УДК 512.563

РАНГИ СКОТТА БУЛЕВЫХ АЛГЕБР

П. Е. Алаев

§ 1. Основные определения и предварительные факты

Если $\mathfrak{M}$ — алгебраическая модель, то через $\mathfrak{M}[x_1,\ldots,x_n]$ обозначаем наименьшую подмодель $\mathfrak{M}$, содержащую $x_1,\ldots,x_n$. Через $(\mathfrak{M},x_1,\ldots,x_n)$ обозначаем обогащение $\mathfrak{M}$ до сигнатуры $\mathscr{L}'\cup\{c_1,\ldots,c_n\}$, где $\mathscr{L}'$ — сигнатура $\mathfrak{M}$, $c_1,\ldots,c_n$ — константные символы, не входящие в $\mathscr{L}'$, и $c_i^{(\mathfrak{M},\bar{x})}=x_i$ для $i=1,\ldots,n$. Если обозначения $(\mathfrak{M},x_1,\ldots,x_n)$ и $(\mathfrak{N},y_1,\ldots,y_n)$ встречаются рядом, то подразумеваем, что обогащения $\mathfrak{M}$ до $(\mathfrak{M},\bar{x})$ и $\mathfrak{N}$ до $(\mathfrak{N},\bar{y})$ производятся с помощью одинакового набора констант и с сохранением порядка, т. е. если $c_i^{(\mathfrak{M},\bar{x})}=x_i$, то $c_i^{(\mathfrak{N},\bar{y})}=y_i$ для всех $i=1,\ldots,n$.

Если φ — некоторая формула, то под φ^1 подразумеваем φ, а под φ^0 — $\neg\varphi$.

Булевы алгебры (БА) рассматриваем как модели языка $\mathscr{L}=\{\cup^2,\cap^2,C^1\}$ с известными аксиомами. Будем также для удобства рассматривать их и как модели $\mathscr{L}^*=\mathscr{L}\cup\{c^*\}$, где c^* — константный символ и если $\mathfrak{A}$ — булева алгебра, то $(c^*)^{\mathfrak{A}}=1_{\mathfrak{A}}$. Булевы алгебры языка $\mathscr{L}^*$ будем обозначать $(\mathfrak{A},1)$ в отличие от обычных булевых алгебр $\mathfrak{A}$. Теорию булевых алгебр в языке $\mathscr{L}$ обозначаем BA, $\mathrm{BA}^*=\mathrm{BA}\cup\{\text{"}C(c^*)\cup c^*=c^*\text{"}\}$.

Символом $\mathfrak{B}_k$ для $k\in\omega$ будем обозначать конечную БА с k атомами; $\mathfrak{B}_0$ — БА с носителем мощности 1.

Если $\mathfrak{A}$ — БА, $a\in\mathfrak{A}$, то $\hat{a}$ — подалгебра с носителем $\{x\in|\mathfrak{A}|:x\leqslant a\}$ и естественно индуцированными операциями.

Если $R\subseteq|\mathfrak{A}|$, то $R\lhd\mathfrak{A}$ обозначает, что R — идеал в $\mathfrak{A}$.

Если $\mathfrak{A}$ — БА, $R\lhd\mathfrak{A}$, $a\in\mathfrak{A}$, то через R_a обозначаем $\{x\in|\mathfrak{A}|:x\in R,\text{ и }x\leqslant a\}$ — это, очевидно, идеал в $\hat{a}$.

Пусть $I(\mathfrak{A})=\{x\in\mathfrak{A}:x=x_1\cup x_2,\ x_1\text{ — атомный элемент, }x_2\text{ — безатомный}\}$ — идеал Ершова — Тарского; $I_0(\mathfrak{A})=\{0_{\mathfrak{A}}\}$, $I_{m+1}(\mathfrak{A})=I_m(\mathfrak{A})\circ I(\mathfrak{A}/I_m(\mathfrak{A}))$ для $m\in\omega$.

Разложимой БА называем такую БА, для которой $1_{\mathfrak{A}}\in I(\mathfrak{A})$.

Под $\mathrm{ch}_1(\mathfrak{A}),\ldots,\mathrm{ch}_3(\mathfrak{A})$ подразумеваем элементарные характеристики БА $\mathfrak{A}$:

$$\mathrm{ch}_1(\mathfrak{A})=\begin{cases}\min\{k\in\omega:\mathfrak{A}/I_k(\mathfrak{A})\cong\mathfrak{B}_0\}, & \text{если это множество не пусто,}\\ \infty & \text{иначе.}\end{cases}$$

Если $\mathrm{ch}_1(\mathfrak{A})=\infty$, то $\mathrm{ch}_2(\mathfrak{A})=\mathrm{ch}_3(\mathfrak{A})=0$. Если $\mathrm{ch}_1(\mathfrak{A})=m\in\omega$, то

$$\mathrm{ch}_2(\mathfrak{A})=\begin{cases}k, & \text{если в }\mathfrak{A}/I_m(\mathfrak{A})\text{ ровно }k\text{ атомов, }k\in\omega,\\ \infty & \text{иначе,}\end{cases}$$

$$\mathrm{ch}_3(\mathfrak{A})=\begin{cases}1, & \text{если в }\mathfrak{A}/I_m(\mathfrak{A})\text{ есть ненулевой безатомный элемент,}\\ 0 & \text{иначе,}\end{cases}$$

$\mathrm{ch}(\mathfrak{A})=(\mathrm{ch}_1(\mathfrak{A}),\mathrm{ch}_2(\mathfrak{A}),\mathrm{ch}_3(\mathfrak{A}))$.

Если $\mathfrak{A}$ — БА, то

$$F(\mathfrak{A})=\{x\in|\mathfrak{A}|:\exists k\in\omega\exists p_1,\ldots,p_k\text{ — атомы в }\mathfrak{A}\text{ такие, что }x=p_1\cup\cdots\cup p_k\}.$$

Если α — ординал, то $F_\alpha(\mathfrak{A})$ определяется по индукции:

$$F_0(\mathfrak{A}) = \{0_\mathfrak{A}\}, \quad F_{\beta+1}(\mathfrak{A}) = F_\beta(\mathfrak{A}) \circ F(\mathfrak{A}/F_\beta(\mathfrak{A})),$$

если λ — предельный ординал, то

$$F_\lambda(\mathfrak{A}) = \cup\{F_\beta(\mathfrak{A}) : \beta < \lambda\}.$$

Булева алгебра $\mathfrak{A}$ — α-атомная (α — ординал), если для всякого $\beta < \alpha$ $\mathfrak{A}/F_\beta(\mathfrak{A})$ — атомная БА. Тем самым всякая БА 0-атомная.

Через $o(\mathfrak{A})$ обозначаем $\min\{\alpha$ — ординал : $\mathfrak{A}/F_\alpha(\mathfrak{A})$ безатомная$\}$.

Если для любого идеала $R \lhd \mathfrak{A}$ $\mathfrak{A}/R$ — атомная БА, то $\mathfrak{A}$ — суператомная БА.

Если $\mathfrak{A}$ — БА, $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{A}$, то $\bar{a}$ — разбиение единицы в $\mathfrak{A}$, если для любых $i, j = 1, \ldots, n$ $(i \neq j \Rightarrow a_i \cap a_j = 0_\mathfrak{A})$ и $a_1 \cup \cdots \cup a_n = 1_\mathfrak{A}$.

Если $b_1, \ldots, b_k$ — произвольный конечный набор элементов, то через $B(\bar{b})$ обозначаем вектор $(d_0, \ldots, d_n)$, где $n = 2^k - 1$; для всякого $m = 0, \ldots, n$

$$d_1^{\varepsilon(m,0)} \cap \cdots \cap b_k^{\varepsilon(m,k-1)}, \quad \varepsilon(m,i) \in \{0,1\}, \quad b^0 = C(b), \quad b^1 = b,$$
$$m = \varepsilon(m,0) \cdot 2^0 + \cdots + \varepsilon(m,k-1) \cdot 2^{k-1}.$$

Очевидно, что для всякого $\bar{b}$ $B(\bar{b})$ — разбиение единицы в $\mathfrak{B}$.

Определим бесконечные формулы некоторого языка $\mathscr{L}'$:

1) атомарные формулы те же, что и в обычной логике,
2) если φ — формула, то $\neg\varphi$, $\forall x\varphi$, $\exists x\varphi$ тоже формулы,
3) если φ, ψ — формулы, то $\varphi \to \psi$, $\varphi\&\psi$, $\varphi \vee \psi$ — формулы,
4) если Φ — некоторое множество формул, то $\wedge\Phi$ и $\vee\Phi$ также формулы.

Тем самым бесконечная логика отличается от конечной наличием бесконечных конъюнкций и дизъюнкций. Оперирование этими бесконечными операциями проводится аналогично их конечным аналогам. Например, в модели истинно $\wedge\Phi$, где Φ — некое множество предложений, тогда и только тогда, когда в ней истинны все предложения из Φ. Более подробно эти понятия определяются в [2].

Введем кванторный ранг формулы φ, $\mathrm{qr}(\varphi)$:

1) если φ — атомарная формула, то $\mathrm{qr}(\varphi) = 0$,
2) если $\varphi = \neg\psi$, то $\mathrm{qr}(\varphi) = \mathrm{qr}(\psi)$,
3) если $\varphi = \wedge\Phi$ или $\varphi = \vee\Phi$, то $\mathrm{qr}(\varphi) = \sup\{\mathrm{qr}(\psi) : \psi \in \Phi\}$,
4) если $\varphi = \forall x\psi$ или $\varphi = \exists x\psi$, то $\mathrm{qr}(\varphi) = \mathrm{qr}(\psi) + 1$.

Если $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ — модели $\mathscr{L}'$, α — ординал, то $\mathfrak{M} \equiv^\alpha \mathfrak{N}$ означает, что для всякого предложения θ (возможно, бесконечного) языка $\mathscr{L}'$

$$(\mathrm{qr}(\theta) \leqslant \alpha \Rightarrow (\mathfrak{M} \models \theta \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \theta)).$$

Если $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ — модели $\mathscr{L}'$ и f — функция, то f — частичный изоморфизм из $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{N}$ (пишем: $f : \mathfrak{M} \to_p \mathfrak{N}$), если существуют $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{N}_0$ — подмодели $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ соответственно, такие, что $\mathrm{dom} f = \mathfrak{M}_0$, $\mathrm{im} f = \mathfrak{N}_0$ и $f : \mathfrak{M}_0 \cong \mathfrak{N}_0$ — изоморфизм.

Факт из [2]: $\mathfrak{M} \equiv^\alpha \mathfrak{N} \Leftrightarrow$ существует цепь $I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_\alpha$, $I_\alpha \neq \varnothing$, где для любых $\beta \leqslant \alpha$ и $f \in I_\beta$ f — частичный изоморфизм из $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{N}$ (если в $\mathscr{L}'$ нет констант, то f может быть и $\varnothing$ — как бы изоморфизм между пустыми «подмоделями») и верно:

$$\forall\beta_1 < \beta_2 \leqslant \alpha \forall a \in |\mathfrak{M}| \forall f \in I_{\beta_2} \exists q \in I_{\beta_1} (q \supseteq f \& a \in \mathrm{dom}\, q),$$
$$\forall\beta_1 < \beta_2 \leqslant \alpha \forall b \in |\mathfrak{N}| \forall f \in I_{\beta_2} \exists q \in I_{\beta_1} (q \supseteq f \& b \in \mathrm{im}\, q).$$

Цепи частичных изоморфизмов с таким свойством будем называть правильными.

