является линейной изометрией (см. 1.3.4). Если Y — расширенное ПБК и $\imath X \subset Y \subset mX$, то операции d и r не выводят из Y, поэтому

$$mX = rd(\imath X) \subset rd(Y) \subset Y \subset mX,$$

т. е. $Y = mX$. Таким образом, mX — максимальное расширение пространства X.

Допустим, что Y' еще одно максимальное расширение для X и $\imath' : X \to Y'$ — соответствующее изометрическое вложение. Оператор $h := \imath' \circ \imath^{-1} : \imath X \to Y'$ представляет собой линейную изометрию. Можно распространить h на $r(\imath X)$, а затем на $rd(\imath X)$ с сохранением линейности и изометричности. При этом $h(mE)$ — расширенное ПБК и $\imath' X \subset h(mX) \subset Y'$, следовательно, $h(mX) = Y'$. $\rhd$

1.3.8. Теорема. *Для решеточно нормированного пространства существует единственное с точностью до линейной изометрии о-пополнение.*

$\lhd$ Напомним, что $E \subset oE \subset mE$. Положим

$$\widehat{X} = \{x \in mX : |x| \in oE\}.$$

Тогда $\widehat{X}$ — порядковое пополнение пространства X. $\rhd$

Будем считать всегда, что решеточно нормированное пространство X содержится в своем o-пополнении $\widehat{X}$.

1.3.9. *Для о-пополнения $\widehat{X}$ пространства X выполняется равенство $\widehat{X} = rdX$. Если X разложимо, а $E_0 := |X|^{\perp\perp}$ — векторная решетка с главными проекциями, то $\widehat{X} = oX$.*

$\lhd$ Первая часть этого утверждения вытекает из 1.3.6 и 1.3.7. Возьмем $x \in \widehat{X}$ и подберем сеть $(x_\alpha) \subset X$, которая o-сходится к x. Введем на X отношение эквивалентности и предпорядок формулами

$$z \sim y \leftrightarrow |x - z| = |y - z|, \quad z \leqslant y \leftrightarrow |x - z| \geqslant |y - z|.$$

Если E_0 — решетка с главными проекциями, то можно подобрать такой проектор $\pi \in \mathfrak{P}(X)$, что $\pi|x - y| + \pi^\perp|x - z| = |x - y| \wedge |x - z|$. Для элемента $u := \pi y + \pi^\perp z$ будет

$$|x - u| = |x - y| \wedge |x - z|,$$

поэтому $y \prec u$ и $z \prec u$. Итак, предупорядоченное множество $(X, \prec)$ направлено вверх. Отсюда видно, что фактор-множество $A := X/\sim$ с фактор-порядком является направленным вверх упорядоченным множеством. Рассмотрим теперь сеть $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$, где $x_\alpha \in \alpha$ $(\alpha \in A)$. Из построения видно, что сеть $(|x - x_\alpha|)_{\alpha \in A}$ убывает. Пусть $e := \inf |x - x_\alpha|$, где инфимум вычисляется в oE. В силу равенства $\widehat{X} = rdX$ для произвольного числа $\varepsilon > 0$ можно подыскать семейство $(x_\xi) \subset X$ и разбиение единицы $(\pi_\xi) \subset \mathfrak{P}(X)$ так, чтобы $|x - \sum \pi_\xi x_\xi| \leqslant \varepsilon|x|$. Учитывая 1.1.2 (2), можно написать

$$e = \sum \pi_\xi e \leqslant \sum \pi_\xi |x - x_\xi| = \Big|x - o\text{-}\sum \pi_\xi x_\xi\Big| \leqslant \varepsilon|x|.$$

Отсюда $e = 0$ и $x = o\text{-}\lim x_\alpha$. $\rhd$

§ 1.4. Непрерывные банаховы расслоения

Основное содержание текущего параграфа составляет следующее утверждение: пространство Банаха — Канторовича линейно изометрично пространству почти глобальных сечений некоторого непрерывного банахова расслоения.

1.4.1. Прежде всего, дадим общее определение банахова расслоения. Пусть Q — некоторое топологическое пространство. *Расслоением* над Q называют непрерывную сюръекцию $\sigma : \mathfrak{X} \to Q$ топологического пространства $\mathfrak{X}$ на Q. Непустое множество $\mathfrak{X}_q = \sigma^{-1}(q)$ именуют *слоем* в точке $q \in Q$. Отображение s из непустого множества $\mathrm{dom}(s) \subset Q$ в $\mathfrak{X}$ называют *сечением* над $\mathrm{dom}(s)$, если $s(q) \in \mathfrak{X}_q$ для каждого $q \in \mathrm{dom}(s)$. Непрерывное сечение s будем называть *локальным, почти глобальным* или *глобальным* в зависимости от того, является ли его область определения $\mathrm{dom}(s)$ открытым и собственным подмножеством, котощим подмножеством или совпадает со всем Q. Расслоение $\sigma : \mathfrak{X} \to Q$ часто отождествляют с отображением $q \mapsto \mathfrak{X}_q$ $(q \in Q)$ и пишут $\mathfrak{X}(q)$ вместо $\mathfrak{X}_q$. Кроме того, иногда говорят о расслоении $\mathfrak{X}$, опуская подразумеваемые параметры σ и Q.

Произведение двух расслоении $\sigma : \mathfrak{X} \to Q$ и $\sigma' : \mathfrak{X}' \to Q$ есть расслоение $\tau : \mathfrak{X} \times_Q \mathfrak{X}' \to Q$, определяемое формулами

$$\mathfrak{X} \times_Q \mathfrak{X}' := \{(x, x') \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}' : \sigma(x) = \sigma'(x')\},$$

$$\tau : (x, x') \mapsto \sigma(x) = \sigma'(x') \quad ((x, x') \in \mathfrak{X} \times_Q \mathfrak{X}').$$

1.4.2. Непрерывным *банаховым расслоением над* Q называют расслоение $\sigma : \mathfrak{X} \to Q$, подчиненное четырем следующим условиям:

(1) каждый слой $\mathfrak{X}(q)$ является банаховым пространством с нормой $\|\cdot\|_q$, причем топология, определяемая нормой, совпадает с индуцированной;

(2) сумма $\mathfrak{X} \times_Q \mathfrak{X} \ni (x, y) \mapsto x + y \in \mathfrak{X}$, умножение на скаляры $\mathbb{R} \times \mathfrak{X} \ni (\alpha, x) \mapsto \alpha x \in \mathfrak{X}$ и нулевое сечение $Q \ni q \mapsto 0_q \in \mathfrak{X}(q)$ являются непрерывными отображениями;

(3) множества вида

$$U(s, \varepsilon) := \{x \in \mathfrak{X} : \sigma(x) \in \mathrm{dom}(s),\ \|x - s(\sigma(x))\|_{\sigma(x)} < \varepsilon\},$$

где $\varepsilon > 0$ и s — локальное сечение, образуют базу топологии в $\mathfrak{X}$;

(4) для каждой точки $x \in \mathfrak{X}$ и любого числа $\varepsilon > 0$ существует локальное сечение s такое, что $\sigma(x) \in \mathrm{dom}(s)$ и $\|x - s(\sigma(x))\|_{\sigma(x)} < \varepsilon$.

В случае паракомпактного пространства Q данное определение несколько упрощается. А именно, вместо (3) и (4) можно потребовать:

(3′) всякая окрестность нуля $0_q \in \mathfrak{X}_q$ содержит окрестность вида $U(s, \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, а s — ограничение нулевого сечения $q \mapsto 0_q$ на некоторое открытое множество;

(4′) отображение σ открыто, а $\|\cdot\| : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$, $\|x\| := \|x\|_{\sigma(x)}$ полунепрерывно сверху.

При этом для каждого $x \in \mathfrak{X}$ существует непрерывное глобальное сечение s такое, что $s(\sigma(x)) = x$.

1.4.3. Иногда удобно задавать топологию банахова расслоения с помощью выделенного множества сечений. Возьмем сюръективное отображение $\sigma : \mathfrak{X} \to Q$ и допустим, что $\mathfrak{X}_q := \sigma^{-1}(q)$ — банахово пространство для каждого $q \in Q$. Это равносильно заданию отображения $q \mapsto \mathfrak{X}_q$ из Q в класс банаховых пространств. В множестве всех глобальных сечений $S(Q, \mathfrak{X})$ введем структуру векторного пространства, полагая $(\alpha u + \beta v)(q) = \alpha u(q) + \beta v(q)$ $(q \in Q)$ для $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $u, v \in S(Q, \mathfrak{X})$. Пусть теперь $\mathscr{C}$ — некоторое множество глобальных сечений, удовлетворяющее условиям:

(1) $\mathscr{C}$ — векторное подпространство $S(Q, \mathfrak{X})$;

(2) для каждого $s \in \mathscr{C}$ функция $q \mapsto \|s(q)\|_q$ $(q \in Q)$ непрерывна;

(3) для каждого $q \in Q$ множество $\{s(q) : s \in \mathscr{C}\}$ плотно в слое $\mathfrak{X}_q$.

С помощью множества $\mathscr{C}$ можно ввести топологию в $\mathfrak{X}$, принимая в качестве базиса топологии семейство $\{U(s, \varepsilon)\}$, где $\varepsilon > 0$, а s — ограничение некоторого сечения из $\mathscr{C}$ на призвольное открытое множество. Тогда $\sigma : \mathfrak{X} \to Q$ — непрерывное банахово расслоение. При этом сечение $u \in S(Q, \mathfrak{X})$ будет непрерывным в том и только в том случае, если функция $q \mapsto \|u - s\|_q$ $(q \in Q)$ непрерывна для любого сечения $s \in \mathscr{C}$.

1.4.4. Укажем важный пример банахова расслоения. Рассмотрим мультинормированное пространство $(X, (\|\cdot\|_q)_{q \in Q})$, где Q по-прежнему топологическое пространство. Для каждого $q \in Q$ положим $X_q := \{x \in X : \|x\|_q = 0\}$ и обозначим через $\mathfrak{X}_q$ пополнение нормированного фактор-пространства X/X_q. С каждым элементом $x \in X$ свяжем глобальное сечение $i(x) \in S(Q, \mathfrak{X})$ по формуле $i(x)(q) = \varphi_q(x)$, где $\varphi : X_q \to X/X_q \subset \mathfrak{X}_q$ — фактор-гомоморфизм. Множество $\mathscr{C} := i(X)$ удовлетворяет условиям 1.4.3 (1–3) в том и только в том случае, если для каждого $x \in X$ функция $q \mapsto \|x\|_q$ $(q \in Q)$ непрерывна. Если последнее условие выполнено, то согласно 1.4.3 $\mathfrak{X}$ превращается в непрерывное банахово расслоение. При этом говорят, что построенное банахово расслоение $\mathfrak{X}$ *ассоциировано с мультинормированным пространством* $(X, (\|\cdot\|_q)_{q \in Q})$, а отображение $i : X \to C(Q, \mathfrak{X})$ называют *каноническим вложением*.

1.4.5. Нам потребуется следующий вспомогательный факт.

Пусть $(Q_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — семейство попарно не пересекающихся открытых множеств с плотным в Q объединением. Если P_ξ — котощее подмножество Q_ξ при каждом $\xi \in \Xi$, то объединение $P := \bigcup_{\xi \in \Xi} P_\xi$ также котощее множество в Q.

$\triangleleft$ Для каждого $\xi \in \Xi$ подберем последовательность $(G_{n,\xi})_{n \in \mathbb{N}}$ открытых подмножеств Q_ξ такую, что $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_{n,\xi} \subset P_\xi$ $(\xi \in \Xi)$. Так как Q_ξ попарно не пересекаются, имеем

$$\bigcup_{\xi \in \Xi} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_{n,\xi} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{\xi \in \Xi} G_{n,\xi}.$$

Отсюда, если $G_n := \bigcup_{\xi \in \Xi} G_{n,\xi}$, то $P \supset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n$. Тем самым P — котощее множество, ибо G_n открыто и плотно в Q для каждого $n \in \mathbb{N}$. $\triangleright$

1.4.6. Предположим теперь, что Q — экстремально несвязный компакт. Возьмем непрерывное банахово расслоение $\mathfrak{X}$ над Q. Если u — почти глобальное сечение расслоения $\mathfrak{X}$, то функция $q \mapsto \|u(q)\|_q$ определена и непрерывна на котощем множестве $\mathrm{dom}(u)$. Следовательно, существует единственная функция $|u| \in C_\infty(Q)$ такая, что $|u|(q) = \|u(q)\|_q$ $(q \in \mathrm{dom}(u))$. В множестве почти глобальных сечений $\mathfrak{M}(Q, X)$ введем отношение эквивалентности, полагая $u \sim v$, если $u(q) = v(q)$ при $q \in \mathrm{dom}(u) \cap \mathrm{dom}(v)$. Для эквивалентных u и v будет $|u| = |v|$, поэтому можем определить $|\tilde{u}| := |u|$, где $\tilde{u}$ — класс эквивалентности почти глобального сечения u. Фактор-множество $\mathfrak{M}(Q, \mathfrak{X})/\sim$ обозначим символом $C_\infty(Q, \mathfrak{X})$. Множество $C_\infty(Q, \mathfrak{X})$ естественным образом превращается в решеточно нормированное пространство. Так, например, под элементом $\tilde{u} + \tilde{v}$ понимается класс эквивалентности почти глобального сечения $q \mapsto u(q) + v(q)$ $(q \in \mathrm{dom}(u) \cap \mathrm{dom}(v))$. Если E — порядковый идеал в $C_\infty(Q)$, то полагаем

$$E(\mathscr{X}) := \{u \in C_\infty(Q, \mathfrak{X}) : |u| \in E\}.$$

В каждом классе эквивалентности $\tilde{u}$ существует единственное сечение $\bar{u} \in \tilde{u}$ такое, что $\mathrm{dom}(v) \subset \mathrm{dom}(\bar{u})$ для всех $v \in \tilde{u}$. Сечение $\bar{u}$ называют *расширенным*. Пространство $C_\infty(Q, \mathfrak{X})$ можно тем самым реализовать как пространство всех расширенных почти глобальных сечений расслоения $\mathfrak{X}$.

1.4.7. Теорема. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непрерывное банахово расслоение над экстремальным компактом Q, а E — фундамент в $C_\infty(Q)$. Тогда $E(\mathfrak{X})$ — пространство Банаха — Канторовича, максимальным расширением которого служит пространство $C_\infty(Q,\mathfrak{X})$.*

$\lhd$ Достаточно установить, что $C_\infty(Q,\mathfrak{X})$ — расширенное пространство Банаха — Канторовича. Возьмем семейство $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ попарно дизъюнктных элементов из $C_\infty(Q,\mathfrak{X})$. Пусть Q_ξ — наименьшее открыто-замкнутое множество в Q, на дополнении которого u_ξ равно нулю. Тогда $Q_\xi\cap Q_\eta=\varnothing$ при $\xi\neq\eta$. Дополнив, если нужно, семейство (u_ξ) ненулевым сечением, можно считать, что $(Q_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — разбиение единицы в булевой алгебре открыто-замкнутых подмножеств компакта Q. Положим $G_\xi:=Q_\xi\cap\operatorname{dom}(u_\xi)$ и $G:=\bigcup\limits_{\xi\in\Xi}G_\xi$. Определим сечение u_0 формулами

$$\operatorname{dom}(u):=G,\quad u_0|_{G_\xi}=u_\xi|_{G_\xi}\quad(\xi\in\Xi).$$

Множество G является котощим согласно 1.4.5, а сечение u_0 непрерывно по определению, так что u_0 определяет единственный элемент $u\in C_\infty(Q,\mathfrak{X})$, для которого $\pi_\xi u_\xi=\pi_\xi u$ $(\xi\in\Xi)$, где π_ξ — проектор-оператор умножения на характеристическую функцию множества G_ξ. Если θ — конечное множество в Ξ и $u_\theta=\sum\limits_{\xi\in\theta}u_\xi$, то $|u-u_\theta|\leqslant\pi_\theta e$, где $\pi_\theta=\sup\{\pi_\xi:\xi\in\theta\}$, поэтому $u=o\text{-}\lim u_\theta$.

Пусть теперь последовательность $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в $C_\infty(Q,\mathfrak{X})$ r-фундаментальна с регулятором $e\in C_\infty(Q)$. На котощем множестве $G:=\operatorname{dom}(e)\cap\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{dom}(u_n)$ можно определить сечение u по формуле $u(q):=\lim u_n(q)$. Существование нужных пределов следует из оценки $\|u_n(q)-u_m(q)\|\leqslant\lambda_k e(q)$ $(n,m\geqslant k)$, где $\lambda_n\to 0$. Из этого же неравенства после перехода к пределу при $m\to\infty$ видно, что u_n сходится к u локально равномерно. Следовательно, сечение u непрерывно. Остается заметить, что $|u_n-u|\leqslant\lambda_k e$ $(n\geqslant k)$, т. е. $r\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}u_n=u$.

Таким образом, $C_\infty(Q,\mathfrak{X})$ d-полно и r-полно, поэтому требуемое вытекает из 1.3.2. $\rhd$

1.4.8. Непрерывное банахово расслоение $\mathfrak{X}$ над экстремальным компактом Q назовем *просторным*, если всякое его непрерывное ограниченное почти глобальное сечение можно продолжить до непрерывного глобального сечения. Введем обозначение:

$$C_\infty^b(Q,\mathfrak{X}):=\{u\in C_\infty(Q,\mathfrak{X}):|u|\in C(Q)\},$$

т. е. $C_\infty^b(Q,\mathfrak{X})=E(\mathfrak{X})$ при $E:=C(Q)$.

Эквивалентны следующие утверждения:

(1) *расслоение $\mathfrak{X}$ просторно;*

(2) $C_\infty^b(Q,\mathfrak{X})=C(Q,\mathfrak{X})$;

(3) $C(Q,\mathfrak{X})$ *— пространство Банаха — Канторовича.*

$\lhd$ Импликации (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) очевидны. Пусть выполнено (3). Покажем, что $\mathfrak{X}$ — просторное расслоение. Возьмем сечение $u\in C_\infty^b(Q,\mathfrak{X})$. Существует разбиение единицы $(Q_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в булевой алгебре открыто-замкнутых подмножеств Q такое, что ограничение u на Q_ξ является непрерывным глобальным сечением. Если π_ξ — проектор в $C_\infty(Q,\mathfrak{X})$, соответствующий множеству Q_ξ, то $\pi_\xi u\in C(Q,\mathfrak{X})$. Заметим, что:

$$\Big|u-\sum_{\xi\in\theta}\pi_\xi u\Big|=\Big(1-\sum_{\xi\in\theta}\pi_\xi\Big)|u|,$$

где θ — конечное подмножество Ξ. Так как $|u|\in C(Q)$, правая часть последнего равенства o-сходится к нулю в $C(Q)$. Ввиду o-полноты $C(Q,\mathfrak{X})$ заключаем, что $u\in C(Q,\mathfrak{X})$. $\rhd$

Можно показать, что утверждения (1)–(3) равносильны также следующему:

(4) *непрерывное ограниченное сечение расслоения $\mathfrak{X}$, определенное на плотном подмножестве Q, можно продолжить до непрерывного глобального сечения.*

1.4.9. Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathscr{Y}$ — непрерывные банаховы расслоения над одним и тем же компактом Q. Отображение $h : q \mapsto hq \in B(\mathfrak{X}_q, \mathscr{Y}_q)$ $(q \in Q)$ называют *изометрией* $\mathfrak{X}$ на $\mathscr{Y}$, если h_q есть линейная изометрия из $\mathfrak{X}_q$ на $\mathscr{Y}_q$ при всех $q \in Q$ и для каждого непрерывного сечения $u \in C(Q, \mathfrak{X})$ отображение $hu : q \mapsto h_q(u(q))$ $(q \in Q)$ непрерывно. Если h — изометрия из $\mathfrak{X}$ на $\mathscr{Y}$, то отображение $u \mapsto hu$ $(u \in C(Q, \mathfrak{X}))$ представляет собой линейную изометрию решеточно нормированных пространств $C(Q, \mathfrak{X})$ и $C(Q, \mathscr{Y})$. Обратное утверждение также справедливо, но в случае просторных расслоений имеет место более сильное утверждение.

Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — просторные непрерывные банаховы расслоения над экстремальным компактом Q. Тогда $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ изометричны в том и только в том случае, если РНП $C_\infty(Q, \mathscr{X})$ *и* $C_\infty(Q, \mathscr{Y})$ *линейно изометричны.*

$\vartriangleleft$ Пусть J — линейная изометрия $C_\infty(Q, \mathfrak{X})$ на $C_\infty(Q, \mathscr{Y})$. Тогда $u \in C(Q, \mathfrak{X})$ в том и только в том случае, если $Ju \in C(Q, \mathscr{Y})$, ибо для просторного расслоения имеем $C \equiv C_\infty^b$ (см. 1.4.8 (2)). Для $u \in C(Q, \mathfrak{X})$ и $q \in Q$ положим $h_q(u(q)) := (Ju)(q)$. Легко видеть, что

$$\|h_q(u(q))\|_q = \|(Ju)(q)\|_q = |Ju|(q) = |u|(q) = \|u(q)\|_q,$$

т. е. h_q — линейная изометрия из $\mathfrak{X}_q$ в $\mathscr{Y}_q$. Кроме того, очевидно, что $hu \in C(Q, \mathscr{Y})$, если $u \in C(Q, \mathfrak{X})$. Для каждого $y \in \mathscr{Y}_q$ можно подобрать глобальное непрерывное сечение v так, что $v(q) = y$. Если $u := J^{-1}(v)$, то $h_q(u(q)) = y$, значит, оператор h_q сюръективен. Тем самым h — изометрия из $\mathfrak{X}$ на $\mathscr{Y}$. $\vartriangleright$

1.4.10. *Теорема.* *Любое пространство Банаха — Канторовича X над фундаментом $E \subset C_\infty(Q)$ линейно изометрично $E(\mathfrak{X})$ для некоторого просторного непрерывного банахова расслоения $\mathfrak{X}$ над Q. Более того, такое расслоение $\mathfrak{X}$ единственно с точностью до линейной изометрии.*

$\vartriangleleft$ Пусть $\widetilde{X}$ — максимальное расширение пространства X (см. 1.3.5). Положим $X_0 := \{x \in \widetilde{X} : |x| \in C(Q)\}$ и $\|x\|_q := |x|(q)$ $(q \in Q,\ x \in X_0)$. Ясно, что $(\|\cdot\|_q)_{q \in Q}$ — мультинорма на X_0. Пусть $\mathfrak{X}$ — непрерывное банахово расслоение, ассоциированное с указанной мультинормой, а $i : X_0 \to C(Q, \mathfrak{X})$ — каноническое вложение (см. 1.4.4). Из определения топологии в $\mathfrak{X}$ (см. 1.4.3) видно, что произвольное сечение $u \in C(Q, \mathfrak{X})$ в подходящей открыто-замкнутой окрестности каждой точки из Q проходит через ε-трубку, определяемую некоторым сечением вида $i(x)$, $x \in X_0$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать разбиение единицы $(Q_\xi)_{\xi \in \Xi}$ в булевой алгебре открыто-замкнутых подмножеств Q и семейство элементов $(x_\xi)_{\xi \in \Xi}$ в X_0 такие, что $\|u(q) - i(x_\xi)(q)\|_q \leqslant \varepsilon$ $(q \in Q_\xi,\ \xi \in \Xi)$ или $|\pi_\xi u - \pi_\xi i(x_\xi)| \leqslant \varepsilon \mathbf{1}$ $(\xi \in \Xi)$, где π_ξ — проектор-оператор умножения на характеристическую функцию множества Q_ξ. В пространстве X_0 существует элемент $x_\varepsilon = \sum \pi_\xi x_\xi$, для которого $|i(x_\varepsilon) - u| \leqslant \varepsilon \mathbf{1}$. В силу r-полноты X_0 существует также $x := r\text{-}\lim_{\varepsilon \to 0} x_\varepsilon$, причем $i(x) = u$ и $|x| = |u|$. Таким образом, $i(X_0) = C(Q, \mathfrak{X})$ и, значит, $C(Q, \mathfrak{X})$ — пространство Банаха — Канторовича. Согласно 1.4.8 расслоение $\mathfrak{X}$ просторное. Утверждение о единственности следует из 1.4.9. $\vartriangleright$

§ 1.5. Булевозначное представление

Обсудим булевозначный принцип переноса для решеточно нормированных пространств. Интерпретация банахова пространства в произвольной булевозначной модели представляет собой пространство Банаха — Канторовича. Наоборот, максимальное расширение решеточно нормированного пространства при погружении в подходящую булевозначную модель превращается в банахово пространство. Тем самым возникает возможность переноса теорем о банаховых пространствах в аналогичные результаты для решеточно нормированных пространств с помощью булевозначных методов.

1.5.1. Для понимания материала текущего параграфа необходимы некоторые сведения из теории булевозначных моделей. Будем пользоваться булевозначной техникой спусков и подъемов в том виде, как она представлена в [52]. Всюду ниже $\mathbb{B}$ — фиксированная полная булева алгебра, а $V^{(\mathbb{B})}$ — булевозначный универсум, построенный над $\mathbb{B}$. Пусть $\mathscr{R}$ и $\mathscr{C}$ — поля соответственно вещественных и комплексных чисел внутри $V^{(\mathbb{B})}$. Обозначим через $\oplus$ и $\odot$ операции сложения и умножения в полях $\mathscr{R}$ и $\mathscr{C}$. Спуск $\mathscr{R}{\downarrow}$ вводится формулой $\mathscr{R}{\downarrow} := \{x \in V^{(\mathbb{B})};\ [\![x \in \mathscr{R}]\!] = 1\}$, где $[\![\varphi]\!]$ — булева оценка формулы φ. Операции $+$ и $\cdot$ на множестве $\mathscr{R}{\downarrow}$ определяются так:

$$x + y = z \leftrightarrow [\![x \oplus y = z]\!] = 1,\ x \cdot y = z \leftrightarrow [\![x \odot y = z]\!] = \mathbf{1}.$$

Аналогично определяются $\mathscr{C}{\downarrow}$ и операции в нем. При этом известно, что $\mathscr{R}{\downarrow}$ и $\mathscr{C}{\downarrow}$ соответственно вещественное и комплексное расширенные K-пространства (теорема Гордона, см. [52]). Более того, $\mathscr{R}{\downarrow}$ и $\mathscr{C}{\downarrow}$ — коммутативные алгебры с единицей $\mathbf{1}$. Отметим также, что $\mathscr{R}{\downarrow} = \mathrm{Re}\,\mathscr{C}{\downarrow}$ и $\mathscr{C}{\downarrow} = \mathscr{R}{\downarrow} \oplus i\mathscr{R}$. Будем обозначать $\Lambda := \mathscr{C}{\downarrow}$ и $\Lambda^{+} := \{a \in \Lambda : a = \mathrm{Re}\,a,\ a \geqslant 0\}$.

Если $s : A \to \mathscr{R}{\downarrow}$ — сеть и σ — модифицированный подъем s, то $[\![\sigma : A^{\wedge} \to \mathscr{R}$ — сеть $]\!] = \mathbf{1}$ и имеет место эквивалентность

$$[\![\lim \sigma = x]\!] = \mathbf{1} \leftrightarrow o\text{-}\lim s = x.$$

1.5.2. Теорема. *Пусть $(\mathscr{X}, \rho)$ — банахово пространство в модели $V^{(\mathbb{B})}$. Положим $X := \mathscr{X}{\downarrow}$ и $|\cdot| := \rho{\downarrow}(\cdot)$. Имеют место утверждения:*

(1) *$(X, |\cdot|, \mathscr{R}{\downarrow})$ — расширенное пространство Банаха — Канторовича;*

(2) *на пространстве X можно ввести структуру точного унитарного модуля над кольцом $\Lambda = \mathscr{C}{\downarrow}$ так, что*

$$(\lambda\mathbf{1})x = \lambda x \quad (\lambda \in \mathbb{C},\ x \in X), \tag{а}$$

$$|ax| = |a| \cdot |x| \quad (a \in \mathscr{C}{\downarrow},\ x \in X), \tag{б}$$

$$b \leqslant [\![x = 0]\!] \leftrightarrow \chi(b)x = 0 \quad (b \in \mathbb{B},\ x \in X), \tag{в}$$

где χ — изоморфизм из $\mathbb{B}$ на $\mathfrak{P}(X)$.

$\lhd$ Операцию суммы в $\mathscr{X}, \mathscr{C}$ и $\mathscr{R}$ обозначим одним и тем же символом $\oplus$. Пусть $\odot$ — внешний закон композиции $\mathscr{C} \times \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ комплексного векторного пространства $\mathscr{X}$, а также умножение в $\mathscr{R}$ и в $\mathscr{C}$. Положим $+ := \oplus{\downarrow}$ и $\cdot := \odot{\downarrow}$. Это означает, что

$$x + y = z \leftrightarrow [\![x \oplus y = z]\!] = \mathbf{1} \quad (x, y, z \in X);$$

$$a \cdot x = y \leftrightarrow [\![a \odot x = y]\!] = \mathbf{1} \quad (a \in \Lambda,\ x, y \in X).$$

Из простейших свойств спуска следует, что $(X, +)$ — абелева группа. Например, коммутативность операции $+$ выводится так. Внутри модели $[\![\oplus \circ \imath = \oplus]\!] = \mathbf{1}$, где $\imath : \mathscr{X} \times \mathscr{X} \to \mathscr{X} \times \mathscr{X}$ — перестановка координат. Но тогда $i := \imath{\downarrow}$ — перестановка координат в $X \times X$ и

$$+ \circ i = \oplus{\downarrow} \circ \imath{\downarrow} = (\oplus \circ \imath){\downarrow} = \oplus{\downarrow} = +.$$

Для произвольных $b \in \mathbb{B}$ и $x \in X$ положим $\chi(b)x := \mathrm{mix}\{bx, b^{*}0\}$, где 0 — нейтральный элемент группы $(X, +)$. Иными словами, $\chi(b)x$ — единственный элемент из X, для которого $[\![\chi(b)x = x]\!] \geqslant b$ и $[\![\chi(b)x = 0]\!] \geqslant b^{*}$. Тем самым определено отображение $\chi(b) : X \to X$, причем $\chi(b)$ аддитивно и идемпотентно.

Пусть $\mathfrak{P} := \{\chi(b) : b \in \mathbb{B}\}$. Тогда $\mathfrak{P}$ — полная булева алгебра, а χ — булев изоморфизм. Учитывая, что внутри модели $V^{(\mathbb{B})}$ справедливы аксиомы векторного пространства для $\mathscr{X}$, можно написать:

$$a \cdot (x + y) = a \odot (x + y) = a \odot x + a \odot y = a \cdot x + a \cdot y,$$

$$(a + b) \cdot x = (a + b) \odot x = a \odot x + b \odot x = a \cdot x + b \cdot x,$$

$$(ab) \cdot x = (ab) \odot x = a \odot (b \odot x) = a \cdot (b \cdot x),$$

$$\mathbf{1} \cdot x = \mathbf{1} \odot x = x \quad (a, b \in \Lambda;\ x, y \in X).$$

Из этих соотношений ввиду отделимости $V^{(\mathbb{B})}$ вытекает, что операции $+$ и $\cdot$ задают структуру унитарного Λ-модуля на X. Полагая $\lambda x := (\lambda \mathbf{1}) \cdot x$ ($\lambda \in \mathbb{C}$, $x \in X$), получим структуру комплексного векторного пространства на X, причем выполняется равенство (а). Так как в модели $V^{(\mathbb{B})}$

$$\chi(b) = 1 \Rightarrow \chi(b) \odot x = x, \quad \chi(b) = 0 \Rightarrow \chi(b) \odot x = 0,$$

по определению при $b \leqslant [\![x = 0]\!]$ будет

$$b \leqslant [\![\chi(b) \odot x = x]\!] \wedge [\![x = 0]\!] \leqslant [\![\chi(b) \cdot x = 0]\!],$$

$$b^* \leqslant [\![\chi(b) \odot x = 0]\!] = [\![\chi(b) \cdot x = 0]\!].$$

Отсюда $[\![\chi(b) \cdot x = 0]\!] = \mathbf{1}$, или $\chi(b)x = 0$, что и влечет (в).

Займемся теперь банаховыми свойствами пространства $(\mathscr{X}, \rho)$. Субаддитивность и однородность нормы ρ можно записать так:

$$\rho \circ \oplus \leqslant \oplus \circ (\rho \times \rho), \quad \rho \circ \odot = \odot \circ (|\cdot| \times \rho),$$

где $\rho \times \rho : (x, y) \mapsto (\rho(x), \rho(y))$ и $|\cdot| \times \rho : (a, x) \mapsto (|a|, \rho(x))$. Учитывая правила спуска суперпозиции, для $p := |\cdot|$ получим

$$p \circ + \leqslant + \circ (p \times p), \quad p \circ (\cdot) = (\cdot) \circ (|\cdot| \times p).$$

Это означает, что оператор $|\cdot| : X \to \operatorname{Re}\Lambda$ есть векторная полунорма и выполнено условие (б). Если $|x| = 0$ для некоторого $x \in X$, то ввиду равенства $[\![\rho(x) = |x|]\!] = \mathbf{1}$ будет $[\![\rho(x) = 0]\!] = \mathbf{1}$, значит, $[\![x = 0]\!] = \mathbf{1}$, или $x = 0$. Итак, $|\cdot|$ — векторная норма. Разложимость вытекает из свойства (б). Действительно, допустим, что $c := |x| = c_1 + c_2$ ($x \in X$; $c_1, c_2 \in \Lambda^+$). Существуют $a_1, a_2 \in \Lambda^+$ такие, что $a_k c = c_k$ ($k := 1, 2$) и $a_1 + a_2 = 1$ (нужно положить $a_k := c_k(c + (1 - e_c))^{-1}$, где e_c — след элемента c). Если $x_k := a_k \cdot x$ ($k := 1, 2$), то $x = x_1 + x_2$ и $|x_k| = |a_k x| = a_k |x| = c_k$.

Остается обосновать o-полноту X. Возьмем o-фундаментальную сеть $s : A \to X$. Если $\bar{s}(\alpha, \beta) := s(\alpha) - s(\beta)$ ($\alpha, \beta \in A$), то $\lim |\cdot| \circ \bar{s}(\alpha, \beta) = 0$. Пусть $\sigma : A^\wedge \to \mathscr{X}$ — модифицированный подъем s и $\bar{\sigma}(\alpha, \beta) := \sigma(\alpha) - \sigma(\beta)$ ($\alpha, \beta \in A^\wedge$). Тогда $\bar{\sigma}$ — модифицированный подъем $\bar{s}$ и $\rho \circ \bar{\sigma}$ — модифицированный подъем $|\cdot| \circ s$. В силу 1.5.1 $[\![\lim \rho \circ \bar{\sigma} = 0]\!] = \mathbf{1}$, т. е. $V^{(B)} \models$ «σ — фундаментальная сеть в $\mathscr{X}$». Так как $\mathscr{X}$ — банахово пространство внутри $V^{(\mathbb{B})}$, ввиду принципа максимума найдется такой элемент $x \in X$, что $[\![\lim \rho \circ \sigma_0 = 0]\!] = \mathbf{1}$, где $\sigma_0 : A^\wedge \to \mathscr{X}$ определена формулой $\sigma_0(\alpha) := \sigma(\alpha) - x$ ($\alpha \in A^\wedge$). Модифицированным спуском σ_0 будет сеть $s_0 : \alpha \mapsto s(\alpha) - x$ ($\alpha \in A$). Следовательно, o-$\lim |\cdot| \circ s_0 = 0$, или o-$\lim |s(\alpha) - x| = 0$. $\triangleright$

Расширенное пространство Банаха — Канторовича $\mathscr{X}{\downarrow} := (\mathscr{X}, \rho){\downarrow} := (\mathscr{X}{\downarrow}, \rho{\downarrow})$ будем называть *спуском* банахова пространства $(\mathscr{X}, \rho)$.

1.5.3. Теорема. *Для любого решеточно нормированного пространства (X, p) существует единственное с точностью до линейной изометрии банахово пространство $\mathscr{X}$ внутри $V^{(\mathbb{B})}$, где $\mathbb{B} \simeq \mathfrak{B}(|X|^{\perp\perp})$, для которого спуск $\mathscr{X}{\downarrow}$ является максимальным расширением X.*

$\lhd$ Будем считать, не ограничивая общности, что $E = p(X)^{\perp\perp} \subset mE = \mathscr{R}{\downarrow}$ и $B = \mathfrak{B}(E)$. Положим

$$d(x,y) := p(x-y)^{\perp\perp} \quad (x, y \in X).$$

Без труда проверяется, что d есть $\mathbb{B}$-метрика на множестве X. Если снабдить поле $\mathbb{C}$ дискретной $\mathbb{B}$-метрикой d_0, то операции сложения $+ : X \times X \to X$ и умножения $\cdot : \mathbb{C} \times X \to X$ будут нерастягивающими отображениями. Нерастягивающим будет также векторная норма p. Все эти утверждения почти очевидны. Так, например, для умножения при $\alpha, \beta \in C$ и $x, y \in X$ имеем

$$d(\alpha x, \beta y) = p(\alpha x - \beta y)^{\perp\perp} \leqslant (|\alpha| p(x-y))^{\perp\perp} \vee (|\alpha - \beta| p(y))^{\perp\perp} \leqslant d(x,y) \vee d_0(\alpha, \beta).$$

Пусть $\mathscr{X}_0$ — булевозначная реализация B-множества (X, d) (см. [37, 52]). Положим $\rho_0 := \mathscr{F}^{\sim}(p)$, $\oplus := \mathscr{F}^{\sim}(+)$ и $\odot := \mathscr{F}^{\sim}(\cdot)$, где $\mathscr{F}^{\sim}$ — функтор погружения. Отображения $\oplus$ и $\odot$ определяют структуру векторного пространства над полем $\mathbb{C}^{\wedge}$ в множестве $\mathscr{X}_0$, а функция $\rho_0 : \mathscr{X}_0 \times \mathscr{X}_0 \to \mathscr{R}$ является нормой. В силу принципа максимума существуют элементы $\mathscr{X}, \rho \in V^{(B)}$, для которых $[\![(\mathscr{X}, \rho)$ — комплексное банахово пространство, являющееся пополнением нормированного пространства $(\mathscr{X}_0, \rho_0)]\!] = \mathbb{1}$. При этом можно считать, что $[\![\mathscr{X}_0$ — плотное $\mathbb{C}^{\wedge}$-подпространство $\mathscr{X}]\!] = \mathbb{1}$. Пусть $\imath : X \to X_0 := \mathscr{X}_0{\downarrow}$ — каноническая инъекция (см. [37, 52]). Так как $+$ — нерастягивающее отображение из $X \times X$ в X, то сумма в X_0, т. е. $+ := \oplus{\downarrow}$, единственным образом определяется соотношением $\imath \circ + = + \circ (\imath \times \imath)$, где $\imath \times \imath : (x, y) \to (\imath x, \imath y)$ — каноническая инъекция B-множества $X \times X$ (см. [37, 52]). Но это равносильно аддитивности $\imath$. Аналогично для операции $(\cdot) := \odot{\downarrow}$ имеем $\imath \circ (\cdot) = (\cdot) \circ (\varkappa \times \imath)$, где $\varkappa \times \imath : (\lambda, x) \to (\lambda^{\wedge}, \imath x)$ $(\lambda \in \mathbb{C},\ x \in X)$. Таким образом, $\imath$ — линейный оператор. Еще раз использовав те же соображения для $p_0 := \rho_0{\downarrow}$, получим $\imath_E \circ p_0 = p_0 \circ \imath$, где $\imath_E$ — каноническая инъекция E. Это означает, что $\imath$ — изометрия, т. е. сохраняет векторную норму. Рассмотрим подпространство $Y \subset \mathscr{X}{\downarrow}$, $\imath X \subset Y$, являющееся расширенным пространством Банаха — Канторовича с нормой $q(y) := \rho{\downarrow}(y)$ $(y \in Y)$. Из разложимости нормы q и дизъюнктной полноты Y вытекает, что $X_0 \subset Y$. Действительно, $X_0 = \operatorname{mix}(\imath X)$, а в силу условия (в) из 1.5.2 (2) для $x \in \mathscr{X}{\downarrow}$ будет $x = \operatorname{mix}(b_\xi \imath x_\xi)$ в том и только в том случае, если $x = o\text{-}\sum \chi(b_\xi)\imath x_\xi$. С другой стороны, Y разложимо и d-полно, значит, согласно 1.1.3 Y инвариантно относительно каждого проектора $x \to \chi(b)x$ и содержит все суммы указанного вида. По аналогичным соображениям $Y = \operatorname{mix} Y$. Если $\mathscr{Y} := Y{\uparrow}$, то $[\![\mathscr{X}_0 \subset \mathscr{X}_0 \subset \mathscr{X}]\!] = \mathbb{1}$, причем $\mathscr{Y}{\downarrow} = Y$. Пусть $\sigma : \omega^{\wedge} \to \mathscr{Y}$ — последовательность Коши и s — ее модифицированный спуск. Тогда s — o-фундаментальная последовательность в Y, следовательно, существует $y = \lim s$. Из 1.5.1 видно, что $[\![y = \lim \sigma]\!] = \mathbb{1}$. Этим установлена полнота множества $\mathscr{Y}$, а вместе с ней и соотношение $\mathscr{X} = \mathscr{Y}$, или $X = Y$.