Из предыдущего утверждения следует, что если в $\mathscr{L}'$ есть константы, то ($\mathfrak{M} \equiv^0 \mathfrak{N} \Leftrightarrow$ существует $f : \mathfrak{M} \to_p \mathfrak{N}$); если в $\mathscr{L}'$ нет констант, то всегда $\mathfrak{M} \equiv^0 \mathfrak{N}$.

Факт из [2]: λ — предельный ординал $\Rightarrow$ ($\mathfrak{M} \equiv^\lambda \mathfrak{N} \Leftrightarrow$ для всех $\beta < \lambda$ $\mathfrak{M} \equiv^\beta \mathfrak{N}$), $\mathfrak{M} \equiv^{\alpha+1} \mathfrak{N} \Leftrightarrow [\forall x \in |\mathfrak{M}| \exists y \in |\mathfrak{N}| (\mathfrak{M}, x) \equiv^\alpha (\mathfrak{N}, y)] \& [\forall y \in |\mathfrak{N}| \exists x \in |\mathfrak{M}| (\mathfrak{M}, x) \equiv^\alpha (\mathfrak{N}, y)]$.

Запись $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{N}$ означает, что $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ изоморфны, $\mathfrak{M} \cong_p \mathfrak{N}$ — что $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ частично изоморфны. Последнее определяется следующим образом: существует $F \neq \varnothing$ такое, что всякий f из F — частичный изоморфизм из $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{N}$ и верно:

$$\forall f \in F \forall a \in |\mathfrak{M}| \exists q \in F (f \subseteq q \& a \in \operatorname{dom} q),$$
$$\forall f \in F \forall b \in |\mathfrak{N}| \exists q \in F (f \subseteq q \& b \in \operatorname{im} q)$$

(пишем: $F : \mathfrak{M} \cong_p \mathfrak{N}$).

Факты из [2]: 1) $\mathfrak{M} \cong_p \mathfrak{N} \Leftrightarrow$ для любого α $\mathfrak{M} \equiv^\alpha \mathfrak{N}$, 2) $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ — счетные модели $\Rightarrow$ ($\mathfrak{M} \cong_p \mathfrak{N} \Leftrightarrow \mathfrak{M} \cong \mathfrak{N}$).

Если $\mathfrak{M}$ — модель некоторого $\mathscr{L}'$, то

$$\operatorname{sr}(\mathfrak{M}) = \min\{\alpha \text{ — ординал} : \forall a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{M}\ \forall b_1, \dots, b_n \in \mathfrak{M}$$
$$[(\mathfrak{M}, \bar a) \equiv^\alpha (\mathfrak{M}, \bar b) \Rightarrow (\mathfrak{M}, \bar a) \equiv^{\alpha+1} (\mathfrak{M}, \bar b)]\}.$$

Это определение корректно (т. е. хотя бы одно такое α существует).

Факт из [2]: $\operatorname{sr}(\mathfrak{M}) = \alpha \Rightarrow \forall \bar a, \bar b \in \mathfrak{M}[(\mathfrak{M}, \bar a) \equiv^\alpha (\mathfrak{M}, \bar b) \Rightarrow (\mathfrak{M}, \bar a) \cong_p (\mathfrak{M}, \bar b)]$. Отсюда вытекает: существуют $\bar a, \bar b \in \mathfrak{M}$ такие, что $(\mathfrak{M}, \bar a) \equiv^\alpha (\mathfrak{M}, \bar b)$ и $(\mathfrak{M}, \bar a) \not\equiv^{\alpha+1} (\mathfrak{M}, \bar b) \Rightarrow \operatorname{sr}(\mathfrak{M}) > \alpha$.

Будем использовать без ссылок следующие факты из [1].

1. $\mathfrak{A}$ — БА, $R \lhd \mathfrak{A}$. Тогда для любых $a, b, x_1, \dots, x_n \in \mathfrak{A}$ выполняются утверждения:

1.1) если $a/R \leqslant b/R$, то существует $x \leqslant b$ такой, что $a/R = x/R$;

1.2) если $x_i/R \leqslant a/R$ при $i = 1, \dots, n$, $x_1/R \cup \dots \cup x_n/R = a/R$, при $i \neq j$ $x_i/R \cap x_j/R = 0_\mathfrak{A}/R$, то существуют $y_1, \dots, y_n \in \mathfrak{A}$ такие, что $y_i \cap y_j = 0_\mathfrak{A}$ при $i \neq j$, $y_1 \cup \dots \cup y_n = a$ и $y_i/R = x_i/R$ при $i = 1, \dots, n$.

2. $\mathfrak{A}$ — БА, $a \in \mathfrak{A}$. Тогда $I(\mathfrak{A})_a = I(\hat a)$.

3. $\mathfrak{A}$ — БА, $a \in \mathfrak{A}$. Тогда для всякого $b \leqslant a$ верно: (b — атом в $\hat a \Leftrightarrow b$ — атом в $\mathfrak{A}$). Отсюда следует, что в $\hat a$ и $\mathfrak{A}$ совпадают также понятия атомного и безатомного элементов.

4. Для любого ординала $\beta > o(\mathfrak{A})$ $F_\beta(\mathfrak{A}) = F_{0(\mathfrak{A})}(\mathfrak{A})$.

5. $\mathfrak{A}$ — суператомная БА, $\mathfrak{A} \not\equiv \mathfrak{B}_0$. Тогда $o(\mathfrak{A})$ — непредельный ординал, $o(\mathfrak{A}) = \alpha + 1$, и $\mathfrak{A}/F_\alpha(\mathfrak{A})$ — конечная БА.

Отметим еще несколько фактов, которые являются прямыми следствиями предыдущих и в дальнейшем используются без ссылок на них:

Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ — БА, $n \neq 0$, $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{A}$, $b_1, \dots, b_n \in \mathfrak{B}$. Тогда для любого α верно:

1. $(\mathfrak{A}, \bar a) \equiv^\alpha (\mathfrak{B}, \bar b) \Leftrightarrow (\mathfrak{A}, \bar a, 1_\mathfrak{A}) \equiv^\alpha (\mathfrak{B}, \bar b, 1_\mathfrak{B})$.

Это сразу следует из критерия $\equiv^\alpha$ через существование правильной цепи, так как всякий частичный изоморфизм содержит $1_\mathfrak{A}$ в области определения и переводит $1_\mathfrak{A}$ в $1_\mathfrak{B}$. Аналогично $(\mathfrak{A}, \bar a) \equiv^\alpha (\mathfrak{B}, \bar b) \Leftrightarrow (\mathfrak{A}, \bar a, 0_\mathfrak{A}) \equiv^\alpha (\mathfrak{B}, \bar b, 0_\mathfrak{B})$.

2. $(\mathfrak{A}, \bar a) \equiv^\alpha (\mathfrak{B}, \bar b) \Leftrightarrow (\mathfrak{A}, B(\bar a)) \equiv^\alpha (\mathfrak{B}, B(\bar b))$.

Это следует из того, что каждый элемент $B(\bar a)$ выражается термом через $\bar a$ (и наоборот), причем соответствующий элемент $B(\bar b)$ выражается через $\bar b$ тем же самым термом.

3. Если $\alpha > 0$, то $(\mathfrak{A}, 1_\mathfrak{A}) \equiv^\alpha (\mathfrak{B}, 1_\mathfrak{B}) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \equiv^\alpha \mathfrak{B}$.

Это также следует из существования цепей, так как если есть правильная цепь $I_0 \supseteq I_1 \supseteq \dots \supseteq I_\alpha$ частичных изоморфизмов из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$ (а также, возможно, $\varnothing$), то можно образовать $I'_\beta = I_\beta \setminus \{\varnothing\} \cup \{f : \{0_\mathfrak{A}, 1_\mathfrak{A}\} \to \{0_\mathfrak{B}, 1_\mathfrak{B}\}\}$. Очевидно, что цепь $I'_0 \supseteq I'_1 \supseteq \dots \supseteq I'_\alpha$ будет правильной для $(\mathfrak{A}, 1)$ и $(\mathfrak{B}, 1)$, поскольку всякий частичный изоморфизм содержит в себе f.

§ 2. Ранг булевых алгебр

1. *Лемма.* *Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ — БА. Тогда:*

1) если $(x_i)_{i=1}^n$, $(y_i)_{i=1}^n$ — разбиения единицы в $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ соответственно, то для любого ординала α

$$((\mathfrak{A},\bar{x})\equiv^\alpha(\mathfrak{B},\bar{y})\Leftrightarrow \text{для всех } i=1,\dots,n\ \ (\hat{x}_i,1)\equiv^\alpha(\hat{y}_i,1));$$

2) если $a\in\mathfrak{A}$, то

$$((\mathfrak{A},a)\equiv^\alpha(\mathfrak{B},b)\Leftrightarrow(\hat{a},1)\equiv^\alpha(\hat{b},1),\ \ (\widehat{C(a)},1)\equiv^\alpha(\widehat{C(b)},1)).$$

□ 1. Элементарно доказывается, что если $(x_i)_{i=1}^n$ — разбиение единицы в $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{A}\cong\hat{x}_1\times\dots\times\hat{x}_n$, где под $\mathfrak{A}_1\times\dots\times\mathfrak{A}_n$ понимается: $|\mathfrak{A}_1\times\dots\times\mathfrak{A}_n|=|\mathfrak{A}_1|\times\dots\times|\mathfrak{A}_n|$, $(a_1,\dots,a_n)\operatorname{op}(b_1,\dots,b_n)=(a_1\operatorname{op}_{\mathfrak{A}_1}b_1,\dots,a_n\operatorname{op}_{\mathfrak{A}_n}b_n)$ и $C(a_1,\dots,a_n)=(C_{\mathfrak{A}_1}(a_1),\dots,C_{\mathfrak{A}_n}(a_n))$. Тем самым фактически нам надо доказать, что для любых $\mathfrak{A}_1,\dots,\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{B}_1,\dots,\mathfrak{B}_n$ — БА если $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_1\times\dots\times\mathfrak{A}_n$ и $\mathfrak{B}=\mathfrak{B}_1\times\dots\times\mathfrak{B}_n$, то для любого α

$$((\mathfrak{A},1^*_{\mathfrak{A}_1},\dots,1^*_{\mathfrak{A}_n})\equiv^\alpha(\mathfrak{B},1^*_{\mathfrak{B}_1},\dots,1^*_{\mathfrak{B}_n})$$
$$\Leftrightarrow \text{для всех } i=1,\dots,n\ (\mathfrak{A}_i,1)\equiv^\alpha(\mathfrak{B}_i,1)),\ \text{где } 1^*_{\mathfrak{A}_i}=(0,\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ i\text{-е место}}}{1_{\mathfrak{A}_i}},\dots,0)\in|\mathfrak{A}|.$$

($\Rightarrow$). Существует правильная цепь $I_0\supseteq I_1\supseteq\dots\supseteq I_\alpha$ частичных изоморфизмов $f:(\mathfrak{A},\bar{1}^*)\to_p(\mathfrak{B},\bar{1}^*)$. Построим цепь $I_0^i\supseteq I_1^i\supseteq\dots\supseteq I_\alpha^i$ для каждой пары $(\mathfrak{A}_i,1)$ и $(\mathfrak{B}_i,1)$.

Пусть $f:(\mathfrak{A},\bar{1}^*)\to_p(\mathfrak{B},\bar{1}^*)$. Сигнатура содержит константы $\Rightarrow\operatorname{dom}f\subseteq(\mathfrak{A},\bar{1}^*)\Rightarrow\operatorname{dom}f\subseteq\mathfrak{A}$ как подалгебра, аналогично $\operatorname{im}f\subseteq\mathfrak{B}$ и $f:\operatorname{dom}f\cong\operatorname{im}f$. Кроме того, $1^*_{\mathfrak{A}_i}\in\operatorname{dom}f$ и $f(1^*_{\mathfrak{A}_i})=(1^*_{\mathfrak{B}_i})$ для $i=1,\dots,n$. Определим $\bar{f}^i$ — сужение f на $\mathfrak{A}_i$ следующим образом. Пусть для простоты $i=1$. Положим $\operatorname{dom}\bar{f}^1=\{x\in\mathfrak{A}_1:(x,0,\dots,0)\in\operatorname{dom}f\}$. Для всякого $x\in\operatorname{dom}\bar{f}^1$ $\bar{f}^1(x)=y\Leftrightarrow f((x,0,\dots,0))=(y,0,\dots,0)$. Проверим, что $\bar{f}^1:(\mathfrak{A}_1,1)\to_p(\mathfrak{B}_1,1)$.

1. $\operatorname{dom}\bar{f}^1$ — подалгебра в $\mathfrak{A}_1$. Это следует из того, что $\operatorname{dom}\bar{f}^1=\varphi_1(\operatorname{dom}f)$, поскольку функция $\varphi_1:|\mathfrak{A}|\to|\mathfrak{A}_1|$, $\varphi_1(x_1,\dots,x_n)=x_1$, как легко видеть, сохраняет операции, а $\operatorname{dom}f$ замкнут относительно операций в $\mathfrak{A}$. То, что $\operatorname{dom}\bar{f}^1\subseteq\varphi_1(\operatorname{dom}f)$, очевидно, а включение $\supseteq$ следует из того, если $y\in\operatorname{dom}f$, то и $y\cap1^*_{\mathfrak{A}_1}\in\operatorname{dom}f$.

2. $\bar{f}^1$ — функция. Для всех $x\in\mathfrak{A}_1$ положим $\imath_1(x)=(x,0,\dots,0)\in\mathfrak{A}$. Пусть $x\in\operatorname{dom}\bar{f}^1\Rightarrow x\in\mathfrak{A}_1\Rightarrow\imath_1(x)\leqslant1^*_{\mathfrak{A}_1}\Rightarrow f(\imath_1(x))\leqslant1^*_{\mathfrak{B}_1}\Rightarrow f(\imath_1(x))$ имеет вид $(y,0,\dots,0)\Rightarrow$ существует пара $(x,y)\in\bar{f}^1$. Однозначность следует из однозначности f.

3. $\bar{f}^1$ сохраняет операции. Из предыдущего легко видеть, что $\bar{f}^1(x)=\varphi_1'\circ f\circ\imath_1(x)$, поскольку функция $\varphi_1':|\mathfrak{B}|\to|\mathfrak{B}_1|$, $\varphi_1'(y_1,\dots,y_n)=y_1$, и f сохраняют операции. Кроме того, $\imath_1(x\cup y)=(x,0,\dots,0)\cup(y,0,\dots,0)\Rightarrow\bar{f}^1$ сохраняет $\cup$. Аналогично для $\cap$. Проверим для C:

$$\imath_1(C(x))=(C(x),0,\dots,0),\quad \imath_1(x)\cap\imath_1(C(x))=0_{\mathfrak{A}},$$
$$\imath_1(x)\cup\imath_1(C(x))=1^*_{\mathfrak{A}_1}\Rightarrow f\circ\imath_1(x)\cap f\circ\imath_1(C(x))=0_{\mathfrak{B}},$$
$$f\circ\imath_1(x)\cup f\circ\imath_1(C(x))=1^*_{\mathfrak{B}_1}\Rightarrow\varphi_1'\circ f\circ\imath_1(x)\cap\varphi_1'\circ f\circ\imath_1(C(x))=0_{\mathfrak{B}_1},$$
$$\varphi_1'\circ f\circ\imath_1(x)\cup\varphi_1'\circ f\circ\imath_1(C(x))=1_{\mathfrak{B}_1}\Rightarrow\bar{f}^1(C(x))=C(\bar{f}^1(x)).$$

4. $\bar{f}^1$ — частичный изоморфизм. Легко доказать, что $\bar{f}^1:\operatorname{dom}\bar{f}^1\to\operatorname{im}\bar{f}^1$ — биекция, сохраняющая операции $\Rightarrow\operatorname{im}\bar{f}^1$ — подалгебра в $\mathfrak{B}_1$. Кроме того, $1^*_{\mathfrak{A}_1}\in\operatorname{dom}f\Rightarrow1_{\mathfrak{A}_1}\in\operatorname{dom}\bar{f}^1\Rightarrow$ в силу сохранения операций $\bar{f}^1(1_{\mathfrak{A}_1})=(1_{\mathfrak{B}_1})$ и, значит,

$\operatorname{dom}\bar{f}^1$ — подсистема в $(\mathfrak{A}_1, 1)$, $\operatorname{im}\bar{f}^1$ — подсистема в $(\mathfrak{B}_1, 1)$ и $\bar{f}^1 : (\mathfrak{A}_1, 1) \to_p (\mathfrak{B}_1, 1)$.

Для $\beta \leqslant \alpha$ положим $I^1_\beta = \{\bar{f}^1 : f \in I_\beta\}$. Тогда $I^1_0 \supseteq I^1_1 \supseteq \dots \supseteq I^1_\alpha$ — цепь частичных изоморфизмов из $(\mathfrak{A}_1, 1)$ в $(\mathfrak{B}_1, 1)$. Покажем, что она правильная. Пусть $\beta_1 < \beta_2 \leqslant \alpha$, $\bar{f} \in I_{\beta_2}$, $a \in \mathfrak{A}_1$ — произвольное. Тогда существует $f \in I_{\beta_2}$ такой, что $\bar{f} = \bar{f}^1$. Положим $a^* = (a, 0, \dots, 0) \in \mathfrak{A}$. Тогда существует $g \in I_{\beta_1}$ такой, что $f \subseteq g$ и $a^* \in \operatorname{dom} g$. В этом случае

$$\operatorname{dom} f \subseteq \operatorname{dom} g \Rightarrow \varphi_1(\operatorname{dom} f) \subseteq \varphi_1(\operatorname{dom} g) \Rightarrow \operatorname{dom}\bar{f}^1 \subseteq \operatorname{dom}\bar{g}^1.$$

Кроме того, для всякого $x \in \operatorname{dom}\bar{f}$

$$\bar{g}^1(x) = \varphi_1' \circ g \circ \imath_1(x) = \varphi_1' \circ f \circ \imath_1(x) = \bar{f}(x),$$

так как $\imath_1(x) \in \operatorname{dom} f$. Тем самым $\bar{f} \subseteq \bar{g}^1$. Кроме того, $a^* \in \operatorname{dom} g \Rightarrow a \in \operatorname{dom}\bar{g}^1$, и, значит, $\bar{g}^1 \in I_{\beta_1}$ — искомое продолжение.

Пусть теперь $b \in \mathfrak{B}_1$ — произвольный элемент. Положим $b^* = (b, 0, \dots, 0)$. Тогда существует $g \in I_{\beta_1}$ такой, что $f \subseteq g$ и $b^* \in \operatorname{im} g$. Как и раньше, показываем, что $\bar{f}^1 \subseteq \bar{g}^1$. Если $b^* \in \operatorname{im} g$, то существует $a^* \in \operatorname{dom} g$ такой, что $g(a^*) = b^*$. Если $b^* \leqslant 1^*_{\mathfrak{B}_1}$, то $C(1^*_{\mathfrak{B}_1}) \cap b^* = 0_{\mathfrak{B}} \Rightarrow C(1^*_{\mathfrak{A}_1}) \cap a^* = 0_{\mathfrak{A}}$, так как $g(C(1^*_{\mathfrak{A}}) \cap a^*) = C(1^*_{\mathfrak{B}_1}) \cap b^*$ и g — частичный изоморфизм. Отсюда $a^* \leqslant 1^*_{\mathfrak{A}_1} \Rightarrow a^* = (a, 0, \dots, 0)$ для некоторого $a \in \mathfrak{A}_1$. Тогда по определению $a \in \operatorname{dom}\bar{g}^1$ и $\bar{g}^1(a) = b$, откуда $b \in \bar{g}^1$ и $\bar{g}^1 \in I_{\beta_1}$. Тем самым нужное продолжение вновь найдено.

($\Leftarrow$). Пусть для каждого $i = 1, \dots, n$ $I^i_0 \supseteq I^i_1 \supseteq \dots \supseteq I^i_\alpha$ — правильные цепи частичных изоморфизмов, действующие из $(\mathfrak{A}_i, 1)$ в $(\mathfrak{B}_i, 1)$. Пусть $f^1 \in I^1_\beta, \dots, f^n \in I^n_\beta$. Образуем $f = f^1 \times \dots \times f^n$ так:

$$\operatorname{dom} f = \operatorname{dom} f^1 \times \dots \times \operatorname{dom} f^n, \quad f(x_1, \dots, x_n) = (f^1(x_1), \dots, f^n(x_n)).$$

Замкнутость $\operatorname{dom} f$ относительно операций очевидна. Кроме того, для любого $i = 1, \dots, n$ $1^*_{\mathfrak{A}_i} = (0, \dots, 0, 1_{\mathfrak{A}_i}, 0, \dots, 0) \in \operatorname{dom} f \Rightarrow \operatorname{dom} f \subseteq (\mathfrak{A}, 1^*_{\mathfrak{A}_1}, \dots, 1^*_{\mathfrak{A}_n})$ как алгебраическая подсистема. Биективность f и сохранение операций прямо следуют из наличия этих свойств у каждого f_i, поэтому $\operatorname{im} f$ — подалгебра в $\mathfrak{B}$. Поскольку $f(1^*_{\mathfrak{A}_i}) = 1^*_{\mathfrak{B}_i}$, имеем $\operatorname{im} f \subseteq (\mathfrak{B}, 1^*_{\mathfrak{B}_1}, \dots, 1^*_{\mathfrak{B}_n})$. Тем самым f — частичный изоморфизм из $(\mathfrak{A}, \bar{1}^*)$ в $(\mathfrak{B}, \bar{1}^*)$.

Образуем $I_\beta = \{f^1 \times \dots \times f^n : f^i \in I^i_\beta\}$ для всех $\beta \leqslant \alpha$, получим, что $I_0 \supseteq I_1 \supseteq \dots \supseteq I_\alpha$ — цепь частичных изоморфизмов. Проверим правильность. Пусть $\beta_1 < \beta_2$, $f \in I_{\beta_2}$. Пусть $a \in \mathfrak{A}$ — произвольный элемент. Тогда $f = f^1 \times \dots \times f^n$, $f^i \in I^i_{\beta_2}$, $a = (a_1, \dots, a_n)$, $a_i \in \mathfrak{A}_i$. Следовательно, существуют $g^1, \dots, g^n$ такие, что $g^i \in I^i_{\beta_1}$, $g^i \subseteq f^i$ и $a_i \in \operatorname{dom} g^i$. Образуем $g = g^1 \times \dots \times g^n$. тогда $g \in I_{\beta_1}$, $g \supseteq f$ и $a \in \operatorname{dom} g$. Искомое продолжение найдено. Пусть $b \in \mathfrak{B}$ — произвольный элемент. Тогда $b = (b_1, \dots, b_n)$, $b_i \in \mathfrak{B}_i$. Далее поступаем аналогично первому случаю. Утверждение 1 леммы доказано.