Пусть $\mathscr{Z}$ — банахово пространство внутри $V^{(B)}$, причем $\mathscr{Z}{\downarrow}$ — максимальное расширение решеточно нормированного пространства X. Если $\imath'$ — соответствующее изометрическое вложение X в $\mathscr{Z}{\downarrow}$, то $\imath' \circ \imath$ распространяется единственным образом до линейной изометрии X_0 на дизъюнктно полное подпространство $Z_0 \subset \mathscr{Z}{\downarrow}$. Пространства $\mathscr{X}_0$ и $\mathscr{Z}_0 := Z_0{\uparrow}$ изометричны. Но тогда изометричны и их пополнения $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y} \subset \mathscr{Z}$ соответственно. Так как $\mathscr{Y}{\downarrow}$ — пространство Банаха — Канторовича и $\imath X \subset \mathscr{Y}{\downarrow} \subset \mathscr{Z}{\downarrow}$, то $\mathscr{Y}{\downarrow} = \mathscr{Z}{\downarrow}$. Поэтому $\mathscr{Y} = \mathscr{Z}$ и, стало быть, $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Z}$ линейно изометричны. $\rhd$

1.5.4. Из установленного факта следует, в частности, другое доказательство теоремы 1.3.7. Для иллюстрации выведем из 1.5.3 два следствия о строении максимального расширения mX.

(1) *Для любых $x \in mX$ и $\varepsilon > 0$ найдутся семейство $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в X и разбиение единицы $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в $\mathfrak{P}(mX)$ такие, что*

$$\Big| x - o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} \pi_\xi \imath x_\xi \Big| \leqslant \varepsilon |x|.$$

(2) *Решеточно нормированное пространство линейно изометрично фундаменту своего максимального расширения тогда и только тогда, когда оно разложимо и о-полно, т. е. является пространством Банаха — Канторовича.*

$\triangleleft$ Сформулированные два утверждения удобно доказывать вместе. Пользуясь теоремой 1.5.3, считаем, что $mX := \mathscr{X}{\downarrow}$, $|\cdot| := \rho{\downarrow}$. Тогда пространство (mX, mE) вместе с инъекцией $\imath$ есть максимальное расширение пространства X. Возьмем $x \in mX$. Не ограничивая общности, можно считать, что $|x|$ — единица в mE. Так как $\mathscr{X}_0$ плотно в $\mathscr{X}$, то в силу принципа максимума для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой элемент $x_\varepsilon \in V^{(\mathbb{B})}$, что

$$[\![x_\varepsilon \in \mathscr{X}_0]\!] = [\![\rho(x - x_\varepsilon) \leqslant \varepsilon^\wedge \cdot e]\!] = \mathbb{1}.$$

Отсюда $x_\varepsilon \in X_0$ и $|x - x_\varepsilon| \leqslant \varepsilon e$. Остается заметить, что $X_0 = \operatorname{mix}(\imath X)$, поэтому x_ε имеет вид $\sum\limits_{\xi\in\Xi} \pi_\xi \imath x_\xi$, где $(x_\xi) \subset X$, а (π_ξ) — разбиение единицы в $\mathfrak{P}(mX)$.

Очевидно, что фундамент пространства Банаха — Канторовича разложим и o-полон. Наоборот, пусть X — разложимое и o-полное решеточно нормированное пространство. Тогда в силу 1.1.6 (2) $E_0 := |X|^{\perp\perp}$ — K-пространство, и, считая E фундаментом в $\mathscr{R}{\downarrow}$, мы не умаляем общности. Пусть $x \in mX$ и $|x| \in E_0$. В силу (1) найдется последовательность $(x_n) \subset X_0$, для которой

$$|x_n - x| \leqslant \frac{1}{n}e, \quad |x_n| \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)e \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Так как o-полное разложимое пространство d-полно и r-полно, отсюда вытекает, что $x_n \in X$ и $x \in X$. Тем самым $X = \{x \in mX : |x| \in E_0\}$, т. е. X — фундамент mX. $\triangleright$

§ 1.6. Комментарии

1.6.1. Векторные пространства, нормированные элементами векторной решетки, т. е. то, что мы называем РНП, ввел Л. В. Канторович в 1935 г. [29]. В той же работе впервые появилась необычная аксиома разложимости 1.1.1 (4). Интересно отметить, что в исследованиях других авторов эта аксиома иногда опускалась как несущественная. Ее принципиальное значение выяснилось в связи с булевозначным представлением РНП (см. 1.6.5). Несколько ранее (см. [114]) Курепа рассмотрел espaces pseudodistancies, т. е. пространство с метрикой, принимающей значения из упорядоченного векторного пространства. Первые применения векторных норм и метрик относились к методу последовательных приближений и численному анализу (см. [33, 36, 109, 114, 148]).

Связь между разложимостью и существованием булевой алгебры проекторов в РНП обнаружил А. Г. Кусраев [46, 47]. Пространства, в которых фиксирована булева алгебра линейных проекторов и задан согласованный порядок (coordinated spaces), изучал Купер [94, 95]. Утверждения 1.1.6 (1, 2) получены в [41].

1.6.2. Материал об измеримых функциях со значениями в банаховом пространстве и, в частности, в пространстве ограниченных линейных операторов, см. в [26, 96, 97]. Общую идею построения пространств из § 1.2 можно выразить так: если X — банахово (или локально выпуклое) пространство, а E — функциональное пространство, то с ними можно связать класс вектор-функций (измеримых или непрерывных) Z, потребовав, например, чтобы $f \in Z$ в том и только в том случае, если $l \circ f \in E$ для каждого $l \in X'$ и т. п. Эта идея отработана при построении теории векторного интеграла (см. [6, 26, 77, 96, 97, 106]).

1.6.3. Критерий полноты 1.3.2 сформулировал А. Г. Кусраев в [46] при условии, что нормирующая решетка E порядково полна. В [47] приводится доказательство в более общей ситуации пространств с разложимой векторной мультинормой. Предположение о порядковой полноте E удалось снять в [41]. Для архимедовой векторной решетки (случай $X = E$) указанный факт установили А. И. Векслер и В. А. Гейлер [15]. Максимальное расширение для произвольного K-пространства изучил А. Г. Пинскер (см. [36]). Им установлено, в частности, что K-пространство обладает единственным с точностью до изоморфизма максимальным расширением. Утверждение 1.3.7, представляющее собой обобщение теоремы Пинскера для РНП, получено, по существу, в [47]. Относительно теоремы 1.3.8 о порядковом пополнении РНП см. [47, 58]. Утверждение $X = oX$ из 1.3.9 принадлежит А. Е. Гутману.

Операторно сопряженное пространство X^* из 1.3.4, введенное здесь для построения максимального расширения mX, интересно само по себе и изучалось в [47]. В частности, РНП X операторно рефлексивно в том смысле, что $X^{**} = \kappa(X)$, в том и только в том случае, если множество $\{x \in X : |x| \leqslant e\}$ слабо циклически компактно для каждого элемента $e \in E_+$ (см. [47]).

1.6.4. Непрерывные банаховы расслоения широко применяются для представления различных функционально-аналитическкких объектов (см. [100, 105, 147]).

В [58] было введено пространство $E(\mathscr{X})$ почти глобальных сечений непрерывного банахова расслоения $\mathscr{X}$ и установлена теорема 1.4.7. Там же показано, что любое ПБК линейно изометрично пространству $E(\mathscr{X})$ для подходящего $\mathscr{X}$, однако единственность расслоения $\mathscr{X}$ доказать не удалось. А. Е. Гутман нашел класс единственности для теоремы 1.4.7 — класс просторных непрерывных банаховых расслоений — и доказал теорему 1.4.10 [25]. Подробное изложение этих и других интересных результатов см. в [101]. А. Е. Гутман изучил также возможность представления ПБК с помощью измеримых банаховых расслоений [102].

1.6.5. Булевозначные представления используются в анализе, начиная с работ Е. И. Гордона [22] и Г. Такеути [153]. Различные аспекты этого направления, называемого булевозначным анализом, а также соответствующую библиографию см. в [52, 116, 117].

Теоремы 1.5.2 и 1.5.3 о булевозначной реализации РНП получил А. Г. Кусраев [45, 46], подробности см. в [17, 47].

Представление ПБК с помощью непрерывных банаховых расслоений и их булевозначное представление тесно между собой связаны. Не входя в детали, суть этой взаимосвязи можно понять из следующих двух результатов, установленных соответственно Малвеем [134] и А. Г. Кусраевым [45].

(1) *Для любого топологического пространства Q эквивалентны категория $Bn(Q)$ банаховых расслоений над Q и категория банаховых пространств в топосе пучков над Q.*

(2) *Категория* ПБК, *имеющих в качестве нормирующей решетки фиксированное расширенное K-пространство E, эквивалентна категории банаховых пространств в $V^{(\mathbb{B})}$ (т. е. в топосе $\mathbb{B}$-множеств $V^{(\mathbb{B})}$), где $\mathbb{B}$ — база E.*

Глава 2. Пространство мажорируемых операторов

Мажорируемые операторы часто встречаются в анализе. Наиболее известные примеры — интеграл Бохнера (2.1.5), оператор условного математического ожидания (2.1.6), слабо или сильно интегральные операторы (2.1.8, 2.1.9), операторы взвешенного сдвига (2.1.11).

В этой главе изучаются общие свойства мажорируемых операторов. Мажорируемый оператор имеет наименьшую (или точную) мажоранту при довольно слабых предположениях. Достаточно, например, потребовать, чтобы область определения была разложимым пространством, а нормирующая решетка образа была порядково полна (2.1.2). Существуют явные формулы для вычисления точной мажоранты (2.2.2, 2.2.5), которые весьма полезны при изучении взаимосвязи оператора и его точной мажоранты. Так, например, используя эти формулы, можно показать, что мажорируемый оператор порядково непрерывен в том и только в том случае, если порядково непрерывна его точная мажоранта (2.3.2). Кроме того, порядково непрерывный мажорируемый оператор из разложимого РНП в порядково полное РНП допускает единственное продолжение на порядковое пополнение области определения с сохранением точной мажоранты (2.3.3). Благодаря этому факту удается, в частности, уточнить в некоторых случаях формулы для вычисления точных мажорант (2.3.4, 2.3.5).

Центральным результатом главы является разложимость мажорантной нормы. Если X — разложимое РНП, а Y — ПБК, то точная мажоранта задает на пространстве мажорируемых операторов $M(X,Y)$ разложимую норму, а потому $M(X,Y)$ — ПБК (2.4.5). Доказательство этого факта опирается, в частности, на недавние результаты о строении булевой алгебры осколков положительного оператора (2.4.1).

Из разложимости мажорантной нормы следует, например, что мажорируемый оператор разлагается единственным образом в дизъюнктную сумму порядково непрерывного и порядково сингулярного операторов. Однако это утверждение можно доказать и непосредственно. Более того, можно указать явные формулы для вычисления порядково непрерывной составляющей (2.3.9). При некоторых не очень обременительных условиях порядково сингулярные операторы совпадают с множеством операторов, обращающихся в нуль на некотором фундаменте (2.4.9). Дана также внутренняя характеризация почти интегральных операторов, т. е. операторов, точные мажоранты которых входят в компоненту, порожденную конечномерными порядково непрерывными операторами (2.4.11).

§ 2.1. Определения и примеры

В этом параграфе введено понятие мажорируемого оператора и рассмотрены различные примеры мажорируемых операторов, в частности операторы взвешенного сдвига, интегральные и псевдоинтегральные операторы.

2.1.1. Рассмотрим РНП (X,E) и (Y,F), линейный оператор $T : X \to Y$ и положительный оператор $S : E \to F$. Если выполнено условие

$$|Tx| \leqslant S(|x|) \quad (x \in X),$$

то говорят, что S *мажорирует* T или S является *мажорантой* для T. Оператор T в этой ситуации называют *мажорируемым*. Пусть $\operatorname{maj}(T)$ обозначает множество всех мажорант оператора T. Ясно, что $\operatorname{maj}(T)$ — выпуклое множество в K-пространстве $L_r(E,F)$. Если в $\operatorname{maj}(T)$ существует наименьший элемент (относительно индуцированного из $L_r(E,F)$ порядка), то он называется *наименьшей мажорантой* или *точной мажорантой* оператора T и обозначается символом $|T|$. Следовательно, $|T|$ — положительный оператор из E в F, причем $|T| = \inf \operatorname{maj}(T) \in \operatorname{maj}(T)$ и выполняется нормативное неравенство

$$|Tx| \leqslant |T|(|x|) \quad (x \in X).$$

Множество всех мажорируемых операторов из X в Y обозначим через $M(X,Y)$. Таким образом,

$$T \in M(X,Y) \Leftrightarrow \operatorname{maj}(T) \neq \varnothing.$$

2.1.2. *Предположим, что X разложимо, а F порядково полна. Тогда любой мажорируемый оператор $T : X \to Y$ имеет точную мажоранту $|T|$.*

$\lhd$ Сначала заметим, что $\mathrm{maj}(T)$ является нижней полурешеткой, т. е. если $S_1, S_2 \in \mathrm{maj}(T)$, то $S_1 \wedge S_2 \in \mathrm{maj}(T)$. В самом деле, если $|x| = e_1 + e_2$, где $x \in X$ и $e_1, e_2 \in E_+$, то имеет место представление $x = x_1 + x_2$, $|x_k| = e_k$ $(k := 1, 2)$. Следовательно, справедливы неравенства

$$|Tx| \leqslant |Tx_1| + |Tx_2| \leqslant S_1 e_1 + S_2 e_2.$$

Переход к инфимуму по e_1 и e_2, $e_1 + e_2 = |x|$, дает $|Tx| \leqslant S_1 \wedge S_2(|x|)$. Итак, множество $\mathrm{maj}(T)$ фильтровано вниз, поэтому точная нижняя граница $S := \inf \mathrm{maj}(T)$ вычисляется поточечно на конусе E_+. Отсюда вытекает, что

$$|Tx| \leqslant \inf\{S'(|x|) : S' \in \mathrm{maj}(T)\} = S(|x|) \quad (x \in X),$$

т. е. $S \in \mathrm{maj}(T)$ или $S = |T|$. $\rhd$

2.1.3. Без дополнительных условий типа разложимости нельзя гарантировать существование у мажорируемого оператора точной мажоранты. Простейшие примеры убеждают, что ненулевой мажорируемый оператор может иметь даже дизъюнктные мажоранты. В то же время условия разложимости допускают некоторое ослабление. Отметим несколько таких случаев.

(1) *Предположим, что X r-разложимо в следующем смысле: для любых $x \in X$ и $0 \leqslant e \leqslant |x|$ существует r-фундаментальная последовательность (x_n) в X такая, что $|x_n| \xrightarrow{r} e$ и $|x - x_n| \to |x| - e$. Тогда всякий мажорируемый оператор из X в Y имеет точную мажоранту.*

(2) *Пусть E — векторная решетка с проекциями на главные компоненты, а X d-разложимо. Тогда всякий мажорируемый оператор из X в Y имеет точную мажоранту.*

(3) *Допустим, что X o-разложимо в следующем смысле: для любых $x \in X$ и $0 \leqslant e \leqslant |x|$ существует o-фундаментальная последовательность (x_n) в X такая, что $|x_n| \xrightarrow{o} e$ и $|x - x_n| \xrightarrow{o} |x| - e$. Тогда всякий порядково непрерывный* (см. 2.3.1) *мажорируемый оператор из X в Y имеет точную мажоранту.*

2.1.4. Укажем основные типы мажорируемых операторов, наиболее часто встречающиеся в литературе.

(1) Если $E = F = \mathbb{R}$, то X и Y — нормированные пространства, а $M(X, Y) = \mathscr{L}(X, Y)$ — пространство всех ограниченных операторов из X в Y. Точная мажоранта оператора $T \in M(X, Y)$ определяется положительным числом — нормой оператора T:

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leqslant 1\}.$$

(2) Пусть $X = E$ и $Y = F$, а решеточной нормой служит модуль элемента. Тогда $M(X, Y)$ совпадает с пространством $L_r(E, F)$ всех регулярных операторов из E в F. Точная мажоранта оператора $T \in M(X, Y)$ есть его модуль $|T|$. Если F — K-пространство, то имеет место формула

$$|T|x = \sup\{Tu : |u| \leqslant x\} \quad (x \in E_+).$$

(3) Предположим, что $E = \mathbb{R}$ и $Y = F$. Тогда оператор $T : X \to F$ мажорируем в том и только в том случае, если множество $\{Tx : x \in X,\ \|x\| \leqslant 1\}$ порядково ограничено в F. Если F — K-пространство, то точная мажоранта имеет вид

$$|T| = \sup\{Tx : \|x\| \leqslant 1\}$$

(фактически точной мажорантой будет отображение $t \mapsto t|T|$ $(t \in \mathbb{R})$). Элемент $|T|$ называют ***абстрактной нормой*** оператора T. Итак, в случае K-пространства F множество $M(X, F)$ совпадает с множеством $L_A(X, F)$ операторов, имеющих абстрактную норму.

(4) Допустим теперь, что $X = E$ и $F = \mathbb{R}$. Тогда мажорируемость оператора $T : E \to Y$ означает существование положительного функционала e^* на E такого, что

$$\|Te\| \leqslant \langle |e|, e^* \rangle \quad (e \in E).$$

Такие операторы называют *доминированными*. Точную мажоранту можно сосчитать по формуле

$$|T|e = \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} \|Te_k\| : e_1, \dots, e_n \in E_+,\ n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{n} e_k = e\right\} \quad (e \in E_+).$$

(5) Пусть E и F — фундаменты одного и того же K-пространства. В максимальном расширении $mE = mF$ зафиксируем мультипликативную структуру, однозначно определяемую выбором единицы. Оператор $T : X \to Y$ назовем *ограниченным*, если существует $c \in mE$ такой, что $c \cdot E \subset F$ и $|Tx| \leqslant c \cdot |x|$ для всех $x \in X$. Множество всех ограниченных операторов из X в Y обозначим $L_B(X, Y)$. Итак, T входит в $L_B(X, Y)$ в том и только в том случае, если $|T| \in \operatorname{Orth}(E, F)$. Имеет место формула

$$|T|e = \sup\{|Tx| : |x| \leqslant e\} \quad (e \in E_+).$$

Заметим, что в каждом из рассмотренных случаев точная мажоранта находится по формуле специального вида. Ниже мы дадим общие формулы для вычисления точных мажорант.

Рассмотрим теперь несколько конкретных примеров.

2.1.5. Возьмем пространство с σ-конечной мерой (Q, Σ, μ) и банахово пространство X. Пусть оператор $T : L_1(\mu, X) \to X$ есть интеграл Бохнера, а функционал $S : L_1(\mu) \to \mathbb{R}$ — интеграл Лебега. Неравенство

$$\left\| \int_Q f(t)\, d\mu(t) \right\| \leqslant \int_Q \|f(t)\|\, d\mu(t) \quad (f \in L_1(\mu, X))$$

означает, что S мажорирует T. Из элементарных свойств интеграла Бохнера следует, что фактически S служит точной мажорантой для T.

2.1.6. Возьмем σ-подалгебру $\Sigma_0 \subset \Sigma$ и обозначим через μ_0 ограничение μ на Σ_0. Пусть $S : L^p(\mu) \to L^p(\mu_0)$, $1 \leqslant p < +\infty$, — оператор условного математического ожидания. В пространстве $L^p(\mu, X)$, $1 \leqslant p < +\infty$, также существует условное математическое ожидание, т. е. оператор $T : L^p(\mu, X) \to L^p(\mu_0, X)$ такой, что

$$\int_D Tf d\mu_0 = \int_D f d\mu \quad (D \in \Sigma_0,\ f \in L^p(\mu, X)).$$

Нетрудно показать, что S — точная мажоранта для T.

2.1.7. Пусть E и F — K-пространства, а $S : E \to F$ — регулярный o-непрерывный оператор. Пусть X и Y — банаховы пространства, $U : X \to Y$ — ограниченный оператор. Определим $T_0 : X \otimes E \to Y \otimes F$ по формуле

$$T_0\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \otimes e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} Ux_k \otimes Se_k.$$

Оператор T_0 имеет мажоранту $\|U\| \cdot |S|$. Более того, T_0 допускает единственное мажорируемое продолжение $T := U \otimes S : E(X) \to F(Y)$, причем $|T| = \|U\| \cdot |S|$ (см. 1.2.10, 2.3.3, 2.3.5 (3)). В частности, в 2.1.5 и 2.1.6 имеем $T = I_X \otimes S$.

2.1.8. Пусть (Q, Σ, μ) — произведение пространств с мерой $(A, \mathscr{A}, \lambda)$ и $(B, \mathscr{B}, \nu)$, а E и F — идеальные пространства в $L^0(\nu)$ и $L^0(\lambda)$ соответственно. Возьмем банаховы пространства X и Y, и пусть $Z \subset Y'$ — нормирующее подпространство. Рассмотрим Z-слабо измеримую оператор-функцию $K : \Omega \to \mathscr{L}(X, Z')$ и измеримую вектор-функцию $u : B \to X$. Вектор-функция $(s,t) \mapsto K(s,t)u(t)$ $(t \in B,\ s \in A)$ будет Z-слабо измеримой. Допустим, что для всех $z \in Z$ и для почти всех $s \in B$ определен интеграл

$$w(s,z) := \int\limits_B \langle z, K(s,t)u(t)\rangle d\nu(t),$$

причем линейный функционал $z \mapsto w(s,z)$ непрерывен при почти всех $s \in A$. Тогда вектор-функция $v : s \mapsto w(s, \cdot) \in Z'$ будет Z-слабо измеримой. Класс эквивалентности этой вектор-функции обозначим через $\bar v$. Положим $T\bar u := \bar v$. Если для каждого $\bar u \in E(X)$ существует $T\bar u$ и $|T\bar u| \in F$, то возникает линейный оператор $T : E(X) \to F_s(Z')$. При этом говорят, что T — *слабый интегральный оператор с ядром* K, и, допуская вольность, пишут

$$\langle z, Tu\rangle(s) = \int\limits_B \langle z, K(s,t)u(t)\rangle d\nu(t) \ \text{ п. в. } \ (u \in E(X)).$$

Если ядро K входит в $\mathfrak{M}_\mu(X, Z')$, а интегральный оператор S с ядром $|K| \in L^0(\mu)$ действует из E в F, то слабый интегральный оператор T мажорируем, причем S — точная мажоранта (см. 3.3.3 (1)).

2.1.9. В тех же обозначениях, что и в 2.1.8, возьмем просто измеримую оператор-функцию $K : \Omega \to \mathscr{L}(X, Y)$. Если $u : B \to X$ — измеримая вектор-функция, то измеримой будет также и вектор-функция $(s,t) \mapsto K(s,t)u(t)$. Допустим, что для каждого $u \in E(X)$ при почти всех $s \in B$ выполнено включение $K(s,\cdot)u(\cdot) \in L^1(\mu, Y)$, а для измеримой вектор-функции

$$v(s) := \int\limits_B K(s,t)u(t)d\nu(t)$$

верно включение $\bar v \in F(Y)$. Тогда определен линейный оператор $T : E(X) \to F(Y)$, $T\bar u = \bar v$, который называют *сильно интегральным оператором с ядром* K. Вновь допуская вольность, можно написать:

$$(Tu)(s) = \int\limits_B K(s,t)u(t)d\nu(t) \ \text{ п. в. } \ (u \in E(X)).$$

Если ядро K входит в $\mathfrak{M}^s_\mu(X, Y)$, а интегральный оператор S с ядром $|K|$ действует из E в F, то T — мажорируемый оператор и S — его точная мажоранта.

2.1.10. *Представляющей мерой* будем называть положительную счетно-аддитивную функцию множества $m : \Sigma \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, удовлетворяющую условиям:

а) существует счетное множество попарно не пересекающихся измеримых множеств $B_n \in \mathscr{B}$, и для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует счетное множество попарно не пересекающихся измеримых множеств $A_{nk} \in \mathscr{A}$ такое, что $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$, $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_{nk}$ $(n \in \mathbb{N})$ и $m(A_{nk} \times B_n) < \infty$ $(n, k \in \mathbb{N})$;

б) $m(A_0 \times B_0) = 0$, если $A_0 \times B_0 \in \Sigma$ и либо $\lambda(A_0) = 0$, либо $\nu(B_0) = 0$.

Зафиксируем какой-нибудь фундамент F_0 в $L^0(\lambda)$. Возьмем Z-слабо измеримую оператор-функцию $K : \Omega \to \mathscr{L}(X, Z')$, сильно измеримую вектор-функцию $u : B \to X$ и $g \in F_0$. Допустим, что существует интеграл

$$w(z, g, u) := \int\limits_Q \langle z, K(s,t)u(t)\rangle g(s)\, dm(s,t).$$

Для фиксированного $z \in Z$ функционал $w(z, \cdot, u)$ на F_0 порядково непрерывен, поэтому существует функция $v(z, \cdot, u) \in L^0(\lambda)$ такая, что

$$\int v(z,s)g(s)d\lambda(s) = w(z, g, u) \quad (g \in F_0).$$

Заметим далее, что оператор $U : z \mapsto v(z, \cdot, u)$ $(z \in Z)$ линеен. Если он имеет вид $U_z(s) = \langle z, Tu\rangle(s)$ для некоторого линейного оператора $T : E(X) \to F_s(Y, Z)$, то говорят, что T — *слабо псевдоинтегральный оператор с представляющей мерой m и ядром K*. При этом пишут, допуская вольность,

$$\int\limits_B \langle z, Tu\rangle(s)g(s)\, d\lambda(s) = \iint\limits_Q \langle z, K(s,t)u(t)\rangle g(s)\, dm(s,t).$$

Если $K \in \mathfrak{M}_\mu(X, Z')$, а оператор $S : E \to F$ действует по формуле

$$\int\limits_A (Se)(s)\, d\lambda(s) = \iint\limits_Q |K|(s,t)e(t)g(s)\, dm(t,s),$$

то S — мажоранта T (и даже точная мажоранта, см. 3.4.5).

2.1.11. Пусть $\varphi : A \to B$ — измеримое отображение, причем $\lambda(\varphi^{-1}(C)) = 0$, если $\nu(C) = 0$. *Оператор подстановки* $\varphi^* : E \to L^0(\lambda)$ определяется формулой

$$(\varphi^* f)(s) = f(\varphi(s)) \quad (s \in A).$$

Оператор подстановки, действующий из $E(X)$ в $L^0(\lambda, X)$, обозначим через φ^*_X. Как видно, $|\varphi_X(f)| = \varphi^*(|f|)$, значит, φ^*_X — мажорируемый оператор.

Пусть $K \in \mathfrak{M}_\nu(X, Y)$ и $L := |K|$. Дополнительно потребуем измеримость вектор-функции $Kf : s \mapsto K(s)f(s)$ $(s \in A)$ для каждого $f \in E(X)$. Рассмотрим *операторы подстановки с весом*

$$(Tf)(s) = (K\varphi^*_X f)(s) = K(s)f(\varphi(s)),$$
$$(Su)(s) = (L\varphi^* u)(s) = L(s)u(\varphi(s)).$$

Имеет место очевидное неравенство $|Tf| \leqslant L \cdot \varphi^*(|f|)$, следовательно, S мажорирует T. Более того, $|T| = S$ (см. 3.2.6).

§ 2.2. Формулы для вычисления точной мажоранты

Как уже отмечалось в 2.1.2, при не очень обременительных условиях всякий мажорируемый оператор имеет точную мажоранту. В этом параграфе выводятся явные формулы для вычисления точной мажоранты.

2.2.1. Рассмотрим РНП X и Y с нормирующими решетками E и F соответственно. Будем предполагать, что X разложимо, а F порядково полна. Обозначим символом E_{0+} коническую оболочку множества $|X| := \{|x| : x \in X\}$, т. е. множество элементов вида $\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|$, где $x_1, \dots, x_n \in X$ и $n \in \mathbb{N}$. Имеет место следующее утверждение.

Конус E_{0+} является порядковым идеалом в E_+. Если E — решетка с проекциями на главные компоненты, то $E_{0+} = |X|$.

$\triangleleft$ Если $e \in E_+$ и $x_1, \dots, x_n \in X$ таковы, что $e \leqslant |x_1| + \dots + |x_n|$, то $e = e_1 + \dots + e_n$ для некоторых $0 \leqslant e_k \leqslant |x_k|$ $(k := 1, \dots, n)$. В силу разложимости X найдутся такие $y_1, \dots, y_n \in X$, что $|y_k| = e_k$ $(k := 1, \dots, n)$. Тем самым $e \in E_{0+}$, поэтому E_{0+} — порядковый идеал в E.

Далее, если $e = e_1 + e_2$, где $e_k := |x_k|$ и $x_k \in X$ $(k := 1, 2)$, то $e \leqslant 2e_1 \vee e_2$ и в силу уже доказанного нужно лишь показать, что $e_1 \vee e_2 \in |X|$. В то же время для проектора π на компоненту $\{e_1 - e_1 \wedge e_2\}^{\perp\perp}$ будет

$$e_1 \vee e_2 = \pi e_1 + \pi^{\perp} e_2 = |\pi x_1| + |\pi^{\perp} x_2| = |\pi x_1 + \pi^{\perp} x_2|,$$

т. е. $e_1 \vee e_2 \in |X|$. $\triangleright$

2.2.2. Теорема. *Точная мажоранта любого оператора $T \in M(X, Y)$ может быть вычислена по формулам*

$$|T|e = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} |Tx_k| : x_1, \dots, x_n \in X,\ n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{n} |x_k| = e \right\} \quad (e \in E_{0+}),$$

$$|T|e = \sup\{|T|e_0 : e_0 \in E_{0+}, e_0 \leqslant e\} \quad (e \in E_+),$$

$$|T|e = |T|e^+ - |T|e^- \quad (e \in E).$$

$\triangleleft$ Обозначим через Se правую часть первой из требуемых формул. Поскольку

$$\sum_{k=1}^{n} |Tx_k| \leqslant |T| \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k| \right) = |T|e$$

для любых $x_1, \dots, x_n \in X$, то корректно определено отображение $S : E_{0+} \to F$. Если $u_1, \dots, u_n \in X$ и $v_1, \dots, v_m \in X$ таковы, что $\sum_{k=1}^{n} |u_k| = e$, $\sum_{k=1}^{m} |v_k| = f$, то $e, f \in E_{0+}$ и по определению оператора S

$$\sum_{k=1}^{n} |Tu_k| + \sum_{k=1}^{m} |Tv_k| \leqslant S(e + f).$$

Переходя к супремуму по всем конечным наборам $\{u_1, \dots, u_n\}$ и $\{v_1, \dots, v_n\}$ указанного вида, получим $Se + Sf \leqslant S(e + f)$.

Допустим, что $e + f = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$. Тогда в силу разложимости нормы в X существуют конечные наборы $e_1, \dots, e_n \in E_{0+}$, $f_1, \dots, f_n \in E_{0+}$, $u_1, \dots, u_n \in X$ и $v_1, \dots, v_n \in X$, для которых совместна система условий

$$f = f_1 + \dots + f_n, \ e = e_1 + \dots + e_n,$$

$$x_k = u_k + v_k, \ |u_k| = e_k, \ |v_k| = f_k \quad (k = 1, \dots, n).$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{n} |Tx_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |Tu_k| + \sum_{k=1}^{n} |Tv_k| \leqslant Se + Sf.$$

И вновь переход к супремуму по наборам $x_1, \dots, x_n$ дает неравенство

$$S(e + f) \leqslant S(e) + S(f).$$

Итак, S — аддитивный оператор. Кроме того, очевидно, что $S(\lambda e) = \lambda Se$ при $\lambda \geqslant 0$.

Распространим теперь S с E_{0+} на E_+, полагая

$$Se := \sup\{Se_0 : e_0 \leqslant e,\ e_0 \in E_{0+}\}.$$

Так как при $e_0 \leqslant e$ будет $Se_0 \leqslant |T|e_0 \leqslant |T|e$, супремум в определении Se существует, причем $Se \leqslant |T|e$ $(e \in E^+)$. Легко видеть, что S — аддитивный и положительно однородный оператор из E_+ в F. Полагая, наконец, $Se = Se^+ - Se^-$ для $e \in E$, получим положительный оператор $S : E \to F$, причем $S \leqslant |T|$. С другой стороны, для $x \in X$ имеем $|Tx| \leqslant S|x|$, т. е. S — мажоранта T, а потому $S \geqslant |T|$. Окончательно получаем $S = |T|$. $\triangleright$

2.2.3. Следствие. *Линейный оператор $T : X \to Y$ мажорируем в том и только в том случае, если для каждого $e \in E_+$ множество*

$$\mathscr{U}(e) := \left\{ \sum_{k=1}^{n} |Tx_k| : x_1, \dots, x_n \in X, n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{n} |x_k| \leqslant e \right\}$$

порядково ограничено. При этом $|T|e = \sup \mathscr{U}(e)$ $(e \in E_+)$.

$\lhd$ Необходимость очевидна. Предположим, что $\mathscr{U}(e)$ — o-ограниченное множество для каждого $e \in E_+$. Положим $Ue = \sup \mathscr{U}(e)$. Определим оператор $S : E_+ \to F$ так же, как и в доказательстве предыдущей теоремы. В силу o-ограниченности $\mathscr{U}(e)$ такое определение корректно, причем $Se \leqslant Ue$ $(e \in E_+)$. Пусть

$$|x_1| + \dots + |x_n| \leqslant e = |y_1| + \dots + |y_m|$$

для некоторых $x_1, \dots, x_n \in X$, $y_1, \dots, y_m \in X$ и $e \in E_+$. Элемент $f := e - |x_1| - \dots - |x_n|$ можно представить в виде $f = f_1 + \dots + f_m$, где $0 \leqslant f_k \leqslant |y_k|$ $(k = 1, \dots, m)$. В силу разложимости X существуют такие $z_1, \dots, z_m \in X$, что $f_k = |z_k|$ $(k = 1, \dots, m)$. Итак, для $u := |Tx_1| + \dots + |Tx_n|$ из $\mathscr{U}(e)$ имеем $u \leqslant u + |Tz_1| + \dots + |Tz_m| \leqslant Se$. Так как выбор $u \in \mathscr{U}(e)$ произволен, имеем $Ue \leqslant Se$ при $e \in E_{0+}$. Заметим также, что $Ue = \sup\{Se_0 : e_0 \leqslant e, e_0 \leqslant E_{0+}\}$. Тем самым операторы S и U совпадают на E_+. Остается учесть неравенство $|Tx| \leqslant U(|x|)$ $(x \in X)$, линейность и положительность оператора S и сослаться на 2.2.2. $\rhd$

В первой формуле из 2.2.2 можно вычислить точную верхнюю границу по дизъюнктным наборам $x_1, \dots, x_n \in X$. Для обоснования такого уточнения потребуется один вспомогательный факт.

2.2.4. *Предположим, что отображение $S : E_+ \to F_+$ удовлетворяет следующим требованиям:*

(а) *S положительно однороден, т. е. $S(\lambda e) = \lambda Se$ $(e \in E_+, \lambda \in \mathbb{R}_+)$;*

(б) *S субаддитивен, т. е. $S(e + f) \leqslant Se + Sf$ $(e, f \in E_+)$;*

(в) *S ортогонально аддитивен, т. е. $S(e+f) = Se+Sf$ $(e, f \in E_+, e \wedge f = 0)$;*

(г) *S имеет линейную мажоранту, т. е. $Se \leqslant Ue$ $(e \in E_+)$ для некоторого линейного оператора $U : E \to F$.*

Тогда S аддитивен.

$\lhd$ Возьмем произвольные $e, f \in E_+$ и положим $c := e + f$. Обозначим символом $\mathscr{F}(e)$ множество всех элементов E_+ вида $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \pi_k c$, где $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$, а $\pi_1, \dots, \pi_n$ — попарно дизъюнктные проекторы в E с единичной суммой. Если $e', e'' \in \mathscr{F}(c)$ таковы, что $e' = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda'_k \pi_k c$ и $e'' = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda''_k \pi_k c$, причем $\lambda'_k \leqslant \lambda''_k$ $(k := 1, \dots, n)$, то в силу (а) и (в)

$$Se' = \sum_{k=1}^{n} \lambda'_k S\pi_k c \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda''_k S\pi_k c = Se''.$$

Это означает, что S изотонен на $\mathscr{F}(c)$. Для любого $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ можно подобрать $e', e'' \in \mathscr{F}(e)$ так, что $e' \leqslant e \leqslant e''$, $e - e' \leqslant \varepsilon c$ и $e'' - e \leqslant \varepsilon c$. Привлекая (а), (б) и (г), можем написать:

$$Se - Se' \leqslant S(e - e') \leqslant U(e - e') \leqslant \varepsilon Uc,$$

ибо оператор U положителен. Точно так же $Se'' - Se \leqslant \varepsilon Uc$. Но тогда в силу изотонности оператора S на $\mathscr{F}(c)$ будет $Se' - Se \leqslant Se'' - Se \leqslant \varepsilon Uc$, следовательно, $|Se - Se'| \leqslant \varepsilon Uc$. Ясно, что такое же неравенство верно для e''.

Подберем теперь попарно дизъюнктные проекторы $\pi_1, \dots, \pi_n$, $\pi_1 + \dots + \pi_n = I_E$ и неотрицательные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, $\mu_1, \dots, \mu_n$ так, чтобы для элементов

$e' := \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \pi_k c$ и $f' = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \pi_k c$ выполнялись неравенства $e' \leqslant e$, $f' \leqslant f$, $e - e' \leqslant \varepsilon c$ и $f - f' \leqslant \varepsilon c$. Тогда в силу доказанного

$$|Se - Se'| \leqslant \varepsilon Uc, \quad |Sf - Sf'| \leqslant \varepsilon Uc, \quad |S(f+e) - S(f'+e')| \leqslant 2\varepsilon Uc.$$

С другой стороны, учитывая (а) и (в), имеем

$$S(e'+f') = S\left(\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k + \mu_k)\pi_k c\right) = \sum_{k=1}^{n}(\lambda_k + \mu_k)S(\pi_k c) =$$
$$= S\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k \pi_k c\right) + S\left(\sum_{k=1}^{n}\mu_k \pi_k c\right) = Se' + Sf'.$$

Принимая в расчет указанные свойства элементов e' и f', можем написать:

$$|S(e+f) - Se - Sf| \leqslant |Se - Se'| + |Sf - Sf'| + |S(e+f) - S(e'+f')| \leqslant 4\varepsilon Uc.$$

Произвол в выборе ε дает $S(e+f) = Se + Sf$. $\triangleright$

2.2.5. Теорема. *Предположим, что E — векторная решетка с проекциями на главные компоненты, X разложимо, а F порядково полна. Тогда для любого оператора $T \in M(X,Y)$ справедлива формула*

$$|T|e = \sup\left\{\sum_{k=1}^{n}|T\pi_k x| : x \in X,\ |x| = e,\ \pi_1,\dots,\pi_n \in \mathfrak{P}(X),\right.$$
$$\left.\pi_k \circ \pi_l = 0\ (l \neq k),\ \sum_{k=1}^{n}\pi_k = I_X,\ n \in \mathbb{N}\right\} \quad (e \in E_{0+}).$$

$\triangleleft$ Обозначим через Se правую часть требуемого равенства. Покажем, что оператор $S : E_{0+} \to F$ удовлетворяет условиям (а)–(г) из 2.2.4. Согласно 2.2.1 $E_0 := E_{0+} - E_{0+}$ — o-идеал в E и $E_{0+} = |X|$, поэтому Se определен для каждого $e \in E_{0+}$. Положительная однородность S не вызывает сомнений. Очевидно также, что $Se \leqslant |T|e$ $(e \in E_{0+})$. Пусть $e, f \in E_{0+}$ и $x \in X$ таковы, что $|x| = e+f$. Ввиду разложимости X имеем $x = y+z$, $|y| = e$, $|z| = f$ для некоторых $y, z \in X$. Возьмем попарно дизъюнктные проекторы $\pi_1,\dots,\pi_n \in \mathfrak{P}(X)$, $\pi_1 + \dots + \pi_n = I_X$. Ясно, что

$$\sum_{k=1}^{n}|T\pi_k x| \leqslant \sum_{k=1}^{n}|T\pi_k y| + \sum_{k=1}^{n}|T\pi_k z| \leqslant Se + Sf.$$

Переход к точной верхней границе по указанным $x, \pi_1,\dots,\pi_n$ дает $S(e+f) \leqslant Se + Sf$. Обратное неравенство справедливо для дизъюнктных e и f. В самом деле, пусть π — проектор на компоненту $\{e\}^{\perp\perp}$ и $\rho := \pi^{\perp}$. Если $\rho_1,\dots,\rho_m$ — попарно дизъюнктные проекторы из $\mathfrak{P}(X)$ с единичной суммой, то проекторы $\pi\pi_k, \rho\rho_l$ $(k := 1,\dots,n; l := 1,\dots,m)$ также попарно дизъюнктны и их сумма равна I_X. Кроме того, $y = \pi x$ и $z = \rho x$. Тем самым имеют место оценки

$$\sum_{k=1}^{n}|T\pi_k y| + \sum_{l=1}^{n}|T\rho_l z| = \sum_{k=1}^{n}|T\pi\pi_k x| + \sum_{l=1}^{m}|T\rho_l \rho x| \leqslant S(e+f).$$

Переходя к супремуму по $y, z, \pi_1,\dots,\pi_n, \rho_1,\dots,\rho_m$, получим требуемое неравенство. Согласно 2.2.4 оператор S аддитивен. Продолжим S на все E, как в 2.2.2. Тогда S — положительный оператор, $S \leqslant |T|$ и $|Tx| \leqslant S(|x|)$ $(x \in X)$. Отсюда видно, что $S = |T|$. $\triangleright$

2.2.6. Линейный оператор $T : X \to Y$ назовем *субмажорируемым*, если существует возрастающий сублинейный оператор $P : E \to F$, называемый *субмажорантой* T, такой, что $|Tx| \leqslant P(|x|)$ $(x \in X)$. Субмажоранта P называется нормальной, если $Pe = P(e^+)$ $(e \in E)$.

Если пространство X разложимо, а решетка F порядково полна, то для субмажорируемого оператора T существует наименьшая нормальная субмажоранта $[T]$, и она может быть вычислена по формуле

$$[T]e := \sup\{|Tx| : |x| \leqslant e^+\} \quad (e \in E).$$

В этих же предположениях оператор T будет субмажорируемым в том и только в том случае, если для каждого $e \in E_+$ множество $\{|Tx| : |x| \leqslant e\}$ ограничено в решетке F.

Субмажорируемые операторы интересны сами по себе, однако здесь нас интересует вопрос о том, когда наименьшая субмажоранта $[T]$ совпадает с точной мажорантой $|T|$ и, следовательно, последняя может быть вычислена по указанной выше более простой формуле.

2.2.7. *Предположим, что (X, E) и (Y, F) те же, что и в 2.2.5. Оператор $T : X \to Y$ будет мажорируемым в том и только в том случае, если для каждого $e \in E_+$ множество*

$$\mathscr{U}(e) := \left\{ \sum_{k=1}^{n} |T \circ \pi_k x| : x \in X,\ |x| = e,\ \pi_1, \dots, \pi_n \in \mathfrak{P}(X), \right.$$
$$\left. \pi_k \circ \pi_l = 0 (l \neq k),\ \sum_{k=1}^{n} \pi_k = I_X,\ n \in \mathbb{N} \right\},$$

порядково ограничено. При этом точная мажоранта может быть вычислена как в 2.2.5.

$\lhd$ Предложение 2.2.4 остается в силе, если условие 2.2.4 (г) ослабить и потребовать наличия у S сублинейной мажоранты, т. е. сублинейного и изотонного оператора $U : E \to F$. Если указанные множества порядково ограничены, то оператор $Ue := \sup \mathscr{U}(e^+)$ $(e \in E)$ сублинеен и изотонен, стало быть, он аддитивен на конусе E_+. Оператор $S : E_+ \to F_+$ можно определить так же, как и в 2.2.5, причем в приведенных там рассуждениях следует заменить $|T|$ на $[T]$. Отсюда выводим, что S аддитивен. Так как $|Tx| \leqslant S(|x|)$ $(x \in X)$, то $T \in M(X, Y)$, и из 2.2.2 следует, что $S = |T|$. $\rhd$

Говорят, что оператор $T : X \to Y$ *сохраняет дизъюнктность*, если $x_1 \perp x_2$ влечет $Tx_1 \perp Tx_2$, каковы бы ни были $x_1, x_2 \in X$. $\rhd$

2.2.8. Теорема. *Пусть X разложимо и F порядково полна. Рассмотрим линейный оператор $T : X \to Y$. Допустим, что выполнено одно из условий:*

(1) *$Y = F$;*

(2) *T сохраняет дизъюнктность, а в E имеются порядковые проекторы на главные компоненты.*

Если при этом оператор T субмажорируем, то он мажорируем и $|T|e = [T]e$ $(e \in E_+)$.

$\lhd$ (1) Учитывая формулу для вычисления $[T]$ из 2.2.6 и ассоциативность точных границ, можно написать:

$$[T]e = \sup\{Tx : |x| \leqslant e\} \quad (e \in E_+).$$

Если $|x_k| \leqslant e_k$ $(k := 1, 2)$, $x = x_1 + x_2$, $e = e_1 + e_2$, то $|x| \leqslant e$ и $[T]e \geqslant Tx = Tx_1 + Tx_2$. Отсюда после перехода к точным верхним границам получим $[T]e \geqslant [T]e_1 + [T]e_2$. Итак, $[T]$ аддитивен на конусе E_+, а его распространение на E является мажорантой для T.

(2) Оператор T мажорируем в силу 2.2.7, поэтому достаточно показать, что $|T|e \leqslant [T]e$ $(e \in E_+)$.

Возьмем попарно дизъюнктные проекторы $\pi_1, \dots, \pi_n \in \mathfrak{P}(X)$. По условию $T(\pi_k x) \perp T(\pi_l x)$ $(k \neq l)$, поэтому

$$\sum_{k=1}^{n} |T(\pi_k x)| = \left| T\left(\sum_{k=1}^{n} \pi_k\right) x \right|.$$

Воспользовавшись теоремой 2.2.5, имеем

$$|T|e = \sup\{|Tx| : x \in X, |x| = e\} \leqslant [T]e \quad (e \in E_{0+}). \ \triangleright$$

2.2.9. *Возьмем субмажорируемый оператор $T : X \to Y$. Обозначим*

$$\Omega := \{A : Y \to F : |Ay| \leqslant |y| (y \in Y)\}.$$

Для каждого $A \in \Omega$ оператор $A \circ T$ мажорируем и

$$[T]e = \sup\{|A \circ T|e : A \in \Omega\} \quad (e \in E_+).$$

$\triangleleft$ По теореме Хана — Банаха — Канторовича (см. [5, II.1.3; 36, теорема IX.1.11; 53, теорема 1.4.13 (1)]) верно равенство

$$|y| = \sup\{|Ay| : A \in \Omega\} \quad (y \in Y).$$

Из 2.2.8 (1) вытекает мажорируемость оператора $A \circ T$, а также равенство $[A \cdot T]e = |A \cdot T|e$ $(e \in E_+)$. Остается привлечь формулу для $[T]$ и $[A \cdot T]$ из 2.2.6 и воспользоваться ассоциативностью точных границ. $\triangleright$

§ 2.3. Порядково непрерывные операторы

Здесь установлен простой, но весьма полезный факт: мажорируемый оператор порядково непрерывен в том и только в том случае, если он имеет порядково непрерывную мажоранту. Затем коротко рассмотрены два результата о продолжении и разложении мажорируемого оператора. Даны также новые формулы для вычисления точной мажоранты в случае порядково непрерывного оператора.

2.3.1. Оператор $T : X \to Y$ называют *порядково непрерывным* (= *o-непрерывным*), если для любой сети $(x_\alpha) \subset X$ равенство $o\text{-}\lim_\alpha x_\alpha = 0$ влечет равенство $o\text{-}\lim_\alpha Tx_\alpha = 0$. Множество всех мажорируемых o-непрерывных операторов обозначается через $M_n(X, Y)$. Итак, включение $T \in M_n(X, Y)$ означает, что $T \in M(X, Y)$ и из $|x_\alpha| \xrightarrow{(o)} 0$ следует $|Tx_\alpha| \xrightarrow{(o)} 0$. Рассматривая лишь o-сходящиеся последовательности, аналогично можно ввести понятие *секвенциально o-непрерывного* (= *σo-непрерывного*) оператора и множество $M_{\sigma n}(X, Y)$ таких операторов. Излагаемые ниже результаты имеют секвенциальные версии для операторов из $M_{\sigma n}$, однако мы ограничимся рассмотрением o-непрерывных операторов.

2.3.2. Теорема. *Пусть X разложимо, а F порядково полна. Тогда мажорируемый оператор $T : X \to Y$ o-непрерывен в том и только в том случае, если o-непрерывна его точная мажоранта:*

$$T \in M_n(X, Y) \Leftrightarrow |T| \in L_n(E, F).$$

$\triangleleft$ Допустим, что $T \in M_n(X, Y)$. Возьмем $e \in E_{0+}$ и возрастающую сеть $(e_\alpha) \subset E_{0+}$, $e := \sup e_\alpha$. Положим

$$f := \sup_\alpha \sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} |Tx_k| : x_1, \dots, x_n \in X,\ n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{n} |x_k| = e_\alpha \right\}.$$

Согласно 2.2.2 имеем $f = \sup\limits_\alpha |T|e_\alpha \leqslant |T|e$. Покажем, что $|T|e \leqslant f$. Для этого рассмотрим конечный набор $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ со свойством $|x_1| + \dots + |x_n| = e$. При фиксированном α каждому $k := 1, \dots, n$ отвечает такое представление $x_k := u_{k,\alpha} + v_{k,\alpha}$, что

$$|x_k| = |u_{k,\alpha}| + |v_{k,\alpha}|, \quad \sum_{k=1}^n |u_{k,\alpha}| = e_\alpha, \quad \sum_{k=1}^n |v_{k,\alpha}| = e - e_\alpha.$$

Так как $e - e_\alpha$ убывает и o-сходится к нулю, то $|x_k - u_{k,\alpha}| = |v_{k,\alpha}| \xrightarrow{(o)} 0$ для каждого $k := 1, \dots, n$. Тем самым

$$\sum_{k=1}^n |Tx_k| = o\text{-}\lim_\alpha \left(\sum_{k=1}^n |Tu_{k,\alpha}| \right).$$

В то же время, для фиксированного β будет

$$\sum_{k=1}^n |Tu_{k,\beta}| \leqslant \sup \left\{ \sum_{k=1}^n |Tu_k| : u_1, \dots, u_n \in X,\ n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^n |u_k| = e_\beta \right\} =$$
$$= |T|e_\beta \leqslant \sup_\alpha |T|e_\alpha = f.$$

Переход к o-пределу по β в последнем соотношении дает неравенство

$$\sum_{k=1}^n |Tx_k| \leqslant f.$$

Взяв, наконец, супремум по $\{x_1, \dots, x_n\}$, получим $|T|e \leqslant f$. Отсюда вытекает, что на o-идеале $E_0 := E_{0+} - E_{0+}$ (см. 2.2.1) оператор $|T|$ порядково непрерывен. В силу 2.2.2 оператор $|T|$ на всем E совпадает со своим минимальным распространением с идеала E_0. Однако нетрудно показать, что минимальное распространение o-непрерывного оператора будет o-непрерывным. ▷

2.3.3. Теорема. *Предположим, что* (X, E) *— разложимое* РНП, а $(\widetilde{X}, \widetilde{E})$ *— его o-пополнение. Пусть* (Y, F) *— o-полное* РНП. *Для произвольного порядково непрерывного мажорируемого оператора* $T : X \to Y$ *существует единственное порядково непрерывное продолжение* $\widetilde{T}$ *на* $\widetilde{X}$ *с сохранением точной мажоранты. Последнее означает, что* $\widetilde{T} \in M(\widetilde{X}, Y)$ *и* $|\widetilde{T}|$ *— продолжение оператора* $|T| : E \to F$ *на* $\widetilde{E}$ *по o-непрерывности.*

◁ Пусть $T \in M_n(X, Y)$. По теореме 2.3.2 оператор $|T| \in L_n(E, F)$ порядково непрерывен, следовательно, допускает единственное o-непрерывное продолжение $0 \leqslant \Phi \in L_n(\widetilde{E}, F)$ (см. [21, теорема X.4.1]). Покажем существование такого продолжения $\widetilde{T}$, что $|\widetilde{T}| = \Phi$.

Сначала определим оператор $\widetilde{T}$ на элементах вида πx, где $x \in X$ и $\pi \in \mathfrak{P}(\widetilde{X})$. Положим $A := \{e \in E_+ : \pi e = e, e \leqslant |x|\}$. Для $e \in A$ существует элемент $x_e \in X$ такой, что $|x_e| = e$ и $|x - x_e| = |x| - e$. Сеть $(x_e)_{e \in A}$ o-сходится к πx, так как $\pi x_e = x_e$ и

$$|\pi x - x_e| = \pi|x| - e \xrightarrow{(o)} 0.$$

В силу o-непрерывности оператора T сеть $(Tx_e)_{e \in A}$ будет o-фундаментальной. Учитывая o-полноту Y, можно определить $\widetilde{T}(\pi x) := o\text{-}\lim\limits_e Tx_e$. Предельный переход в неравенстве $|Tx_e| \leqslant |T|(|x_e|)$ дает $|\widetilde{T}(\pi x)| \leqslant \Phi(|\pi x|)$. Пусть теперь

$E_0 \subset \widetilde{E}$ и $X_0 \subset \widetilde{X}$ состоят соответственно из элементов вида $\sum\limits_{k=1}^{n} \pi_k e_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{n} \pi_k x_k$, где $e_k \in E$, $x_k \in X$ и $\pi_k \in \mathfrak{P}(\widetilde{X})$. Тогда (X_0, E_0) — РНП с разложимой нормой, причем E_0 — решетка с проекциями. На X_0 можно определить оператор $\widetilde{T}$ равенством

$$\widetilde{T}\left(\sum_{k=1}^{n} \pi_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{T}(\pi_k x_k).$$

Получим оператор $\widetilde{T} \in M(X_0, Y)$ с мажорантой Φ.

Далее воспользуемся предложением 1.3.9, согласно которому X_0 o-плотно в $\widetilde{X}$. Элемент $x \in \widetilde{X}$ имеет вид $x = o\text{-}\lim x_\alpha$ для некоторой сети $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ в X_0. Повторив приведенные выше рассуждения, можно определить оператор $\widetilde{T} \in M(\widetilde{X}, Y)$, полагая $\widetilde{T}x = o\text{-}\lim \widetilde{T}x_\alpha$. При этом $|\widetilde{T}x| \leqslant \Phi(|x|)$ $(x \in \widetilde{X})$. В частности, $|\widetilde{T}| \leqslant \Phi$ и оператор $\widetilde{T}$ o-непрерывен. В силу 2.3.2 $|\widetilde{T}|$ также o-непрерывный оператор. Ясно, что ограничение $|\widetilde{T}|$ на E мажорируется оператором $|T|$. Итак, o-непрерывные операторы $|\widetilde{T}|$ и Φ совпадают на E, следовательно, $\Phi = |\widetilde{T}|$. $\triangleright$

2.3.4. Теорема. *Предположим, что X разложимо, F порядково полна, а оператор $T \in M(X, Y)$ порядково непрерывен. Тогда точная мажоранта $|T|$ может быть найдена по формуле*

$$|T|e = \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} |Tx_k| : x_k \perp x_l\ (k \neq l),\ |x_k| \leqslant e,\right.$$
$$\left. x_1, \dots, x_n \in X,\ n \in \mathbb{N}\right\} \quad (e \in E_+).$$

$\triangleleft$ Обозначим через Se правую часть требуемого равенства. Очевидно, что оператор $S : E_+ \to F_+$ положительно однороден и изотонен. Рассуждения, аналогичные приведенным в 2.2.2 и 2.2.5, показывают, что S субаддитивен и ортогонально аддитивен. Ясно также, что $Se \leqslant |T|e$ $(e \in E_+)$. Далее, согласно 2.3.2 оператор $|T|$ порядково непрерывен. Если сеть (e_α) возрастает и o-сходится к e, то в силу изотонности и субаддитивности S получаем

$$0 \leqslant Se - Se_\alpha \leqslant S(e - e_\alpha) \leqslant |T|(e - e_\alpha) \to 0.$$

Отсюда вытекает порядковая непрерывность S. Пусть $\widetilde{E}$ — o-пополнение E. Для $\tilde{e} \in \widetilde{E}_+$ положим $\widetilde{S}\tilde{e} := \sup\{Se : e \in E_+,\ e \leqslant \tilde{e}\}$. Из-за o-непрерывности S верно также равенство

$$\widetilde{S}\tilde{e} = \inf\{Se : e \in E_+, e \geqslant \tilde{e}\} \quad (\tilde{e} \in \widetilde{E}_+).$$

Из этих формул следует, что оператор $\widetilde{S} : \widetilde{E}_+ \to F$ удовлетворяет всем условиям 2.2.4, значит, он аддитивен. Тогда оператор S также аддитивен, поэтому $Se = |T|e$ $(e \in E_+)$. $\triangleright$

2.3.5. Отметим еще три формулы для вычисления точной мажоранты o-непрерывного оператора.

(1) *В условиях теоремы* 2.3.3 *имеет место формула*

$$|\widetilde{T}|e = \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} |Tx_k| : x_k \perp x_l\ (k \neq l,\ x_k \in X,\ |x_k| \leqslant e,\right.$$
$$\left. k := 1, \dots, n,\ n \in \mathbb{N}\right\} \quad (e \in \widetilde{E}_+).$$

$\triangleleft$ Следует из 2.2.3 и 2.3.3. $\triangleright$

(2) *Пусть X — банахово пространство, а $\widetilde{E}$ — о-пополнение векторной решетки E. Если $T \in M_n(\widetilde{E}(X), Y)$, то*

$$|T|\tilde{e} = \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} |T(x_k \otimes e_k)| : e_k \perp e_l \ (k \neq l), \ e_k \in E_+, \ e_k \leqslant \tilde{e}, \right.$$

$$\left. x_k \in X, \ \|x_k\| \leqslant 1, \ k := 1, \dots, n, \ n \in \mathbb{N}\right\} \quad (\tilde{e} \in \widetilde{E}_+).$$

◁ Пусть X_0 — множество элементов из $\widetilde{E}(X)$ вида $u := \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \otimes e_k$, где $x_1, \dots, x_n \in X$ произвольны, а $e_1, \dots, e_n \in E$ попарно дизъюнктны. В представлении элемента u можно считать $\|x_k\| \leqslant 1$, ибо в противном случае можно заменить $x_k := x_k/\|x_k\|$ и $e_k := \|x_k\|e_k$. Легко видеть, что (X_0, E) — разложимое РНП. Следовательно, для $\tilde{e} \in E_+$ требуемая формула следует из 2.3.4. Для $\tilde{e} \in \widetilde{E}_+$ нужно воспользоваться формулой

$$|T|\tilde{e} = \sup\{|T|e : e \in E_+, \ e \leqslant \tilde{e}\},$$

справедливой в силу о-непрерывности оператора $|T|$. ▷

(3) *Если выполнены условия (2) и $E = \widetilde{E}$, то*

$$|T|e = \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} |T(x_k \otimes e_k)| : x_k \in X, \ \|x_k\| \leqslant 1, \ e_k \in E_+ \right.$$

$$\left. (k = 1, \dots, n), \ n \in \mathbb{N}, \ e_k \perp e_l \ (k \neq l), \ \sum_{k=1}^{n} e_k = e\right\} \quad (e \in E_+).$$

◁ В этой ситуации к ограничению T_0 оператора T на X_0 можно применить теорему 2.2.5. Тем самым получим требуемую формулу для $|T_0|$. Учитывая, что $E(X)$ есть о-пополнение X_0, можно применить теорему 2.3.3, согласно которой $|T| = |T_0|$. ▷

2.3.6. Оператор $T : X \to Y$ называют ***вполне аддитивным***, если для любого о-суммируемого семейства $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ попарно дизъюнктных элементов $(x_\alpha \perp x_\beta$, $\alpha \neq \beta)$ семейство (Tx_α) также суммируемо и при этом

$$T\Big(\sum_{\alpha \in A} x_\alpha\Big) = \sum_{\alpha \in A} Tx_\alpha.$$

Допустим, что выполнены условия теоремы 2.2.5. Мажорируемый оператор $T \in M(X, Y)$ вполне аддитивен в том и только в том случае, если вполне аддитивна его точная мажоранта $|T|$.

◁ Предположим, что оператор T вполне аддитивен. Возьмем $x \in X$ и конечное разбиение единицы $\pi_1, \dots, \pi_n \in \mathfrak{P}(X)$. Пусть $e := |x| = \sum\limits_{\alpha \in A} e_\alpha$, где $e_\alpha \in E_+$ и $e_\alpha \perp e_\beta$ $(\alpha \neq \beta)$, а ρ_α — проектор на компоненту $\{e_\alpha\}^{\perp\perp}$. Учитывая полную аддитивность оператора T, можно написать:

$$\sum_{k=1}^{n} |T(\pi_k x)| = \sum_{k=1}^{n} \Big|T\Big(\sum_{\alpha \in A} \rho_\alpha \pi_k x\Big)\Big| = \sum_{k=1}^{n} \Big|\sum_{\alpha \in A} T(\rho_\alpha \pi_k x)\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\alpha \in A} \sum_{k=1}^{n} |T(\pi_k \rho_\alpha x)| \leqslant \sum_{\alpha \in A} |T|(\rho_\alpha |x|).$$

Отсюда в соответствии с теоремой 2.2.5 выводим:

$$|T|e \leqslant \sum_{\alpha\in A} |T|e_\alpha.$$

Так как противоположное неравенство очевидно, тем самым получаем полную аддитивность оператора $|T|$ на конусе E_{0+}. Если же $e, e_\alpha \in E_+$, то для произвольного $e' \in E_{0+}$, $e' \leqslant e$, в силу уже доказанного

$$|T|e' = \sum_{\alpha\in A} |T|(\rho_\alpha e') \leqslant \sum_{\alpha\in A} |T|e_\alpha.$$

Значит, после перехода к супремуму по e' получим вновь $|T|e \leqslant \sum |T|e_\alpha$. Наконец, если $e \in E$, то

$$\begin{aligned}|T|e = |T|e^+ - |T|e^- &= \sum_{\alpha\in A} |T|\rho_\alpha e^+ - \sum_{\alpha\in A} |T|\rho_\alpha e^- \\ &= \sum_{\alpha\in A} |T|(\rho_\alpha e^+ - \rho_\alpha e^-) = \sum_{\alpha\in A} |T|(\rho_\alpha e).\end{aligned}$$

Итак, если T вполне аддитивен, то и $|T|$ вполне аддитивен. Обратное утверждение очевидно. $\rhd$

2.3.7. Теорема. *Пусть E — векторная решетка с проекциями на главные компоненты, X разложимо, а F порядково полна. Для мажорируемого оператора $T \in M(X,Y)$ равносильны утверждения:*

(1) *T порядково непрерывен;*

(2) *T вполне аддитивен.*

$\lhd$ Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) очевидна. Докажем (2) $\Rightarrow$ (1). Достаточно показать, что $|T|$ — порядково непрерывный оператор. Согласно 2.3.6 оператор $|T|$ вполне аддитивен. Возьмем убывающую сеть $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ в E, o-сходящуюся к нулю. Зафиксируем индекс $\alpha_0 \in A$ и положим $e_0 := e_{\alpha_0}$. Для произвольного числа $\varepsilon > 0$ найдется разбиение единицы $(\rho_\alpha)_{\alpha\geqslant\alpha_0}$ в $\mathfrak{P}(E)$ такое, что $\rho_\alpha e_\alpha \leqslant \varepsilon e_0$ $(\alpha \geqslant \alpha_0)$. Пусть $f := \inf_{\alpha\in A} |T|e_\alpha$ и $\pi_\theta := \sum_{\alpha\in\theta} \rho_\alpha$, где θ — конечное подмножество $\{\alpha \in A : \alpha \geqslant \alpha_0\}$. Подберем $\beta \in A$ так, чтобы $\beta \geqslant \alpha$ для всех $\alpha \in \theta$. Тогда $\pi_\alpha e_\beta \leqslant \pi_\alpha e_\alpha \leqslant \varepsilon e_0$ $(\alpha \in \theta)$, значит,

$$f \leqslant |T|e_\beta = |T|(\pi_\theta e_\beta) + |T|(I_E - \pi_\theta)e_\beta \leqslant \varepsilon|T|e_0 + |T|(I_E - \pi_\theta)e_0.$$

Из полной аддитивности оператора $|T|$ вытекает равенство

$$o\text{-}\lim_\theta |T|(I_E - \pi_\theta)e_0 = 0,$$

поэтому $f \leqslant \varepsilon|T|e_0$. Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то $f = 0$. Следовательно, оператор $|T|$ порядково непрерывен. $\rhd$

2.3.8. Рассмотрим коротко вопрос о разложении мажорируемого оператора на o-непрерывную и порядково сингулярную части. Такие результаты принято называть теоремами типа Иосиды — Хьюитта из-за классического факта о разложении меры на счетно-аддитивную и чисто конечно-аддитивную части.

Мажорируемый оператор называют ***порядково сингулярным*** (= ***o-сингулярным***) или ***антинормальным***, если он дизъюнктен каждому o-непрерывному мажорируемому оператору. Обозначим через $M_{os}(X,Y)$ множество всех мажорируемых o-сингулярных операторов из X в Y. Тогда данное определение можно переписать так:

$$T \in M_{os}(X,Y) \Leftrightarrow T \perp M_n(X,Y).$$

Ясно, что оператор $T \in M(X,Y)$ будет сингулярным в том и только в том случае, если он не имеет ненулевых o-непрерывных осколков, т. е. если T нельзя представить в виде дизъюнктной суммы двух ненулевых операторов, один из которых o-непрерывен.

Приведем один вариант теоремы Иосиды — Хьюитта для мажорируемых операторов. Для простоты ограничимся случаем, когда E — решетка с проекциями. Введем два направленных множества Γ и Δ. Пусть Γ — множество всех разбиений единицы в булевой алгебре $\mathfrak{P}(X)$, упорядоченное по «вписанности». Точнее, если γ и γ' — разбиение единицы в $\mathfrak{P}(X)$, то $\gamma \leqslant \gamma'$ означает, что для любого $\pi' \in \gamma'$ существует $\pi \in \gamma$ такой, что $\pi \leqslant \pi'$. Пусть множество Δ состоит из всех направленных вверх подмножеств $\delta \subset \mathfrak{P}(X)$ таких, что $\sup \delta = I_X$. Порядок в Δ вводится, как и выше:

$$\delta \leqslant \delta' \leftrightarrow (\forall \pi' \in \delta')(\exists \pi \in \delta)\, \pi \leqslant \pi'.$$

Рассмотрим теперь две формулы:

$$T_n x := o\text{-}\lim_{\gamma \in \Gamma} o\text{-}\sum_{\pi \in \gamma} T \circ \pi x \quad (x \in X); \tag{1}$$

$$T_n x := o\text{-}\lim_{\delta \in \Delta} o\text{-}\lim_{\pi \in \delta} T \circ \pi x \quad (x \in X). \tag{2}$$

2.3.9. *Теорема.* *Пусть (X,E) — разложимое РНП, (Y,F) — o-полное РНП, E — решетка с проекциями, F — K-пространство. Тогда для любого $T \in M(X,Y)$ каждая из формул 2.3.6 (1, 2) корректно определяет мажорируемый оператор $T_n : X \to Y$. При этом $T_n \in M_n(X,Y)$, $T - T_n \in M_{os}(X,Y)$ и для точных мажорант имеют место соотношения $|T_n| = |T|_n$, $|T - T_n| = |T| - |T_n|$. Разложение T с указанными свойствами единственно.*

$\lhd$ Доказательство см. в [54]. $\rhd$

2.3.10. Аналогичный результат имеет место для σo-непрерывной составляющей T_σ оператора $T \in M(X,Y)$. При этом T_σ можно вычислить по формуле 2.3.8 (1), где вместо Γ нужно взять множество $\Gamma_\sigma \subset \Gamma$, состоящее из счетных разбиений единицы. Оператор $T - T_\sigma$ будет σo-сингулярным в том смысле, что он дизъюнктен всем σo-непрерывным операторам. Для точных мажорант верно $|T_\sigma| = |T|_\sigma$ и $|T - T_\sigma| = |T| - |T_\sigma|$.

Из 3.2.9 вытекает, в частности, что мажорируемый оператор T o-сингулярен в том и только в том случае, если o-сингулярен оператор $|T|$. В самом деле, если $T \in M_{os}(X,Y)$, то $\mathbf{0} = |T_n| = |T|_n$.

§ 2.4. Разложимость пространства мажорируемых операторов

Здесь мы установим, что множество мажорируемых операторов с мажорантной нормой является ПБК. Основная трудность — доказательство разложимости мажорантной нормы.

2.4.1. Нам потребуются некоторые сведения о булевой алгебре $\mathfrak{C}(\Phi)$ осколков положительного оператора $\Phi : E \to F$, где E — векторная решетка, а F — K-пространство.

Для произвольного оператора $e \in E_+$ определим оператор $\pi_e\Phi : E \to F$ формулами

$$\pi_e\Phi : u \mapsto \sup\{\Phi(u \wedge (ne)) : n \in \mathbb{N}\} \quad (u \in E_+),$$

$$\pi_e\Phi : u \mapsto \pi_e\Phi u^+ - \pi_e\Phi u^- \quad (u \in E_+).$$

Оператор $\pi_e\Phi$ является осколком Φ. Пусть $\mathfrak{P}(\Phi)$ — множество всех порядковых проекторов в K-пространстве $\{\Phi\}^{\perp\perp}$, т. е. $\mathfrak{P}(\Phi) = \mathfrak{P}(\{\Phi\}^{\perp\perp})$. Булевы алгебры

$\mathfrak{E}(\Phi)$ и $\mathfrak{P}(\Phi)$ изоморфны. При этом осколку $\pi_e\Phi$ соответствует проектор π_e : $\Psi \mapsto \pi_e\Psi$ $(\Psi \in \{\Phi\}^{\perp\perp})$. Если $\pi \in \mathfrak{P}(F)$, то проектор $\Psi \mapsto \pi\Psi$ обозначаем той же буквой π. Введем теперь множества $\mathscr{A}(\Phi) \subset \mathfrak{E}(\Phi)$ и $\mathscr{P}(\Phi) \subset \mathfrak{P}(\Phi)$ формулами

$$\mathscr{A}(\Phi) := \left\{ \bigvee_{k=1}^{n} \sigma_k \circ \pi_{e_k}\Phi \right\}, \quad \mathscr{P}(\Phi) := \left\{ \bigvee_{k=1}^{n} \sigma_k \circ \pi_{e_k} \right\},$$

где $e_1, \dots, e_n \in E_+$ и $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in \mathfrak{P}(F)$ — произвольные конечные наборы, $\sigma_k \circ \sigma_l = 0$ $(k \neq l)$. Для множества M в булевой алгебре $\mathbb{B}$ обозначим символом $M^{\downarrow}$ множество всех элементов $b \in \mathbb{B}$ вида $b = \inf b_\alpha$, где $(b_\alpha) \subset M$ — направленная вниз сеть. Аналогично определяются $M^{\uparrow}$ и $M^{\downarrow\uparrow} := (M^{\downarrow})^{\uparrow}$. Имеют место следующие равенства:

$$\mathfrak{E}(\Phi) = \mathscr{A}(\Phi)^{\downarrow\uparrow}; \quad \mathfrak{P}(\Phi) = \mathscr{P}(\Phi)^{\downarrow\uparrow}.$$

2.4.2. В случае разложимого РНП X множество $M(X,Y)$ является также РНП, ибо для каждого мажорируемого оператора T определена мажорантная норма $|T| \in L_r(E,F)$ (см. 2.1.2). Аксиомы нормы очевидны; неравенство треугольника вытекает из включения $\mathrm{maj}(T_1 + T_2) \supset \mathrm{maj}(T_1) + \mathrm{maj}(T_2)$. Нетривиальной является разложимость мажорантной нормы; она доказывается ниже в 2.4.3, 2.4.4.