2. Фактически в 2 утверждается, что

$$(\mathfrak{A}, a) \equiv^\alpha (\mathfrak{B}, b) \Leftrightarrow (\mathfrak{A}, a, C(a)) \equiv^\alpha (\mathfrak{B}, b, C(b)).$$

Это прямое следствие факта $(\mathfrak{A}, \bar{x}) \equiv^\alpha (\mathfrak{B}, \bar{y}) \Leftrightarrow (\mathfrak{A}, B(\bar{x})) \equiv^\alpha (\mathfrak{B}, B(y))$. ■.

2. Лемма. *Пусть* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ — *БА*, α — *ординал. Тогда* $(\mathfrak{A}, 1) \equiv^{\alpha+1} (\mathfrak{B}, 1)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\forall a \in \mathfrak{A} \exists b \in \mathfrak{B} [(\hat{a}, 1) \equiv^\alpha (\hat{b}, 1) \& (\widehat{C(a)}, 1) \equiv^\alpha (\widehat{C(b)}, 1)],$$

$$\forall b \in \mathfrak{B} \exists a \in \mathfrak{A} [(\hat{a}, 1) \equiv^\alpha (\hat{b}, 1) \& (\widehat{C(a)}, 1) \equiv^\alpha (\widehat{C(b)}, 1)].$$

□ Это утверждение — прямое следствие леммы 1 и факта

$$\mathfrak{M} \equiv^{\alpha+1} \mathfrak{N} \Leftrightarrow [\forall x \in |\mathfrak{M}| \exists y \in |\mathfrak{N}| (\mathfrak{M}, x) \equiv^{\alpha} (\mathfrak{N}, y)] \& \\ [\forall y \in |\mathfrak{N}| \exists x \in |\mathfrak{M}| (\mathfrak{M}, x) \equiv^{\alpha} (\mathfrak{N}, y)]. \quad \blacksquare$$

3. Лемма. *Пусть $\mathfrak{A}$ — БА, $I \lhd \mathfrak{A}$, $a \in I$. Пусть $\mathfrak{A}' = \widehat{C(a)}$, $I' = I_{C(a)}$ — идеал в $\mathfrak{A}'$. Тогда $\mathfrak{A}/I \cong \mathfrak{A}'/I'$.*

□ Пусть $x \in \mathfrak{A}/I \Rightarrow x = b/I$ для некоторого $b \in \mathfrak{A}$. Определим f так: $f(x) = b \cap C_{\mathfrak{A}}(a)/I' \in \mathfrak{A}'/I'$. Докажем, что f — искомый изоморфизм.

1. Корректность. $b_1/I = b_2/I \Leftrightarrow b_1 \Delta_{\mathfrak{A}} b_2 \in I$. $b_1 \cap C_{\mathfrak{A}}(a)/I' = b_2 \cap C_{\mathfrak{A}}(a)/I' \Leftrightarrow b_1 \cap C_{\mathfrak{A}}(a) \Delta_{\mathfrak{A}'} b_2 \cap C_{\mathfrak{A}}(a) \in I' \Leftrightarrow (b_1 \Delta_{\mathfrak{A}} b_2) \cap C_{\mathfrak{A}}(a) \in I' \Leftrightarrow b_1 \Delta_{\mathfrak{A}} b_2 \in I$.

2. Инъективность. Очевидна из доказательства 1, так как $f(b_1/I) = f(b_2/I) \Leftrightarrow b_1 \cap C_{\mathfrak{A}}(a)/I' = b_2 \cap C_{\mathfrak{A}}(a)/I'$.

3. Сюръективность. $y \in \mathfrak{A}'/I' \Rightarrow y = b'/I'$, $b' \in \mathfrak{A} \Rightarrow b' \in \mathfrak{A}$ и $b \leqslant C_{\mathfrak{A}}(a) \Rightarrow f(b'/I) = b'/I' = y$.

4. Сохранение операций. Докажем сохранность C и $\cup$:

$$f(b_1/I \cup b_2/I) = f(b_1 \cup b_2/I) = (b_1 \cup b_2) \cap C_{\mathfrak{A}}(a)/I' \\ = b_1 \cap C_{\mathfrak{A}}(a)/I' \cup b_2 \cap C_{\mathfrak{A}}(a)/I' = f(b_1/I) \cup f(b_2/I),$$

$$f(C_{\mathfrak{A}/I}(b/I)) = f(C_{\mathfrak{A}}(b)/I) = C_{\mathfrak{A}}(b) \cap C_{\mathfrak{A}}(a)/I',$$

$$C_{\mathfrak{A}/I'}(f(b/I)) = C_{\mathfrak{A}'/I'}(b \cap C_{\mathfrak{A}}(a)/I') = C_{\mathfrak{A}'}(b \cap C_{\mathfrak{A}}(a)/I') \\ = C_{\mathfrak{A}'}(b \cap C_{\mathfrak{A}}(a))/I' = C_{\mathfrak{A}'}(b \cap C_{\mathfrak{A}}(a)) \cap C_{\mathfrak{A}}(a)/I' = C_{\mathfrak{A}}(b) \cap C_{\mathfrak{A}}(a)/I'.$$

Так как $x \cap y = C(C(x) \cup C(y))$, то и сохранность операции $\cap$ доказана. ■

4. Определение. Пусть Φ — некое множество предложений (возможно, бесконечных) языка $\mathscr{L}^*$. Будем говорить, что Φ — *характеризующее множество* для ранга α (α — ординал), если для любых $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models BA^*$

$$\mathfrak{A} \equiv^{\alpha} \mathfrak{B} \Leftrightarrow \text{для всех } \varphi \in \Phi(\mathfrak{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi).$$

5. Лемма. *Пусть Φ_α — характеризующее множество для ранга α. Положим $\Phi'_\alpha = \{ \bigwedge_{\varphi \in \Phi_\alpha} \varphi^{\varepsilon(\varphi)} : \varepsilon : \Phi_\alpha \to \{0,1\}\}$. Предположим, что для всяких $\psi_1, \psi_2 \in \Phi'_\alpha$ существует θ — бесконечное предложение такое, что для всякой $(\mathfrak{A}, 1) \models BA^*$*

$$(\mathfrak{A}, 1) \models \theta \Leftrightarrow (\textit{существует } a \in \mathfrak{A} \textit{ такое, что } (\hat{a}, 1) \models \psi_1,\ (\widehat{C(a)}, 1) \models \psi_2).$$

Класс таких формул обозначим через $\Theta(\psi_1, \psi_2)$ (очевидно, что все предложения из $\Theta(\psi_1, \psi_2)$ эквивалентны в BA^*). Пусть $\Phi_{\alpha+1}$ — такое множество предложений $\mathscr{L}^*$, что для любых $\psi_1, \psi_2 \in \Phi'_\alpha$ существует $\theta \in \Phi_{\alpha+1}$ такое, что $\theta \in \Theta(\psi_1, \psi_2)$, и для любого $\theta \in \Phi_{\alpha+1}$ существуют $\psi_1, \psi_2 \in \Phi'_\alpha$ такие, что $\theta \in \Theta(\psi_1, \psi_2)$, т. е. $\Phi_{\alpha+1}$ состоит из представителей всех $\Theta(\psi_1, \psi_2)$. Тогда $\Phi_{\alpha+1}$ — характеризующее множество для $\alpha + 1$.

□ ($\Rightarrow$) Пусть $(\mathfrak{A}, 1)$, $(\mathfrak{B}, 1)$ — модели BA^* и $(\mathfrak{A}, 1) \equiv^{\alpha+1} (\mathfrak{B}, 1)$. Пусть $\theta \in \Phi_{\alpha+1} \Rightarrow$ существуют $\psi_1, \psi_2 \in \Phi'_\alpha$ такие, что $\theta \in \Theta(\psi_1, \psi_2)$. Пусть $(\mathfrak{A}, 1) \models \theta \Rightarrow$ существует $a \in \mathfrak{A}$ такое, что $(\hat{a}, 1) \models \psi_1$ и $(\widehat{C(a)}, 1) \models \psi_2$. По лемме 2 существует $b \in \mathfrak{B}$ такой, что $(\hat{a}, 1) \equiv^{\alpha} (\hat{b}, 1)$ и $(\widehat{C(a)}, 1) \equiv^{\alpha} (\widehat{C(b)}, 1)$. Формула ψ_1 представима в виде $\bigwedge_{\varphi \in \Phi_\alpha} \varphi^{\varepsilon(\varphi)}$ для некоторого $\varepsilon : \Phi_\alpha \to \{0, 1\}$, следовательно, $(\hat{b}, 1) \models \psi_1$. Аналогично $(\widehat{C(b)}, 1) \models \psi_2$ и, значит, $\mathfrak{B} \models \theta$. Схожим способом показывается, что если $(\mathfrak{B}, 1) \models \theta$, то и $(\mathfrak{A}, 1) \models \theta$.

($\Leftarrow$) Пусть $(\mathfrak{A}, 1)$, $(\mathfrak{B}, 1)$ — модели BA^* и для всех $\theta \in \Phi_{\alpha+1}$ $((\mathfrak{A}, 1) \models \theta \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, 1) \models \theta)$. По лемме 2, чтобы убедиться в справедливости $(\mathfrak{A}, 1) \equiv^{\alpha+1} (\mathfrak{B}, 1)$, достаточно показать, что

$$\forall a \in \mathfrak{A} \exists b \in \mathfrak{B}[(\hat{a}, 1) \equiv^{\alpha} (\hat{b}, 1) \& (\widehat{C(a)}, 1) \equiv^{\alpha} (\widehat{C(b)}, 1)],$$

$$\forall b \in \mathfrak{B} \exists a \in \mathfrak{A}[(\hat{a}, 1) \equiv^{\alpha} (\hat{b}, 1) \& (\widehat{C(a)}, 1) \equiv^{\alpha} (\widehat{C(b)}, 1)].$$

Докажем первое утверждение (второе аналогично). Пусть $a \in \mathfrak{A}$. Для всякого $\varphi \in \Phi_\alpha$ $(\hat{a}, 1) \models \varphi$ или $(\hat{a}, 1) \models (\neg\varphi) \Rightarrow$ существует $\psi_1 \in \Phi'_\alpha$ такое, что $(\hat{a}, 1) \models \psi_1$. Аналогично существует ψ_2 такое, что $(\widehat{C(a)}, 1) \models \psi_2$. Предложение $\theta \in \Phi_{\alpha+1} \cap \Theta(\psi_1, \psi_2)$ существует по условию, $(\mathfrak{A}, 1) \models \theta \Rightarrow (\mathfrak{B}, 1) \models \theta \Rightarrow$ существует $b \in \mathfrak{B}$ такой, что $(\hat{b}, 1) \models \psi_1$ и $(\widehat{C(b)}, 1) \models \psi_2$. Но тогда для любого $\varphi \in \Phi_\alpha$

$$[(\hat{a}, 1) \models \theta \Leftrightarrow (\hat{b}, 1) \models \theta], \quad (\hat{a}, 1) \equiv^{\alpha} (\hat{b}, 1).$$

Аналогично для $(\widehat{C(a)}, 1) \equiv^{\alpha} (\widehat{C(b)}, 1)$. ■

6. Лемма. *Пусть $\varphi(x)$ — некоторая формула $\mathscr{L}^*$, возможно, бесконечная, $\mathrm{qr}(\varphi) = \beta$. Пусть $\mathfrak{A}$ — БА, и $R = \{x \in \mathfrak{A} : (\mathfrak{A}, 1) \models \varphi(x)\}$ — идеал в ней. Тогда для любой формулы $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ (возможно, бесконечной), $\mathrm{qr}(\psi) = \alpha$, найдется формула $\hat{\psi}(x_1, \ldots, x_n)$, $\mathrm{qr}(\hat{\psi}) = \beta + \alpha$, такая, что для любых $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{A}$*

$$\mathfrak{A}/R \models \psi(a_1/R, \ldots, a_n/R) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \hat{\psi}(a_1, \ldots, a_n).$$

□ Доказывать будем индукцией по $\in$. Пусть $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ — минимальная по $\in$ формула, для которой это неверно, и пусть $\mathrm{qr}(\psi) = \alpha$.

1. $\psi(\bar{x}) = \wedge\Phi$. Тогда $\alpha = \sup\{\mathrm{qr}(\varphi(\bar{x})) : \varphi \in \Phi\}$ и для любой $\varphi \in \Phi$, $\mathrm{qr}(\varphi) = \gamma$, существует $\widehat{\varphi}$, $\mathrm{qr}(\widehat{\varphi}) = \beta + \gamma$, с нужным свойством. Очевидно, что формула $\widehat{\psi} = \wedge\{\widehat{\varphi} : \varphi \in \Phi\}$ будет искомой.

2. $\psi(\bar{x}) = \vee\Phi$. Этот случай разбирается аналогично.

3. $\psi(\bar{x}) = \exists y \psi_1(\bar{x}, y)$. Тогда $\mathrm{qr}(\psi) = \mathrm{qr}(\psi_1) + 1$. Существует $\widehat{\psi_1}(\bar{x}, y)$ с нужным свойством. Положим $\widehat{\psi}(\bar{x}) = \exists y \widehat{\psi_1}(\bar{x}, y)$, тогда $\mathrm{qr}(\psi) = \beta + \mathrm{qr}(\widehat{\psi})$. Покажем, что $\widehat{\psi}$ удовлетворяет нужному условию. Пусть $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{A}$ — произвольные элементы. Если $\mathfrak{A} \models \widehat{\psi}(\bar{a})$, то существует $b \in \mathfrak{A}$ такой, что $\mathfrak{A} \models \widehat{\psi_1}(\bar{a}, b) \Rightarrow \mathfrak{A}/R \models \psi_1(\bar{a}/R, b/R) \Rightarrow \mathfrak{A}/R \models \exists y \psi_1(\bar{a}/R, y)$. Обратно, $\mathfrak{A}/R \models \exists y \psi_1(\bar{a}/R, y) \Rightarrow$ существует $b \in \mathfrak{B}$ такой, что $\mathfrak{A}/R \models \psi_1(\bar{a}/R, b/R) \Rightarrow \mathfrak{A} \models \widehat{\psi_1}(\bar{a}, b) \Rightarrow \mathfrak{A} \models \widehat{\psi}(\bar{a})$.

4. $\psi(\bar{x}) = \forall y \psi_1(\bar{x}, y)$. Случай разбирается аналогично.

5. $\psi(\bar{x})$ — атомарная формула, т. е. формула вида $t_1(x_1, \ldots, x_n) = t_2(x_1, \ldots, x_n)$, $\mathrm{qr}(\psi) = 0$. Докажем сначала вспомогательный факт: для любого терма $t(x_1, \ldots, x_n)$ языка $\mathscr{L}^*$ и любых $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{A}$

$$t_{\mathfrak{A}/R}(a_1/R, \ldots, a_n/R) = t_{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)/R.$$

Доказывать будем индукцией по $\in$ среди термов. Пусть $t(\bar{x})$ — простейший терм: либо переменная x_i, либо константа c^*. Для переменной утверждение очевидно. Поскольку $(c^*_{\mathfrak{A}})/R = c^*_{\mathfrak{A}/R}$, для константы утверждение также верно.

Пусть $t(\bar{x}) = t_1(\bar{x}) \cup t_2(\bar{x})$. Имеем $t(\bar{a}/R) = t_1(\bar{a}/R) \cup t_2(\bar{a}/R)$. По предположению индукции $t_1(\bar{a}/R) = t_1(\bar{a})/R$ и $t_2(\bar{a}/R) = t_2(\bar{a})/R$, $\Rightarrow t(\bar{a})/R = t_1(\bar{a})/R \cup t_2(\bar{a})/R = t_1(\bar{a}) \cup t_2(\bar{a})/R$. Случаи $t(\bar{x}) = t_1(\bar{x}) \cap t_2(\bar{x})$ и $t(\bar{x}) = C(t_1(\bar{x}))$ аналогичны. Тем самым

$$\mathfrak{A}/R \models t_1(\bar{a}/R) = t_2(\bar{a}/R) \Leftrightarrow \mathfrak{A}/R \models t_1(\bar{a})/R = t_2(\bar{a})/R$$
$$\Leftrightarrow t_1(\bar{a}) \Delta_{\mathfrak{A}} t_2(\bar{a}) \in R \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi(t_1(\bar{a}) \Delta t_2(\bar{a})).$$

Положим $\widehat{\psi}(\bar{x}) = \varphi(t_1(\bar{x}) \Delta t_2(\bar{x}))$. Тогда $\mathrm{qr}(\widehat{\psi}) = \beta$, и это нужная нам формула. ■

7. Лемма. *Пусть $\mathfrak{A}$ — БА, $I \lhd \mathfrak{A}$ — произвольный идеал, $a \in \mathfrak{A}$. Тогда $\widehat{a/I} \cong \hat{a}/I_a$.*

□ Определим $\varphi : \widehat{a/I} \to \hat{a}/I_a$ так: $x \in \widehat{a/I} \Rightarrow x = b/I$ и $b/I \leqslant a/I \Rightarrow$ существует $b_1 \in \mathfrak{A}$ такой, что $b_1 \leqslant a$ и $x = b_1/I$. Положим $\varphi(x)$ равным $b_1/I_a \in \hat{a}/I_a$. Докажем, что φ — изоморфизм.

1. Корректность определения. $b/I = c/I$, $b, c \leqslant a$, $\Rightarrow b\Delta c \in I$ и $b\Delta c \leqslant a \Rightarrow b\Delta c \in I_a \Rightarrow b/I_a = c/I_a$.

2. Инъективность. $\varphi(x) = \varphi(y)$, $x = b/I$, $y = c/I$, $b, c \in \hat{a} \Rightarrow b/I_a = c/I_a \Rightarrow b\Delta c \in I_a \Rightarrow b\Delta c \in I \Rightarrow x = y$.

3. Сюръективность. $y \in \hat{a}/I_a \Rightarrow y = b/I_a$, $b \leqslant a \Rightarrow b/I \leqslant a/I$ и $\varphi(b/I) = b/I_a = y$.

4. Сохранение операций. $x_1, x_2 \in \widehat{a/I} \Rightarrow$ существуют $b, c \leqslant a$ такие, что $x_1 = b/I$, $x_2 = c/I$; $x_1 \cup x_2 = b \cup c/I$; $\varphi(x_1 \cup x_2) = b \cup c/I_a = b/I_a \cup c/I_a = \varphi(x_1) \cup \varphi(x_2)$; $C(x_1) = C(b)/I \cap a/I = C(b) \cap a/I$; $C(b) \cap a \leqslant a \Rightarrow \varphi(C(x_1)) = C(b) \cap a/I_a$; но $C(b) \cap a = C_{\hat{a}}(b) \Rightarrow \varphi(C(x_1)) = C_{\hat{a}}(b)/I_a = C_{\hat{a}/I_a}(b/I_a)$; $\varphi(x_1 \cap x_2) = \varphi(C(C(x_1) \cup C(x_2))) = \varphi(x_1) \cap \varphi(x_2)$. ■

8. Лемма. *Пусть $\mathfrak{A}$ — БА, $I \lhd \mathfrak{A}$. Тогда $I \circ F(\mathfrak{A}/I) \cap \hat{a} = I_a \circ F(\hat{a}/I_a)$.* ***Иными словами,*** *$(I \circ F(\mathfrak{A}/I))_a = I_a \circ F(\hat{a}/I_a)$.*

□ ($\subseteq$) Пусть $t \in I \circ F(\mathfrak{A}/I) \cap \hat{a} \Rightarrow t \leqslant a$ и $t/I \in F(\mathfrak{A}/I)$. Возможны два варианта.

1. $t/I = 0$. Тогда $t \in I \Rightarrow t \in I_a \Rightarrow t/I_a = 0/I_a$ в $\hat{a}/I_a \Rightarrow t/I_a \in F(\hat{a}/I_a) \Rightarrow t \in I_a \circ F(\hat{a}/I_a)$.

2. $t/I = t_1/I \cup \dots \cup t_n/I$, где t_i/I — атомы $\mathfrak{A}/I$ и можно считать $t_i \leqslant t$. Тогда $t_i \in \hat{a}$. Докажем, что t_i/I_a — атомы $\hat{a}/I_a$ для любого $i = 1, \dots, n$. Пусть $t_i/I_a = s_1/I_a \cup s_2/I_a$, $s_j \leqslant a$, $j = 1, 2$. Тогда $t_i/I_a = s_2 \cup s_2/I_a \Rightarrow t_i \Delta_{\hat{a}} (s_1 \cup s_2) \in I_a$; $t_i \Delta_{\hat{a}} (s_1 \cup s_2) = (t_i \Delta_{\mathfrak{A}} (s_1 \cup s_2)) \cap a$; $s_j \leqslant a \Rightarrow t_i \Delta_{\mathfrak{A}} (s_1 \cup s_2) \leqslant a \Rightarrow t_i \Delta_{\mathfrak{A}} (s_1 \cup s_2) \in I_a$ $\Rightarrow t_i \Delta_{\mathfrak{A}} (s_1 \cup s_2) \in I \Rightarrow t_i/I = s_1/I \cup s_2/I \Rightarrow$ либо $t_i/I = s_1/I$, либо $t_i/I = s_2/I$. Пусть для определенности $t_i/I = s_1/I$. Тогда $t_i \Delta_{\mathfrak{A}} s_1 \in I$ и $t_i \Delta_{\mathfrak{A}} s_1 \leqslant a \Rightarrow t_i \Delta_{\hat{a}} s_1 \in I_a \Rightarrow t_i/I_a = s_1/I_a$. Тем самым если $t_i/I_a = x \cup y$, то либо $t_i/I_a = x$, либо $t_i/I_a = y$. Это и означает, что t_i/I_a — атом $\hat{a}/I_a$.