Если X разложимо, а Y o-полно, то РНП $M(X,Y)$ *также будет o-полным.*

$\lhd$ Доказательство следует стандартной схеме. Если (T_α) — o-фундаментальная сеть в $M(X,Y)$, то в силу нормативного неравенства из 2.1.1 фундаментальной будет сеть $(T_\alpha x)$ при любом $x \in X$. Тем самым существует линейный оператор $T : X \to Y$, действующий по формуле $Tx = o\text{-}\lim T_\alpha x$. Допустим, что при $\alpha, \beta \geqslant \gamma$ имеем $|T_\alpha - T_\beta| \leqslant S_\gamma$, где S_γ убывает и сходится к нулю. Тогда для $x_1, \dots, x_n \in X$ таких, что $|x_1| + \dots + |x_n| \leqslant e$, будет

$$\sum_{k=1}^{n} |T_\alpha x_k - T_\beta x_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} S_\gamma(|x_k|) \leqslant S_\gamma(e).$$

Переход к o-пределу по α, а затем к супремуму по всем конечным наборам $\{x_1, \dots, x_n\}$ указанного вида приводит к оценке $|T - T_\alpha| \leqslant S_\gamma$ при всех $\alpha \geqslant \gamma$, т. е. $o\text{-}\lim T_\alpha = T$. $\rhd$

2.4.3. (1) *Для любых $e \in E_+$ и $T \in M(X,Y)$ существует единственный оператор $\pi_e T \in M(X,Y)$ такой, что $|\pi_e T| = \pi_e |T|$ и $|T - \pi_e T| = |T| - \pi_e |T|$.*

$\lhd$ Обозначим $\Phi := |T|$. Последовательность $(x_n) \subset T$ назовем *срезающей* для $x \in X$, если $o\text{-}\lim \pi_e \Phi(|x - x_n|) = 0$ и $o\text{-}\lim \pi_e^{\perp} \Phi(|x_n|) = 0$. Для такой последовательности существует $o\text{-}\lim T x_n = 0$. В самом деле,

$$\begin{aligned} |Tx_{n+k} - Tx_n| &\leqslant \Phi(|x_{n+k} - x_n|) \leqslant \pi_e \Phi(|x - x_{n+k}|) \\ &\quad + \pi_e \Phi(|x - x_n|) + \pi_e^{\perp} \Phi(|x_n|) + \pi_e^{\perp} \Phi(|x_{n+k}|). \end{aligned}$$

Все четыре слагаемых из правой части неравенства o-сходятся к нулю. Значит, последовательность (Tx_n) o-фундаментальна и существует требуемый o-предел. Аналогично можно убедиться в том, что если (y_n) — любая другая срезающая для x последовательность, то $o\text{-}\lim |Tx_n - Ty_n| = 0$. Срезающую последовательность для произвольной точки $x \in X$ можно построить так. Положим $a_n := |x| \wedge (ne)$ и $b_n := |x| - a_n = (|x| - ne)^+$. Ввиду разложимости X существует такая последовательность $(x_n) \subset X$, что $|x_n| = a_n$ и $|x - x_n| = b_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Понятно, что

$$\pi_e \Phi(|x - x_n|) = \pi_e \Phi(b_n) \xrightarrow{o} \pi_e \pi_e^{\perp} \Phi(|x|) = 0,$$

$$\pi_e^\perp \Phi(|x_n|) = \pi_e^\perp \Phi(a_n) \xrightarrow{o} \pi_e^\perp \pi_e \Phi(|x|) = 0.$$

Итак, корректно определен оператор $\pi_e T : X \to Y$ по формуле $\pi_e T x = o\text{-}\lim T x_n$, где (x_n) — срезающая последовательность для x. Заметим далее, что если (y_n) и (z_n) — срезающие последовательности для y и z соответственно, то последовательность $(y_n + z_n)$ будет срезающей для $y + z$. Отсюда с учетом определения оператора $\pi_e T$ легко вытекает, что $\pi_e T(y + z) = \pi_e T y + \pi_e T z$. Мажорируемость $\pi_e T$ видна из соотношений

$$|\pi_e T x| = o\text{-}\lim |T x_n| \leqslant o\text{-}\lim \Phi(|x_n|) = \pi_e \Phi(|x|).$$

Итак, $\pi_e T \in M(X, Y)$ и $|\pi_e T| \leqslant \pi_e \Phi$. Для оператора $T - \pi_e T$ можем написать аналогичные соотношения:

$$|(T - \pi_e T)x| = o\text{-}\lim |Tx - T x_n| \leqslant o\text{-}\lim \Phi(|x - x_n|) = \pi_e^\perp \Phi.$$

Тем самым $|T - \pi_e T| \leqslant \pi_e^\perp \Phi$. Принимая в расчет полученные неравенства, выводим:

$$|T| \leqslant |\pi_e T| + |T - \pi_e T| \leqslant \pi_e \Phi + \pi_e^\perp \Phi = \Phi = |T|,$$

следовательно, $|\pi_e T| = \pi_e \Phi$ и $|T - \pi_e T| = \pi_e^\perp \Phi$. Единственность очевидна. $\triangleright$

(2) Из приведенного в (1) доказательства полезно выделить следующее утверждение. *Для каждого $x \in X$ имеет место формула*

$$(\pi_e T)x = o\text{-}\lim\{T x_n : |x - x_n| = |x| - |x_n|, |x_n| = |T|(|x| \wedge ne)\}.$$

2.4.4. *Мажорантная норма $|\cdot| : M(X, Y) \to L_r(E, F)$ дизъюнктно разложима.*

$\triangleleft$ Возьмем попарно дизъюнктные проекторы $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \mathfrak{P}(F)$ и элементы $e_1, \ldots, e_n \in E_+$. Положим

$$\sigma := \bigvee_{k=1}^{n} \sigma_k \pi_k, \quad \sigma T := \sigma_1 \circ (\pi_1 T) + \cdots + \sigma_n \circ (\pi_n T),$$

где $\pi_k := \pi_{e_k}$ $(k := 1, \ldots, n)$. Тогда согласно доказанному в 2.4.3 (1)

$$|\sigma T| = \sigma_1 |\pi_1 T| + \cdots + \sigma_n |\pi_n T| = \sigma_1 \pi_1 |T| + \cdots + \sigma_1 \pi_1 |T| = \sigma |T|,$$
$$|\sigma^\perp T| = \sigma_1 |\pi_1^\perp T| + \cdots + \sigma_n |\pi_n^\perp T| = \sigma_1 \pi_1^\perp |T| + \cdots + \sigma_n \pi_n^\perp |T| = \sigma^\perp |T|.$$

Далее, пусть $\sigma \in \mathscr{P}(|T|)^\downarrow$. Существует убывающая сеть проекторов (σ_α) из $\mathscr{P}(|T|)$ такая, что $\sigma = \inf \sigma_\alpha$. Для каждого α определен оператор $\sigma_\alpha T \in M(X, Y)$, причем $|\sigma_\alpha T| = \sigma_\alpha |T|$ и $|\sigma_\alpha^\perp T| = \sigma_\alpha^\perp |T|$. Пользуясь этими равенствами и обозначив для простоты $\Phi := |T|$, получим следующую цепочку:

$$\begin{aligned} |\sigma_\alpha T - \sigma_\beta T| &= \sigma^\perp \Phi \wedge |\sigma_\alpha T - \sigma_\beta T| + \sigma \Phi \wedge |\sigma_\alpha T - \sigma_\beta T| \\ &\leqslant \sigma^\perp \Phi \wedge (\sigma_\alpha \Phi + \sigma_\beta \Phi) + \sigma \Phi \wedge (|\sigma_\alpha T - T| + |\sigma_\beta T - T|) \\ &= \sigma^\perp \Phi \wedge (\sigma_\alpha + \sigma_\beta)\Phi + \sigma \Phi \wedge (\sigma_\alpha^\perp + \sigma_\beta^\perp)\Phi. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что сеть $\sigma_\alpha T$ фундаментальна. В соответствии с 2.4.2 существует оператор $\sigma T := o\text{-}\lim \sigma_\alpha T$. Более того, выполняются равенства

$$|\sigma T| = o\text{-}\lim |\sigma_\alpha T x| = o\text{-}\lim |\sigma_\alpha T|(|x|) = o\text{-}\lim \sigma_\alpha |T|(|x|) = \sigma |T|(|x|).$$

Следовательно, $|\sigma T| \leqslant \sigma |T|$. Аналогично $|\sigma^\perp T| \leqslant \sigma^\perp |T|$, поэтому, как и в 2.4.3, имеем $|\sigma T| = \sigma |T|$, $|\sigma^\perp T| = \sigma^\perp |T|$. Теми же рассуждениями устанавливаются последние равенства для случая $\sigma \in \mathscr{P}(T)^{\downarrow\uparrow}$. Таким образом, для любых осколков $\Phi_1 := \sigma |T|$ и $\Phi_2 := \sigma^\perp |T|$ мажорантной нормы будет $T = T_1 + T_2$, $|T_k| = \Phi_k$ $(k = 1, 2)$, если $T_1 = \sigma T$ и $T_2 = \sigma^\perp T$. $\triangleright$

2.4.5. Теорема. *Пусть X — разложимое* РНП, *а Y —* ПБК. *Тогда $M(X,Y)$ —* ПБК.

$\lhd$ Доказательство содержится в 2.4.2–2.4.4, так как o-полное d-разложимое РНП разложимо. $\rhd$

Итак, в условиях теоремы 2.4.5 для каждого мажорируемого оператора $T : X \to Y$ и для любого представления $|T| = S_1 + S_2$, где $0 \leqslant S_1, S_2 : E \to F$, существуют мажорируемые операторы $T_1, T_2 : X \to Y$ такие, что $T = T_1 + T_2$ и $|T_k| = S_k$ $(k := 1, 2)$. Если операторы S_1 и S_2 дизъюнктны, то существует единственная пара операторов T_1 и T_2, удовлетворяющая указанному условию. Тем самым каждому осколку S оператора T отвечает единственный оператор $U \in M(X, y)$ такой, что $|U| = S$. Он называется *осколком* оператора T. Множество всех осколков оператора $\mathfrak{C}(T)$ имеет вид

$$\mathfrak{C}(T) = \{U \in M(X,Y) : |U| \wedge |T - U| = 0\}.$$

Множества $\mathfrak{C}(T)$ и $\mathfrak{C}(|T|)$ биективны, поэтому на $\mathfrak{C}(T)$ можно перенести структуру булевой алгебры. Так же, как и в 2.4.1, можно ввести множества $\mathfrak{A}(T)$, и при этом имеет место равенство $\mathfrak{C}(T) = \mathfrak{A}(T)^{\downarrow\uparrow}$.

Разложимость нормы в $M(X,Y)$ имеет интересные частные случаи и разнообразные приложения, из которых здесь приведем лишь один.

2.4.6. Оператор $T : X \to Y$ назовем *сингулярным*, если существует фундамент $X_0 \subset X$, на котором T обращается в нуль. Из 2.2.2 вытекает непосредственно, что мажорируемый оператор T сингулярен в том и только в том случае, когда сингулярна точная мажоранта $|T|$. Множество сингулярных мажорируемых (регулярных) операторов из X в Y (из E в F) обозначим через $M_s(X,Y)$ (соответственно $L_s(E,F)$). Нулевой идеал $\mathscr{N}_T$ оператора T вводится формулой

$$\mathscr{N}_T := \{x \in X : (\forall u \in X)\ (|u| \leqslant |x| \Rightarrow Tu = 0)\}.$$

Для положительного оператора $S : E \to F$ имеют место утверждения:

(1) $S \in L_n(E,F) \Leftrightarrow S \perp L_s(E,F)$;

(2) $S \in L_n(E,F) \Leftrightarrow (\forall 0 \leqslant U \leqslant S)\ \mathscr{N}_U \in \mathfrak{B}(E))$.

2.4.7. Теорема. *Если выполнены условия теоремы* 3.4.5, *то для оператора $T \in M(X,Y)$ равносильны утверждения:*

(1) $T \in M_n(X,Y)$;

(2) $T \perp M_s(X,Y)$;

(3) *если $U \in M(X,Y)$ и $|U| \leqslant |T|$, то $\mathscr{N}_U$ — компонента.*

$\lhd$ (1) $\Rightarrow$ (3). Если $T \in M_n(X,Y)$ и $|U| \leqslant |T|$, то в силу 2.3.2 $|U| \in L_n(E,F)$. Согласно 2.4.6 (2) $\mathscr{N}_{|U|}$ — компонента в E, и остается учесть очевидное равенство

$$\mathscr{N}_U = h(\mathscr{N}_{|U|}) := \{x \in X : |x| \in \mathscr{N}_{|U|}\}.$$

(3) $\Rightarrow$ (2). Допустим, что $|U| \leqslant |T|$ для некоторого сингулярного $U \in M(X,Y)$. Тогда $\mathscr{N}_U$ — компонента, и в то же время $X = \mathscr{N}_U^{\perp\perp} = \mathscr{N}_U$. Тем самым $U = 0$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Предположим, что $0 \leqslant S \leqslant |T|$, причем оператор S сингулярен. В соответствии с 2.4.5 существует оператор $U \in M(X,Y)$, для которого $|U| = S$. Понятно, что $U \perp T$, ибо U — сингулярный оператор. Но тогда $S \perp |T|$, т. е. $S = 0$. Это означает, что $|T| \perp L_s(E,F)$, и в силу 2.4.6 (1) и 2.3.2 получаем $T \in M_n(X,Y)$. $\rhd$

2.4.8. Итак, если выполнены условия теоремы 2.4.5, то $M_n(X,Y) = M_s(X,Y)^\perp$, а $M_s(X,Y)$ является фундаментом в $M_n(X,Y)^\perp$. В связи с теоремой Иосиды — Хьюитта представляет интерес равенство $M_s(X,Y) = M_n(X,Y)^\perp = M_{os}(X,Y)$ или, что то же, представление

(1) $M(X,Y) = M_n(X,Y) \oplus M_s(X,Y)$.

Для регулярных операторов вопрос о справедливости указанного равенства решается следующим образом. Говорят, что векторная решетка E обладает *свойством Егорова*, если для любой ограниченной двойной последовательности $e_{n,k} \in E_+$ такой, что $e_{n,k} \leqslant e_{n,k+1}$ $(k \in \mathbb{N})$ и $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} e_{n,k} = e \in E$ при всех $n \in \mathbb{N}$, существуют возрастающая последовательность $f_m \in E_+$ и функция $j : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такие, что $\sup f_m = e$ и $f_m \leqslant e_{n,j(m,n)}$ $(n, m \in \mathbb{N})$.

(2) **Теорема.** *Пусть E — векторная решетка со свойством Егорова, F — K-пространство счетного типа. Тогда*

$$L_r(E,F) = L_n(E,F) \oplus L_s(E,F).$$

$\lhd$ Доказательство см. [17, 89]. $\rhd$

2.4.9. Теорема. *Пусть (X,E) — разложимое* РНП *и E обладает свойством Егорова, (Y,F) —* ПБК *и F — K-пространство счетного типа. Тогда имеет место представление* 2.4.8 (1).

$\lhd$ Доказательство следует из 2.4.5 и 2.4.8 (2). $\rhd$

2.4.10. Рассмотрим еще одну компоненту в $M(X,Y)$. Пусть $J(E,F)$ — компонента в $L_r(E,F)$, порожденная множеством конечномерных o-непрерывных функционалов: $J(E,F) := (E'_n \otimes F)^{\perp\perp}$. Положим

$$M_J(X,Y) := \{T \in M(X,Y) : |T| \in J(E,F)\}.$$

Элементы $M_J(X,Y)$ называют *почти интегральными* операторами. Для того чтобы получить внутреннее описание компоненты M_J, необходимо понятие $*$-сходимости П. С. Александрова и П. С. Урысона. Напомним, что последовательность $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в E называют *$*$-сходящейся* к $e \in E$ (по отношению к o-сходимости) и пишут $e_n \xrightarrow{*} e$, если всякая ее подпоследовательность $(e_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ содержит подпоследовательность $(e_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$, o-сходящуюся к x. Оператор $T : X \to Y$ назовем *$*$-o-непрерывным*, если он o-непрерывен и каждую ограниченную $*$-сходящуюся к нулю последовательность $(x_n \in X, |x_n| \xrightarrow{*} 0)$ переводит в o-сходящуюся к нулю последовательность $(Tx_n \xrightarrow{o} 0)$. Обозначим через $M_{*n}(X,Y)$ множество всех $*$-o-непрерывных мажорируемых операторов из X в Y, и пусть $L_{*n}(E,F) := M_{*n}(E,F)$.

Легко видеть, что $M_{*n}(X,Y)$ — компонента. В самом деле, непосредственно из определений вытекает, что $M_{*n}(X,Y)$ — порядковый идеал. Далее, если $x_n \xrightarrow{*} 0$ и $T_\alpha \xrightarrow{o} T$, где $x_n \in X$, $|x_n| \leqslant e \in E$, и $T_\alpha \in M_{*n}(X,Y)$, то $Tx_n \xrightarrow{(o)} 0$, так как $|Tx_n| \leqslant |T - T_\alpha|(e) + |T_\alpha x_n|$.

2.4.11. Теорема. *Пусть X и Y —* ПБК, *причем нормирующее K-пространство F регулярно. Мажорируемый оператор из X в Y почти интегрален в том и только в том случае, если он $*$-o-непрерывен:*

$$M_J(X,Y) = M_{*n}(X,Y).$$

$\lhd$ Всякий функционал $e' \in E'_n$ является $*$-o-непрерывным, поэтому $E'_n \otimes F \subset L_{*n}(E,F)$. Так как $L_{*n}(E,F)$ — компонента, имеем $J(E,F) \subset L_{*n}(E,F)$, значит, $M_J(X,Y) \subset M_{*n}(X,Y)$.

Наоборот, допустим, что оператор $T \in M(X,Y)$ $*$-o-непрерывен. В силу разложимости наименьшей мажоранты (см. 2.4.5) существует оператор $U \in M(X,Y)$ такой, что

$$S := |U| \perp J(E,F), \quad |T - U| \in J(E,F), \quad |T| = |U| + |T - U|.$$

Если докажем, что $S = 0$, то $U = 0$ и $T \in M_J(X,Y)$. Заметим, прежде всего, что оператор U $*$-o-непрерывен, ибо таковыми являются T и $T - U$. По теореме 2.3.2 оператор S o-непрерывен, следовательно, можно предположить, не ограничивая общности, что имеются слабая порядковая единица $\mathbf{1} \in F$ и существенно положительный функционал $f \in E'_n$. Пусть $e := |x|$ для некоторого $x \in X$. Из соотношения $S \perp f \otimes \mathbf{1}$ имеем

$$\mathbf{0} = (S \wedge f \otimes \mathbf{1})e = \inf_{0 \leqslant e_0 \leqslant e} \{S(e - e_0) + f(e_0) \cdot \mathbf{1}\}.$$

Положим $A_n := \{S(e - e_0) + f(e_0) \cdot \mathbf{1} : 0 \leqslant e_0 \leqslant e, f(e_0) \leqslant 1/n\}$. Как видно, $A_{n+1} \subset A_n$ и $\inf(A_n) = \mathbf{0}$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Согласно нашему предположению относительно F существуют конечные множества $A'_n \subset A_n$ такие, что $o\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} \inf(A'_n) = \mathbf{0}$. Существуют строго возрастающая последовательность натуральных чисел $(k(n))_{n\in\mathbb{N}}$ и последовательность $(e_m)_{m\in\mathbb{N}}$ в E такие, что $0 \leqslant e_m \leqslant e$ и $A'_n = \{S(e-e_m)+f(e_m)\cdot\mathbf{1} : k(n) \leqslant m < k(n+1)\}$. Поскольку функционал $f \in E'_n$ существенно положителен и $f(e_m) \to 0$, то $e_m \overset{(*)}{\longrightarrow} \mathbf{0}$. Рассмотрим последовательность $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ в X, для которой $|x_m| = e_m$ и $|x - x_m| = e - e_m$ (см. 1.1.6). Понятно, что (x_m) $*$-сходится к нулю, стало быть, $Ux_m \overset{o}{\longrightarrow} \mathbf{0}$. Итак, имеют место равенства

$$o\text{-}\lim_{m\to\infty} |Ux_m| = \mathbf{0}, \quad o\text{-}\lim_{n\to\infty} \inf\{S(e - e_m) : k(n) \leqslant m < k(n+1)\} = \mathbf{0}.$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ существуют разбиения единицы $(\pi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ и $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в булевой алгебре $\mathfrak{P}(F)$ такие, что

$$\pi_m|Ux_k| \leqslant \varepsilon\mathbf{1} \quad (k, m \in \mathbb{N}, k \geqslant m),$$
$$\rho_n \inf\{S(e - e_k) : k(p) \leqslant k < k(p+1)\} \leqslant \varepsilon\mathbf{1} \quad (p \geqslant n).$$

Отсюда для $k \geqslant \max\{k(p), m\}$, $p \geqslant n$,

$$\pi_m|Ux| \leqslant S(e - e_k) + \pi_m|Ux_k| \leqslant S(e - e_k) + \varepsilon\mathbf{1},$$
$$\rho_n\pi_m|Ux| \leqslant \rho_n \inf\{S(e - e_k) : k\ (p) \leqslant k < k(p+1)\} + \varepsilon\mathbf{1} \leqslant 2\varepsilon\mathbf{1}.$$

Суммируя по n и m, получим $|Ux| \leqslant 2\varepsilon\mathbf{1}$, следовательно, $Ux = \mathbf{0}$. Так как элемент $x \in X$ произволен, то $U = \mathbf{0}$ и $S = \mathbf{0}$. ▷

§ 2.5. Комментарии

2.5.1. Понятие мажорируемого оператора появилось во второй половине 30-х годов в работах Л. В. Канторовича [30, 33, 34]. Оно имело двоякую мотивировку — теоретическую, обусловленную развитием общей теории операторов в полуупорядоченных пространствах (см. [29–32]), и прикладную, связанную с приближенными методами анализа (см. [33, 34]). Говоря о последней, лучше всего привести слова самого Л. В. Канторовича [33]:

«При доказательстве существования решения различных классов функциональных уравнений в анализе весьма часто применяется способ последовательных приближений; при этом доказательство сходимости этих приближений основывается на том, что данное уравнение может быть мажорировано некоторым уравнением простого вида. Такого рода доказательства встречаются в теории интегральных и дифференциальных уравнений.

Рассмотрение полуупорядоченных пространств и операций в них позволяет с большой легкостью развить в абстрактной форме полную теорию функциональных уравнений упомянутого вида.»

Различные классы мажорируемых операторов изучались относительно независимо. Не считая ограниченных операторов в нормированных пространствах, наибольшее внимание уделялось регулярным операторам (см. [12, 21, 36, 85, 163]). Операторы с абстрактной нормой ввел Л. В. Канторович (см. [17, 36] и библиографию в них). Доминированные в смысле 2.1.4 (4) операторы в разной степени общности и под разными названиями изучались многими авторами (см., например, [9, 24, 43, 64, 97, 136, 145]). В частности, формула из 2.1.4 (4) приведена в [9]. Операторы из 2.1.4 (5) обладают той особенностью, что при булевозначном представлении пространств X, Y (см. 1.5.3) этим операторам соответствуют ограниченные операторы в смысле теории нормированных пространств. Это дает возможность изучать ортоморфизмы в решеточно нормированных пространствах путем интерпретации в подходящей булевозначной модели результатов из теории ограниченных операторов в нормированных пространствах (см. [47]). Отметим также, что операторы с абстрактой нормой (см. 2.1.3) можно реализовать как ограниченные функционалы в соответствующей булевозначной модели (см. [23]). Относительно ортоморфизмов в векторных решетках имеется обширная литература (см., например, [12, 85, 141, 163]).

2.5.2. Общую формулу из 2.2.2 для вычисления точной мажоранты получилии А. Г. Кусраев и В. З. Стрижевский [58]. Уточнения 2.2.5, связанные с возможностью вычисления супремума по дизъюнктным разбиениям, обоснованы в [41]. Для модуля регулярного оператора этот факт установили независимо Ю. А. Абрамович [1] и Люксембург и Цаанен [125]. Более того, Ю. А. Абрамович развил вариант исчисления порядково ограниченных операторов, в котором точные границы можно вычислять по разбиениям аргумента на дизъюнктные части (см. также [17, 85, 163]).

Субмажорируемые операторы впервые появились в работе Л. В. Канторовича [30]. Там же отмечено утверждение 2.2.8 (1). Операторы, сохраняющие дизъюнктность, называют также d-гомоморфизмами [2]. Изучение этого класса операторов начато Б. З. Вулихом [20]. Различные аспекты операторов, сохраняющих дизъюнктность, а также соответствующую библиографию см. в обзоре [12]. В решеточно нормированных пространствах d-гомоморфизмы начал изучать А. Г. Кусраев [49, 50], а затем А. Е. Гутман [25, 103]. Это направление базируется на реализационном методе Ю. А. Абрамовича [79]. Подробнее об этом будет сказано в гл. 3. Теорема Хана — Банаха — Канторовича установлена в [46]. Она является основным аппаратом исследования выпуклых операторов (см. [5, 53, 60]). Разные другие аспекты теоремы Хана — Банаха отражены в хорошем, но все же далеко не полном обзоре [92].

2.5.3. Теоремы 2.3.2 и 2.3.3 получили А. Г. Кусраев и В. З. Стрижевский [58] для случая порядково полных нормирующих пространств (см. также [41, 47]). Результат о продолжении o-непрерывного регулярного оператора с векторной решетки на ее дедекиндово пополнение, на который опирается доказательство 2.3.3, получен А. И. Векслером [13]. Формула 2.3.5 (3) отмечалась в [50]. Теорема 2.3.7 имеет место и в секвенциальном варианте: мажорируемый оператор секвенциально o-непрерывен в том и только в том случае, если он σ-аддитивен (т. е. условие полной аддитивности из 2.3.6 выполняется лишь для последовательностей). Для положительных операторов этот факт установил А. Г. Пинскер (см. [36, теорема VII.2.45]).

Вопрос о разложении меры, функционала или оператора на порядково непрерывую и сингулярную составляющие изучался с разных точек зрения и имеет много разных вариантов постановки и решения (см., например, [17, 54–56, 85, 142, 155, 163], а также библиографию, указанную в обзоре [12]). Теорему 2.3.9 получили А. Г. Кусраев и С. А. Малюгин [54]. Другую формулу для вычисления T_n в случае произвольной векторной решетки E дал Е. В. Колесников [38]. В этой же работе приводятся формулы проектирования мажорируемого оператора на произвольную главную компоненту.

2.5.4. Тот факт, что пространство мажорируемых операторов $M(X, Y)$, где X разложимо и Y o-полно, является o-полным РНП, известен со второй половины 30-х годов (см. [30, 34, 36]), однако вопрос о его разложимости оставался открытым. Разложимость пространства $M(X,Y)$ установили А. Г. Кусраев и В. З. Стрижевский [58] в 1987 г. (см. также [41]). Е. В. Колесников заметил (см. [41]), что в теореме 2.4.5 условие разложимости X можно ослабить. Точнее, справедливы следующие утверждения.

(1) *Если X r-разложимо* (см. 2.1.3 (1)), *а Y — ПБК, то $M(X, Y)$ — ПБК.*

(2) *Если X о-разложимо* (см. 2.1.3 (3)), *а Y — ПБК, то $M_n(X, Y)$ — ПБК.*

Ключевые формулы из 2.4.1 для булевой алгебры осколков положительного оператора получил Е. В. Колесников (см. [38, 39], а также [4]). Аналогичные формулы ранее получили А. Г. Кусраев и В. З. Стрижевский [58] для порядково полных E и F, а впервые — де Пагте [138] и Алипрантис и Буркиншо [84] для F с достаточным числом порядково непрерывных функционалов. Сюда же примыкает работа [93]. Общий подход к вычислению осколков положительного оператора, основанный на описании экстремальной структуры субдифференциалов (см. [53]), развил С. С. Кутателадзе [62] (см. также [17]).

В 2.4.6 приведены результаты А. И. Векслера [13] — (1) и Алипрантиса и Буркиншо [83] — (2) (см. [21, 85, 123], а также обзор [12]). Обобщенную теорему Иосиды — Хьюитта 2.4.8 (2) получили А. В. Бухвалов и М. Я. Якубсон (доказательство см. в [17]), а теорему 2.4.9 см. в [89]. Скалярный вариант $E = \mathbb{R}$ теоремы 2.4.8 (2) установил Люксембург [122]. Подробности о теореме Иосиды — Хьюитта и ее приложениях см. в [12, 64]. Отметим, что теоремы 2.4.8 (2) и 2.4.9 остаются в силе, если потребовать от векторной решетки E существования фундамента, который разлагается на компоненты со свойством Егорова. При этом в K_σ-пространстве выполнено свойство Егорова в том и только в том случае, если стоуновский компакт любого его главного идеала обладает следующим свойством: всякая последовательность замкнутых нигде не плотных подмножеств типа G_δ содержится в одном нигде не плотном множестве типа G_δ.

Почти интегральные операторы ввел Г. Я. Лозановский [65]. Об их месте в выводе критерия интегральной представимости линейного оператора см. [11, 17]. Теорема 2.4.11 фактически установлена в [50].

2.5.5. Мы не затронули вопроса о продолжении мажорируемых операторов. Различные аспекты этого направления и соответствующие ссылки см. в [56]. Метод продолжения секвенциально o-непрерывного мажорируемого оператора, описанный в [56], — классическая схема Даниэля — Стоуна построения интеграла Лебега для положительного оператора со значениями в регулярном K-пространстве. Такое продолжение впервые получил Л. В. Канторович [108] (см. также [36]). На операторы, действующие в слабо σ-дистрибутивное K_σ-пространство, этот результат распространил Маттес [132]. Райт [162] и Фремлин [99] (см. также Ричан [143, 144]) дали другие доказательства результата Маттеса. Необходимость слабой σ-дистрибутивности в задаче о продолжении секвенциально o-непрерывного оператора доказал Райт [159–161] (см. также [99]). Для продолжения булевых гомоморфизмов аналогичные вопросы были исследованы Д. А. Владимировым [18] (случай σ-гомоморфизмов в алгебрах счетного типа), а также в [132] и [159] (общий случай). Описание слабой σ-дистрибутивности в терминах стоуновского компакта для расширенных K-пространств счетного типа получена З. Т. Дикановой [28], а для булевых алгебр счетного типа — Келли и Окстоби [110].

Райт [160] доказал, что если $E = C(K)$, где K — компакт, а G — пространство всех ограниченных функций на K, то теорема о продолжении верна для положительного G-непрерывного оператора T со значениями в K_σ-пространстве F, причем слабая σ-дистрибутивность не предполагается. Фремлин [99] высказал предположение о том, что в некоторых других случаях слабая σ-дистрибутивность может быть опущена. Два таких случая разработаны Хураной [112] и А. Г. Кусраевым и С. А. Малюгиным [56]. Приложения к векторной проблеме моментов получил С. А. Малюгин [67, 68]. Вопросы разложения и продолжения мажорируемых мер со значениями в РНП изучались в [55–57, 67]. В [41] установлен следующий результат о продолжении мажорируемого оператора.

Теорема. *Пусть E_0 — массивная подрешетка векторной решетки E, а (Y, F) — произвольное* ПБК. *Пусть $T_0 \in M(E_0, Y)$ и S — крайняя точка множества $\mathscr{E}(|T_0|)$ всех положительных линейных продолжений оператора $|T_0| : E_0 \to F$ на всё E. Тогда существует и притом единственный мажорируемый оператор $T : E \to Y$ такой, что T продолжает T_0 и $|T| = S$.*

Глава 3. Аналитическое представление мажорируемых операторов

В этой главе выводятся общие формы некоторых классов линейных операторов, действующих в решеточно нормированных пространствах непрерывных или измеримых вектор-функций. Мажорируемый оператор, сохраняющий дизъюнктность, или, как еще говорят, d-гомоморфизм (3.1.1), допускает мультипликативное представление, т. е. может быть представлен в виде суперпозиции оператора обобщенного сдвига и оператора умножения на операторный вес (3.1.8). Отсюда легко выводится аналитическая форма операторов из идеала, порожденного операторами, сохраняющими дизъюнктность; оказывается, что этот идеал состоит из конечных сумм операторов, сохраняющих дизъюнктность (3.1.2, 3.1.3).

Двойственным к понятию d-гомоморфизма является понятие разложимого оператора (3.2.1). Порядково непрерывный мажорируемый оператор разложим в том и только в том случае, если его точная мажоранта есть оператор Магарам, т. е. порядково непрерывен и сохраняет порядковые отрезки (3.2.2). Разложимые операторы допускают простое аналитическое описание (3.2.6). В частности, для них имеет место аналог теоремы Радона — Никодима, причем роль интеграла здесь играет точная мажоранта оператора (3.2.7).

Если какая-нибудь мажоранта оператора, действующего в пространствах измеримых вектор-функций, является интегральным оператором, то этот оператор сам допускает слабое интегральное представление. Верно также и обратное утверждение. Отсюда, учитывая характеристические свойства классического интегрального оператора (3.2.2), выводится следующий критерий слабой интегральной представимости. Мажорируемый оператор допускает слабое интегральное представление в том и только в том случае, если он переводит ограниченные по порядку последовательности, сходящиеся к нулю по мере, в последовательности, сходящиеся к нулю почти всюду (3.3.7).

Широкий класс операторов возникает в результате интегрирования по семейству мер, зависящему от некоторого измеримого параметра. Такие операторы называют псевдоинтегральными (2.1.10). Оказывается, что оператор допускает слабое псевдоинтегральное представление в том и только в том случае, если он порядково непрерывен (3.4.6). Из этого критерия выводятся также утверждения об общем виде мажорируемых операторов (3.4.7).

§ 3.1. Операторы, сохраняющие дизъюнктность

Основная цель данного параграфа — получить мультипликативное представление для d-гомоморфизмов, действующих в РНП вектор-функций. Попутно дается описание порядкового идеала в пространстве мажорируемых операторов, порожденного d-гомоморфизмами.

3.1.1. Оператор $T : X \to Y$ называют *d-гомоморфизмом* или *оператором, сохраняющим дизъюнктность*, если для любых дизъюнктных $x_1, x_2 \in X$ элементы Tx_1 и Tx_2 также дизъюнктны. Оператор T называют *n-дизъюнктным*, если для любых попарно дизъюнктных элементов $x_0, \dots, x_n \in X$ точная нижняя граница множества $\{|Tx_k| : k := 0, 1, \dots, n\}$ равна нулю. Итак, T будет n-дизъюнктным, если

$$|x_k| \wedge |x_l| = 0 \quad (k \neq l) \Rightarrow |Tx_0| \wedge \dots \wedge |Tx_n| = 0$$

для всякого $(n+1)$-элементного набора $\{x_0, \dots x_n\}$. Как видно, d-гомоморфизмы — это в точности 1-дизъюнктные операторы.

Пусть X разложимо, а F порядково полна. Мажорируемый оператор $T \in M(X, Y)$ будет n-дизъюнктным в том и только в том случае, если его точная мажоранта $|T|$ есть n-дизъюнктный оператор из E в F.

$\triangleleft$ Достаточность очевидна. Предположим, что оператор T n-дизъюнктен. Возьмем попарно дизъюнктные элементы $e_0, \dots, e_n \in E_+$ и положим $f_k := \sup\{|Tu| : |u| \leqslant e_k\}$. Если $|u_k| \leqslant e_k$, то $u_k \perp u_l$ $(k \neq l)$, поэтому $|Tu_0| \wedge \dots \wedge |Tu_n| = 0$. Переходя к точной верхней границе в последнем равенстве по $u_0, \dots, u_n$, получим $f_0 \wedge \dots \wedge f_n = 0$. Если $|x_1| + \dots + |x_m| \leqslant e_k$, то $\sum\limits_{l=1}^{m} |Tx_l| \in \{f_k\}^{\perp\perp}$, следовательно, $|T|e_k \in \{f_k\}^{\perp\perp}$ согласно 2.2.2. Тем самым

$$|T|e_0 \wedge \dots \wedge |T|e_n \in \{f_0\}^{\perp\perp} \cap \dots \cap \{f_k\}^{\perp\perp} = \{0\},$$

значит, $\inf\limits_{k:=0,\dots,n} |T|e_k = 0$. $\triangleright$

3.1.2. Теорема. *Пусть $S : E \to F$ — положительный оператор, причем F порядково полна. Тогда S будет n-дизъюнктным в том и только в том случае, если имеет место представление $S = S_1 + \dots + S_n$, где $S_k : E \to F$ — решеточный гомоморфизм при $k := 1, \dots, n$.*

$\triangleleft$ Наметим схему доказательства. Возьмем n попарно дизъюнктных элементов $e_0, \dots, e_{n-1} \in E_+$. Пусть π_k — проектор на компоненту $\{Se_k\}^{\perp\perp}$ $(k := 0, 1, \dots, n-1)$ и $S_0 := \pi_{e_0} S$ (см. 2.4.1). Положим $U := \pi_0 \pi_1 \dots \pi_{n-1} S_0$ и $V := \pi_0 \pi_1 \dots \pi_{n-1}(S - S_0)$. Можно показать, что U — решеточный гомоморфизм, а V — $(n-1)$-дизъюнктный оператор. Этот факт позволяет провести доказательство индукцией по n. Однако может случиться так, что какой-нибудь из проекторов $\pi_0, \dots, \pi_{n-1}$ равен нулю, а значит, $U = V = 0$. В этом случае шаг индукции невозможен, и нужно действовать более аккуратно. Именно, выберем максимальное семейство $\mathscr{P}$ попарно дизъюнктных проекторов так, что для каждого $\pi \in \mathscr{P}$ найдется n попарно дизъюнктных элементов $e_0, \dots, e_{n-1} \in E$, для которых $\pi(F) \subset \{Se_0 \wedge \dots \wedge Se_{n-1}\}^{\perp\perp}$. Если $\pi_0 := I - \sup \mathscr{P}$, то $\pi_0 S$ — $(n-1)$-дизъюнктный оператор. Для $\pi \in \mathscr{P}$ к оператору πS применим указанные выше рассуждения. Полученные при этом решеточные гомоморфизмы U_π не равны нулю. Положим $Ue := \sup\{U_\pi e : \pi \in \mathscr{P}\}$ $(e \in E_+)$. Тем самым определяется решеточный гомоморфизм $U : E \to F$. Остается показать, что $V := S - U$ — $(n-1)$-дизъюнктный оператор, и применить предположение индукции к оператору $\pi_0 S + V$. Подробности см. в [90]. $\triangleright$

3.1.3. Теорема. *Пусть X разложимо и F порядково полна. Мажорируемый оператор $T : X \to Y$ будет n-дизъюнктным в том и только в том случае, если он представим в виде суммы n операторов, сохраняющих дизъюнктность.*

$\triangleleft$ Нужно применить 3.1.1, 3.1.2 и воспользоваться разложимостью точной мажоранты (см. 2.4.5). $\triangleright$

Обозначим через $J := J(E, F)$ o-идеал в $L_r(E, F)$, порожденный решеточными гомоморфизмами, и положим $M_J(X, Y) := \{T \in M(X, Y) : |T| \in J\}$. Положительный оператор сохраняет дизъюнктность в том и только в том случае, если он является решеточным гомоморфизмом. С учетом этого из 3.1.1 и 3.1.2 вытекает, что если F порядково полна, то J состоит в точности из регулярных операторов, n-дизъюнктных при некотором $n \in \mathbb{N}$. Если же, кроме того, X разложимо, то $M_J(X, Y)$ состоит из мажорируемых операторов, n-дизъюнктных при некотором $n \in \mathbb{N}$. В то же время эти пространства состоят из конечных сумм операторов, сохраняющих дизъюнктность. Итак, пространство M_J устроено довольно просто по модулю d-гомоморфизмов. Ниже мы выведем мультипликативное представление d-гомоморфизмов в РНП вектор-функций. Сейчас же изложим необходимые вспомогательные факты.

3.1.4. Пусть $\Phi : E \to mF$ — решеточный гомоморфизм. Допустим, что $F = \Phi(E)^{\perp\perp}$ — K-пространство. В максимальном расширении mF зафиксируем мультипликативную структуру, однозначно определяемую выбором единицы. Положим $F' := \{f \in mF : f \cdot \Phi(E) \subset F\}$. Пусть $\mathscr{L}^{\Phi}(E, F)$ — множество всех регулярных операторов $S : E \to F$ таких, что $S \in \{\Phi\}^{\perp\perp}$, если S рассматривать как оператор из E в mE. Положим

$$M^{\Phi}(E(X), F_s(Y')) := \{T \in M(E(X), F_s(Y')) : |T| \in \mathscr{L}^{\Phi}(E, F)\}.$$

Теорема. *Множество F' является фундаментом в mF, линейно и решеточно изоморфным K-пространству $\mathscr{L}^{\Phi}(E, F)$. Изоморфизм устанавливается сопоставлением элементу $f \in F'$ оператора S_f по формуле*

$$S_f(e) = f \cdot \Phi(e) \quad (e \in E).$$

3.1.5. Пусть P и Q — стоуновские компакты векторных решеток E и F соответственно. Допустим, что задано непрерывное отображение $\varphi : A \to P$, где A — замкнутое подмножество Q. Определим оператор подстановки φ^* по формуле

$$(\varphi^* e)(t) := \begin{cases} e(\varphi(t)), & \text{если } t \in A, \\ 0, & \text{если } t \in Q \backslash A. \end{cases}$$

Если $\varphi^{-1}(\mathrm{dom}(e))$ плотно в A, где $\mathrm{dom}(e) := \{s \in P : |e(s)| < +\infty\}$, то $\varphi^* e \in C_\infty(Q)$.

Теорема. *Предположим, что E и F — фундаменты в $C_\infty(P)$ и $C_\infty(Q)$ соответственно, а $\Phi : E \to F$ — порядково непрерывный решеточный гомоморфизм. Тогда существуют непрерывное отображение φ из замкнутого подмножества компакта Q в компакт P и функция $\alpha \in C_\infty(Q)$ такие, что $\Phi e = \alpha \cdot \varphi^* e$ $(e \in E)$.*

3.1.6. Возьмем банахово пространство X. Допустим, что оператор подстановки φ^* порядково непрерывен и действует из E в F.

Существует единственный мажорируемый оператор $\varphi_X^* : E(X) \to F(X)$ такой, что $|\varphi_X^*| = \varphi^*$ и $\varphi_X^*(x \otimes e) = x \otimes \varphi^* e$ $(x \in X,\ e \in E)$.

$\triangleleft$ В самом деле, оператор φ_X^* можно определить на $X \otimes E$ формулой

$$\varphi_X^* \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \otimes e_k \right) := \sum_{k=1}^{n} x_k \otimes \varphi^* e_k.$$

Мажорируемость такого оператора проверяется непосредственно. Из теоремы 2.3.3 видно, что φ_X^* допускает единственное продолжение на $E(X)$. Равенство $|\varphi_X^*| = \varphi^*$ следует из 2.3.5 (3). $\triangleright$

3.1.7. В дальнейшем потребуется еще один вспомогательный факт. Говорят, что билинейный оператор $b : X \times Y \to E$ *имеет абстрактную норму*, если в E существует

$$|b| := \sup\{b(x, y) : \|x\| \leqslant 1,\ \|y\| \leqslant 1\}.$$

Обозначим через $\mathscr{B}_A(X, Y; E)$ пространство всех билинейных операторов с абстрактной нормой, действующих из $X \times Y$ в E.

Теорема. *Для любого билинейного оператора с абстрактной нормой $b : X \times Y \to E$ существует единственный элемент $\omega_b \in E_s((X\hat{\otimes}Y)')$ такой, что $b(x,y) = \langle x \otimes y, \omega_b\rangle$ при всех $x \in X$ и $y \in Y$. Соответствие $b \mapsto \omega_b$ осуществляет линейную изометрию ПБК $\mathscr{B}_A(X,Y;E)$ и $E_s((X\hat{\otimes}Y)')$.*

3.1.8. Теорема. *Предположим, что Φ — порядково непрерывный решеточный гомоморфизм из E в mE. Тогда для произвольного оператора $T \in M^\Phi(E(X), F_s(Y'))$ существует единственная с точностью до эквивалентности оператор-функция $K \in \mathfrak{M}_Q(X,Y')$ такая, что $|K| \in F'$, и имеет место представление*

$$Tu = K(\alpha \cdot \varphi_X^*(u)) \quad (u \in E(X)).$$

Соответствие $T \mapsto K$ определяет линейную изометрию между ПБК $M^\Phi(E(X), F_s(Y'))$ и $F_s'(\mathscr{L}(X,Y'))$.

$\lhd$ Согласно 3.1.5 оператор Φ допускает мультипликативное представление $\Phi e = \alpha\varphi^* e$ $(e \in E)$. Возьмем $T \in M^\Phi(E(X), F_s(Y'))$ и положим $Se = S_{x,y}(e) := \langle y, T(x \otimes e)\rangle$, где $x \in X$, $y \in Y$, $e \in E$. Элемент $x \otimes e \in E(X)$ задается формулой $x \otimes e : t \mapsto e(t)x$, $|e(t)| < +\infty$. Заметим, что

$$|Se| \leqslant |T(x \otimes e)| \|y\| \leqslant |T|(|e|) \cdot \|x\| \|y\|.$$

Так как $|T| \in \mathscr{L}^\Phi$, то $S \in \mathscr{L}^\Phi$, ибо $\mathscr{L}^\Phi$ — компонента. Обозначим буквой λ изоморфизм из $\mathscr{L}^\Phi(E,F)$ на F', о котором идет речь в 3.1.4. Положим $b(x,y) := \lambda(S_{x,y})$. Из определений видно, что отображение $(x,y) \mapsto b(x,y)$ представляет собой билинейный оператор из $X \times Y$ в F'. Более того,

$$|b(x,y)| = \lambda(|S_{x,y}|) \leqslant \lambda(|T|)\|x\|\|y\| \quad (x \in X,\ y \in Y),$$

т. е. b — оператор с абстрактной нормой и $|b| \leqslant \lambda(|T|)$. По определению изоморфизма λ

$$\langle y, T(x \otimes e)\rangle = b(x,y)\Phi e \quad (x \in X,\ y \in Y,\ e \in E).$$

Учитывая сказанное, а также формулу 2.3.5 (3), имеем

$$\begin{aligned}
|T|e &= \sup\Big\{\sum |T(x(k) \otimes c(k)| : (x,c) \in \mathscr{U}\Big\} \\
&= \sup\Big\{\sup_{\|y\|\leqslant 1}\Big\{\sum \langle y, T(x(k) \otimes c(k))\rangle\Big\} : (x,c) \in \mathscr{U}\Big\} \\
&= \sup\Big\{\sup_{\|y\|\leqslant 1}\Big\{\sum b(x(k),y)\Phi(c(k))\Big\} : (x,c) \in \mathscr{U}\Big\} \\
&\leqslant \sup_{\|y\|\leqslant 1}\Big\{\sup\Big\{\sum |b|\Phi(c(k))\|x(k)\|\|y\|\Big\} : (x,c) \in \mathscr{U}\Big\} \\
&\leqslant \sup\Big\{|b|\Phi\Big(\sum c(k)\Big)\Big\} = |b|\Phi(e),
\end{aligned}$$

где $\mathscr{U}$ состоит из всех пар (x,c) вида $x : \{1,\dots,n\} \to X$, $c : \{1,\dots,x_n\} \to E_+$, $n \in \mathbb{N}$, причем $\|x(k)\| \leqslant 1$ $(k := 1,\dots,n)$, $c(k) \perp c(l)$ $(k \neq l)$, $\sum\limits_{k=1}^{n} c(k) = e$. Из этих оценок видно, что $\lambda(|T|) \leqslant |b|$. С учетом уже установленного противоположного неравенства получаем $|b| = \lambda(|T|)$. Применим теперь теорему 3.1.7, согласно которой существует оператор-функция $K \in \mathfrak{M}_Q(X,Y')$ такая, что $|b| = |K|$ и имеют место равенства

$$\langle y, T(x \otimes e)\rangle = b(x,y)\Phi(e) = \langle y, Kx\rangle\alpha\varphi^* e = \langle y, K(\alpha\varphi_X^*(x \otimes e))\rangle.$$

Пользуясь произволом в выборе $y \in Y$, получаем

$$T(x \otimes e) = K(\alpha\varphi_X^*(x \otimes e)) \quad (x \in X,\ e \in E).$$

Отсюда, из линейности T и K, а также определения φ_X^* (см. 3.1.6) выводим, что $Tu = K(\alpha\varphi_X^* u)$ $(u \in X \otimes E)$. Так как операторы T и φ_x^* порядково непрерывны, а $X \otimes E$ o-плотно в $E(X)$, то полученное на $X \otimes E$ представление сохраняется и на всем $E(X)$. Единственность K видна из следующих рассуждений. Если $L \in \mathfrak{M}_Q(X, Y')$ также представляет T, то $L(\alpha\varphi_X^* u) = K(\alpha\varphi_X^* u)$ при $u \in E(X)$. В частности, $(L(t)x - K(t)x\alpha(t)e(\varphi(t)) = 0$ для всех $x \in X$ и $e \in E$. Так как $\Phi(E)$ — фундамент в $C_\infty(Q)$, то α — порядковая единица в $C_\infty(Q)$ и $\mathrm{dom}(\varphi)$ плотно в Q, значит, $L(t)x = K(t)x$ для всех $t \in Q$, за исключением, быть может, точек некоторого тощего множества. Остается заметить, что если $K \in \mathfrak{M}_Q(X,\ Y')$ и $|K| \in F'$, то оператор $Su = K(\alpha\varphi_X^* u)$ входит в M^Φ, ибо

$$|Su| \leqslant |K||\alpha\varphi_X^*(u)| \leqslant \alpha|K|\varphi^*(|u|) = |K|\Phi(|u|) \quad u \in E(X). \ \triangleright$$

3.1.9. Теорема. *Пусть Φ — порядково непрерывный решеточный гомоморфизм из E в F, а оператор $T \in M(E(X), F_s(Y, Z))$ удовлетворяет условию $|T| \in \{\Phi\}^{\perp\perp}$. Тогда существуют оператор-функция $K \in \mathfrak{M}_Q(X, Y')$, функция $\alpha \in C_\infty(Q)$ и непрерывное отображение $\varphi : \mathrm{dom}(\varphi) \to P$, где $\mathrm{dom}(\varphi)$ — замкнутое подмножество Q, такие, что справедливы представления*

$$Tu = K(\alpha\varphi_X^* u) \quad (u \in E(X)),$$

$$|T|e = |K|\alpha\varphi^* e \quad (e \in E),$$

$$\Phi e = \alpha\varphi^* e \quad (e \in E).$$

$\triangleleft$ Отождествим Y с замкнутым подпространством Z'. Тогда $F_s(Y, Z)$ — o-замкнутое подпространство в $F_s(Z')$. Из условия $|T| \in \{\Phi\}^{\perp\perp}$ видно, что $T \in M^\Phi(E(X), F_s(Z'))$. По теореме 3.1.8 существует $K \in \mathfrak{M}_Q(X, Z')$, для которой верны требуемые представления. $\triangleright$

§ 3.2. Разложимые операторы

Здесь мы дадим аналитическое описание операторов, имеющих в качестве мажоранты операторы Магарам, т. е. порядково непрерывные операторы, сохраняющие интервалы.

3.2.1. Рассмотрим РНП (X, E) и (Y, F). Линейный оператор $T : X \to Y$ называют *разложимым*, если для любых $x \in X$ и дизъюнктных $y_1, y_2 \in Y$ из $Tx = y_1 + y_2$ следует существование таких $x_1, x_2 \in X$, что $x = x_1 + x_2$ и $T(B_X(|x_k|) \perp y_l$ $(k, l := 1, 2,\ k \neq l)$. Последнее соотношение означает, что если $|u| \leqslant |x_k|$, то $Tu \perp y_l$ $(k \neq l)$. В частности, $Tx_k \perp y_l$ $(k \neq l)$, поэтому дизъюнктны совпадающие элементы $Tx_1 - y_1$ и $y_2 - Tx_2$, а значит, $Tx_k = y_k$ $(k = 1, 2)$. Положительный оператор $S : E \to F$ называют *положительно разложимым*, если для $e \in E_+$ и дизъюнктных $f_1, f_2 \in F_+$ из $Se = f_1 + f_2$ следует существование таких $e_1, e_2 \in E_+$, что $e = e_1 + e_2$ и $Se_k = f_k$ $(k = 1, 2)$. Говорят, что S *сохраняет интервалы*, если $S([0, e]) = [0, Se]$ для каждого $e \in E_+$. Порядково непрерывный оператор, сохраняющий интервалы, называют *оператором Магарам*.

3.2.2. Теорема. *Пусть X и Y разложимы, а F порядково полна. Для мажорируемого $T : X \to Y$ имеют место утверждения:*

(1) *T разложим в том и только в том случае, если $|T|$ положительно разложим на o-идеале, порожденном множеством $|X|$;*

(2) *T разложим и o-непрерывен в том и только в том случае, если $|T|$ положительно разложим и o-непрерывен;*

(3) *если E порядково полна, то T разложим и o-непрерывен в том и только в том случае, если $|T|$ — оператор Магарам.*

$\lhd$ Предположим, что оператор $|T|$ положительно разложим на множестве $|X|$. Пусть имеет место представление $Tx = y_1 + y_2$, где $x \in X$, $y_1, y_2 \in Y$ и $y_1 \perp y_2$. Возьмем проектор π_1 на компоненту $|y_1|^{\perp\perp}$ и положим $\pi_2 := \pi_1^{\perp}$, $f_k := \pi_k|T|(|x|)$ $(k := 1, 2)$. Тогда $|T|(|x|) = f_1 + f_2$, $f_1 \perp f_2$, значит, найдутся такие $e_1, e_2 \in E_+$, что $e_1 + e_2 = |x|$ и $f_k = |T|e_k$ $(k := 1, 2)$. Разложимость X дает нам представление $x = x_1 + x_2$, где $|x_k| = e_k$ $(k := 1, 2)$. Если $u \in X$ и $|u| \leqslant |x_k|$, то $|Tu| \leqslant |T|(|u|) \leqslant f_k$, поэтому $|Tu| \perp f_l$. Так как $|y_l| \leqslant f_l$, то $Tu \perp y_l$ $(k \neq l)$. Итак, T разложим.

Допустим, что $|T|e = f_1 + f_2$ для некоторых $e := |x|$, $x \in X$, и дизъюнктных $f_1, f_2 \in F_+$. Положим $y_k := \pi_k Tx$, где π_1 — проектор на компоненту $\{f_1\}^{\perp\perp}$ и $\pi_2 := \pi_1^{\perp}$. Ввиду разложимости T найдутся $x_1, x_2 \in X$ такие, что $x = x_1 + x_2$, $Tx_k = y_k$ и $T(B_X(|x_k|)) \perp y_l$ $(k \neq l)$. Отсюда вытекает, что $e \leqslant c_1 + c_2$, $|T|c_k \perp f_l$ $(k \neq l)$, $c_k = |x_k|$. Если $e_k \leqslant c_k$ таковы, что $e = e_1 + e_2$, то $f_1 + f_2 = |T|e_1 + |T|e_2$ и $|T|e_k \perp f_l$ $(k \neq l)$, следовательно, $|T|e_k = f_k$ $(k = 1, 2)$. Пусть теперь $e \leqslant |x_1| + \dots + |x_n|$, где $x_1, \dots, x_n \in X$. Тогда из-за разложимости X будет $e = c_1 + \dots + c_n$, причем $c_1, \dots, c_n \in |X|$. В силу уже доказанного существуют $e_{1k}, e_{2k} \in E_+$ $(k := 1, \dots, n)$ такие, что $c_k = e_{1k} + e_{2k}$, $\sum\limits_{k=1}^{n} |T|e_{1k} = f_1$ и $\sum\limits_{k=1}^{n} |T|e_{2k} = f_2$. Остается положить $e_1 := e_{11} + \dots + e_{1n}$, $e_2 := e_{21} + \dots + e_{2n}$. Тем самым утверждение (1) доказано полностью. Для доказательства (2) нужно привлечь теорему 2.3.2 и заметить, что положительный o-непрерывный оператор $S : E \to F$ будет положительно разложимым, если он является таковым на фундаменте E_0 (в нашем случае идеал E_0, порожденный $|X|$, есть фундамент в $|X|^{\perp\perp}$; $S := |T|$ обращается в нуль на $|X|^{\perp}$).

С учетом (2) в (3) достаточно доказать следующее: положительный o-непрерывный оператор $S : E \to F$ сохраняет интервалы в том и только в том случае, если он положительно разложим. Если S сохраняет интервалы, то он, очевидно, положительно разложим. Пусть S положительно разложим. Без ограничения общности можно считать S существенно положительным. Положим $|e|_S = S(|e|)$ $(e \in E)$. Тогда $|\cdot|_S$ — d-разложимая F-значная норма на E. Согласно 1.1.3 существуют полная булева алгебра проекторов $\mathscr{B}$ в E и изоморфизм $h : \mathfrak{P}(F_0) \to \mathscr{B}$, $F_0 = |E|_S^{\perp\perp}$, такие, что $\pi|e|_S = |h(\pi)e|_S$ $(e \in E$, $\pi \in \mathfrak{P}(F_0))$. Более того, $\mathscr{B}$ — правильная подалгебра в $\mathfrak{P}(E)$. Используя спектральную теорему Фрейденталя, изоморфизм h можно продолжить на $\Lambda := \mathrm{Orth}(F)$, наделив при этом E структурой унитарного Λ-модуля. Отсюда уже без труда вытекает, что S сохраняет интервалы. Подробности см. в [47, 3.4.2, 3.4.3(2), 3.4.12]. $\rhd$

3.2.3. Теорема. *Пусть X и Y разложимы, E и F порядково полны и оператор $T \in M(X, Y)$ разложим и о-непрерывен. Положим $Y_T := T(X)^{\perp\perp}$ и $X_T := \{x \in X : |T|(|x|) = 0\}^{\perp}$. Существует булев изоморфизм h из $\mathfrak{P}(Y_T)$ на $\mathfrak{P}(X_T)$ такой, что для каждого о-непрерывного $S \in M(X, Y)$ равносильны утверждения:*

$$S \in \{T\}^{\perp\perp}, \tag{1}$$

$$Sx \in T(B_X(|x|))^{\perp\perp} \quad (x \in X), \tag{2}$$

$$\pi S = Sh(\pi) \quad (\pi \in \mathfrak{P}(Y_T)). \tag{3}$$

$\lhd$ По теореме 3.2.2(3) $\Phi := |T|$ — оператор Магарам. Из общих свойств операторов Магарам (см. [47]) следует существование булева изоморфизма h из $\mathfrak{P}(F_\Phi)$ на $\mathfrak{P}(E_\Phi)$ такого, что $\pi\Phi = \Phi h(\pi)$ для всех $\pi \in \mathfrak{P}(F_\Phi)$. Той же буквой h обозначим изоморфизм из $\mathfrak{P}(Y_T)$ на правильную подалгебру в $\mathfrak{P}(X_T)$, существующий вследствие того, что булевы алгебры $\mathfrak{P}(F_\Phi)$ и $\mathfrak{P}(Y_T)$, а также $\mathfrak{P}(E_\Phi)$ и $\mathfrak{P}(X_T)$ попарно изоморфны. Для завершения доказательства достаточно показать, что требуемые свойства (1), (2) и (3) равносильны соответственно следующим:

$$\Psi \in \{\Phi\}^{\perp\perp}, \tag{1'}$$

$$\Psi e \in \{\Phi e\}^{\perp\perp} \quad (e \in E), \tag{2'}$$
$$\pi\Psi = \Psi h(\pi) \quad (\pi \in \mathfrak{P}(F_\Phi)), \tag{3'}$$

где $\Psi := |S|$. Утверждения (1′), (2′) и (3′) доказываются непосредственно с помощью теоремы 2.2.2. ▷

3.2.4. В максимальном расширении mE зафиксируем мультипликативную структуру, однозначно определяемую выбором порядковой единицы $\mathbf{1}$. Допустим, что на некотором фундаменте $\mathscr{D}(\Phi) \subset mE$ определен существенно положительный оператор Магарам Φ со значениями в F. Наибольший фундамент в mE, на который распространяется Φ по o-непрерывности, обозначим через $L_1(\Phi)$. Будем считать, что $\mathscr{D}(\Phi) = L_1(\Phi)$. Пусть Φ_0 — ограничение Φ на $E_0 := E \bigcap L_1(\Phi)$. Обозначим символом $\mathscr{L}_\Phi(E, F)$ множество всех регулярных o-непрерывных операторов $S : E \to F$ таких, что ограничение S на E_0 входит в компоненту $\{\Phi_0\}^{\perp\perp}$. Легко понять, что $\mathscr{L}_\Phi(E, F)$ — компонента в $\mathscr{L}_n(E, F)$. Положим $E' := \{e' \in mE : e' \cdot E \subset L_1(\Phi)\}$. Ниже потребуется следующий результат, установленный в [47].

Теорема. *Множество E' является фундаментом в mE, линейно и решеточно изоморфным K-пространству $\mathscr{L}_\Phi(E, F)$. Изоморфизм осуществляется сопоставлением элементу $e' \in E'$ оператора $S_{e'}$ по формуле*

$$Se = \Phi(ee') \quad (e \in E).$$

3.2.5. Пусть теперь E — фундамент в $C_\infty(P)$, где P — экстремальный компакт. Для банаховых пространств X и Y рассмотрим РНП $E'_s(\mathscr{L}(X, Y'))$, определяемое как фактор-множество класса оператор-функций $\mathfrak{M}_p(X, Y')$ (см. 1.2.9). Возьмем $K \in \mathfrak{M}_p(X, Y')$, $u \in E(X)$ и $y \in Y$. Если $s, s_0 \in \mathrm{dom}(K) \cap \mathrm{dom}(u)$, то

$$|\langle y, K(s)u(s)\rangle - \langle y, K(s_0)u(s_0)\rangle| \leqslant |K|(s)\|u(s) - u(s_0)\| + |\langle y, (K(s) - K(S_0))u(s_0)\rangle|.$$

Отсюда ясно, что функция $t \mapsto \langle y, K(t)u(t)\rangle$ непрерывна на $\mathrm{dom}(K) \cap \mathrm{dom}(n)$, значит, существует продолжение по непрерывности на все P со значениями в $\overline{\mathbb{R}}$. Соответствующий элемент из $C_\infty(P)$ обозначим через $\langle y, Ku\rangle$. Из неравенства $|\langle y, Kx\rangle| \leqslant |K|\|x\|\,\|y\|$ вытекает, что $|\langle y, Ku\rangle| \leqslant |K||u|$. Если $|K| \in E'$ и $|u| \in E$, то $|K||u| \in L_1(\Phi)$, стало быть, определен элемент $\Phi(\langle y, Ku\rangle) \in F$.

Сформулируем и докажем основной результат текущего параграфа.

3.2.6. Теорема. *Для любого мажорируемого оператора $T \in M_\Phi(E(X), F_s(Y'))$ существует единственная с точностью до эквивалентности оператор-функция $K \in \mathfrak{M}_P(X, Y')$ такая, что $|K| \in E'$, и имеет место представление*

$$\langle y, Tu\rangle = \Phi(\langle y, Ku\rangle) \quad (u \in E(X),\ y \in Y).$$

Сопоставление $T \mapsto K$ определяет линейную изометрию ПБК $M_\Phi(E(X), F_s(Y'))$ *и* $E'_s(\mathscr{L}(X, Y'))$.

◁ Так же, как и в доказательстве теоремы 3.1.8, для $x \in X$ и $y \in Y$ определим оператор $S := S_{x,y} : E \to F$ равенством $Se := \langle y, T(x \otimes e)\rangle$. Вновь окажется, что $S \in \mathscr{L}_\Phi(E, F)$. Обозначим буквой λ изоморфизм из $\mathscr{L}_\Phi(E, F)$ на E', о котором идет речь в теореме 3.2.4, и положим $b(x, y) := \lambda(S_{x,y})$. Тогда в силу упомянутой теоремы $\Phi(eb(x, y)) = \langle y, T(x \otimes y)\rangle$ при всех $e \in E$, $x \in X$ и $y \in Y$. Легко видеть, что отображение $(x, y) \mapsto b(x, y)$ есть билинейный оператор из $X \times Y$ в E'. Кроме того, b — оператор с абстрактной нормой и $|b| \leqslant \lambda(|T|)$. В то же время, в силу формулы 2.3.5 (3) имеем

$$\begin{aligned}
|T|e &= \sup\Big\{\sum |T(x(k) \otimes c(k))| : (x, c) \in \mathscr{U}\Big\} \\
&= \sup\Big\{\sup_{\|y\| \leqslant 1}\{\sum \Phi(c(k)b(x(k), y))\} : (x, c) \in \mathscr{U}\Big\} \\
&\leqslant \sup_{\|y\| \leqslant 1}\Big\{\sup\Big\{\sum \Phi(c(k)|b|)\|x(k)\|\|y\| : (x, c) \in \mathscr{U}\Big\}\Big\} \\
&\leqslant \Phi\Big(\sum c(k)|b|\Big) = \Phi(e|b|).
\end{aligned}$$

Здесь множество $\mathscr{U}$ то же, что и в 3.1.8. Как видно, $\lambda(|T|) \leqslant |b|$, что вместе с уже отмеченным противоположным неравенством дает $|b| = \lambda(|T|)$. Согласно теореме 3.1.7 существует $K \in E'_s(\mathscr{L}(X,Y'))$ такой, что $|K| = |b|$ и $b(x,y) = \langle y, Kx\rangle$ $(x \in X,\ y \in Y)$. Учитывая определение оператора b, можем написать

$$\langle y, T(x \otimes e)\rangle = \Phi(eb(x,y)) = \Phi(e\langle y, Kx\rangle) = \Phi(\langle y, Kx \otimes e\rangle).$$

Тем самым $\langle y, Tu\rangle = \Phi(\langle y, Ku\rangle)$ для всех $u \in X \otimes E$. Это означает, что операторы $T_1 u := \langle y, Tu\rangle$ и $T_2 u := \Phi(\langle y, Ku\rangle)$, действующие из $E(X)$ в F, совпадают на $X \otimes E$. Кроме того, они имеют o-непрерывные мажоранты S_1 и S_2 соответственно:

$$S_1 e := |T|(e)\|y\|, \quad S_2 e := \Phi(e|K|)\|y\| \quad (e \in E).$$

Поскольку $X \otimes E$ o-плотно в $E(X)$, то $T_1 = T_2$ на всем $E(X)$. Ясно также, что $\lambda(|T|) = |K|$.

Если еще какой-нибудь элемент $L \in E'_s(\mathscr{L}(X,Y'))$ годится в качестве представляющей оператор-функции для T, то $\Phi(\langle y, (K-L)u\rangle) = 0$ при всех $u \in E(X)$. Полагая $u := x \otimes e$, приходим к выводу, что $\Phi(e\langle y, (K-L)x\rangle) = 0$ при всех $e \in E$. Тем самым $\langle y, (K-L)x\rangle = 0$. Так как $x \in X$ и $y \in Y$ произвольны, имеем $K \sim L$. Итак, соответствие $T \mapsto K$ определяет линейную изометрию из $M_\Phi(E(X), F_s(Y'))$ в $E'_s(\mathscr{L}(X,Y'))$. Докажем ее сюръективность.

Возьмем $K \in E'_s(\mathscr{L}(X,Y'))$, $u \in E(X)$ и $y \in Y$. Как отмечалось в 3.2.5, корректно определен элемент $\Phi(\langle y, Ku\rangle) \in F$. Положим $S_u(y) := \Phi(\langle y, Ku\rangle)$. Оператор $S_u : X \to F$ линеен и $|S_u(y)| \leqslant \Phi(|K||u|)\|y\|$. Итак, S_u — оператор с абстрактной нормой, и по теореме 3.1.7 существует элемент $v \in F_s(Y')$ такой, что $S_u(y) = \langle y, v\rangle$ $(y \in Y)$, причем $|v| = |S_u|$. Положим $T_u := v$. Тогда $\langle y, Tu\rangle = S_u(y) = \Phi(\langle y, Ku\rangle)$. Как видно, определен линейный оператор $T : E(X) \to F_s(Y')$ и справедливы соотношения

$$|Tu| = |S_u| = \sup_{\|y\| \leqslant 1} \Phi(\langle y, Ku\rangle) \leqslant \Phi(|K||u|).$$

Следовательно, T имеет o-непрерывную мажоранту $S : e \mapsto \Phi(e|K|)$ и $S \in \mathscr{L}_\Phi(E,F)$. Таким образом, $T \in M_\Phi(E(X), F_s(Y'))$. $\triangleright$

Из установленного факта легко выводится вариант теоремы Радона — Никодима для разложимых операторов.

3.2.7. Теорема. *Пусть $\Phi : E \to F$ — оператор Магарам. Пусть мажорируемый оператор $T : E(X) \to F_s(Y,Z)$ таков, что $|T| \in \{\Phi\}^{\perp\perp}$. Тогда существует единственная с точностью до эквивалентности оператор-функция $K \in \mathfrak{M}_p(X,Z')$ такая, что имеют место представления*

$$\langle Tu, z\rangle = \Phi(\langle z, Ku\rangle) \quad (u \in \mathscr{D}(K),\ z \in Z),$$

$$|T|e = \Phi(e|K|) \quad (e \in \mathscr{D}(|K|)),$$

где Z — нормирующее подпространство Y', $\mathscr{D}(|K|) := \{e \in E : e|K| \in E\}$ и $\mathscr{D}(K) := \{u \in E(X) : |u| \in \mathscr{D}(|K|)\}$.

$\triangleleft$ Рассуждая так же, как и в 3.1.9, по теореме 3.2.6 найдем оператор-функцию $K \in \mathfrak{M}_p(X,Z')$, для которой

$$\langle z, Tu\rangle = \widetilde{\Phi}(\langle z, Ku\rangle) \quad (u \in E(X), z \in Z)$$

$$|T|e = \widetilde{\Phi}(e|K|) \quad (e \in E),$$

где $\widetilde{\Phi}$ — распространение Φ по o-непрерывности на $L_1(\Phi)$ (см. 3.2.4). В полученных представлениях можно написать Φ вместо $\widetilde{\Phi}$, если $u \in \mathscr{D}(K)$ и $e \in D(|K|)$. $\triangleright$

§ 3.3. Интегральные операторы

В этом параграфе изучается вопрос об интегральной представимости мажорируемого оператора в пространствах измеримых вектор-функций. Основу развиваемого подхода составляет техника мажорируемых операторов. Будем использовать понятия слабого и сильного интегральных операторов, введенные в 2.1.8 и 2.1.9 соответственно.

3.3.1. Рассмотрим два пространства с полными σ-конечными мерами $(A, \mathscr{A}, \lambda)$ и $(B, \mathscr{B}, \nu)$, а также их прямое произведение $(Q, \Sigma, \mu) := (A \times B, \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}, \lambda \otimes \nu)$. Пусть E и F — идеальные пространства на $(B, \mathscr{B}, \nu)$ и $(A, \mathscr{A}, \lambda)$ соответственно. Напомним, что линейный оператор $S : E \to F$ называют *интегральным*, если существует измеримая функция двух переменных L на Q такая, что для каждого класса эквивалентности $\bar{e} \in E$ значение $\bar{f} = S\bar{e}$ определяется функцией

$$f(s) = \int\limits_B L(s,t)e(t)d\nu(t) \quad (s \in A).$$

Функцию L называют *ядром* интегрального оператора S. Говорят также, что S допускает *интегральное представление* и пишут

$$(Te)(s) = \int\limits_B L(s,t)e(t)d\nu(t) \quad (e \in E).$$

3.3.2. Теорема. *Для линейного оператора $S : E \to F$ равносильны следующие утверждения:*

(1) *S — интегральный оператор;*

(2) *S входит в компоненту пространства $L_r(E, F)$, порожденную множеством $E_n' \otimes F$ конечномерных о-непрерывных операторов;*

(3) *если последовательность $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ в E такова, что $|e_n| \leqslant e \in E$ $(n \in \mathbb{N})$ и $e_n \to 0$ по мере, то $Se_n \to 0$ почти всюду.*

$\lhd$ Подробное доказательство с обсуждением различных следствий см. в [11, 17]. $\rhd$

3.3.3. Пусть X и Y — банаховы пространства и Z — нормирующее подпространство Y'. Рассмотрим слабо (сильно) интегральный оператор T из $E(X)$ в $F_s(Y, Z)$ (соответственно в $F(Y)$) с ядром K (см. 2.1.8 и 2.1.9). Назовем T *регулярным*, если $K \in \mathfrak{M}_\mu(X, Z')$ и измеримая функция $|K| \in L^0(\mu)$ является ядром интегрального оператора из E в F.

(1) *Слабо (сильно) интегральный оператор T с ядром K мажорируем в том и только в том случае, если он регулярен. При этом $|T|$ — интегральный оператор с ядром $|K|$.*

$\lhd$ Если $K \in \mathfrak{M}_\mu(X, Z')$, то $|\langle z, K(s,t)x\rangle| \leqslant |K|(s,t)\|z\|\,\|x\|$, поэтому

$$|\langle z, Tu\rangle| \leqslant \|z\| S_K(|u|),$$

где S_K — интегральный оператор с ядром $|K|$. Отсюда видно, что $|T| \leqslant S_K$. Обратно, допустим, что T — мажорируемый оператор. Тогда для $x \in X$, $z \in Z$ и $e \in E$ верно неравенство

$$\left| \int\limits_B \langle z, K(s,t)x\rangle e(t)\, d\nu(t) \right| \leqslant |T|(e)\|x\|\,\|z\|.$$

Тем самым для интегрального оператора $S_{x,z}$ с ядром $\langle z, K(s,t)x\rangle$ при $\|x\| \leqslant 1$ и $\|z\| \leqslant 1$ будет $|S_{x,z}| \leqslant |T|$. Если $S := \sup\{|S_{x,z}| : \|x\| \leqslant 1,\ \|z\|\}$, то согласно 3.3.2 (2) S — интегральный оператор из E в F. Остается заметить, что $S \leqslant |T|$ и $S = S_K$. $\rhd$

(2) *Пусть T — мажорируемый слабо (сильно) интегральный оператор. Если последовательность $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в $E(X)$ такова, что $|u_n| \leqslant e \in E$ $(n \in \mathbb{N})$, и u_n сходится к нулю по мере, то Tu_n сходится к нулю почти всюду. В частности, T о-непрерывен.*

$\triangleleft$ В силу (1) точная мажоранта $|T|$ является интегральным оператором из E в F. Отсюда вытекает требуемое ввиду оценки $|Tu_n| \leqslant |T|(|u_n|)$. $\triangleright$

3.3.4. Пусть E, Φ, E' и $\mathscr{L}_\Phi(E,F)$ те же, что и в 3.2.4, но дополнительно потребуем $mE = L^0(\nu)$. Возьмем Y-слабо измеримую оператор-функцию $K \in \mathfrak{M}_\nu(X,Y')$. Если $u \in E(X)$, то для каждого $y \in Y$ функция $\langle y, Ku\rangle : t \mapsto \langle y, K(t)u(t)\rangle$ измерима. Более того, $\langle y, Ku\rangle \in L_1(\Phi)$ при условии $|K| \in E'$, и определен элемент $\Phi(\langle y, Ku\rangle) \in F$.

Теорема. *Для мажорируемого оператора $T \in \mathscr{L}_\Phi(E(X), F_s(Y'))$ существует единственная с точностью до эквивалентности оператор-функция $K \in \mathfrak{M}_\nu(X,Y')$ такая, что $|K| \in E'$ и*

$$\langle y, Tu\rangle = \Phi(\langle y, Ku\rangle) \quad (u \in E(X),\ e \in Y).$$

Сопоставление $T \mapsto K$ определяет линейную изометрию ПБК $\mathscr{L}_\Phi(E(X), F_s(Y'))$ *и $E'_s(\mathscr{L}(X,Y'))$.*

$\triangleleft$ Доказательство повторяет рассуждения из 3.2.6 с той лишь разницей, что нужно воспользоваться вариантом теоремы 3.1.7 для идеального пространства E. $\triangleright$

3.3.5. *Любой мажорируемый оператор $T : L^1(\lambda, X) \to L^\infty(\nu)_s(Y')$ допускает слабое интегральное представление.*

$\triangleleft$ Оператор $|T| : L^1(\lambda) \to L^\infty(\nu)$ интегрален. Пусть $L(\cdot,\cdot) \in L^\infty(\mu)$ — его ядро. Рассмотрим оператор $\Phi : L^{1,\infty}(\mu) \to L^\infty(\nu)$, заданный формулой

$$(\Phi e)(t) = \int\limits_A L(s,t)e(s,t)\,d\lambda(s) \quad (e \in L^{1,\infty}(\mu)),$$

где $L^{1,\infty}(\mu)$ — пространство измеримых функций двух переменных $e(\cdot,\cdot)$ таких, что функция $|e|(t) := \int |e(s,t)|\,d\lambda(s)$ $(t \in B)$ входит в $L^\infty(\nu)$. Несомненно, что Φ — оператор Магарам. По теореме 2.3.3 существует единственный мажорируемый оператор $\widetilde{T} : L^{1,\infty}(\mu, X) \to L^\infty(\nu)_s(Y')$ такой, что $|\widetilde{T}| = \Phi$ и $\psi T f = \widetilde{T}(\psi \otimes f)$, где $\psi \in L^\infty(\nu)$, $f \in L^1(\lambda, X)$ и $(\psi\otimes f)(s,t) = f(s)\psi(t)$. Согласно 3.3.4 имеет место представление

$$\langle y, \widetilde{T}u\rangle = \Phi(\langle y, \widetilde{K}u\rangle) \quad (u \in L^{1,\infty}(\mu, X),\ y \in Y),$$

где $\widetilde{K} \in \mathfrak{M}_\mu(X,Y')$ (см. 1.2.7) и $|\widetilde{K}| = \mathbf{1}$. Положим

$$K(s,t) := \widetilde{K}(s,t)L(s,t) \quad (s \in A,\ t \in B).$$

Из определений $\widetilde{T}$ и Φ видно непосредственно, что при $u := \mathbf{1} \otimes f$ получим требуемое интегральное представление. $\triangleright$

3.3.6. *Пусть Y — сопряженное банахово пространство, обладающее свойством Радона — Никодима. Всякий мажорируемый оператор $T : L^1(\lambda, X) \to L^\infty(\nu, Y)$ допускает сильное интегральное представление.*

$\triangleleft$ Обозначим буквой $\mathscr{F}$ множество функций $u : Q \to \mathbb{R}$ вида $u = \sum\limits_{k=1}^n \varphi_k \otimes \psi_k$, где $\varphi_k \in L^1(\lambda)$, $\psi_k \in L^1(\nu)$ и $\varphi_k \otimes \psi_k : (s,t) \mapsto \varphi_k(s)\psi_k(t)$ $(k := 1, \dots, n)$. Для фиксированного $x \in X$ определим оператор $G_x : \mathscr{F} \to Y$ по формуле

$$G_x(u) := \sum_{k=1}^n \int\limits_B \psi_k(t) T(x \otimes \varphi_k)(t)\,d\nu(t).$$

Оператор $|T| : L^1(\lambda) \to L^\infty(\nu)$ интегрален и его ядро L входит в $L^\infty(\mu)$. Привлекая теорему Фубини, легко выводим неравенство

$$\|G_x(u)\| \leqslant \Phi(|u|) := \int\limits_Q L(s,t)|u(s,t)|\,d\mu(s,t) \quad (u \in \mathscr{F}).$$

По теореме 2.3.3 оператор G_x имеет единственное мажорируемое продолжение на $L^1(\mu)$, которое обозначим тем же символом G_x. При этом $|G_x| \leqslant \Phi$. В частности, оператор $G_x : L^1(\mu) \to Y$ ограничен. Не умаляя общности, можно предположить, что мера ν конечна. Так как Y обладает свойством Радона — Никодима, существует $g_x \in L^\infty(\mu, Y)$ такая, что

$$G_x(u) = \int\limits_Q g_x u\,d\mu, \quad |G_x|e = \int\limits_Q |g_x|e\,d\mu \quad (e, u \in L^1(\mu)).$$

Положим $Ux := g_x$. Получим линейный оператор $U : X \to L^\infty(\mu, Y)$, удовлетворяющий условиям

$$\int\limits_B \psi T(x \otimes \varphi)d\nu = \int\limits_Q (Ux)\varphi \otimes \psi d\mu \quad (\varphi \in L^1(\lambda),\ \psi \in L^1(\nu)),$$

$$|U| := \sup_{\|x\|\leqslant 1} |Ux| \leqslant L.$$

Используя формулу 2.3.5 (3), а также формулу для вычисления точной верхней границы множества регулярных операторов, можно показать, что $\sup\{|G_x| : \|x\| \leqslant 1\} = \Phi$, стало быть, $|U| = L$. Пусть теперь ρ — лифтинг пространства $L^\infty(\mu, Y)$, ассоциированный с лифтингом пространства $L^\infty(\mu)$. Положим

$$K(s,t)x := (\rho Ux)(s,t) \quad ((s,t) \in Q).$$

Как видно, оператор-функция $K : Q \to \mathscr{L}(X,Y)$ просто измерима и $|K| = L$. Из определений U и K вытекает справедливость представления

$$\int\limits_B \psi T(x \otimes \varphi)\,d\nu = \int\limits_B \psi(t)\Big(\int\limits_A K(s,t)(x \otimes \varphi)(s)\,d\lambda(s)\Big)d\nu(t).$$

Отсюда

$$(Tu)(t) = \int\limits_A K(s,t)u(s)\,d\lambda(s) \quad (u \in X \otimes L^1(\lambda)).$$

Это же равенство сохраняется для всех $u \in L^1(\lambda, X)$, так как $X \otimes L^1(\lambda)$ плотно в $L^1(\lambda, X)$, оператор T o-непрерывен и для интеграла Бохнера верна теорема о предельном переходе. $\triangleright$

3.3.7. Теорема. *Для мажорируемого оператора $T : E(X) \to F_s(Y, Z)$ равносильны утверждения:*

(1) *T допускает слабое интегральное представление;*

(2) *какая-нибудь мажоранта оператора T допускает интегральное представление;*

(3) *если последовательность $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в $E(X)$ такова, что $|u_n| \leqslant e \in E$ $(n \in \mathbb{N})$ и $u_n \to 0$ по мере, то $Tu_n \to 0$ почти всюду;*

(4) *T секвенциально o-непрерывен, и если $\lambda(A_n) \to 0$ для некоторой последовательности измеримых множеств $A_n \in \mathscr{A}$, то $T(u\chi_{A_n}) \to 0$ почти всюду, какова бы ни была функция $u \in E(X)$.*

◁ Импликация (1) ⇒ (2) следует из 3.3.3 (1), а (2) ⇒ (3) — из 3.3.3 (2). Далее, очевидно, что (3) ⇒ (4). Остается доказать справедливость (4) ⇒ (1). Принимая в расчет, что $*$-сходимость o-ограниченной последовательности в $L^0(\lambda)$ совпадает со сходимостью по мере, из (4) легко выводится $*$-o-непрерывность оператора T. По теореме 2.4.11 оператор $|T|$ почти интегрален. Согласно 3.3.2 (2) $|T|$ — интегральный оператор, и пусть $L(\cdot,\cdot) \in L^0(\mu)$ — его ядро. Существует счетное разбиение (Q_n) множества Q на непересекающиеся μ-измеримые подмножества такое, что $L_n := \chi_{Q_n} L \in L^\infty(\mu)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Обозначим через S_n интегральный оператор с ядром L_n. Ясно, что $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность положительных попарно дизъюнктных операторов из E в F. Кроме того, S_n можно рассматривать и как положительный оператор из $L^1(\lambda)$ в $L^\infty(\nu)$. Так как точная мажоранта разложима (см. 2.4.5), существует последовательность попарно дизъюнктных операторов $T_n : E(X) \to F_s(Z')$ такая, что

$$|T_n| = S_n \quad (n \in \mathbb{N}), \quad Tu = \sum_{k=1}^{\infty} T_n u \quad (u \in E(X)).$$

Ограничение T_n на $L_1^1(\lambda, X) \cap E(X)$ можно распространить до мажорируемого оператора из $L^1(\lambda, X)$ в $L^\infty(\nu)_s(Z')$ с сохранением точной мажоранты S_n (см. теорему 2.3.3). Такое продолжение обозначим той же буквой T_n. Согласно 3.3.5 T_n допускает слабое интегральное представление с ядром $K_n : Q \to \mathscr{L}(X, Z')$, для которого $|K_n| = L_n$. Определим теперь оператор-функцию $K : Q \to \mathscr{L}(X, Z')$ так, чтобы ограничение K на Q_n совпадало с K_n. Тогда K — это Z-слабо измеримая функция, $|K| = L$ и, кроме того, для любых $z \in Z$ и $u \in W := E(X) \cap L^1(\lambda, X)$ почти всюду выполняется равенство

$$\langle z, Tu\rangle(s) = \int_A \langle z, K(s,t)u(t)\rangle \, d\nu(t).$$

Это представление верно для всех $u \in E(X)$, так как W o-плотно в $E(X)$, оператор T o-непрерывен и под знаком интеграла возможен предельный переход. ▷

3.3.8. Теорема. *Пусть Y — сопряженное банахово постранство, обладающее свойством Радона — Никодима. Мажорируемый оператор $T : E(X) \to F(Y)$ допускает сильное интегральное представление, в том и только том случае, если выполнено любое из условий* (2)–(4) *теоремы* 3.3.7.