Далее, $t/I = t_1/I \cup \dots \cup t_n/I \Rightarrow t \Delta_{\mathfrak{A}} (t_1 \cup \dots \cup t_n) \in I \Rightarrow$ аналогично прошлому $t \Delta_{\hat{a}} (t_1 \cup \dots \cup t_n) \in I_a \Rightarrow t/I_a = t_1/I_a \cup \dots \cup t_n/I_a \Rightarrow t/I_a \in F(\hat{a}/I_a) \Rightarrow t \in I_a \circ F(\hat{a}/I_a)$.

($\supseteq$) Пусть $t \in I_a \circ F(\hat{a}/I_a)$. Тогда $t/I_a \in F(\hat{a}/I_a)$ и $t \leqslant a$. Возможны два варианта.

1. $t/I_a = 0/I_a$. Тогда $t \in I_a \Rightarrow t \in I \Rightarrow t/I = 0/I \Rightarrow t \in I \circ F(\mathfrak{A}/I)$.

2. $t/I_a = t_1/I_a \cup \dots \cup t_n/I_a$, t_i/I_a — атомы $\hat{a}/I_a$, $t_i \in \hat{a}$. Докажем, что t_i/I — атомы $\mathfrak{A}/I$ для $i = 1, \dots, n$. Пусть $t_i/I = s_1/I \cup s_2/I$ для некоторых $s_1, s_2 \in \mathfrak{A}$; можно считать, что $s_1, s_2 \leqslant a$. Аналогично предыдущему рассуждению показываем, что $t_i/I_a = s_1/I_a \cup s_2/I_a \Rightarrow t_i/I_a = s_1/I_a$, или $t_i/I_a = s_2/I_a \Rightarrow t_i/I = s_1/I$, или $t_i/I = s_2/I$. В результате получаем, что $t/I = t_1/I \cup \dots \cup t_n/I$ и $t/I \in F(\mathfrak{A}/I) \Rightarrow t \in I \circ F(\mathfrak{A}/I)$. ■

9. Лемма. *Пусть $\mathfrak{A}$ — БА, $a \in \mathfrak{A}$, α — ординал. Тогда $(F_\alpha(\mathfrak{A}))_a = F_\alpha(\hat{a})$.*

□ Доказывать будем индукцией по α.

1. $\alpha = 0 \Rightarrow F_\alpha(\mathfrak{A}) = \{0\}$. Утверждение очевидно.

2. Пусть для α верно. Докажем для $\alpha + 1$. Нужно доказать, что $F_{\alpha+1}(\hat{a}) = F_{\alpha+1}(\mathfrak{A}) \cap \hat{a}$. Имеем

$$F_{\alpha+1}(\mathfrak{A}) \cap \hat{a} = F_\alpha(\mathfrak{A}) \circ F(\mathfrak{A}/F_\alpha(\mathfrak{A})) \cap \hat{a} = (\text{по лемме 8})\ (F_\alpha(\mathfrak{A}))_a \circ F(\hat{a}/(F_\alpha(\mathfrak{A}))_a).$$

По предположению индукции $(F_\alpha(\mathfrak{A}))_a = F_\alpha(\hat{a})$, откуда $F_{\alpha+1}(\mathfrak{A}) \cap \hat{a} = F_\alpha(\hat{a}) \circ F(\hat{a}/F_\alpha(\hat{a})) = F_{\alpha+1}(\hat{a})$.

3. Пусть λ — предельный ординал и для $\gamma < \lambda$ утверждение верно. Докажем для λ: $F_\lambda(\hat{a}) = \bigcup\limits_{\gamma<\lambda} F_\gamma(\hat{a}) = \bigcup\limits_{\gamma<\lambda} (F_\gamma(\mathfrak{A}) \cap \hat{a}) = (\bigcup\limits_{\gamma<\lambda} F_\gamma(\mathfrak{A})) \cap \hat{a} = F_\lambda(\mathfrak{A}) \cap \hat{a}$. ■

10. Лемма. *Пусть $\mathfrak{A}$ — БА, $a \in \mathfrak{A}$, α — ординал. Тогда $\widehat{a/F_\alpha(\mathfrak{A})} \cong \hat{a}/F_\alpha(\hat{a})$.*

□ Это прямое следствие лемм 7, 9. ■

11. Лемма. *Пусть* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ — *БА. Тогда*

1) $(\mathfrak{A},1) \equiv^0 (\mathfrak{B},1) \Leftrightarrow (\mathfrak{A}\cong\mathfrak{B}_0 \Leftrightarrow \mathfrak{B}\cong\mathfrak{B}_0)$;

2) $(\mathfrak{A},1) \equiv^1 (\mathfrak{B},1) \Leftrightarrow (\mathfrak{A}\cong\mathfrak{B}_0 \Leftrightarrow \mathfrak{B}\cong\mathfrak{B}_0$ *и* $\mathfrak{A}\cong\mathfrak{B}_1 \Leftrightarrow \mathfrak{B}\cong\mathfrak{B}_1)$;

3) $(\mathfrak{A},1) \equiv^2 (\mathfrak{B},1) \Leftrightarrow$ (*для любого* $k=0,\ldots,3$ $\mathfrak{A}\cong\mathfrak{B}_k \Leftrightarrow \mathfrak{B}\cong\mathfrak{B}_k$ *и* $\mathfrak{A}$ — *безатомная* $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{B}$ — *безатомная*);

4) $(\mathfrak{A},1) \equiv^3 (\mathfrak{B},1) \Leftrightarrow$ (*для любого* $k=0,\ldots,7$ $\mathfrak{A}\cong\mathfrak{B}_k \Leftrightarrow \mathfrak{B}\cong\mathfrak{B}_k$, *для любого* $l=1,\ldots,4$ (*в* $\mathfrak{A}$ *есть* l *атомов*) $\Leftrightarrow$ (*в* $\mathfrak{B}$ *есть* l *атомов*) *и* $\mathfrak{A}$ — *атомная* $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{B}$ — *атомная*);

5) *для* $k\in\omega$, $k\geqslant 4$ $(\mathfrak{A},1) \equiv^k (\mathfrak{B},1) \Leftrightarrow$ (*для любого* $j=0,\ldots,2^k-1$ $\mathfrak{A}\cong\mathfrak{B}_j \Leftrightarrow \mathfrak{B}\cong\mathfrak{B}_j$, *для любого* $l=1,\ldots,2^k-4$ (*в* $\mathfrak{A}$ *есть* l *атомов*) $\Leftrightarrow$ (*в* $\mathfrak{B}$ *есть* l *атомов*), $\mathfrak{A}$ — *атомная* $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{B}$ — *атомная и* $(\mathfrak{A}/I(\mathfrak{A}),1) \equiv^{k-4} (\mathfrak{B}/I(\mathfrak{B}),1)$).

□ Эта лемма содержит в себе описание Φ_α — характеризующих множеств для рангов $\alpha=0,1,2,3$. Построение их проводится на основе алгоритма, изложенного в лемме 5, так как все свойства, встречающиеся в правой части утверждений о $\equiv^0$, $\equiv^1$, $\equiv^2$, $\equiv^3$, легко задаются конечными формулами.

Сначала покажем, что $\Phi_0=\{C(c^*)=c^*\}$ — характеризующее множество для ранга 0 (это, очевидно, эквивалентно утверждению 1). Имеем $(\mathfrak{A},1)\equiv^0(\mathfrak{B},1) \Leftrightarrow$ существует $f:(\mathfrak{A},1)\to_p(\mathfrak{B},1)$ — частичный изоморфизм. Если $(\mathfrak{A},1)\models C(c^*)=c^*$ и $(\mathfrak{B},1)\models C(c^*)=c^*$, то $\mathfrak{A}\cong\mathfrak{B}_0$ и $\mathfrak{B}\cong\mathfrak{B}_0$ — изоморфизм очевиден. Если $(\mathfrak{A},1)\not\models C(c^*)=c^*$ и $(\mathfrak{B},1)\not\models C(c^*)=c^*$, то $1_\mathfrak{A}\neq 0_\mathfrak{A}$ и $1_\mathfrak{B}\neq 0_\mathfrak{B}$, поэтому образуем f так: $\operatorname{dom} f=\{0_\mathfrak{A},1_\mathfrak{A}\}$, $f(0_\mathfrak{A})=0_\mathfrak{B}$, $f(1_\mathfrak{A})=1_\mathfrak{B}$ — это частичный изоморфизм. Тем самым доказано ($\Leftarrow$) из определения 4. Обратное очевидно, так как $C(c^*)=c^*$ — предложение ранга 0. Тем самым утверждение 1 доказано.

Далее действуем по алгоритму. Пусть $C(c^*)=c^*=\varphi_0$, $\Phi_0'=\{\varphi_0,\neg\varphi_0\}$. Тогда

$$\Theta(\varphi_0,\varphi_0)\sim\mathfrak{A}\cong\mathfrak{B}_0,\quad \Theta(\varphi_0,\neg\varphi_0)\sim\mathfrak{A}\not\cong\mathfrak{B}_0\sim\Theta(\neg\varphi_0,\varphi_0),$$

$$\Theta(\neg\varphi_0,\neg\varphi_0)\sim(\text{в БА есть два ненулевых элемента})\sim\exists x(x\neq C(c^*)\&x\neq c^*).$$

Тем самым в качестве Φ_1 можно взять $\{C(c^*)=c^*, C(c^*)\neq c^*, \exists x(x\neq C(c^*)\&x\neq c^*)\}$ или, что эквивалентно, $\{C(c^*)=c^*, C(c^*)\neq c^*\&\exists x(x\neq C(c^*)\&x\neq c^*)\}$. Отсюда ясна истинность утверждения 2.

Далее поступаем аналогично и получаем Φ_2, Φ_3 и Φ_4 (подробное расписывание заняло бы слишком много места). Если аккуратно провести все выкладки, то легко убедиться, что в качестве Φ_4 можно взять следующий набор утверждений (предполагается, что словесные формулировки заменены соответствующими предложениями $\mathscr{L}^*$, выражающими, что $\mathfrak{A}$ удовлетворяет таким свойствам):

$$\{(\mathfrak{A}\cong\mathfrak{B}_j),\ i=0,\ldots,15,\ (\text{в }\mathfrak{A}\text{ есть }k\text{ атомов}),\ k=0,\ldots,12,$$
$$(\mathfrak{A}\text{ — атомная БА}),\ (\mathfrak{A}\text{ — разложимая БА})\}.$$

Очевидно, что $\mathfrak{A}/I(\mathfrak{A})\cong\mathfrak{B}_0 \Leftrightarrow \mathfrak{A}$ разложимая. Отсюда и из утверждения 1 леммы следует, что $(\mathfrak{A}/I(\mathfrak{A}),1)\equiv^0(\mathfrak{B}/I(\mathfrak{B}),1)\Leftrightarrow\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ разложимы или неразложимы одновременно, и тем самым утверждение 5 верно при $k=4$. Для больших k докажем 5 по индукции (базис имеем).

Шаг индукции: пусть для k ($k\geqslant 4$) утверждение верно. Докажем для $k+1$. ($\Rightarrow$). Пусть $(\mathfrak{A},1)\equiv^{k+1}(\mathfrak{B},1)$.

1. Для любого $j\in[0,2^{k+1}-1]$ ($\mathfrak{A}\cong\mathfrak{B}_j \Leftrightarrow \mathfrak{B}\cong\mathfrak{B}_j$). Пусть j такой, как указано выше.