◁ Доказательство следует той же схеме, что и 3.3.7, но нужно использовать 3.3.6 вместо 3.3.5. ▷

Теоремы 3.3.7 и 3.3.8 позволяют получить результаты об общем виде некоторых классов мажорируемых операторов. Напомним, что $M_J(X, Y)$ — компонента почти интегральных операторов из X в Y (см. 2.4.10, 3.3.2). Обозначим через EF o-идеал в $L^0(\mu)$, состоящий из ядер регулярных интегральных операторов из E в F.

3.3.9. Теорема. *Соответствие, относящее слабо измеримой оператор-функции слабо интегральный оператор, осуществляет линейную изометрию* ПБК *$EF_s(\mathscr{L}(X, Y'))$ и $M_J(E(X), F_s(Y'))$.*

3.3.10. Теорема. *Пусть Y — сопряженное банахово пространство, обладающее свойством Радона — Никодима. Соответствие, относящее просто измеримой оператор-функции сильно интегральный оператор, осуществляет линейную изометрию* ПБК *$EF_{ss}(\mathscr{L}(X, Y))$ и $M_J(E(X), F(Y))$.*

3.3.11. Теорема. *Пусть Y то же, что и в* 3.3.10, *и $G := L^{p,\infty}(\nu\otimes\lambda)$, $1 \leqslant p < \infty$. Тогда* ПБК *$G_{ss}(\mathscr{L}(X, Y))$ и $M(L^1(\nu, X),\ L^p(\lambda, Y))$ линейно изометричны в смысле теоремы* 3.3.10.

§ 3.4. Псевдоинтегральные операторы

Основной результат данного параграфа — критерий псевдоинтегральной представимости мажорируемого оператора в пространствах измеримых вектор-функций.

3.4.1. Пусть, как и раньше, $(A, \mathscr{A}, \lambda)$ и $(B, \mathscr{B}, \nu)$ — пространства с полными σ-конечными мерами, а E и F — идеальные пространства на $(A, \mathscr{A}, \lambda)$ и $(B, \mathscr{B}, \nu)$ соответственно, (Q, Σ, μ) — произведение указанных пространств с мерой. Возьмем представляющую меру $m : \Sigma \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, которую всегда предполагаем счетно-аддитивной и положительной (см. 2.1.9). Для $e \in L^0(\lambda)$ обозначим $F(m, e) := \{f \in L^0(\nu) : e \otimes f \in L_1(m)\}$, где $(e \otimes f)(s,t) = e(s)f(t)$ $(s \in A,\ t \in B\})$. Пусть $\mathscr{D}(m)$ состоит из таких $e \in L^0(\lambda)$, что $F(m, e)$ — фундамент в $L^0(\nu)$. Тогда $\mathscr{D}(m)$ — фундамент в $L^0(\lambda)$.

Существует единственный порядково непрерывный оператор $\Phi_m : \mathscr{D}(m) \to L^0(\nu)$ такой, что

$$\int_B (\Phi_m e)(s) f(t)\, d\nu(t) = \iint_Q e(s) f(t)\, dm(s,t)$$

для всех $e \in \mathscr{D}(m)$ и $f \in F(m,e)$. Оператор Φ_m положителен в том и только в том случае, если положительна m.

$\lhd$ В самом деле, для фиксированного $e \in E$ правая часть указанного равенства определяет o-непрерывный функционал φ_e на $F(m,e)$. По теореме 3.2.4 существует единственный элемент

$$g \in F(m,e)' := \{f' \in L^0(\nu) : f' \cdot F(m,e) \subset L^1(\nu)\}$$

такой, что

$$\varphi_e(f) = \int_B g(t) f(t)\, d\nu(t).$$

Остается положить $\Phi_m e := g$ и заметить, что если $m \geqslant 0$ и $e \geqslant 0$, то $\varphi_e \geqslant 0$ и $\Phi_m e \geqslant 0$. Порядковая непрерывность Φ_m следует из теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. $\rhd$

Оператор $S : E \to F$ называют *псевдоинтегральным*, если существует представляющая мера $m : \Sigma \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, для которой $E \subset \mathscr{D}(m)$ и $Se = \Phi_m e$ $(e \in E)$.

3.4.2. *Пусть $\mathscr{I}(\Phi_m)$ — порядковый идеал в $L_r(\mathscr{D}(m),\ L^0(\nu))$, порожденный оператором Φ_m. Существует линейный и решеточный изоморфизм Λ из $\mathscr{I}(\Phi)$ на $L^\infty(m)$ такой, что для каждого $S \in \mathscr{I}(\Phi_m)$ имеет место представление*

$$\int_B (Se)(t) f(t)\, d\nu(t) = \iint_Q \Lambda(S)(s,t) e(s) f(t)\, dm(s,t) \quad (e \in \mathscr{D}(m),\ f \in F(m,e)).$$

$\lhd$ Пусть $e_1, \dots, e_n \in E_+$ и $f_k \in F(m,e)_+$ $(k := 1, \dots, n)$. Если $0 \leqslant S \leqslant \Phi_m$ и $z = \sum\limits_{k=1}^{n} e_k \otimes f_k$, то

$$\widetilde{S} z := \sum_{k=1}^{n} \int_B S(e_k) f_k\, d\nu \leqslant \iint_Q z(s,t)\, dm(s,t).$$

Отсюда следует, что существует единственный положительный ограниченный функционал $\widetilde{S}$ на $L^1(m)$, для которого

$$\widetilde{S}(e \otimes f) = \int_B (Se) f\, d\nu \quad (e \in E,\ f \in F(m,e)).$$

Отображение $S \mapsto \widetilde{S}$ является алгебраическим и решеточным изоморфизмом $\mathscr{I}(\Phi)$ на $L^1(m)'$. Остается заметить, что $L^1(m)' \simeq L^\infty(m)$. $\rhd$

3.4.3. Результаты о псевдоинтегральном представлении доказываются при дополнительном предположении относительно $(B, \mathscr{B}, \nu)$. Именно, до конца текущего параграфа будем считать, что пространство с мерой $(B, \mathscr{B}, \nu)$ сепарабельно.

(1) Теорема. *Положительный оператор из E в F допускает псевдоинтегральное представление в том и только в том случае, если он порядково непрерывен.*

$\lhd$ Доказательство см. [152]. $\rhd$

Для порядково непрерывного оператора $\Phi : \mathscr{D}(\Phi) \to F$, где $\mathscr{D}(\Phi)$ — фундамент в $L^0(\lambda)$, как в 3.2.4, вводится пространство $\mathscr{L}_\Phi(E, F)$, являющееся компонентой в $L_n(E, F)$.

(2) Теорема. *Пусть Φ — порядково непрерывный оператор из $\mathscr{D}(\Phi)$ в F. Существует линейный и решеточный изоморфизм Λ из $\mathscr{L}_\Phi(E, F)$ на некоторый фундамент пространства $L^0(m)$ такой, что для каждого $S \in \mathscr{L}_\Phi(E, F)$ имеет место представление*

$$\int_B (Se)(t)f(t)\,d\nu(t) = \iint_Q \Lambda(S)(s,t)e(s)f(t)\,dm(s,t)$$

при всех $e \in E$ и $f \in F(km, e)$.

$\lhd$ Согласно (1) существует представляющая мера m, для которой $\mathscr{D}(\Phi) = \mathscr{D}(m)$ и $\Phi = \Phi_m$. Пусть $0 \leqslant S \in \mathscr{L}_\Phi(E, F)$, $E_0 := E \cap \mathscr{D}(m)$. Обозначим через S_0 и Φ_0 ограничения на E_0 операторов S и Φ соответственно. Положим $S_n := S_0 \wedge (n\Phi_0)$. По теореме 3.4.2 оператор S_n псевдоинтегрален и имеет $k_n m$, где $k_n \in L_\infty(m)$, в качестве представляющей меры. Последовательность (k_n) возрастает и почти всюду ограничена. В самом деле, по теореме (1) оператор S имеет псевдоинтегральное представление с некоторой представляющей мерой m'. Следовательно,

$$\iint_Q e(s)f(t)\,dm^1(s,t) = \lim_{n\to\infty} \iint_Q k_n(s,t)e(s)f(t)\,dm(s,t)$$

для всех $s \in E_0$ и $f \in F(m', e)$. Тем самым последовательность (k_n) ограничена и $m' = km$, где $k = \sup k_n$. Положим $\Lambda(S) := k$. Без труда проверяется, что Λ определяет линейный и решеточный изоморфизм. $\rhd$

3.4.4. Рассмотрим теперь линейный оператор $T : E(X) \to F_s(Y, Z)$, где X и Y — банаховы пространства. Напомним, что T допускает псевдоинтегральное представление, если существуют представляющая мера m и Z-слабо измеримая оператор-функция $\mathscr{K} : Q \to \mathscr{L}(X, Z)$, называемая *ядром*, такие, что для всех $u \in E(X)$ и $z \in Z$ имеет место равенство

$$\int_B \langle z, Tu\rangle(t)f(t)\,d\nu(t) = \iint_Q \langle z, K(s,t)u(s)\rangle f(t)\,dm(s,t),$$

где $f \in F(m, |u|)$. Оператор T назовем *регулярным*, если $K \in \mathfrak{M}_m(X, Z')$ и псевдоинтегральный оператор с представляющей мерой $|K|m$ действует из E в F.

Если $(A, \mathscr{A})$ — стандартное борелево пространство, то представляющая мера m допускает дезинтегрирование: $dm(s,t) = dm_t(s)d\nu(t)$. Точнее, существует отображение $t \mapsto m_t$ $(t \in B)$, где m_t — борелевская мера на A, причем выполнены условия: 1) если $A_0 \in \mathscr{A}$ и $\lambda(A_0) = 0$, то $m_t(A_0) = 0$ для ν-почти всех t; 2) для любого $A_0 \in \mathscr{A}$ функция $t \mapsto m_t(B_0)$ борелева; 3) если $A_0 \in \mathscr{A}$, $B_0 \in \mathscr{B}$ и $m(A_0 \times B_0) < +\infty$, то

$$m(A_0 \times B_0) = \int_{B_0} m_t(A_0)\,d\nu(t).$$

В этом случае слабый псевдоинтегральный оператор имеет вид

$$\langle z, Tu\rangle(t) = \int\limits_A \langle z, K(s,t)u(s)\rangle \, dm_t(s).$$

3.4.5. Теорема. *Слабо псевдоинтегральный оператор $T : E(X) \to F_s(Y,Z)$ с ядром K и представляющей мерой m мажорируем в том и только в том случае, если он регулярен. При этом $|T|$ — псевдоинтегральный оператор с представляющей мерой $|K|m$.*

$\lhd$ Допустим, что линейный оператор T допускает слабое псевдоинтегральное представление 3.4.4. Если $K \in \mathfrak{M}_\mu(X, Z')$, а $S : E \to F$ — псевдоинтегральный оператор с ядром $|K|$ и представляющей мерой m, то

$$\int\limits_B \langle Tu, z\rangle(s)g(s)\, d\lambda \leqslant \|z\| \int\limits_B S(|u|)(s)g(s)\, d\lambda$$

для всех $g \in F_0$. Отсюда $\langle Tu, z\rangle \leqslant S(|u|)$, и переход к точной верхней границе по всем $\|z\| \leqslant 1$ дает $|Tu| \leqslant S(|u|)$.

Наоборот, предположив мажорируемость слабо псевдоинтегрального оператора T, докажем, что его ядро K входит в $\mathfrak{M}_\mu(X, Z')$. Пусть Φ — псевдоинтегральный оператор из $\mathscr{D}(m)$ в $L^0(\lambda)$, порожденный представляющей мерой m. Для $x \in X$ и $z \in Z$ определим оператор $S_{x,z}$ из E в $L^0(\lambda)$ по формуле

$$\int\limits_B S_{x,z}(e)(s)g(s)\, d\lambda(s) = \iint\limits_Q \langle z, K(t,s)x\rangle e(t)g(s)\, dm(t,s),$$

где $e \in E$ и $g \in F(e)$. Понятно, что $S_{x,z} \in \mathscr{L}_\Phi(E,F)$. Из мажорируемости оператора T вытекает оценка

$$\int\limits_B S_{x,z}(e)(s)g(s)\, d\lambda(s) \leqslant \|x\|\,\|z\| \int\limits_B |T|(e)(s)g(s)\, d\lambda(s)$$

при $e \in E_+$ и $g \in F(e)$. Отсюда видно, что $S_{x,z} \leqslant |T|$, если $\|x\| \leqslant 1$ и $\|z\| \leqslant 1$. Пусть S_0 — точная верхняя граница в $L_r(E,F)$ ограниченного множества $\{S_{x,z} : \|x\| \leqslant 1,\ \|y\| \leqslant 1\}$. Так как $\mathscr{L}_\Phi(E,F)$ — компонента, то $S_0 \in \mathscr{L}_\Phi(E,F)$. По теореме 3.4.3 (2) в пространстве $L^0(m)$ существует

$$L := \sup\{\langle z, Kx\rangle : \|x\| \leqslant 1,\ \|z\| \leqslant 1\},$$

и при этом имеет место представление

$$\int\limits_B S(e)(s)g(s)\, d\lambda = \iint\limits_Q L(t,s)e(t)g(s)\, dm(t,s).$$

Итак, $K \in \mathfrak{M}_\mu(X, Z')$, $|K| = L$ и $S \leqslant |T|$. При доказательстве достаточности мы видели, что $|T| \leqslant S$, значит, $S = |T|$, т. е. $|T|$ — псевдоинтегральный оператор с ядром $|K|$ и представляющей мерой m. $\rhd$

3.4.6. Теорема. *Для мажорируемого оператора $T : E(X) \to F_s(Y,Z)$ равносильны следующие утверждения:*

(1) *оператор T порядково непрерывен;*

(2) *оператор $|T|$ допускает псевдоинтегральное представление;*

(3) *оператор T допускает слабое псевдоинтегральное представление.*

$\triangleleft$ (1) $\Leftrightarrow$ (2). Это следует из теорем 2.3.2 и 3.4.3 (1).

(2) $\Rightarrow$ (3). Пусть m — представляющая мера оператора $|T|$. Согласно 3.4.3 (2) существует изоморфизм Λ из $\{|T|\}^{\perp\perp}$ на идеальное пространство $L \subset L^0(m)$. Для $x \in X$ и $z \in Z$ оператор $S := S_{x,z} : e \mapsto \langle T(x \otimes e), z\rangle$ действует из E в F, регулярен и входит в $\{|T|\}^{\perp\perp}$. Положим $b(x,z) := \Lambda(S_{x,z})$. Нам уже известно, что b — билинейный оператор с абстрактной нормой и $|b| = \Lambda(|T|)$. По теореме 3.1.7 существует Z-слабо измеримая оператор-функция $K \in \mathfrak{M}_m(X, Z')$ такая, что $|b| = |K|$ и $b(x,z) = \langle z, Kx\rangle$ ($x \in X$, $z \in Z$). Для оператора $S \in \{|T|\}^{\perp\perp}$ в силу сказанного выше можно написать:

$$\int_B (Se)(s)g(s)\,d\lambda(s) = \iint_Q \Lambda(S)e(t)g(s)\,d\mu(s,t).$$

Отсюда, учитывая определение оператора b, получим

$$\int_B \langle z, T(x \otimes e)\rangle(s)g(s)\,d\lambda(s) = \iint_Q \langle z, K(t,s)x\rangle e(t)g(s)\,d\mu(t,s).$$

Принимая в расчет плотность $X \otimes E$ в $E(X)$, после надлежащего предельного перехода под знаком интеграла приходим к требуемому псевдоинтегральному представлению для T.

(3) $\Rightarrow$ (2). Это непосредственное следствие 3.4.3 (1) и 2.3.2. $\triangleright$

3.4.7. Пусть G — идеал в $L^0(m)$, состоящий из таких функций $k \in L^0(m)$, что псевдоинтегральный оператор с представляющей мерой km действует из E в F. Положим

$$M_\Phi(E(X), F_s(Y')) := \{T \in M(E(X), F_s(Y')) : |T| \in \mathscr{L}_\Phi(E,F)\}.$$

Теорема. *Для каждого $K \in G_s(\mathscr{L}(X, Y'))$ существует слабо псевдоинтегральный оператор $T \in M_\Phi(E(X), F_s(Y'))$ с ядром K и представляющей мерой m. Соответствие $K \mapsto T$ осуществляет линейную изометрию ПБК $G_s(\mathscr{L}(X, Y'))$ и $M_\Phi(E(X),\ F_s(Y'))$.*

$\triangleleft$ В доказательстве нуждается лишь первая часть утверждения. Остальное вытекает из 3.4.3 (2), 3.4.5 и 3.4.6. Возьмем $K \in G_s(\mathscr{L}(X, Y'))$. Для фиксированных $u \in E(X)$ и $y \in Y$ функционал

$$\varphi : f \mapsto \iint_Q \langle y, K(s,t)u(s)\rangle f(t)\,dm(s,t) \quad (f \in F(m, |u|))$$

порядково непрерывен. Следовательно, имеет место представление

$$\varphi(f) = \int_B f(t)g(t)\,d\nu(t) \quad (f \in F(m, |u|)),$$

где g — однозначно определенный элемент из $L^0(\nu)$. Рассмотрим оператор $S : Y \to L^0(\nu)$, определяемый формулой $Sy := g$. Если Ψ — псевдоинтегральный оператор с представляющей мерой $|K|m$, то

$$\int_B f(t)g(t)\,d\nu(t) \leqslant \|y\| \iint_Q |K|(s,t)|u|(s)f(t)\,dm(s,t) =$$

$$= \|y\| \int_B \Psi(|u|)(t)f(t)\,d\nu(t) \quad (f \in F(m, |u|)).$$

Отсюда видно, что $Sy := g \leqslant \Psi(|u|)\|y\|$. Значит, S — оператор с абстрактной нормой и $|S| \in F$. По теореме 3.1.7 существует $v \in F_s(Y')$ такой, что $Sy = \langle y, v\rangle$ $(y \in Y)$. Определим теперь оператор T равенством $Tu := v$. Из определений вытекает, что

$$\int\limits_B \langle y, Tu\rangle(t) f(t)\, d\nu(t) = \int\limits_B g(t) f(t)\, d\nu(t) = \varphi(g) =$$

$$= \iint\limits_Q \langle y, K(s,t)u(s)\rangle f(t)\, dm(s,t). \ \triangleright$$

3.5. Комментарии

3.5.1. Как уже отмечалось в 2.5.2, операторы, сохраняющие дизъюнктность, начал изучать Б. З. Вулих в [20]. К материалу настоящего параграфа примыкают работы [2, 3, 80, 81, 139] (см. также обзор [12]). Теорему 3.1.2 установили Берно, Хауисманс и де Пагте [90]. В этой же работе введено понятие n-гомоморфизма. Теорема из 3.1.4 легко выводится с помощью спектральной теоремы Фрейденталя из следующего результата С. С. Кутателадзе [59, 60].

Теорема. *Пусть T и F — векторные решетки, причем F порядково полно. Положительный оператор $T : E \to F$ будет решеточным гомоморфизмом в том и только в том случае, если для любого оператора $0 \leqslant S \leqslant T$ найдется ортоморфизм $) \leqslant \alpha \leqslant I_F$ такой, что $S = \alpha \circ T$.*

Мультипликативное представление 3.1.5 установил Ю. А. Абрамович [79]. Основные результаты пункта 3.1, теоремы 3.1.8 и 3.1.9 принадлежат А. Г. Кусраеву [49, 50]. Они, как видно из доказательства, получаются путем сочетания реализационного метода Ю. А. Абрамовича и техники мажорируемых операторов. Дальнейшее развитие такого подхода и распространение мультипликативного представления на операторы, действующие в решеточно нормированных пространствах непрерывных или измеримых сечений, можно найти в работах А. Е. Гутмана [25, 101–103]. Вспомогательный факт из 3.1.7 получен Г. Н. Шотаевым [75].

3.5.2. В цикле работа [127–130] Магарам развила оригинальный подход к изучению положительных операторов в пространствах измеримых функций. Краткое описание метода и основные результаты изложены в ее обзоре [131]. Фрагмент теории Магарам, связанный с теоремой Радона — Никодима, распространили на случай положительных операторов в векторных решетках Люксембург и Шеп [124]. Дальнейшее развитие это направление получило в работах Г. П. Акилова, Е. В. Колесникова, А. Г. Кусраева [4], Е. В. Колесникова, А. Г. Кусраева [40].

Понятие разложимого оператора введено в [49, 50]. Теорема из 3.2.4, полученная в [44, 47], при $F = \mathbb{R}$ превращается в один результат Б. З. Вулиха и Г. Я. Лозановского о представлении порядково непрерывных функционалов. Варианты теорем 3.2.3 и 3.2.7 (теорема Радона — Никодима) для положительных операторов установили Люксембург и Шеп [124]. Основные результаты пп. 3.2.6 и 3.2.7 принадлежат А. Г. Кусраеву [49, 50]. Связи с выпуклым анализом и булевозначную реализацию операторов Магарам см. в [47, 53].

3.5.3. Основными источниками по вопросам теории классических интегральных операторов, примыкающим к теме текущего параграфа, являются работы [42, 43, 104] (см. также [17]). Вопрос о том, когда линейный оператор допускает интегральное представление, был поставлен Дж. фон Нейманом [135]. Критерий интегральной представимости 3.3.2 установлен А. В. Бухваловым в 1974 г. (см. [11]). В случае, когда E и F — KB-пространства на $[0, 1]$, эквивалентность условий (1) и (2) из теоремы 3.3.2 была ранее доказана Г. Я. Лозановским в [65]. Критерий слабой и сильной интегральной представимости мажорируемого оператора в пространствах измеримых вектор-функций (теоремы 3.3.7 и 3.3.8), а также теоремы об общем виде мажорируемых операторов 3.3.9–3.3.11 получены А. Г. Кусраевым [48, 50]. Аналогичные результаты получил В. Г. Наводнов [69, 70] для линейных операторов, действующих из пространства измеримых вектор-функций в произвольное банахово пространство, т. е. в случае $F = \mathbb{R}$ (см. также работу Кевина [111]). Доказательство критериев интегральной представимости основано на исчислении порядково ограниченных операторов в случае пространств скалярных функций (см. [11]) и на технике мажорируемых операторов в общем случае пространств вектор-функций (см. [50]). Другое доказательство импликации (3) $\Rightarrow$ (1) из теоремы 3.3.2 нашел Вайс [156].

3.5.4. Теорему 3.4.3 (1) доказал Сурур [152]. Результаты 3.4.2 и 3.4.3 (2) можно также извлечь из его работ [151, 152]. Основные результаты из 3.4.5–3.4.7 о псевдоинтегральном представлении мажорируемых операторов в пространствах измеримых вектор-функций получены К. Т. Тибиловым [74]. В работах Вайса [157, 158] имеются интересные и разнообразные применения псевдоинтегральных операторов.

Глава 4. Операторы в пространствах со смешанной нормой

Если (X, E) — решеточно нормированное пространство и E — нормированная решетка, то в X можно ввести смешанную норму так, что X станет нормированным (и даже банаховым, если рассматриваемое пространство r-полно) пространством (4.1.1, 4.1.2). Сопряженное к разложимому пространству со смешанной нормой есть также пространство со смешанной нормой (4.1.4), причем каноническое вложение во второе сопряженное пространство сохраняет векторную норму (4.1.5). Более общий результат утверждает, что пространство мажорируемых операторов, действующих между пространствами со смешанной нормой, само является пространством со смешанной нормой при естественных условиях (4.1.8). Довольно часто переход к сопряженному оператору перестановочен с вычислением точной мажоранты (4.1.9).

Различные классы операторов, изучаемые в функциональном анализе, часто определяются в смешанных терминах, включающих норму и порядок. С использованием (положительно однородного) функционального исчисления в банаховых решетках (4.2.1) вводится класс (p, q)-суммирующих операторов в пространствах со смешанной нормой (4.2.2). (p, q)-Суммирующие операторы, действующие между пространствами со смешанной нормой, образуют банахово пространство (4.2.3). Ограниченный оператор является (p, q)-суммирующим в том и только в том случае, если сопряженный к нему оператор (q', p')-суммирующий (4.2.5). $(1, 1)$-Суммирующие операторы можно охарактеризовать в терминах сходящихся рядов (4.2.6), причем этот класс операторов при некоторых ограничениях совпадает с классом мажорируемых операторов (4.2.7). Частными случаями понятия (p, q)-суммирующего оператора являются понятия (p, q)-выпуклого (4.2.10 (1)), (p, q)-вогнутого (4.2.10 (2)) и (p, q)-регулярного (4.2.10 (3)) операторов.

Решеточно нормированные пространства составляют хорошую основу для построения изометрической классификации пространств со смешанной нормой. При этом решающим оказывается наличие в банаховом пространстве полной булевой алгебры проекторов и специального геометрического свойства единичного шара, связанного с этой алгеброй. Последнее называют $(\mathscr{B}, p)$-цикличностью шара, где $p = \infty$ (4.3.4) или $1 \leqslant p < \infty$ (4.3.4). Банахово пространство линейно изометрично o-полному пространству со смешанной нормой, нормирующая решетка которого есть порядково полное AM-пространство с единицей (AL_p-пространство, $1 \leqslant p < \infty$) в том и только в том случае, если оно $(\mathscr{B}, \infty)$-циклично ($(\mathscr{B}, p)$-циклично) относительно некоторой (полной по Баде) булевой алгебры проекторов $\mathscr{B}$ (4.3.3, 4.3.5).

§ 4.1. Пространства со смешанной нормой

В этом параграфе вводятся пространства со смешанной нормой и изучаются простейшие их свойства. Рассмотрены также некоторые взаимосвязи понятий мажорируемого оператора и смешанной нормы. Необходимые сведения из теории нормированных решеток см. в [21, 35, 126, 145].

4.1.1. *Нормированной* (*банаховой*) *решеткой* называют векторную решетку E, которая одновременно является и нормированным (банаховым) пространством, причем норма монотонна в следующем смысле: если $|x| \leqslant |y|$, то $\|x\| \leqslant \|y\|$ $(x, y \in E)$. Если (X, E) — решеточно нормированное пространство, где E — нормированная решетка, то по определению $|x| \in E$ для каждого $x \in X$ и на X можно ввести *смешанную норму* по формуле

$$|\!|\!|x|\!|\!| := \||x|\| \quad (x \in X).$$

Нормированное пространство $(X, |\!|\!|\cdot|\!|\!|)$ в этой ситуации называют *пространством со смешанной нормой*. В силу неравенства $\||x| - |y|\| \leqslant |x - y|$ и монотонности нормы E векторная норма $|\cdot|$ будет непрерывным оператором из $(X, |\!|\!|\cdot|\!|\!|)$ в E. Для пространства со смешанной нормой имеют смысл все понятия, введенные в гл. 1 для РНП: разложимость, r-полнота, d-полнота, o-полнота и т. д.

Банаховым пространством со смешанной нормой будем называть пару (X, E), если E — банахова решетка, а X — r-полное РНП с E-значной нормой. Основанием для такого определения служит следующее предложение.

4.1.2. *Пусть E — банахова решетка. Тогда пространство $(X, |\!|\!|\cdot|\!|\!|)$ банахово в том и только в том случае, если* РНП *X полно относительно сходимости с регулятором.*

$\lhd$ Возьмем фундаментальную последовательность $(x_n) \subset X$. Без ограничения общности можно считать, что $|\!|\!|x_{n+1} - x_n|\!|\!| \leqslant 1/n^3$ $(n \in \mathbb{N})$. Положим

$$e_n := |x_1| + \sum_{k=1}^{n} k|x_{k+1} - x_k| \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Тогда

$$\|e_{n+l} - e_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+l} k|x_{k+1} - x_k| \right\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+l} k|\!|\!|x_{k+1} - x_k|\!|\!| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+l} \frac{1}{k^2} \xrightarrow[n,l\to\infty]{} 0.$$

Итак, последовательность (e_n) фундаментальна, а потому имеет предел $e := \lim\limits_{n\to\infty} e_n$. Так как $e_{n+k} \geqslant e_n$ $(n, k \in \mathbb{N})$, то $e = \sup e_n$. Если $n \geqslant m$, то

$$m|x_{n+l} - x_n| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+l} k|x_{k+1} - x_k| \leqslant e_{n+l} - e_n \leqslant e,$$

следовательно, $|x_{n+l} - x_n| \leqslant (1/m)e$. Это означает r-фундаментальность последовательности (x_n). Ввиду условия r-полноты существует $x := r\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Ясно, что $\lim\limits_{n\to\infty} |\!|\!|x - x_n|\!|\!| = 0$. Предположим, что последовательность $(x_n) \subset X$ r-фундаментальна, т. е. $|x_n - x_m| \leqslant \lambda_k e$ $(m, n, k \in \mathbb{N},\ m, n \geqslant k)$, где $0 \leqslant e \in E$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = 0$. Тогда $|\!|\!|x_n - x_m|\!|\!| \leqslant \lambda_k\|e\| \to 0$ при $k \to \infty$, следовательно, существует $x := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Ввиду непрерывности векторной нормы будет $|x - x_n| \leqslant \lambda_k e$ $(n \geqslant k)$, поэтому $x = r\text{-}\lim x_n$. $\rhd$

4.1.3. *Пусть E — банахова решетка с условием (A). Тогда справедливы утверждения:*

(1) *$(X, |\!|\!| \cdot |\!|\!|)$ банахово в том и только в том случае, если $(X, |\cdot|)$ о-полно;*

(2) *если X разложимо, то $(X, |\!|\!| \cdot |\!|\!|)$ банахово в том и только в том случае, если $(X, |\cdot|)$ — ПБК.*

$\lhd$ Утверждение (2) — очевидное следствие (1). Достаточность в (1) вытекает из 4.1.2. Остается показать, что если $(X, |\!|\!| \cdot |\!|\!|)$ банахово, то $(X, |\cdot|)$ o-полно. Пусть сеть $(x_\alpha) \subset X$ такова, что $|x_\alpha - x_\beta| \leqslant e_\gamma$ при $\alpha, \beta \geqslant \alpha(\gamma)$ и e_γ, убывая, o-сходится к нулю. Далее, $|\!|\!|x_\alpha - x_\beta|\!|\!| \leqslant \|e_\gamma\|$ и ввиду условия (A) $\|e_\gamma\| \to 0$, так что (x_α) фундаментальна относительно смешанной нормы. Следовательно, $\lim\limits_\alpha |\!|\!|x - x_\alpha|\!|\!| = 0$ для некоторого $x \in X$. Учитывая непрерывность векторной нормы, можно осуществить предельный переход по β в векторной норме, стало быть, $|x - x_\alpha| \leqslant e_\gamma$ при $\alpha \geqslant \alpha(\gamma)$. Это означает, что $x = o\text{-}\lim\limits_\alpha x_\alpha$. $\rhd$

4.1.4. Теорема. *Если (X, E) — разложимое пространство со смешанной нормой, то (X', E') — разложимое о-полное пространство со смешанной нормой. Векторной нормой функционала $x' \in X'$ служит его наименьшая мажоранта $|x'| \in E'$ и, в частности,*

$$\langle x, x' \rangle \leqslant \langle |x|, |x'| \rangle \ (x \in X, \ x' \in X'). \tag{1}$$

$\lhd$ Непрерывный функционал $x' \in X'$ ограничен на множестве $\{x \in X : |x| \leqslant e\}$ для каждого $e \in E_+$. Отсюда в силу 2.2.8 (1) следует, что x' мажорируем и

$$\langle e, |x'| \rangle = \sup\{\langle x, x' \rangle : |x| \leqslant e, x \in X\}. \tag{2}$$

По теореме 2.3.5 $M(X, \mathbb{R})$ — ПБК. Следовательно, X' также ПБК, так как $X' := \{x^* \in M(X, \mathbb{R}) : |x^*| \in E'\}$, а E' — порядковый идеал в $L_r(E, \mathbb{R})$. Остается заметить, что норма в X' смешанная:

$$\begin{aligned} |\!|\!|x'|\!|\!| &= \sup\{\langle e, |x'| \rangle : e \in E_+, \ \|e\| \leqslant 1\} = \\ &= \sup\{\sup\{\langle x, x' \rangle : |x| \leqslant e, \ x \in X\} : e \in E_+, \ \|e\| \leqslant 1\} = \\ &= \sup\{\langle x, x' \rangle : x \in X, \ |\!|\!|x|\!|\!| \leqslant 1\} = |\!|\!|x'|\!|\!|. \ \rhd \end{aligned}$$

4.1.5. *Пусть (X, E) — разложимое пространство со смешанной нормой. Каноническое вложение X во второе сопряженное пространство X'' сохраняет векторную норму. Точнее, если $\varkappa$ и λ — канонические вложения $X \to X''$ и $E \to E''$ соответственно, то $|\varkappa(x)| = \lambda(|x|)$ $(x \in X)$.*

$\lhd$ Сначала заметим, что для $x \in X$ и $x' \in X$ согласно 4.1.4 (1) будет

$$\langle x', \varkappa(x) \rangle = \langle x, x' \rangle \leqslant \langle |x|, |x'| \rangle = \langle |x'|, \lambda(|x|) \rangle.$$

Следовательно, $|\varkappa(x)| \leqslant \lambda(|x|)$. Возьмем произвольный функционал $e' \in E'$. По теореме Хана — Банаха для фиксированного $x \in X$ найдется функционал $x' \in X$ такой, что $\langle x, x' \rangle = \langle |x|, e' \rangle$ и $\langle u, x' \rangle \leqslant \langle |u|, e' \rangle$ для всех $u \in X$. Еще раз воспользовавшись неравенством 4.1.4 (1), получим

$$\langle e', \lambda(|x|) \rangle = \langle |x|, e' \rangle = \langle x, x' \rangle = \langle x', \varkappa(x) \rangle \leqslant \langle |x'|, |x(x)| \rangle \leqslant \langle e', |\varkappa(x)| \rangle$$

Таким образом, $\lambda(|x|) \leqslant |\varkappa(x)|$. $\rhd$

4.1.6. Будем говорить, что в пространстве со смешанной нормой (X, E) *выполнено условие* (A) или что смешанная норма *порядково непрерывна*, если из $x_\alpha \xrightarrow{(o)} 0$ следует, что $|\!|\!|x_\alpha|\!|\!| \to 0$. Если X разложимо, в данном определении достаточно рассматривать убывающие по векторной норме сети, т. е. можно считать $|x_\beta| \geqslant |x_\alpha|$ при $\beta \geqslant \alpha$. В частности, для нормированной решетки $X = E$ получаем привычное определение условия (A). Запись $(X, E) \in (A)$ означает, что в (X, E) выполнено условие (A). Очевидно, что если $E \in (A)$, то $(X, E) \in (A)$. Обратное, вообще говоря, неверно.

4.1.7. Теорема. *Для разложимого пространства со смешанной нормой (X, E) равносильны следующие утверждения:*

(1) *в X смешанная норма порядково непрерывна;*

(2) *всякий замкнутый o-идеал в X является компонентой;*

(3) *всякий ограниченный функционал на X o-непрерывен.*

(4) *в $|X|^{\perp\perp}$ норма порядково непрерывна.*

$\triangleleft$ (1) $\Rightarrow$ (2). Если $X \in (A)$, то замкнутый o-идеал будет o-замкнут и требуемое вытекает из 1.1.5 (3).

(2) $\Rightarrow$ (3). Нулевой идеал $\mathscr{N}_f$ ограниченного функционала $f \in X'$ будет замкнутым o-идеалом, поэтому достаточно сослаться на теорему 2.4.7.

(3) $\Rightarrow$ (4). Без ограничения общности можно считать $E = |X|^{\perp\perp}$. Возьмем положительный функционал $\varphi \in E'$. По теореме 2.4.5 имеет место разложение $\varphi = \varphi_n + \varphi_s$, где φ_n o-непрерывен, а φ_s o-сингулярен. Допустим, что $\varphi_s \neq 0$. Так как функционал $x \mapsto \varphi_s(|x|)$ $(x \in X)$ сублинеен, непрерывен и отличен от нуля, то по теореме Хана — Банаха существует ненулевой функционал $f \in X'$ такой, что $f(x) \leqslant \varphi_s(|x|)$ $(x \in X)$. Отсюда $0 \neq |f| \leqslant \varphi_s$. По условию (3) функционал f o-непрерывен, следовательно, $|f|$ также o-непрерывен согласно 2.3.2. Это противоречит o-сингулярности φ_s, значит, должно быть $\varphi_s = 0$ и $\varphi = \varphi_n$. Итак, $E' = E'_+ - E'_+ \subset E'_n$, поэтому норма в E порядково непрерывна.

(4) $\Rightarrow$ (1). Очевидно. $\triangleright$

4.1.8. Рассмотрим теперь пространства со смешанной нормой, состоящие из мажорируемых операторов. Пусть (X, E) и (Y, F) — пространства со смешанной нормой. Обозначим через $\mathscr{M}(X, Y)$ множество всех линейных операторов из X в Y, имеющих ограниченные мажоранты. Иными словами, $T \in \mathscr{M}(X, Y)$ означает, что T линеен и $|Tx| \leqslant S(|x|)$ $(x \in X)$ для некоторого $0 \leqslant S \in \mathscr{L}(E, F)$. Мажорантную норму $\mu(T)$ оператора $T \in \mathscr{M}(X, Y)$ определим формулой

$$\mu(T) = \inf\{\|S\| : S \in \mathscr{L}(E, F) \cap \operatorname{maj}(T)\}.$$

В случае, когда $X = E$ и $Y = F$, получаем пространство регулярных операторов $(\mathscr{R}(E, F), \rho) := (\mathscr{M}(X, Y), \mu)$. Отметим, что если E и F — банаховы решетки, то $\mathscr{M}(X, Y) = M(X, Y)$, ибо в этом случае $\mathscr{R}(E, F) = L_r(E, F)$.

(1) *Если X разложимо, а F порядково полна, то норма μ смешанная: $\mu(T) = \||T|\|$. Если же, сверх того, E и F — банаховы решетки, а Y — ПБК, то $(\mathscr{M}(X, Y), \mathscr{R}(E, F))$ — разложимое o-полное пространство со смешанной нормой.*

$\triangleleft$ Это следует из 2.1.2, 2.3.5. $\triangleright$

Линейный оператор $T : X \to Y$ называют *предмажорируемым*, если существует оператор $0 \leqslant S \in \mathscr{L}_u(E, F'')$, называемый предмажорантой, такой, что $|Tx| \leqslant S(|x|)$ $(x \in X)$. Положим $\mu^p(T) = \inf\{\|S\|\}$, где инфимум берется по всем указанным S. Пространство всех предмажорируемых операторов обозначается через $M^p(X, Y)$.

(2) *Если X разложима, то норма μ^p смешанная и $\mu^p(T) = \||T|\|$, так как решетка F'' порядково полна и в $\mathscr{R}(E, F'')$ существует наименьшая предмажоранта $|T|$.*

4.1.9. В заключение этого параграфа рассмотрим несколько простых свойств мажорируемых операторов. Начнем с вопроса о том, когда переход к сопряженному оператору перестановочен с вычислением точной мажоранты. Пусть (X, E) и (Y, F) — разложимые пространства со смешанной нормой. Возьмем оператор $T \in \mathscr{M}(X, Y)$. Тогда определен сопряженный оператор $T' \in \mathscr{L}(Y', X')$. Пусть F порядково полна. Тогда существует оператор $|T|$.

(1) *Если $T \in M(X, Y)$, то $T' \in M(Y', X')$ и $|T'| \leqslant |T|'$.*

◁ Для произвольных $y' \in Y'$ и $e \in E_+$

$$\langle e, |T'y'|\rangle \leqslant \langle e, |y' \circ T|\rangle \leqslant \langle |T|e, |y'|\rangle = \langle e, |T|'|y'|\rangle.$$

Отсюда $|T'y'| \leqslant |T|'(|y'|)$ $(y' \in Y')$, стало быть, $T \in M(Y', X')$ и $|T'| \leqslant |T|'$. ▷

Неравенство между точными мажорантами может оказаться строгим. Однако для порядково непрерывного мажорируемого оператора такое невозможно. Точнее, имеет место следующее предложение.

(2) *Предположим, что E и F — банаховы решетки с разделяющими множествами E'_n и F'_n, причем F порядково полна. Пусть (X, E) и (Y, F) — разложимые банаховы пространства со смешанной нормой. Если $T \in M_n(X, Y)$, то $T'(Y'_n) \subset X'_n$ и*

$$|T'|f' = |T|'f' \quad (f' \in F'_n).$$

◁ Требуемое включение — очевидное следствие o-непрерывности T. По теореме 2.3.2 $|T|$ также o-непрерывен, поэтому $|T|'(F'_n) \subset E'_n$. Пусть T^* и $|T|^*$ — ограничения операторов T' и $|T|'$ на Y'_n и F'_n соответственно. Так как F'_n — o-идеал в F' и $Y'_n := \{y' \in Y : |y'| \in F'_n\}$, то $|T^*|$ — ограничение $|T'|$ на F'_n. Это легко усматривается из 2.2.2. Отсюда в силу предложения (1) имеем $|T^*| \leqslant |T|^*$. Легко понять, что оператор $|T|^*$ o-непрерывен. Но тогда o-непрерывным будет оператор T^*, так как он имеет o-непрерывную мажоранту. Теперь для оператора $S := T^* : Y'_n \to X'_n$ будет $S'((X'_n)'_n) \subset (Y'_n)'_n$, и в силу уже доказанного $|S^*| \leqslant |S|^*$, или $|T^{**}| \leqslant |T^*|^*$. Понятно, что ограничение T^{**} на X совпадает с T. Поскольку E o-идеал в $(E'_n)'_n$ и $X = \{x'' \in X'' : |x''| \in E\}$, то $|T|$ есть ограничение $|T^{**}|$ на E. Таким образом, $|T| \leqslant |T^*|^*|_E$. Если теперь $e \in E_+$ и $f' \in F'_{n+}$, то

$$\langle e, |T|'f'\rangle = \langle |T|e, f'\rangle \leqslant \langle |T^*|^* e, f'\rangle = \langle e, |T^*|f'\rangle.$$

Значит, $|T|^* \leqslant |T^*|$, что вместе с установленным выше дает равенство $|T^*| = |T|^*$. ▷

(3) ***Следствие.*** *Пусть выполнены условия предложения (2) и, сверх того, в X и Y выполнено условие (A). Если $T \in M_n(X, Y)$, то $T' \in M_n(Y', X')$ и $|T'| = |T|'$.*

4.1.10. *Предположим, что E и F — банаховы решетки. Имеют место следующие утверждения.*

(1) *Мажорируемый оператор T ограничен и $\|T\| \leqslant \mu(T)$.*

(2) *Если $T \in \mathscr{M}(X, Y)$ и $U \in \mathscr{M}(Y, Z)$, то $UT \in \mathscr{M}(X, Z)$ и $\mu(U \circ T) \leqslant \mu(U) \cdot \mu(T)$.*

(3) *Если $T \in (X, Y)$, то $T' \in (Y', X')$ и $\mu(T') \leqslant \mu(T)$.*

(4) *Пусть X и Y разложимы. Для оператора $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ выполняется соотношение $T' \in \mathscr{M}(Y', X')$ в том и только в том случае, если $T \in \mathscr{M}^p(X, Y)$; в этом случае $\mu^p(T) = \mu(T')$.*

◁ Возьмем ограниченный оператор $T : X \to Y$. Пусть $T' \in \mathscr{M}(Y', X')$ и $U := |T'|$. Тогда U' является мажорантой оператора T'' (см. 4.1.9 (1)). Обозначим буквой S ограничение U' на E. Ясно, что $S \in \mathscr{L}_+(E, F'')$ и в силу 4.1.5 $|Tx| \leqslant S(|x|)$ $(x \in X)$. Это означает, что $T \in \mathscr{M}(X, Y)$, причем $\mu^p(T) \leqslant \|S\| \leqslant \|U'\| = \|U\| = \mu(T')$. Наоборот, предположим, что $T \in \mathscr{M}^p(X, Y)$ и оператор $S \in \mathscr{L}_+(E, F'')$ служит предмажорантой T. Как и выше, учитывая 4.1.4 и 4.1.5, можно убедиться в том, что ограничение S' на F' будет мажорантой для T'. Поэтому $T' \in M(Y', X')$ и $\mu(T') \leqslant \|S'\| = \|S\|$. Отсюда $\mu(T') \leqslant \mu^p(T)$ и окончательно $\mu^p(T) = \mu(T')$. ▷

(5) *Если в F'' существует положительный проектор единичной нормы на образ F при каноническом вложении $F \to F''$, то $\mathscr{M}(X, Y) = \mathscr{M}^p(X, Y)$ и $\mu = \mu^p$. Если же, сверх того, X и Y разложимы, то для ограниченного оператора $T : X \to Y$ равносильны включения $T \in \mathscr{M}(X, Y)$ и $T' \in \mathscr{M}(Y', X')$, причем $\mu(T) = \mu(T')$.*

$\lhd$ Пусть $\pi : F'' \to F$ — положительный проектор и $\|\pi\| = 1$. Возьмем ограниченный оператор $T : X \to Y$. Если оператор $S \in \mathscr{L}_+(E, F'')$ является предмажорантой для $T \in L(X,Y)$, то $\pi \circ S$ — мажоранта для T и $\|\pi \circ S\| \leqslant \|S\|$. Тем самым из $T \in \mathscr{M}^p(X,Y)$ следует, что $T \in \mathscr{M}(X,Y)$ и $\mu^p(T) \geqslant \mu(T)$. Обратное неравенство очевидно. Вторая часть утверждения вытекает из первой и из (4). $\rhd$

§ 4.2. Суммирующие операторы

Различные классы операторов, изучаемые в функциональном анализе, определяются в смешанных терминах, использующих норму и порядок. Значительная часть соответствующей проблематики естественно вписывается в рамки теории РНП. При этом обнаруживаются новые связи и новые возможности. В этом параграфе мы рассмотрим небольшой фрагмент, связанный с понятием суммирующего оператора.

4.2.1. Пусть E — банахова решетка и $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — равномерно непрерывная положительно однородная функция. Существует отображение $\hat{f} : E^n \to E$, которое непрерывно, положительно однородно и удовлетворяет условию

$$\hat{f}(t_1 e, \dots, t_n e) = e f(t_1, \dots, t_n) \quad (t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}^n, e \in E_+).$$

Элемент $\hat{f}(e_1, \dots, e_n)$ содержится в идеале, порожденном $|e_1| \vee \dots \vee |e_n|$.

Возьмем функцию

$$f_{p,n} : (t_1, \dots, t_n) \mapsto \left(\sum_{k=1}^n |t_k|^p \right)^{1/p}$$

(при $p = \infty$ полагаем $f_{p,n}(t_1, \dots, t_n) = \max\{|t_k| : k := 1, \dots, n\}$). Эта функция положительно однородна и непрерывна. Пусть $Q_{p,n} := \hat{f}_{p,n}$ — соответствующее отображение из E^n в E. Будем использовать более громоздкую, но выразительную запись:

$$Q_{p,n}(e_1, \dots, e_n) =: \left(\sum_{k=1}^n |e_k|^p \right)^{1/p} \qquad (e_1, \dots, e_n \in E).$$

Потребуются следующие свойства отображения $Q_{p,n}$ ($1/p + 1/q = 1$, $e_1, \dots, e_n \in E$; $e_1', \dots, e_n' \in E'$, $0 \leqslant S \in \mathscr{L}(E, F)$):

$$\left(\sum_{k=1}^n |e_k|^p \right)^{1/p} = \sup \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k : \left(\sum_{k=1}^n |\lambda_k|^q \right)^{1/q} \leqslant 1 \right\}, \tag{1}$$

$$\left\| \left(\sum_{k=1}^n |e_k|^p \right)^{1/p} \right\| = \sup \left\{ \sum_{k=1}^n \langle e_k, e_k' \rangle : \left\| \left(\sum_{k=1}^n |e_k'|^q \right)^{1/q} \right\| \leqslant 1 \right\}, \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^n |\langle e_k, e_k' \rangle| \leqslant \left\langle \left(\sum_{k=1}^n |e_k|^p \right)^{1/p}, \left(\sum_{k=1}^n |e_k'|^q \right)^{1/q} \right\rangle, \tag{3}$$

$$\left(\sum_{k=1}^n |S e_k|^p \right)^{1/p} \leqslant S \left(\sum_{k=1}^n |e_k|^p \right)^{1/p}. \tag{4}$$

4.2.2. Пусть $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant +\infty$. Линейный оператор $T : X \to Y$ назовем (p,q)-*суммирующим*, если существует число $k > 0$ такое, что для любого конечного набора $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ выполняется неравенство

$$\left\| \left(\sum_{k=1}^{n} |Tx_k|^p \right)^{1/p} \right\| \leqslant k \left\| \left(\sum_{k=1}^{n} |x|^q \right)^{1/q} \right\|.$$

Точную нижнюю границу множества всех указанных k обозначим через $\sigma_{pq}(T)$. Пусть $\mathfrak{S}_{p,q}(X,Y)$ — пространство всех (p,q)-суммирующих операторов из X в Y. Как видно из определения, суммирующий оператор T ограничен, причем $\|T\| \leqslant \sigma_{p,q}(T)$. Ясно также, что $\sigma_{p,q}$ — норма на $\mathfrak{S}(X,Y)$. Неравенство треугольника для $\sigma_{p,q}$ вытекает из сублинейности отображения

$$Q_p : (f_1, \dots, f_n) \mapsto \left(\sum_{k=1}^{n} |f_k|^p \right)^{1/p}$$

из F^n в F. Норму σ_{pq} можно посчитать по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_{pq}(T) &= \sup \left\{ \left\| \left(\sum_{k=1}^{n} |Tx_k|^p \right)^{1/p} \right\| : x_k \in X,\ n \in \mathbb{N},\ \left\| \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^q \right)^{1/q} \right\| \leqslant 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \frac{\left\| \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |Tx_k|^p \right)^{1/p} \right\|}{\left\| \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^q \right)^{1/q} \right\|} : x_k \in X,\ n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{n} |x_k| \neq 0 \right\}. \end{aligned}$$

При $p = q = 1$ будем говорить просто о *суммирующих* операторах и использовать σ вместо σ_{11} и $\mathfrak{S}$ вместо $\mathfrak{S}_{11}$.

4.2.3. *Теорема.* *Пусть X и Y — пространства со смешанной нормой, причем Y банахово. Тогда $(\mathfrak{S}_{p,q}(X,Y), \sigma_{pq})$ — банахово пространство.*

$\lhd$ Пусть (T_n) — фундаментальная последовательность в $\mathfrak{S}_{pq}(X,Y)$. Тогда (T_n) будет фундаментальной и в более слабой норме пространства $\mathscr{L}(X,Y)$. Последнее полно, следовательно, существует оператор $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|T - T_n\| = 0$. Для $\varepsilon > 0$ подберем номер $k_0 \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\sigma_{pq}(T_n - T_m) \leqslant \varepsilon$ при всех $n, m \geqslant k_0$. Тогда для каждого конечного набора $x_1, \dots, x_l \in X$

$$\left\| \left(\sum_{k=1}^{l} |x_k|^q \right)^{1/q} \right\| \leqslant 1 \Rightarrow \alpha_{nm} := \left\| \left(\sum_{k=1}^{l} |T_n x_k - T_m x_k|^p \right)^{1/p} \right\| \leqslant \varepsilon.$$

Заметим, что оператор $Q_{p,l}$ непрерывен, так как из-за сублинейности верно неравенство

$$|Q_{p,l}(f_1, \dots, f_l) - Q_{p,l}(g_1, \dots, g_l)| \leqslant Q_{p,l}(f_1 - g_1, \dots, f_l - g_l).$$

Учитывая также, что векторная норма есть непрерывный оператор из Y в F, заключаем:

$$\lim_{m\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{l} |T_n x_k - T_m x_k|^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{k=1}^{l} |T_n x_k - T x_k|^p \right)^{1/p}.$$

Тем самым

$$\lim_{m\to\infty} \alpha_{nm} = \left\| \left(\sum_{k=1}^{l} |T_n x_k - T x_k|^p \right)^{1/p} \right\| \leqslant \varepsilon.$$

Произвол в выборе элементов $x_1, \dots, x_n$ влечет $\sigma_{pq}(T_n - T) \leqslant \varepsilon$ при $n \geqslant k_0$. Отсюда видно, что $T \in \mathfrak{S}_{p,q}(X,Y)$ и $\sigma_{pq}(T_n - T) \to 0$ при $n \to \infty$. $\rhd$

4.2.4. *Если $T \in \mathfrak{S}_{pq}(X,Y)$, $S \in \mathscr{M}(X,Y)$ и $U \in \mathscr{M}(X_1,X)$, то $STU \in \mathfrak{S}_{pq}(X_1,Y_1)$ и $\sigma_{pq}(STU) \leqslant \mu(S)\sigma_{pq}(T)\mu(U)$.*

◁ Пусть S_0 и U_0 — произвольные мажоранты операторов S и U соответственно. Тогда для произвольных $x_1,\dots,x_n \in X_1$ двукратное применение 4.2.1(4) дает

$$\left\|\left(\sum_{k=1}^n |STUx_k|^p\right)^{1/p}\right\| \leqslant \left\|\left(\sum_{k=1}^n S_0(|TUx_k|)^p\right)^{1/p}\right\|$$

$$\leqslant \|S_0\|\sigma_{pq}(T)\left\|\left(\sum_{k=1}^n |Ux_k|^p\right)^{1/p}\right\| \leqslant \|S_o\|\sigma_{pq}(T)\|U_0\|\left\|\left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p}\right\|.$$

Тем самым $STU \in \mathfrak{S}_{pq}(X_1,Y_1)$ и $\sigma_{pq}(STU) \leqslant \|S_0\|\sigma_{pq}(T)\|U_0\|$. Переход к инфимуму по S_0 и U_0 приводит к требуемому неравенству. ▷

4.2.5. Теорема. *Пусть X и Y — банаховы пространства с разложимыми смешанными нормами. Ограниченный оператор $T : X \to Y$ будет (p,q)-суммирующим в том и только в том случае, если сопряженный оператор T' является (q',p')-суммирующим. При этом $\sigma_{pq}(T) = \sigma_{q'p'}(T')$.*

◁ Пусть $T \in \mathfrak{S}_{p,q}(X,Y)$. Возьмем конечный набор $y'_1,\dots,y'_n \in Y'$. Применяя последовательно формулы 4.2.1 (2), 4.1.4 (2), 4.1.4 (1) и 4.2.1 (3), выпишем цепочку

$$\left\|\left(\sum_{k=1}^n |T'y'_k|^{q'}\right)^{1/q'}\right\|$$

$$= \sup\left\{\sum_{k=1}^n \langle e_k, |T'y'_k|\rangle : e_k \in E_+,\ \left\|\left(\sum_{k=1}^n |e_k|^q\right)^{1/q}\right\| \leqslant 1\right\}$$

$$= \sup\left\{\sum_{k=1}^n \sup\{\langle x, T'y'_k\rangle : |x| \leqslant e_k\} : e_k \in E_+,\ \left\|\left(\sum_{k=1}^n |e_k|^q\right)^{1/q}\right\| \leqslant 1\right\}$$

$$\leqslant \sup\left\{\sum_{k=1}^n \langle |Tx_k|, |y'_k|\rangle : x_k \in X,\ \left\|\left(\sum_{k=1}^n |x_k|^q\right)^{1/q}\right\| \leqslant 1\right\}$$

$$\leqslant \sup\left\{\left\langle \left(\sum_{k=1}^n |Tx_k|^p\right)^{1/p}, \left(\sum_{k=1}^n |y'_k|^{p'}\right)^{1/p'}\right\rangle : \left\|\left(\sum_{k=1}^n |x_k|^q\right)^{1/q}\right\| \leqslant 1\right\}$$

$$\leqslant \sup\left\{\left\|\left(\sum_{k=1}^n |Tx_k|^p\right)^{1/p}\right\| \times \left\|\left(\sum_{k=1}^n |y'_k|^{p'}\right)^{1/p'}\right\| : \left\|\left(\sum_{k=1}^n |x_k|^q\right)^{1/q}\right\| \leqslant 1\right\}$$

$$= \sigma_{pq}(T)\left\|\left(\sum_{k=1}^n |y'_k|^{p'}\right)^{1/p'}\right\|.$$

Таким образом, $T' \in \mathfrak{S}_{q',p'}(Y',X')$ и $\sigma_{q'p'}(T') \leqslant \sigma_{pq}(T)$. Наоборот, предположим, что T' является (q',p')-суммирующим оператором. Тогда в силу доказанного T'' будет (p,q)-суммирующим и $\sigma_{pq}(T'') \leqslant \sigma_{q'p'}(T')$. Так как канонические вложения $X \to X''$ и $Y \to Y''$ сохраняют векторную норму (см. 4.1.5), то $T \in \mathfrak{S}_{p,q}(X,Y)$, а из определения σ_{pq} (см. 4.2.2) видно, что $\sigma_{pq}(T) \leqslant \sigma_{pq}(T'')$. Тем самым $\sigma_{pq}(T) = \sigma_{q'p'}(T')$. ▷

4.2.6. Теорема. *Линейный оператор $T : X \to Y$ будет суммирующим в том и только в том случае, если для любой последовательности $(v_n) \subset X$ из сходимости по норме ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |v_k|$ следует сходимость по норме ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |Tv_k|$.*

$\lhd$ Необходимость очевидна. Для обоснования достаточности допустим, что $T \notin \mathfrak{S}(X, Y)$. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ можно подобрать конечный набор $\{v_{n1}, \ldots, v_{nl(n)}\} \subset X$ такой, что

$$\left\| \sum_{j=1}^{l(n)} |v_{nj}| \right\| \leqslant 1, \quad \left\| \sum_{j=1}^{l(n)} |Tv_{nj}| \right\| \geqslant 2^n.$$

Построим новую последовательность $(u_k) \subset X$, полагая $u_k := (1/2^n)v_{nj}$, если $k := l(1) + \cdots + l(n-1) + j$ $(n \in \mathbb{N}, j := 1, \ldots, l(n))$. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k|$ сходится по норме, так как

$$\left\| \sum_{k=l(1)+\cdots+l(m-1)+1}^{l(m)+\cdots+l(m+s)} |u_k| \right\| \leqslant \sum_{n=m}^{m+s} \frac{1}{2^n} \left\| \sum_{j=1}^{l(n)} |v_{nj}| \right\| \leqslant \sum_{n=m}^{m+s} \frac{1}{2^n}.$$

В то же время, для элемента

$$s_n := \sum_{k=l(1)+\cdots+l(n-1)+1}^{l(1)+\cdots+l(n)} |Tu_k| = \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{l(n)} |Tv_{nj}|$$

будет $\|s_n\| \geqslant 1$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |Tu_k|$ расходится. Полученное противоречие показывает, что $T \in \mathfrak{S}(X, Y)$. $\rhd$

4.2.7. Теорема. *Пусть X разложимо и выполнено одно из условий:*

(а) *$E = V$ и в F'' имеется проектор единичной нормы на образ F при каноническом вложении $F \to F''$ (т. е. в F выполнены условия (B) и (C));*

(б) *F — порядково полное AM-пространство с единицей.*

Тогда $\mathcal{M}(V, W) = \mathfrak{S}(V, W)$ и $\mu = \sigma$.

$\lhd$ Возьмем $T \in \mathfrak{S}(V, W)$ и обозначим через $A(e)$ множество сумм вида $a(\theta) := \sum\limits_{k=1}^{n} |Tv_k|$, где $e \in E^+$, $\theta := \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ и $\sum\limits_{k=1}^{n} |v_k| \leqslant e$.

Как видно, $\|a(\theta)\| \leqslant \sigma(T)\|e\|$, т. е. $A(e)$ ограничено по норме. В случае (а) множество $A(e)$ фильтровано вверх, а норма порядково полунепрерывна. В случае (б) ограниченность по норме равносильна порядковой ограниченности. В обоих случаях $T \in \mathcal{M}(X, Y)$. В силу 2.2.3

$$\mu(T) = \sup_{\substack{\|e\|=1 \\ e \geqslant 0}} \||T|e\| = \sup_{\substack{\|e\|=1 \\ e \geqslant 0}} \sup_{a \in A(e)} \|a\| = \sigma(T). \ \rhd$$

4.2.8. Следствие. *Предположим, что выполнено одно из условий (а) или (б) из 4.2.7. Тогда для линейного оператора $T : X \to Y$ равносильны утверждения*

(1) *T мажорируемый оператор;*

(2) *T суммирующий оператор;*

(3) *для любой последовательности $(x_n) \subset X$ из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|$ в E следует сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{n} |Tx_k|$ в F.*

4.2.9. *Если выполнены условия теоремы* 4.2.7, *то имеет место формула*

$$\mu(T) = \sup\left\{\left\|\sum_{k=1}^{n}|Tx_k|\right\| : x_k \in X,\ n \in \mathbb{N},\ \left\|\sum_{k=1}^{n}|x_k|\right\| \leqslant 1\right\}.$$

4.2.10. Отметим частные случаи класса $\mathfrak{S}_{pq}(X,Y)$, встречающиеся в литературе по функциональному анализу.

(1) (p,q)-*Выпуклые операторы.* Это операторы из класса $\mathfrak{S}_{p,q}(X,Y)$ в том случае, когда $Y = F$ и $E = \mathbb{R}$, т. е. X — банахово пространство. Итак, оператор $T : X \to F$ называют (p,q)-*выпуклым*, если существует такое число $k > 0$, что для всех $x_1,\dots,x_n \in X$

$$\left\|\left(\sum_{k=1}^{n}|Tx_k|^p\right)^{1/p}\right\| \leqslant k\left(\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|^q\right)^{1/q}.$$

Приняты также термины *p-супераддитивный* и *мажорируемый* операторы вместо $(p,1)$-выпуклого и (∞,∞)-выпуклого операторов соответственно.

(2) (p,q)-*Вогнутые операторы.* Этот класс операторов совпадает с классом $\mathfrak{S}_{p,q}(X,Y)$, если $E = X$ и $F = \mathbb{R}$, т. е. Y — банахово пространство. Тем самым оператор $T : E \to Y$ называют (p,q)-*вогнутым*, если существует число $k > 0$ такое, что для всех $e_1,\dots,e_n \in X$

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\|Te_k\|^p\right)^{1/p} \leqslant k\left\|\left(\sum_{k=1}^{n}|e_k|^q\right)^{1/q}\right\|.$$

Для частных случаев (∞,q)-вогнутых и $(1,1)$-вогнутых операторов приняты также названия *q-супераддитивные* и *суммирующие* операторы соответственно.

(3) (p,q)-*Регулярные операторы.* Этот класс возникает при рассмотрении двух банаховых решеток, т. е. когда $X = E$ и $Y = F$. Значит, оператор $T : E \to F$ называют (p,q)-*регулярным*, если существует $k > 0$ такое, что при всех $e_1,\dots,e_n \in E$

$$\left\|\left(\sum_{k=1}^{n}|Te_k|^p\right)^{1/p}\right\| \leqslant k\left\|\left(\sum_{k=1}^{n}|e_k|^q\right)^{1/q}\right\|.$$

Из теоремы двойственности 4.3.5 вытекают такие следствия.

(4) *Оператор $T : X \to F$ (где X банахово) будет (p,q)-выпуклым в том и только в том случае, если T' — (q',p')-вогнутый оператор. Оператор $T : E \to Y$ (где Y банахово) будет (p,q)-вогнутым в том и только в том случае, если T' — (p',q')-выпуклый оператор.*

(5) *Если в F'' имеется проектор единичной нормы на образ F при каноническом вложении, то оператор $T : E \to F$ будет $(1,1)$-регулярным в том и только в том случае, если он регулярен.*

§ 4.3. Изометрическая классификация пространств со смешанной нормой

В текущем параграфе мы покажем, что решеточно нормированные пространства составляют хорошую основу для построения изометрической классификации пространств со смешанной нормой. Для этой цели выбран небольшой круг естественных вопросов, связанных с нормировкой посредством AM- и AL_p-пространств.

4.3.1. Банахова решетка E называется *AL_p-пространством*, если для любых дизъюнктных $x, y \in E_+$ выполняется равенство

$$\|x + y\| = (\|x\|^p + \|y\|^p)^{1/p}.$$

Здесь $1 \leqslant p \leqslant \infty$, причем при $p := \infty$ полагаем по определению $(t^p + s^p)^{1/p} := \max\{s, t\}$ $(0 < s, t \in \mathbb{R})$. Вместо AL_∞-пространства принято говорить *AM-пространство*. Напомним два известных факта из теории банаховых решеток.

(1) *Если $1 \leqslant p < +\infty$, то AL_p-пространство линейно, изометрично и решеточно изоморфно пространству $L_p(\mu)$ при подходящей мере μ.*

(2) *Всякое AM-пространство с единицей линейно, изометрично и решеточно изоморфно пространству непрерывных функций $C(Q)$ на некотором компакте Q.*

4.3.2. Зададимся теперь следующим естественным вопросом: какие банаховы пространства линейно изометричны банаховым пространствам со смешанной нормой? При этом ограничимся случаем, когда нормирующей решеткой служит AM- или AL_p-пространство. Ниже приводится несколько результатов в этом направлении. Сначала дадим необходимые определения.

Пусть X — банахово пространство, а $\mathscr{B}$ — полная булева алгебра проекторов, действующих в X (см. 1.1.2 (2)). Будем предполагать $\|b\| = 1$ для каждого $b \in \mathscr{B}$. Если $x \in X$, $(x_\xi) \subset X$ и $b_\xi x = b_\xi x_\xi$ $(\xi \in \Xi)$ для некоторого разбиения $(b_\xi)_{\xi\in\Xi} \subset \mathscr{B}$, то, как и раньше, элемент x называем *перемешиванием* (x_ξ) относительно (b_ξ).

Равносильны следующие утверждения:

(1) *для любого ограниченного семейства $(x_\xi) \subset X$ и произвольного разбиения единицы $(b_\xi) \subset \mathscr{B}$ существует единственное перемешивание $x = \operatorname{mix}(b_\xi x_\xi)$, причем $\|x\| \leqslant \sup\limits_{\xi\in\Xi} \|b_\xi x_\xi\|$.*

(2) *для любого семейства (x_ξ) из единичного шара $U(X)$ и произвольного разбиения единицы $(b_\xi) \subset \mathscr{B}$ существует единственное перемешивание $x = \operatorname{mix}(b_\xi x_\xi)$, причем $x \in U(X)$.*

Банахово пространство X назовем *$(\mathscr{B}, \infty)$-циклическим* или, короче, *$\mathscr{B}$-циклическим*, если в нем имеется полная булева алгебра проекторов единичной нормы и выполнено одно из эквивалентных условий (1) или (2). Заметим, что в (1) фактически будет $\|x\| = \sup\{\|b_\xi x_\xi\| : \xi \in \Xi\}$, так как $\|b_\xi x_\xi\| \leqslant \|x\|$ $(\xi \in \Xi)$. В частности, для разбиения единицы $b_1, \dots, b_n \in \mathscr{B}$ верно равенство

$$\left\|\sum_{k=1}^n b_k x_k\right\| = \max_{k:=1,\dots,n} \{\|b_k x_k\|\}.$$

4.3.3. Теорема. *Банахово пространство линейно изометрично о-полному пространству со смешанной нормой, нормирующая решетка которого есть порядково полное AM-пространство с единицей, в том и только том случае, если оно $\mathscr{B}$-циклично относительно некоторой полной булевой алгебры проекторов $\mathscr{B}$.*

$\lhd$ Необходимость вытекает из определений и из 1.1.2 (3).

Докажем достаточность. Предположим, что X — банахово пространство с $\mathscr{B}$-циклическим единичным шаром $U(X)$, где $\mathscr{B}$ — полная булева алгебра проекторов единичной нормы в X. Пусть E — идеал, порожденный единицей в расширенном K-пространстве всех $\mathscr{B}$-значных спектральных функций (см. [21, 36]). Возьмем конечнозначный элемент $\alpha := \sum\limits_{k=1}^n \lambda_k b_k$, где $\{b_1, \dots, b_n\}$ — разбиение единицы в $\mathscr{B}$, $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \mathbb{R}$, а под λb понимается спектральная функция $e : \nu \mapsto e(\nu) \in \mathscr{B}$, равная нулю при $\nu \leqslant \lambda$ и единице при $\nu > \lambda$.

Положим $J(\alpha) : x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k b_k x$ и заметим, что $J(\alpha)$ — ограниченный линейный оператор в X. Вычислим норму этого оператора:

$$\sup_{\|x\|\leqslant 1} \|J(\alpha)x\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \sup\{\|b_k(\lambda_k x)\| : k := 1, \dots, n\} =$$

$$= \sup_{k\leqslant n} \sup_{\|x\|\leqslant 1} \{|\lambda_k| \, \|b_k x\|\} = \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}.$$

С другой стороны, норма $|\alpha|_\infty$ элемента α в K-пространстве ограниченных элементов E также совпадает с $\max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}$, следовательно, J — линейная изометрия подпространства E_0 конечнозначных элементов из E в алгебру ограниченных операторов $\mathscr{L}(X)$. Ясно также, что $J(\beta\alpha) = J(\beta)J(\alpha)$ для всех $\alpha, \beta \in E_0$. Так как E_0 плотно по норме в E, то J может быть продолжен по непрерывности до изометрического изоморфизма алгебры E на замкнутую подалгебру алгебры $\mathscr{L}(X)$. Полагая $x\alpha := \alpha x := J(\alpha)x$ для $x \in X$ и $\alpha \in E$, получим на пространстве X структуру унитарного E-модуля, причем

$$\|\alpha x\| \leqslant \|\alpha\|_\infty \|x\| \quad (x \in E_+, \ x \in X).$$

Кроме того, $\alpha U(X) + \beta U(X) \subset U(X)$ при $|\alpha| + |\beta| \leqslant 1$. Введем теперь отображение $|\cdot| : X \to E_+$ по формуле

$$|x| := \inf\{\alpha \in E_+ : x \in \alpha U(X)\} \quad (x \in X),$$

где инфимум берется в K-пространстве E. Докажем, что $\||x|\|_\infty = \|x\|$. Возьмем $0 \neq x \in X$ и положим $y := x/\|x\|$. Тогда $y \in U(X)$ и $|y| \leqslant \mathbf{1}$. Следовательно, $|x| \leqslant \|x\| \cdot \mathbf{1}$ или $\||x|\|_\infty \leqslant \|x\| \cdot \|\mathbf{1}\|_\infty = \|x\|$. Наоборот, для $\varepsilon > 0$ можно подобрать разбиение единицы $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в $\mathfrak{P}(E)$ и семейство $(\alpha_\xi)_{\xi\in\Xi} \subset E_+$ такие, что $\pi_\xi \alpha_\xi \leqslant |x| + \varepsilon\mathbf{1} \leqslant (\||x|\|_\infty + \varepsilon)\mathbf{1}$ и $x \in \alpha_\xi U(X)$ $(\xi \in \Xi)$. Отсюда

$$\pi_\xi x_\xi \in \pi_\xi \alpha_\xi U(X) \subset (\||x|\|_\infty + \varepsilon)\pi_\xi \mathbf{1} U(X) \subset (\||x|\|_\infty + \varepsilon)U(X).$$

Следовательно, $\|\pi_\xi x\| \leqslant \||x|\|_\infty + \varepsilon$. Учитывая произвол в выборе $\varepsilon > 0$ и 4.3.2 (1), получаем $\|x\| \leqslant \||x|\|_\infty$. Если $x \in \alpha U(X)$ и $y \in \beta U(X)$ для некоторых $\alpha, \beta \in E_+$, то, обозначив $\gamma := \alpha + \beta + \varepsilon\mathbf{1}$, можно написать:

$$x + y = \gamma(\gamma^{-1}x + \gamma^{-1}y) \in \gamma\left(\frac{\alpha}{\gamma}U(X) + \frac{\beta}{\gamma}U(X)\right) \subset \gamma U(X).$$

Следовательно, $|x + y| \leqslant \alpha + \beta + \varepsilon\mathbf{1}$ и переход к инфимуму по указанным α, β и ε дает $|x + y| \leqslant |x| + |y|$. Далее, для $b \in \mathscr{B}$ и $x \in X$ имеют место равенства

$$b|x| = \inf\{b\alpha : 0 \leqslant \alpha \in E, \ x \in \alpha U(X)\} = \inf\{\alpha \in E_+ : bx \in \alpha U(X)\} = |bx|.$$

Но тогда для $\alpha = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k b_k$, где $\{b_1, \dots, b_n\}$ — разбиение единицы в $\mathscr{B}$, будет

$$|\alpha x| = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| b_k |x| = |\alpha||x|.$$

Отсюда видно, что $|\alpha x| = |\alpha||x|$ для всех $\alpha \in E$. Тем самым $(X, |\cdot|, E)$ — разложимое решеточно нормированное пространство. Дизъюнктная полнота X следует из $\mathscr{B}$-цикличности шара $U(X)$, а r-полнота равносильна полноте относительно исходной скалярной нормы, ибо $\|x\| = \||x|\|_\infty$ $(x \in X)$ (см. 4.1.2). По теореме 1.3.2 X — ПБК. $\triangleright$

4.3.4. Булеву алгебру $\mathscr{B}$ назовем *полной по Баде*, если она порядково полна и для любой возрастающей сети проекторов $(b_\alpha) \subset \mathscr{B}$ из $b = \sup b_\alpha$ следует, что $\langle bx, x'\rangle = \lim\limits_{\alpha}\langle b_\alpha x, x'\rangle$, каковы бы ни были $x \in X$ и $x' \in X'$. Будем говорить, что множество $C \subset X$ *$\mathscr{B}$-ограничено*, если

$$\sup\left\{\left\|\sum_{k=1}^{n} b_k x_k\right\| : x_1,\dots,x_n \in C,\, b_1,\dots,b_n \in \mathscr{B},\, n \in \mathbb{N},\, b_k \circ b_l = 0\,(k \neq l)\right\} < \infty.$$

Банахово пространство X назовем *$(\mathscr{B},p)$-циклическим*, $1 \leqslant p < \infty$, если выполнены три условия:

(1) в X есть полная булева алгебра $\mathscr{B}$ проекторов единичной нормы;

(2) $\|bx + b^\perp y\|^p = \|bx\|^p + \|b^\perp y\|^p$ для любых $b \in \mathscr{B}$ и $x, y \in X$;

(3) для каждого $\mathscr{B}$-ограниченного семейства в X существует перемешивание относительно любого разбиения единицы (с тем же множеством индексов) в $\mathscr{B}$.