1.1. $j\in[0,2^k-1]$. Утверждение 5 верно по предположению индукции.

1.2. $j\in[2^k,2^{k+1}-2]$. Пусть $j_1=2^k-1$, $j_2=j-j_1$. Тогда $j_2\in[1,2^k-1]$. Предположим, что $\mathfrak{A}\cong\mathfrak{B}_j$. Возьмем $a\in\mathfrak{A}$ такой, что $\hat{a}\cong\mathfrak{B}_{j_1}$. Тогда $\widehat{C(a)}\cong$

$\mathfrak{B}_{j_2}$. По лемме 2 существует $b \in \mathfrak{B}$ такой, что $(\hat{a}, 1) \equiv^k (\hat{b}, 1)$ и $(\widehat{C(a)}, 1) \equiv^k (\widehat{C(b)}, 1)$. По предположению индукции $\hat{b} \cong \mathfrak{B}_{j_1}$ и $\widehat{C(b)} \cong \mathfrak{B}_{j_2} \Rightarrow \mathfrak{B} \cong \mathfrak{B}_j$. Если $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{B}_j$, то аналогично получаем $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}_j$.

1.3. $j = 2^{k+1} - 1$. Пусть $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}_j$. Ясно, что в этом случае $\mathfrak{B} \ncong \mathfrak{B}_i$ для $i = 0, \ldots, 2^{k+1} - 2$, так как иначе (см. 1.2) это было бы верно и для $\mathfrak{A}$. Предположим, что $\mathfrak{B} \ncong \mathfrak{B}_{2^{k+1}-1}$. Тогда очевидно, что в $\mathfrak{B}$ можно найти b такой, что $(\hat{b}, 1) \ncong \mathfrak{B}_i$ и $(\widehat{C(b)}, 1) \ncong \mathfrak{B}_i$ для любых $i = 0, \ldots, 2^k - 1$. По лемме 2 для этого b найдем $a \in \mathfrak{A}$ такой, что $(\hat{a}, 1) \equiv^k (\hat{b}, 1)$ и $(\widehat{C(a)}, 1) \equiv^k (\widehat{C(b)}, 1)$. Тогда по предположению индукции a удовлетворяет тому же свойству. Но если $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}_{2^{k+1}-1}$, то это невозможно — противоречие, значит, $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{B}_{2^{k+1}-1}$. Если $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{B}_j$, то аналогично получаем $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}_j$.

2. Для любого $j \in [1, 2^{k+1} - 4]$ в $\mathfrak{A}$ есть j атомов $\Leftrightarrow$ в $\mathfrak{B}$ есть j атомов.

Пусть j такой, как указано выше, и в $\mathfrak{A}$ содержится j атомов.

2.1. $j \in [1, 2^k - 4]$. В $\mathfrak{B}$ по предположению индукции тоже имеется j атомов.

2.2. $j \in [2^k - 3, 2^{k+1} - 5]$. Пусть $j_1 = 2^k - 4$, $j_2 = j - j_1$. Тогда $j_2 \in [1, 2^k - 1]$. Возьмем $a \in \mathfrak{A}$ такой, что $\hat{a} \cong \mathfrak{B}_{j_2}$. По лемме 2 существует $b \in \mathfrak{B}$ такой, что $(\hat{a}, 1) \equiv^k (\hat{b}, 1)$ и $(\widehat{C(a)}, 1) \equiv^k (\widehat{C(b)}, 1)$. тогда по предположению индукции $\hat{b} \cong \mathfrak{B}_{j_2}$ и в $\widehat{C(b)}$ есть j_1 атомов. Отсюда следует, что в $\mathfrak{B}$ есть j атомов.

2.3. $j = 2^{k+1} - 4$. Возьмем $a \in \mathfrak{A}$ такой, что $\hat{a} \cong \mathfrak{B}_{2^k}$. По лемме 2 существует $b \in \mathfrak{B}$ такой, что $(\hat{a}, 1) \equiv^k (\hat{b}, 1)$ и $(\widehat{C(a)}, 1) \equiv^k (\widehat{C(b)}, 1)$. По предположению индукции $\hat{b}$ — атомный и для любого $i = 0, \ldots, 2^k - 1$ $\hat{b} \ncong \mathfrak{B}_i$. Тогда в $\hat{b}$ есть как минимум 2^k атомов и в $\widehat{C(b)}$ — $2^k - 4$ атомов.

Если в $\mathfrak{B}$ есть j атомов, то все рассуждения аналогичны.

3. $(\mathfrak{A}/I(\mathfrak{A}), 1) \equiv^{(k+1)-4} (\mathfrak{B}/I(\mathfrak{B}), 1)$. Это следует из леммы 6, так как $I(\mathfrak{A}) = \{x \in \mathfrak{A} : x = x_1 \cup x_2,\ x_1$ — атомный, x_2 — безатомный элемент$\}$.

z — атом $\Leftrightarrow z \neq C(c^*) \& \forall t[t \cap z = t \to t = z \vee t = C(c^*)]$.

y — атомный $\Leftrightarrow \forall t[t \cap y = t \to t = c(c^*) \vee \exists z(z \cap t = z \& z$ — атом$)]$.

y — безатомный $\Leftrightarrow \forall t[t \cap y = t \to \neg(t$ — атом$)]$.

$x \in I(\mathfrak{A}) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \exists y[y \cap x = y \& (y$ — безатомный$) \& (x \cap C(y)$ — атомный$)]$.

Отсюда видно, что $I(\mathfrak{A})$ можно задать формулой ранга 4.

($\Leftarrow$) По лемме 2 достаточно доказать, что

$$\forall a \in \mathfrak{A} \exists b \in \mathfrak{B}[(\hat{a}, 1) \equiv^k (\hat{b}, 1) \& (\widehat{C(a)}, 1) \equiv^k (\widehat{C(b)}, 1)],$$
$$\forall b \in \mathfrak{B} \exists a \in \mathfrak{A}[(\hat{a}, 1) \equiv^k (\hat{b}, 1) \& (\widehat{C(a)}, 1) \equiv^k (\widehat{C(b)}, 1)].$$

Докажем первое утверждение (второе аналогично). Пусть $a \in \mathfrak{A}$ — произвольный элемент.

1. $a/I(\mathfrak{A}) \neq 0/I(\mathfrak{A})$ и $C(a)/I(\mathfrak{A}) \neq 0/I(\mathfrak{A})$. По лемме 2 для $\mathfrak{A}/I(\mathfrak{A})$ и $\mathfrak{B}/I(\mathfrak{B})$ найдется $b \in \mathfrak{B}$ такой, что $(\widehat{a/I(\mathfrak{A})}, 1) \equiv^{k-4} (\widehat{b/I(\mathfrak{B})}, 1)$ и $(\widehat{C(a)/I(\mathfrak{A})}, 1) \equiv^{k-4} (\widehat{C(b)/I(\mathfrak{B})}, 1)$. Поскольку $\widehat{a/I(\mathfrak{A})} \ncong \mathfrak{B}_0$, по доказанному для $\equiv^0$ $\widehat{b/I(\mathfrak{B})} \ncong \mathfrak{B}_0$ $\Rightarrow b \notin I(\mathfrak{B})$. Аналогично $C(b) \notin I(\mathfrak{B})$. Отсюда для всех $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\widehat{C(a)}$, $\widehat{C(b)}$ верно, что в них бесконечное количество атомов и они не атомные. Кроме того, $I(\hat{a}) = I(\mathfrak{A}) \cap \hat{a} \Rightarrow$ (по лемме 7) $\widehat{a/I(\mathfrak{A})} \cong \hat{a}/I(\hat{a})$. Аналогично для $\hat{b}/I(\hat{b})$, $\widehat{C(b)}/I(\widehat{C(b)})$, $\widehat{C(a)}/I(\widehat{C(a)})$, поэтому

$$(\hat{a}/I(\hat{a}), 1) \equiv^{k-4} (\hat{b}/I(\hat{b}), 1),$$
$$(\widehat{C(b)}/I(\widehat{C(b)}), 1) \equiv^{k-4} (\widehat{C(a)}/I(\widehat{C(a)}), 1).$$

Отсюда по предположению индукции $(\hat{a}, 1) \equiv^k (\hat{b}, 1)$ и $(\widehat{C(a)}, 1) \equiv^k (\widehat{C(b)}, 1)$, что нам и нужно.

2. $a/I(\mathfrak{A}) = 0/I(\mathfrak{A})$ и $C(a)/I(\mathfrak{A}) \neq 0/I(\mathfrak{A})$. Имеем $C(a) \notin I(\mathfrak{A}) \Rightarrow 1_{\mathfrak{A}} \notin I(\mathfrak{A})$ $\Rightarrow \mathfrak{A}$ неразложимая. По предположению индукции $(\mathfrak{A}, 1) \equiv^k (\mathfrak{B}, 1)$, отсюда $\mathfrak{B}$ тоже неразложимая. По определению $a = a_1 \cup a_2$, a_1 — безатомный элемент, a_2 — атомный.

2.1. $\hat{a}_2 \cong \mathfrak{B}_j$, $j \in [0, 2^k - 1]$. тогда найдем $b_2 \in \mathfrak{B}$ такой, что $\hat{b}_2 \cong \mathfrak{B}_j$.

2.2. В $\hat{a}_2$ более $2^k - 1$ атомов. Найдем $\hat{b}_2 \in \mathfrak{B}$ такой, что $\hat{b}_2 \cong \mathfrak{B}_{2^k}$. В обоих случаях, если $a_1 \neq 0$, то в $\mathfrak{B}$ найдем b_1 такой, что $b_1 \neq 0$ и b_1 безатомный. Если $a_1 = 0$, то положим $b_1 = 0$. Далее положим $b = b_1 \cup b_2$. Тогда по предположению индукции $b \in I(\mathfrak{B})$ и $(\hat{a}, 1) \equiv^k (\hat{b}, 1)$. По лемме 3 $\widehat{C(a)}/I(\widehat{C(a)}) \cong \mathfrak{A}/I(\mathfrak{A})$ и $\widehat{C(b)}/I(\widehat{C(b)}) \cong \mathfrak{B}/I(\mathfrak{B}) \Rightarrow (\widehat{C(a)}/I(\widehat{C(a)}), 1) \equiv^{k-4} (\widehat{C(b)}/I(\widehat{C(b)}), 1)$. Поскольку $\widehat{C(b)}$ неразложима (иначе $\mathfrak{B}$ была бы разложима), в $\widehat{C(b)}$ бесконечное количество атомов и она не атомная. Аналогично для $\widehat{C(a)}$ и по предположению индукции $(\widehat{C(a)}, 1) \equiv^k (\widehat{C(b)}, 1)$, что нам и нужно.

3. $a/I(\mathfrak{A}) \neq 0/I(\mathfrak{A})$ и $C(a)/I(\mathfrak{A}) = 0/I(\mathfrak{A})$. Случай совершенно аналогичен предыдущему.

4. $a/I(\mathfrak{A}) = 0/I(\mathfrak{A})$ и $C(a)/I(\mathfrak{A}) = 0/I(\mathfrak{A})$. Тогда $a, C(a) \in I(\mathfrak{A})$ и $\mathfrak{A}$ разложимая. Значит (см. п. 1), и $\mathfrak{B}$ разложимая.