(4) *Если банахово пространство X $(\mathscr{B},p)$-циклично, причем $\mathscr{B}$ полна по Баде, то для любой убывающей сети $(b_\alpha) \subset \mathscr{B}$ из $\inf\limits_{\alpha} b_\alpha = 0$ следует, что $\lim\limits_{\alpha}\|b_\alpha x\| = 0$ при любом $x \in X$.*

$\lhd$ Пусть (b_α) — убывающая сеть проекторов и $\inf b_\alpha = 0$, но $\|b_\alpha x\|$ не сходится к нулю. Можем считать, не ограничивая общности, что $\|b_\alpha x\| > \varepsilon > 0$ при всех α. Так как булева алгебра полна по Баде, то сеть $b_\alpha x$ сходится к нулю в слабой топологии $\sigma(X, X')$. По теореме Мазура существует выпуклая комбинация

$$y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k b_{\alpha(k)} x, \quad \lambda_k \in \mathbb{R}_+, \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1,$$

такая, что $\|y\| < (\varepsilon/2)$. Если $b_\alpha \leqslant b_{\alpha(k)}$, $k := 1,\dots,n$, то $b_\alpha y = b_\alpha x$ и по условию (2) из определения $(\mathscr{B},p)$-цикличности имеем

$$\varepsilon^p < \|b_\alpha x\|^p \leqslant \|b_\alpha y\|^p + \|b_\alpha^\perp y\|^p = \|y\|^p < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p.$$

Получено противоречие, значит, $\lim\|b_\alpha x\| = 0$. $\rhd$

(5) *В условиях предложения* (4) *перемешивание $x = \operatorname{mix}_{\xi\in\Xi}(b_\xi x_\xi)$ единственно. Более того, $x = \sum\limits_{\xi\in\Xi} b_\xi x_\xi$ и*

$$\|x\|^p = \sum_{\xi\in\Xi} \|b_\xi x_\xi\|^p.$$

4.3.5. Теорема. *Для того чтобы банахово пространство было линейно изометричным o-полному пространству со смешанной нормой, нормирующая решетка которого есть AL_p-пространство, $1 \leqslant p < +\infty$, необходимо и достаточно, чтобы оно было $(\mathscr{B},p)$-циклическим относительно некоторой полной по Баде булевой алгебры проекторов.*

$\lhd$ В доказательстве нуждается лишь достаточность. Предположим, что X — $\mathscr{B}$-циклическое банахово пространство, где $1 \leqslant p < \infty$, а $\mathscr{B}$ — полная по Баде булева алгебра проекторов в X. Если $b \in \mathscr{B}$ — ненулевой проектор, то $\langle bx, x'\rangle \neq 0$ для подходящих $x \in X$ и $x' \in X'$. В то же время, функция $b \mapsto \langle bx, x'\rangle$ $(b \in \mathscr{B})$ аддитивна, а ввиду условия полноты по Баде будет также и o-непрерывной. Итак, на $\mathscr{B}$ существует разделяющее множество o-непрерывных мер. Пусть Z — расширенное K-пространство всех разложений единицы в алгебре $\mathscr{B}$. Тогда база Z изоморфна $\mathscr{B}$, следовательно, в Z существует фундамент, на котором определен существенно положительный o-непрерывный функционал Φ. Обозначим через $L_1(\Phi)$ наибольший фундамент, на который распространяется Φ по o-непрерывности. Положим $L_\infty(\Phi) := \bigcup_{n=1}^{\infty}[-n\mathbf{1}, n\mathbf{1}]$, т. е. $L_\infty(\Phi)$ — o-идеал в Z, порожденный единицей $\mathbf{1} \in \mathscr{Z}$. Сопоставление элементу $z \in L_1(\Phi)$ функционала $\alpha \mapsto \Phi(\alpha z)$ $(\alpha \in L_\infty(\Phi))$ осуществляет линейный и решеточный изоморфизм $L_1(\Phi)$ на $L_\infty(\Phi)'_n$. Так же, как и в 4.2.3, устанавливается, что на X можно ввести структуру точного унитарного модуля над кольцом $L_\infty(\Phi)$, причем $\|\alpha x\| \leqslant \|\alpha\|\,\|x\|$ $(\alpha \in L_\infty(\Phi),\ x \in X)$.

Возьмем теперь произвольный элемент $x \in X$ и определим функцию $\varphi_x : b \mapsto \|bx\|^p$ $(b \in \mathscr{B})$. Из условия $(\mathscr{B}, p)$-цикличности (см. 4.3.4 (2,4)) видно, что φ_x аддитивна и o-непрерывна. Для $\alpha \in L_\infty(\Phi)$ положим

$$\Phi_x(\alpha) := \int\limits_{-\|\alpha\|}^{\|\alpha\|} \lambda d\varphi_x(e_\lambda^\alpha),$$

где (e_λ^α) — спектральная функция элемента α, а интеграл понимается как r-предел интегральных сумм

$$\sum_{n=-k}^{k-1} l_n \varphi_x\bigl(e_{\lambda_{n+1}}^\alpha - e_{\lambda_n}^\alpha\bigr), \quad l_n \in [\lambda_n, \lambda_{n+1}),$$

по измельчающимся разбиениям

$$-\|\alpha\| =: \lambda_{-k} < \lambda_{-k+1} < \dots < \lambda_{k-1} < \lambda_k = \|\alpha\|$$

отрезка $[-\|\alpha\|, \|\alpha\|]$ числовой прямой. Тогда Φ_x — положительный o-непрерывный функционал на $L_\infty(\Phi)$, следовательно, существует единственный положительный элемент $z \in L_1(\Phi)$ такой, что $\Phi_x(\alpha) = \Phi(\alpha z)$ $(\alpha \in L_\infty(\Phi))$. Положим $|x| = \sqrt[p]{z}$. Введем AL_p-пространство $L_p(\Phi)$ формулами

$$L_p(\Phi) := \{z \in Z : |z|^p \in L_1(\Phi)\},\ \|z\|_p := (\Phi(|z|^p))^{1/p} \quad (z \in L_p(\Phi)).$$

Тем самым определяется отображение $|\cdot| : X \to L_p(\Phi)$ такое, что

$$\|bx\|^p = \Phi(b|x|^p) \quad (b \in \mathscr{B},\ x \in X).$$

Используя это соотношение, покажем, что $\|\cdot\|$ — разложимая норма, а X — пространство со смешанной нормой. Прежде всего, заметим, что $\|x\| = \||x|\|_p$ $(x \in X)$. В частности, если $|x| = 0$, то $x = 0$. Далее, для разбиения единицы $\{b_1, \dots, b_n\} \subset \mathscr{B}$, набора $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ и элемента $b \in \mathscr{B}$ имеем (см. 4.3.4 (2))

$$\Phi\left(b\left|\sum_{k=1}^n b_k x_k\right|^p\right) = \left\|\sum_{k=1}^n b b_k x_k\right\|^p = \sum_{k=1}^n \|b b_k x_k\|^p = \Phi\left(b\sum_{k=1}^n b_k |x_k|^p\right).$$

Так как проектор $b \in \mathscr{B}$ произволен, а элементы $b_k|x_k|$ попарно дизъюнктны в $L_p(\Phi)$, то

$$\left|\sum_{k=1}^n b_k x_k\right| = \left(\sum_{k=1}^n b_k |x_k|^p\right)^{1/p} = \sum_{k=1}^n b_k |x_k|.$$

Отсюда, полагая $\alpha := \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$ и $x_k := \lambda_k x$ $(k := 1, \dots, n)$, получим $|\alpha x| = |\alpha|\,|x|$. Последнее равенство верно для всех $\alpha \in L_\infty(\Phi)$. В самом деле, если $\alpha_n \to \alpha$ в $L_\infty(\Phi)$, то для $b \in \mathscr{B}$ и $x \in X$ будет

$$\Phi(b|\alpha_n x|^p) = \|b\alpha_n x\|^p \to \|b\alpha x\|^p = \Phi(b|\alpha x|^p).$$

Поэтому
$$\Phi(b|\alpha x|^p) = \Phi(b(|\alpha|\,|x|)^p) = \lim \Phi(b(|\alpha_n|\,|x|)^p).$$
Произвол в выборе $b \in \mathscr{B}$ дает $|\alpha x| = |\alpha|\,|x|$.

Возьмем теперь $x, y \in X$ и такие $0 \leqslant \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, что $\alpha + \beta \leqslant 1$. Привлекая неравенство треугольника для нормы $\|\cdot\|_p$ и неравенство Гёльдера для конечных сумм, получим
$$\begin{aligned}\Phi(b|\alpha x + \beta y|^p) &\leqslant (\Phi(b|\alpha x|^p))^{1/p} + (\Phi(b|\beta y|^p))^{1/p} = \\ &= (\alpha^{1-1/p}(\alpha\Phi(b|x|^p))^{1/p} + \beta^{1-1/p}(\beta\Phi(b|y|^p))^{1/p})^p \leqslant \\ &\leqslant (\alpha\Phi(b|x|^p) + \beta\Phi(b|y|^p))(\alpha^{(1-1/p)p'} + \beta^{(1-1/p)p'}) \leqslant \\ &\leqslant \Phi(\pi(\alpha|x|^p + \beta|y|^p)).\end{aligned}$$
Вновь пользуясь произволом в выборе $b \in \mathscr{B}$, имеем $|\alpha x + \beta y|^p \leqslant \alpha|x|^p + \beta|y|^p$. Если
$$\alpha := \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n, \quad \beta := \beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n,$$
где $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}_+$, $\alpha_k + \beta_k = 1$ $(k := 1, \dots, n)$, то
$$\begin{aligned}|\alpha x + \beta y|^p &= \left|\sum_{k=1}^n b_k(\alpha_k x + \beta_k y)\right|^p = \sum_{k=1}^n b_k|\alpha_k x + \beta_k x| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^n b_k(\alpha_k|x|^p + \beta_k|y|^p) = \alpha|x|^p + \beta|y|^p.\end{aligned}$$
Как и выше, с помощью равномерной аппроксимации конечнозначными элементами в $L_p(\Phi)$ можно показать, что доказанное неравенство имеет место для $\alpha, \beta \in L_\infty(\Phi)_+$ при $\alpha + \beta \leqslant \mathbf{1}$. Положим теперь
$$\gamma := |x| + |y| + 2\varepsilon\mathbf{1},\ x := \gamma^{-1}|x| + \varepsilon\mathbf{1},\ \beta := \gamma^{-1}|y| + \varepsilon\mathbf{1},\ \varepsilon > 0.$$
Как видно, $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta \leqslant \mathbf{1}$. Далее, если $x_1 := (|x| + \varepsilon\mathbf{1})^{-1}x$, $y_1 := (|y| + \varepsilon\mathbf{1})^{-1}y$, то $|x_1| \leqslant \mathbf{1}$, $|y_1| \leqslant \mathbf{1}$, следовательно,
$$|\gamma^{-1}(x + y)| = |\alpha x_1 + \beta y_1| \leqslant (\alpha|x|^p + \beta|y|^p)^{1/p} \leqslant \mathbf{1}.$$
Тем самым $|x + y| \leqslant \gamma$. Устремив ε к нулю, получим неравенство треугольника для $|\cdot|$.

Итак, $(X, |\cdot|, L_p(\Phi))$ — РНП с разложимой нормой, причем $\||x|\|_p = \|x\|$ $(x \in X)$. В силу 4.1.2 X r-полно. Для доказательства дизъюнктной полноты возьмем семейство $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$, ограниченное по векторной норме в X. Если $\theta \subset \Xi$ — конечное множество и $(b_\nu)_{\nu\in\theta}$ — разбиение единицы в $\mathscr{B}$, то
$$\left\|\sum_{\nu\in\theta} b_\nu x_\nu\right\|^p = \sum_{\nu\in\theta} \|b_\nu x_\nu\|^p = \sum_{\nu\in\theta} \Phi(b_\nu|x_\nu|^p) \leqslant \Phi(e^p),$$
где $e := \sup\limits_{\xi\in\Xi}|x_\xi|$. Отсюда видно, что семейство (x_ξ) $\mathscr{B}$-ограничено, значит, существует перемешивание $\mathrm{mix}(\pi_\xi x_\xi)$ относительно любого разбиения единицы (π_ξ). Окончательно $(X, |\cdot|, L_p(\Phi))$ — ПБК, а исходная норма на X есть смешанная норма. ▷

4.4. Комментарии

4.4.1. В том случае, когда $X = E$ и $|\cdot| = |\cdot|$, пространство со смешанной нормой есть просто нормированная решетка, а изложенные в § 3.5 результаты превращаются в фрагмент теории нормированных решеток [35, 85, 145, 163]. В частности, эквивалентность (1) $\Leftrightarrow$ (2) в теореме 4.1.7 превращается в теорему Андо (см. [35, 85, 119]). Условие (A) для нормированных решеток ввел Л. В. Канторович. Из 4.1.9 (2, 3) вытекает результат о совпадении сопряженного к модулю порядково непрерывного оператора с модулем сопряженного оператора, полученный Ю. Сынначке [73]. Неравенство в 4.1.9 (1) может быть строгим (см. [85]).

4.4.2. Класс (p,q)-суммирующих операторов введен А. Г. Кусраевым в [50, 51]. Там же установлены основные результаты из 4.2.3, 4.2.5, 4.2.6. Классы (p,q)-вогнутых операторов (4.2.10 (1,2)) ввели Кривин [115] при $p=q$ и Морэ [133] в общем случае (см. [149, 121]). Наконец, (p,q)-регулярные операторы (4.2.10 (3)) были введены А. В. Бухваловым [10]. О взаимосвязях с другими классами операторов см. обзор [11]. (1,1)-Вогнутые операторы впервые рассмотрел В. Л. Левин [63] под названием суммирующих операторов, дальнейшие ссылки см. в [11, 64]. Частный случай следствия 4.2.8, когда $X=E$ и $Y=F$, также установил В. Л. Левин (см. [64]). Интересный класс решеточно суммирующих операторов рассмотрели Шульга и Нильсен [137] и Л. П. Яновский [78].

4.4.3. В [120] Линденштраусс и Цафрири пишут: «В анализе встречаются много классов специальных банаховых пространств, которые все еще не изучены детально с точки зрения геометрической теории банаховых пространств. Мы уверены, что такие исследования, будучи проведены, дадут новое проникновение в задачи таких разделов, которые не кажутся a priori тесно связанными с теорией банаховых пространств».

В качестве примера мало изученного класса можно назвать класс классических банаховых пространств со смешанной нормой $L_{p,q}(\mu\otimes\nu)$ или $L_p(\mu,X)$, где $1\leqslant p,q\leqslant\infty$, $p\neq q$, X — банахово пространство, а μ, ν — конечные или σ-конечные меры. В 4.3 намечен подход к указанной проблематике, основанный на теории решеточно нормированных пространств. Основные результаты из 4.3.3, 4.3.5–4.3.7 получены А. Г. Кусраевым в [50, 51]. Ранее Такеути [154] получил вариант теоремы 4.3.3 при изучении булевозначной реализации C^*-алгебр. Фактически он также пользовался понятием циклического банахова пространства, но не использовал этого термина. Относительно полных по Баде булевых алгебр см. [88, 27]. Теорема 4.3.6 представляет аналог классической теоремы Боненбласта [91]. Родственное понятие циклического банахова пространства изучали Баде [88] и А. И. Векслер [16].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамович Ю. А.* Инъективные оболочки нормированных структур // Докл. АН СССР. 1971. Т. 191, № 4. С. 743–745.
2. *Абрамович Ю. А., Векслер А. И., Колдунов А. В.* Об операторах, сохраняющих дизъюнктность // Докл. АН СССР. 1979. Т. 289, № 5. С. 1033–1036.
3. *Абрамович Ю. А., Векслер А. И., Колдунов А. В.* Операторы, сохраняющие дизъюнктность, их непрерывность и мультипликативное представление // Линейные операторы и их приложения. Л.: Ленингр. гос. пед. ин-т, 1981. С. 13–34.
4. *Акилов Г. П., Колесников Е. В., Кусраев А. Г.* Лебегово расширение положительного оператора // Докл. АН СССР. 1988. Т. 298, № 3. С. 521–524.
5. *Акилов Г. П., Кутателадзе С. С.* Упорядоченные векторные пространства. Новосибирск: Наука, 1978. 368 с.
6. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Векторное интегрирование, меры Хаара, свертка и представления. М.: Мир, 1970. 320 с.
7. *Бухвалов А. В.* Пространства вектор-функций и тензорные произведения // Сиб. мат. журн. 1972. Т. 13, № 6. С. 1229–1238.
8. *Бухвалов А. В.* О двойственности функторов, порожденных пространствами вектор-функций // Известия АН СССР. Сер. мат. 1975. Т. 39, № 6. С. 1284–1309.
9. *Бухвалов А. В.* Об аналитическом представлении операторов с абстрактной нормой // Изв. вузов. Математика. 1975. № 11. С. 21–32.
10. *Бухвалов А. В.* Комплексный метод интерполяции в пространствах вектор-функций и обобщенные пространства Бесова // Докл. АН СССР. 1981. Т. 260, № 2. С. 265–269.
11. *Бухвалов А. В.* Применение методов порядково ограниченных операторов к теории операторов в пространствах L^p // Успехи мат. наук. 1983. Т. 13, вып. 6. С. 1229–1238.
12. *Бухвалов А. В.* Порядково ограниченные операторы в векторных решетках и пространствах измеримых функций // Математический анализ. М.: ВИНИТИ, 1988. Т. 26. С. 3–63.
13. *Векслер А. И.* О гомоморфизмах между классами регулярных операторов в K-линеалах и их пополнениях // Изв. вузов. Математика. 1960. Т. 14, № 1. С. 48–57.

14. *Векслер А. И.* О новой конструкции дедекиндова пополнения векторных структур и l-групп с делением // Сиб. мат. журн. 1969. Т. 10, № 6. С. 70–73.
15. *Векслер А. И., Гейлер В. А.* О порядковой и дизъюнктной полноте линейных полуупорядоченных пространств // Сиб. мат. журн. 1972. Т. 13, № 1. С. 43–51.
16. *Векслер А. И.* Банаховы циклические пространства и банаховы структуры // Докл. АН СССР. 1973. Т. 213, № 4. С. 770–773.
17. *Векторные* решетки и интегральные операторы /А. В. Бухвалов, В. Б. Коротков, А. Г. Кусраев, С. С. Кутателадзе, Б. М. Макаров. Новосибирск: Наука, 1992. 214 с.
18. *Владимиров Д. А.* О счетной аддитивности булевой меры // Вестн. ЛГУ. 1961. № 19. С. 5–15.
19. *Владимиров Д. А.* Булевы алгебры. М: Наука, 1969. 318 с.
20. *Вулих Б. З.* О линейных мультипликативных операциях // Докл. АН СССР. 1943. Т. 41, № 4. С. 148–151.
21. *Вулих Б. З.* Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М.: Физматгиз, 1961. 407 с.
22. *Гордон Е. И.* Вещественные числа в булевозначных моделях теории множеств и K-пространства // Докл. АН СССР. 1977. Т. 237, № 4. С. 773–775.
23. *Гордон Е. И.* K-пространства в булевозначных моделях теории множеств // Докл. АН СССР. 1981. Т. 258, № 4. С. 777–780.
24. *Грибанов Ю. И.* Линейные операторы в совершенных пространствах функций. III // Изв. вузов. Математика. 1970. № 9. С. 37–44.
25. *Гутман А. Е.* О представлении решеточно нормированных пространств // Сиб. мат. журн. 1991. Т. 32, № 2. С. 41–54.
26. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 895 с.
27. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Спектральная теория. М.: Мир, 1974. 1064 с.
28. *Диканова З. Т.* О некоторых свойствах полуупорядоченного пространства непрерывных функций на бикомпакте // Успехи мат. наук. 1959. Т. 14, вып. 6. С. 161–172.
29. *Канторович Л. В.* О полуупорядоченных линейных пространствах и их применениях к теории линейных операций // Докл. АН СССР. 1935. Т. 4, № 1–2. С. 11–14.
30. *Канторович Л. В.* К общей теории операций в полуупорядоченных пространствах // Докл. АН СССР. 1936. Т. 1, № 7. С. 271–274.
31. *Канторович Л. В.* О некоторых классах линейных операций // Докл. АН СССР. 1936. Т. 3, № 1. С. 9–13.
32. *Канторович Л. В.* Общие формы некоторых классов линейных операций // Докл. АН СССР. 1936. Т. 3, № 9. С. 101–106.
33. *Канторович Л. В.* Об одном классе функциональных уравнений // Докл. АН СССР. 1936. Т. 4, № 5. С. 211–216.
34. *Канторович Л. В.* О функциональных уравнениях // Тр. ЛГУ. 1937. Т. 3, № 7. С. 17–33.
35. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1978. 742 с.
36. *Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г.* Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 548 с.
37. *Колесников Е. В.* Осколки положительного оператора // Оптимизация. 1987. Вып. 40. С. 141–146.
38. *Колесников Е. В.* Об осколках мажорируемого оператора // Оптимизация. 1988. Вып. 43. С. 81–85.
39. *Колесников Е. В.* Разложение положительного оператора // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 5. С. 70–73.
40. *Колесников Е. В., Кусраев А. Г.* О функциональной реализации лебегова расширения // Сиб. мат. журн. 1991. Т. 32, № 1. С. 190–194.
41. *Колесников Е. В., Кусраев А. Г., Малюгин С. А.* О мажорируемых операторах. Новосибирск, 1988. 32 с. (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 26).
42. *Коротков В. Б.* Интегральные операторы. Новосибирск: Наука, 1983. 224 с.
43. *Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966.
44. *Кусраев А. Г.* Общие формулы дезинтегрирования // Докл. АН СССР. 1982. Т. 265, № 6. С. 1312–1316.
45. *Кусраев А. Г.* О некоторых категориях и функторах булевозначного анализа // Докл. АН СССР. 1983. Т. 271, № 1. С. 281–284.
46. *Кусраев А. Г.* О пространствах Банаха — Канторовича // Сиб. мат. журн. 1985. Т. 26, № 2. С. 119–124.
47. *Кусраев А. Г.* Векторная двойственность и ее приложения. Новосибирск: Наука, 1985. 254 с.

48. *Кусраев А. Г.* Об интегральном представлении мажорированных операторов в пространствах измеримых вектор-функций // Докл. АН СССР. 1987. Т. 293, № 4. С. 788–792.
49. *Кусраев А. Г.* Об аналитическом представлении мажорируемых операторов // Докл. АН СССР. 1987. Т. 294, № 5. С. 1055–1058.
50. *Кусраев А. Г.* Линейные операторы в решеточно нормированных пространствах // Тр. Ин-та математики / АН СССР. Сиб. отд-ние. 1987. Т. 9: Исследования по геометрии «в целом» и математическому анализу. С. 84–123.
51. *Кусраев А. Г.* К геометрии банаховых пространств со смешанной нормой // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300, № 5. С. 1049–1052.
52. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Нестандартные методы анализа. Новосибирск: Наука, 1990. 334 с.
53. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Субдифференциалы. Теория и приложения. Новосибирск: Наука, 1992. 270 с.
54. *Кусраев А. Г., Малюгин С. А.* О порядково непрерывной составляющей мажорированного оператора // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 28, № 4. С. 127–139.
55. *Кусраев А. Г., Малюгин С. А.* Об атомическом разложении векторных мер // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 28, № 5. С. 101–120.
56. *Кусраев А. Г., Малюгин С. А.* Некоторые вопросы теории векторных мер. Новосибирск: Ин-т математики, 1988. 182 с.
57. *Кусраев А. Г., Малюгин С. А.* О продолжении конечно аддитивной меры // Мат. заметки. 1990. Т. 48, № 1. С. 56–60.
58. *Кусраев А. Г., Стрижевский В. З.* Решеточно нормированные пространства и мажорируемые операторы // Тр. Ин-та математики / АН СССР. Сиб. отд-ние. 1987. Т. 7: Исследования по геометрии и математическому анализу. С. 132–157.
59. *Кутателадзе С. С.* Опорные множества сублинейных операторов // Докл. АН СССР. 1976. Т. 230, № 5. С. 1029–1032.
60. *Кутателадзе С. С.* Выпуклые операторы // Успехи мат. наук. 1979. Т. 34, вып. 1. С. 167–196.
61. *Кутателадзе С. С.* О выпуклом анализе в модулях // Сиб. мат. журн. 1981. Т. 22, № 4. С. 118–128.
62. *Кутателадзе С. С.* Осколки положительного оператора // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 5. С. 111–119.
63. *Левин В. Л.* Тензорные произведения и функторы в категории банаховых пространствах, определяемые K-линеалами // Тр. Моск. мат. о-ва. 1969. Т. 20. С. 43–82.
64. *Левин В. Л.* Выпуклый анализ в пространствах измеримых функций и его применения в математической экономике. М.: Наука, 1985. 352 с.
65. *Лозановский Г. Я.* О почти интегральных операторах // Вестн. ЛГУ. Математика, механика и астрономия. 1966. № 7. С. 35–44.
66. *Малюгин С. А.* О векторной проблеме моментов Гамбургера // Оптимизация. 1990. Вып. 48. С. 124–141.
67. *Малюгин С. А.* Квазирадоновы меры // Сиб. мат. журн. 1991. Т. 32, № 5. С. 101–111.
68. *Малюгин С. А.* Проблема моментов в K_σ-пространствах // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 2. С. 110–120.
69. *Наводнов В. Г.* Об интегральном представлении операторов, действующих из банахова пространства измеримых вектор-функций в банахово пространство // Изв. вузов. Математика. 1983. № 3. С. 82–84.
70. *Наводнов В. Г.* Векторнозначный аналог теоремы Данфорда — Петтиса // Изв. вузов. Математика. 1987. № 3. С. 55–60.
71. *Сикорский Р.* Булевы алгебры. М.: Мир, 1969. 376 с.
72. *Скляднев С. А.* О пополнении структурно-нормированных пространств // Тр. семинара по функциональному анализу. Воронеж: Изд. Воронеж. гос. ун-та, 1968. Вып. 10. С. 21–32.
73. *Сынначке Ю.* Об операторе, сопряженном к регулярному, и некоторых его применениях к вопросу о полной непрерывности и слабой полной непрерывности регулярных операторов // Вестн. ЛГУ. 1972. № 1. С. 60–69.
74. *Тибилов К. Т.* О псевдоинтегральных операторах в пространствах измеримых вектор-функций // Сиб. мат. журн. 1990. Т. 31, № 5. С. 149–156.
75. *Шотаев Г. Н.* О билинейных функционалах в решеточно нормированных пространствах // Оптимизация. 1986. Вып. 37. С. 38–50.
76. *Шотаев Г. Н.* О тензорном произведении решеточно нормированных пространств // Сиб. мат. журн. 1988. Т. 29, № 4. С. 195–202.
77. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1969. 1072 с.
78. *Яновский Л. П.* Суммирующие, порядково суммирующие операторы и характеризация AL-пространств // Сиб. мат. журн. 1979. Т. 20, № 2. С. 402–408.

79. *Abramovich Yu. A.* Multiplicative representation of disjointness preserving operators // Indag. Math. 1983. V. 45, N 3. P. 265–279.
80. *Abramovich Yu. A.* Two results about the multiplicative representation of Riesz homomorphisms // An. Univ. Craiova. Mat. Fiz.-Chim. 1986. V. 14. P. 17–21.
81. *Abramovich Yu. A.* Operators preserving disjointness on rearrangement invariant spaces // Pacific J. Math. 1991. V. 148, N 2. P. 201–206.
82. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* On order properties of order bounded transformations // Canad. J. Math. 1975. V. 27. P. 666–678.
83. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* On positive order continuous operators // Indag. Math. 1983. V. 45, N 1. P. 1–6.
84. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* The components of a positive operator // Math. Z. 1983. Bd 184, N 2. S. 245–257.
85. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Positive Operators. New York: Acad. Press, 1985. 367 p.
86. *Ando T.* Banachverbände und Positive Projectionen // Math. Z. 1969. Bd 109. S. 121–130.
87. *Arveson W.* Operator algebras and invariant subspaces // Ann. of Math. 1974. V. 100, N 3. P. 433–532.
88. *Badé W. G.* A multiplicity theory for Boolean algebras of projections in Banach spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1958. V. 92. P. 508–530.
89. *Basile A., Bukhvalov A. V., Yakubson M. Ya.* The generalized Yosida — Hewitt theorem // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1994. V. 116. P. 527–533.
90. *Bernau S. J., Huismans C. B., Pagter B., de.* Sums of lattice homomorphisms // Proc. Amer. Math. Soc. 1992. V. 115, N 1. P. 151–156.
91. *Bohnenblust H. F.* An axiomatic characterization of L_p-spaces // Duke Math. J. 1940. V. 6. P. 627–640.
92. *Buskes G.* The Hahn — Banach theorem surveyed. Warszawa: Inst. mat. PAN., 1993. 49 p. (Diss. Mat., CCCXXVII).
93. *Buskes G., Dodds P. G., de Pagter B., Schep A. R.* Up-down theorems in the centre of $\mathscr{L}_b(E, F)$ // Proc. Kon. Nederl. Akad. Wetensch. Ser. A. 1986. V. 89, N 1. P. 1–9.
94. *Cooper J. L. B.* Coordinated spaces // Proc. London Math. Soc. 1953. V. 3, N 3. P. 305–327.
95. *Cooper J. L. B.* On generalization of the Köthe coordinated spaces // Math. Ann. 1966. V. 162, N 3. P. 351–363.
96. *Diestel J., Uhl J. J.* Vector Measures. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1977. 322 p. (Mathematical Surveys; N 15).
97. *Dinculeanu N.* Vector Measures. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1966. 432 p.
98. *Ellis H. W., Halperin I.* Function spaces determined by a levelling length function // Canad. J. Math. 1953. V. 5, N 4. P. 576–592.
99. *Fremlin D. H.* A direct proof of Matthes — Wright integral extension theorem // J. London Math. Soc. 1975. V. 11, N 3. P. 276–284.
100. *Gierz G.* Bundles of topological vector spaces and their duality. Berlin etc.: Springer, 1982. 296 p.
101. *Gutman A. E.* Banach bundles in the theory of lattice-normed spaces. I. Continuous Banach bundles // Siberian Adv. Math. 1993. V. 3, N 3. P. 1–55.
102. *Gutman A. E.* Banach bundles in the theory of lattice-normed spaces. II. Mesurable Banach bundles // Siberian Adv. Math. 1993. V. 3, N 4. P. 8–40.
103. *Gutman A. E.* Banach bundles in the theory of lattice-normed spaces. III. Approximating sets and bounded operators // Siberian Adv. Math. 1994. V. 2, N 4. P. 54–75.
104. *Halmos P. R., Sunder V. S.* Bounded integral operators on L^2 spaces. Berlin: Springer-Verl., 1978. 134 p.
105. *Hofman K. H., Keimel K.* Sheaf theoretical concepts in analysis: bundles and sheaves of Banach spaces, Banach $C(X)$-modules // Applications of Sheaves. Berlin: Springer, 1979. P. 414–441. (Lectures Notes in Math.; N 753).
106. *Ionescu Tulcea A., Ionescu Tulcea C.* Topics in the Theory of Lifting. Berlin etc.: Springer, 1969. 190 p.
107. *Kalton N. J., Saab E.* Ideal properties of regular operators between Banach lattices // Illinois J. Math. 1985. V. 29, N 3. P. 382–400.
108. *Kantorovich L. V.* Sur la continuite et sur la prolongement des operations lineaires // C. r. Acad. Sci. Paris. 1938. T. 206. P. 833–835.
109. *Kantorovich L. V.* The method of successive approximation for functional equations // Acta Math. 1939. V. 71. P. 63–97.
110. *Kelley J. L.* Measures on Boolean algebras // Pacific J. Math. 1959. V. 9, N 4. P. 833–835.
111. *Kevin T. A.* Representation of compact and weakly compact operators on the space of Bochner integrable functions // Pacific J. Math. 1981. V. 92, N 2. P. 257–267.
112. *Khurana S. S.* Lattice-valued Borel measures // Rocky Mountain J. Math. 1976. V. 6, N 2. P. 377–382.

113. *Khurana S. S.* Lattice-valued Borel measures. II // Trans. Amer. Math. Soc. 1978. V. 235. P. 205–211.
114. *Kollatz L.* Funktionalanalysis und Numerische Mathematik. Berlin etc.: Springer, 1964. (Русский перевод: Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: Мир, 1969. 417 с.)
115. *Krivine J. L.* Theoremes de factorisation dans les espaces reticules // Sem. Maurey — Schwartz. 1973–74. Ecole Politech. Exp. 22–23.
116. *Kusraev A. G., Kutateladze S. S.* Nonstandard methods in geometric functional analysis // Amer. Math. Soc. Transl. 1992. V. 151, N 2. P. 91–105.
117. *Kusraev A. G., Kutateladze S. S.* Nonstandard methods for Kantorovich spaces // Siberian Adv. Math. 1992. V. 2, N 2. P. 114–152.
118. *Kusraev A. G.* Dominated operators. I // Siberian Adv. Math. 1994. V. 4, N 3. P. 51–82.
119. *Lacey E. H.* The isometric theory of classical Banach spaces. Berlin etc.: Springer, 1974.
120. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces. Berlin etc.: Springer, 1973.
121. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces. II. Function spaces. Berlin etc.: Springer, 1979.
122. *Luxemburg W. A. J.* Notes on functional Banach spaces. XV, XVI // Indag. Math. 1965. V. 27, N 3–4. P. 415–467.
123. *Luxemburg W. A. J.* // Math. Reviews. 1979. V. 57, N 6. P. 2302 (MR#17378).
124. *Luxemburg W. A. J., Schep A. R.* A Radon — Nicodým type theorem for positive operators and a dual // Indag. Math. 1978. V. 40, N 3. P. 357–375.
125. *Luxemburg W. A. J., Zaanen A. C.* The linear modulus of an order bounded linear transformation // Proc. Kon. Nederl. Akad. Wetensch. 1971. V. A74, N 5. P. 422–447.
126. *Luxemburg W. A. J., Zaanen A. C.* Riesz Spaces. I. Amsterdam: North Holland, 1971. 514 p.
127. *Maharam D.* The representation of abstract measure function // Trans. Amer. Math. Soc. 1949. V. 65, N 2. P. 279–330.
128. *Maharam D.* Decompositions of measure algebras integrals // Trans. Amer. Math. Soc. 1950. V. 69. N 1. P. 142–160.
129. *Maharam D.* The representation of abstract integrals // Trans. Amer. Math. Soc. 1953. V. 75, N 1. P. 154–184.
130. *Maharam D.* On kernel representation of linear operators // Trans. Amer. Math. Soc. 1955. V. 79, № 1. P. 229–255.
131. *Maharam D.* On positive operators // Contemp. Math. 1984. V. 26. P. 263–277.
132. *Matthes K.* Über die Ausdehnung positiver linear Abbildungen // Math. Nachr. 1961. Bd 23. S. 223–257.
133. *Maurey B.* Type et cotype dans les espaces munis de structures locales incondicionelles // Sem. Maurey — Schwartz. 1973–74. Ecole Politech. Exp. 24–25.
134. *Mulvey C. T.* Banach sheaves // J. Pure Appl. Algebra. 1980. V. 17, N 1. P. 69–83.
135. *Neumann J., von* Charakterisierung das Spectrums eines Integraloperators // Actualités Sci. Indust. 1935. N 229.
136. *Nielsen N. J.* The ideal property of tensor products of Banach lattices with applications to the local structure of spaces of absolutely summing operators // Studia Math. 1982. V. 74, N 3. P. 247–272.
137. *Nielsen N. J., Szulga J.* p-Lattice summing operators // Math. Nachr. 1984. Bd 119. S. 119–130.
138. *Pagter B., de.* The components of a positive operator // Indag. Math. 1983. V. 45, N 2. P. 229–241.
139. *Pagter B., de.* A note on disjointness preserving operators // Proc. Amer. Math. Soc. 1984. V. 90. N 4. P. 543–549.
140. *Phuong-Cac.* Generalized Köthe function spaces. I // Proc. Camb. Phil. Soc. 1969. V. 65, N 3. P. 601–611.
141. *Putten B. van.* Disjunctive Linear Operators and Partial Multiplication in Riesz Spaces. Meppel: Krips Repro, 1980.
142. *Rao K. P. S. B., Rao M. B.* Theory of charges. A study of finitely additive measures. London, New York: Acad. Press, 1983.
143. *Riečan B.* An extension of the Daniel integration scheme // Mat. Čas. 1975. V. 25, N 3. P. 211–219.
144. *Riečan B.* A simplified proof of the Daniel integral extension theorem in ordered spaces // Math. Slovaca. 1982. V. 32, N 1. P. 75–79.
145. *Schaefer H. H.* Banach Lattices and Positive Operators. Berlin etc.: Springer, 1974. 376 p.
146. *Schep A. R.* Order continuous components of operators and measures // Indag. Math. 1978. V. 40. P. 110–117.
147. *Schochetman I. E.* Kernels and integral operators for continuous sums of Banach spaces. Povidence, RI: Amer. Math. Soc., 1978. (Memoirs, V. 14, N 202).

148. *Schröder J.* Das Iterationsverfahren bei allgemeinierem Abshtandsbegriff // Math. Z. 1956. Bd 66. S. 111–116.

149. *Schwartz H.-U.* Banach Lattices and Operators. Liepzig, 1984. (Teubner-Texte zur Math.; 71.)

150. *Sikorski R.* Distributivity and representability // Fund. Math. 1959. V. 48, N 1. P. 91–103.

151. *Sourour A. R.* Pseudo-integral operators // Trans. Amer. Math. Soc. 1979. V. 253. P. 339–363.

152. *Sourour A. R.* Charactarization and order properties of pseudo-integral operators // Pacific J. Math. 1982. V. 99, N 1. P. 145–158.

153. *Takeuti G.* Two Applications of Logic to Mathematics. Princeton: Princeton Univ. Press, 1978. 137 p.

154. *Takeuti G.* C^*-algebras and Boolean-valued analysis // Japan. J. Math. 1983. V. 9. N 6. P. 207–247.

155. *Traynor T.* A general Hewitt — Yosida decomposition // Canad. J. Math. 1972. V. 24, N 2. P. 1164–1169.

156. *Weis L.* Integral operators and changes of density // Indiana Univ. Math. J. 1982. V. 31, N 1. P. 83–96.

157. *Weis L.* Decompositions of positive operators and some of their applications // Funct. Anal.: Surveys and Recent Results. V. 3. Proc. 3rd Conf., Paderborn, 240029 May, 1983. Amsterdam: North Holland, 1984.

158. *Weis L.* On the representation of order continuous operators by random measures // Trans. Amer. Math. Soc. 1984. V. 285, N 2. P. 535–563.

159. *Wright J. D. M.* The solution of a problem of Sikorski and Mattes // Bull. London Math. Soc. 1971. V. 3. P. 52–54.

160. *Wright M.* The measure extension problem for vector lattices // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1971. T. 21, N 4. P. 65–85.

161. *Wright J. D. M.* An algebraic characterization of vector lattices with the Borel regularity property // J. London Math. Soc. 1973. V. 7, N 2. P. 277–285.

162. *Wright M.* An extension theorem // J. London Math. Soc. 1973. V. 7, N 2. P. 531–539.

163. *Zaanen A. C.* Riesz Spaces. V. II. Amsterdam etc.: North Holland, 1983. 720 p.

г. Новосибирск *Статья поступила 10 октября 1994 г.*