4.1. $\hat{a} \cong \mathfrak{B}_j$, $j \in [0, 2^k]$. Тогда $\mathfrak{A}$ имеет j атомов, и так как $j \leqslant 2^{k+1} - 4$, то $\mathfrak{B}$ имеет j атомов. Пусть $b \in \mathfrak{B}$ такой, что $\hat{b} \cong \mathfrak{B}_j$. Тогда $(\hat{a}, 1) \cong (\hat{b}, 1)$, и $\widehat{C(a)}$, $\widehat{C(b)}$ удовлетворяют всем условиям $\equiv^k$:

$$\widehat{C(a)} \text{ атомная} \Leftrightarrow \mathfrak{A} \text{ атомная} \Leftrightarrow \mathfrak{B} \text{ атомная} \Leftrightarrow \widehat{C(b)} \text{ атомная},$$

$$\widehat{C(a)} \cong \mathfrak{B}_l \text{ для } l \in [0, 2^k - 1] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}_{l+j} \Leftrightarrow \mathfrak{B} \cong \mathfrak{B}_{l+j} \Leftrightarrow \widehat{C(b)} \cong \mathfrak{B}_l,$$

$$\text{в } \widehat{C(a)} \text{ есть } l \text{ атомов для } l \in [1, 2^k - 4] \Leftrightarrow \text{в } \mathfrak{A} \text{ есть } l + j \text{ атомов}$$
$$\Leftrightarrow \text{в } \mathfrak{B} \text{ есть } l + j \text{ атомов} \Leftrightarrow \text{в } \widehat{C(b)} \text{ есть } l \text{ атомов.}$$

Тем самым $(\widehat{C(a)}, 1) \equiv^k (\widehat{C(b)}, 1)$. Нужное b найдено.

4.2. $\hat{a}$ содержит ненулевой безатомный элемент, и в $\hat{a}$ ровно l атомов, $l \in [0, 2^k - 5]$. Если $\widehat{C(a)} \cong \mathfrak{B}_j$, $j \in [0, 2^k]$, то поступаем аналогично 4.1. Пусть это неверно. Берем $b_2 \in \mathfrak{B}$ такой, что $\hat{b}_2 \cong \mathfrak{B}_l$, b_1 — безатомная часть $\mathfrak{B}$, если $C(a)$ атомный, и b_1 — «половина» безатомной части в противном случае. Полагаем $b = b_1 \cup b_2$. Аналогично 4.1 убеждаемся, что по индукционному предположению $(\hat{a}, 1) \equiv^k (\hat{b}, 1)$ и $(\widehat{C(a)}, 1) \equiv^k (\widehat{C(b)}, 1)$. Нужное b найдено.

4.3. $\hat{a}$ содержит безатомный элемент, и в $\hat{a}$ есть $2^k - 4$ атомов. Если $\widehat{C(a)}$ удовлетворяет условию 4.1 или 4.2, то поступаем аналогично предыдущему. В противном случае для $\widehat{C(a)}$ остается два варианта.

4.3.1. $\widehat{C(a)}$ атомная, и в $\widehat{C(a)}$ больше 2^k атомов. Тогда в $\mathfrak{A}$, а значит, и в $\mathfrak{B}$, есть $2^{k+1} - 4$ атомов. Берем b такой, что $\widehat{C(b)} \cong \mathfrak{B}_{2^k}$. Тогда b не атомный и в $\hat{b}$ есть $2^k - 4$ атомов. Отсюда по предположению индукции получаем нужное.

4.3.2. $\widehat{C(a)}$ не атомная, и в $\widehat{C(a)}$ есть $2^k - 4$ атомов. Тогда $\mathfrak{A}$ не атомная и в $\mathfrak{A}$ есть $2^{k+1} - 8$ атомов. Это же верно и для $\mathfrak{B}$. Делим безатомную часть $\mathfrak{B}$ на $b_1 \neq 0$ и $b_1' \neq 0$. Находим $b_2 \in \mathfrak{B}$ такой, что $\hat{b}_2 \cong \mathfrak{B}_{2^k - 4}$. Полагаем $b = b_1 \cup b_2$ и аналогично предыдущему убеждаемся, что по индукционному предположению $(\hat{a}, 1) \equiv^k (\hat{b}, 1)$ и $(\widehat{C(a)}, 1) \equiv^k (\widehat{C(b)}, 1)$.

4.4. $\hat{a}$ атомная, и в $\hat{a}$ больше 2^k атомов. Пусть для $\widehat{C(a)}$ неверны условия 4.1–4.3 (иначе будем действовать аналогично предыдущему). Тогда $\widehat{C(a)}$

тоже атомная и в $\widehat{C(a)}$ больше 2^k атомов. Отсюда $\mathfrak{A}$ — атомная и в $\mathfrak{A}$ больше $2^{k+1}+1$ атомов, а значит, и $\mathfrak{B}$ атомная и в $\mathfrak{B}$ больше $2^{k+1}-1$ атомов. Возьмем b такой, что $\hat{b} \cong \mathfrak{B}_{2^k}$. Аналогичными рассуждениями получим, что $(\hat{a}, 1) \equiv^k (\hat{b}, 1)$ и $(\widehat{C(a)}, 1) \equiv^k (\widehat{C(b)}, 1)$. Тем самым во всех случаях находится нужное b. ■

Определение ранга Скотта требует проверки перехода от $(\mathfrak{A}, \bar{a}) \equiv^\alpha (\mathfrak{A}, \bar{b})$ к $(\mathfrak{A}, \bar{a}) \equiv^{\alpha+1} (\mathfrak{A}, \bar{b})$ для любых конечных последовательностей $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ и $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_n)$. В булевых алгебрах достаточно последовательностей единичной длины.

12. *Предложение.* *Пусть $\mathfrak{A}$ — БА. Тогда $\mathrm{sr}(\mathfrak{A}) = \min\{\alpha$ — ординал : для любых $a, b \in \mathfrak{A}$ $(\mathfrak{A}, a) \equiv^\alpha (\mathfrak{A}, b) \Rightarrow (\mathfrak{A}, a) \equiv^{\alpha+1} (\mathfrak{A}, b)\}$.*

□ Пусть $\alpha_0 = \min\{\alpha$ — ординал : для любых $a, b \in \mathfrak{A}$ $(\mathfrak{A}, a) \equiv^\alpha (\mathfrak{A}, b) \Rightarrow (\mathfrak{A}, a) \equiv^{\alpha+1} (\mathfrak{A}, b)\}$. Ясно, что $\alpha_0 \leqslant \mathrm{sr}(\mathfrak{A})$. Докажем обратное. Пусть $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ — разбиения единицы в $\mathfrak{A}$ и $(\mathfrak{A}, \bar{a}) \equiv^{\alpha_0} (\mathfrak{A}, \bar{b})$. Очевидно, что для любого $i = 1, \ldots, n$ $(\mathfrak{A}, a_i) \equiv^{\alpha_0} (\mathfrak{A}, b_i)$. Тогда по определению α_0

$$(\mathfrak{A}, a_i) \equiv^{\alpha_0+1} (\mathfrak{A}, b_i) \Leftrightarrow (\mathfrak{A}, a_i, C(a_i)) \equiv^{\alpha_0+1} (\mathfrak{A}, b_i, C(b_i)) \Rightarrow (\text{по лемме 1})$$
$$(\hat{a}_i, 1) \equiv^{\alpha_0+1} (\hat{b}_i, 1) \text{ для всех } i = 1, \ldots, n \Rightarrow (\text{по лемме 1}) \ (\mathfrak{A}, \bar{a}) \equiv^{\alpha_0+1} (\mathfrak{A}, \bar{b}).$$

Пусть теперь $\bar{a}$, $\bar{b}$ — произвольные последовательности. Имеем

$$(\mathfrak{A}, \bar{a}) \equiv^{\alpha_0} (\mathfrak{A}, \bar{b}) \Rightarrow (\mathfrak{A}, B(\bar{a})) \equiv^{\alpha_0} (\mathfrak{A}, B(\bar{b}))$$
$$\Rightarrow (\mathfrak{A}, B(\bar{a})) \equiv^{\alpha_0+1} (\mathfrak{A}, B(\bar{b})) \Rightarrow (\mathfrak{A}, \bar{a}) \equiv^{\alpha_0+1} (\mathfrak{A}, \bar{b}). \quad ■$$

13. *Предложение.* *Пусть $\mathfrak{A}$ — БА, $\mathrm{sr}(\mathfrak{A}) = \alpha$. Тогда для любого $a \in \mathfrak{A}$ $\mathrm{sr}(\hat{a}) \leqslant \alpha$.*

□ Пусть для $i = 1, 2$ $a_i \in \hat{a} \Rightarrow a_i \in \mathfrak{A}$ и $a_i \leqslant a$. Пусть $(\hat{a}, a_1) \equiv^\alpha (\hat{a}, a_2)$. Для доказательства предложения достаточно убедиться, что $(\hat{a}, a_1) \equiv^{\alpha+1} (\hat{a}, a_2)$.

Имеем

$$(\hat{a}, a_1) \equiv^\alpha (\hat{a}, a_2) \Rightarrow (\hat{a}, a_1, C_{\hat{a}}(a_1)) \equiv^\alpha (\hat{a}, a_2, C_{\hat{a}}(a_2))$$
$$\Rightarrow (\hat{a}, a_1, a \setminus a_1) \equiv^\alpha (\hat{a}, a_2, a \setminus a_2) \Rightarrow (\hat{a}_1, 1) \equiv^\alpha (\hat{a}_2, 1), \ (\widehat{a \setminus a_1}, 1) \equiv^\alpha (\widehat{a \setminus a_2}, 1).$$

В последнем случае $\hat{a}_1$, например, понимается как сужение БА $\hat{a}$ на $\{x \in \hat{a} : x \leqslant a_1\}$, но очевидно, что в результате получается та же БА, как и в случае, когда под $\hat{a}_1$ понимается сужение $\mathfrak{A}$ на $\{x \in \mathfrak{A} : x \leqslant a_1\}$. Кроме того, $(\widehat{C(a)}, 1) \cong (\widehat{C(a)}, 1) \Rightarrow (\widehat{C(a)}, 1) \equiv^\alpha (\widehat{C(a)}, 1)$. Поскольку $(C(a), a_1, a \setminus a_1)$ и $(C(a), a_2, a \setminus a_2)$ образуют разбиения единицы в $\mathfrak{A}$, по лемме 1

$$(\mathfrak{A}, C(a), a_1, a \setminus a_1) \equiv^\alpha (\mathfrak{A}, C(a), a_2, a \setminus a_2) \Rightarrow$$
$$(\mathfrak{A}, C(a), a_1, a \setminus a_1) \equiv^{\alpha+1} (\mathfrak{A}, C(a), a_2, a \setminus a_2) \Rightarrow (\hat{a}_1, 1) \equiv^{\alpha+1} (\hat{a}_2, 1),$$
$$(\widehat{a \setminus a_1}, 1) \equiv^{\alpha+1} (\widehat{a \setminus a_2}, 1) \Rightarrow (\hat{a}, a_1, a \setminus a_1) \equiv^{\alpha+1} (\hat{a}, a_2, a \setminus a_2) \Rightarrow (\hat{a}, a_1) \equiv^{\alpha+1} (\hat{a}, a_2),$$

что и требовалось доказать. ■

Опишем все булевы алгебры конечных рангов. Обозначим классы $B_k = \{\mathfrak{A}$ — БА : $\mathrm{ch}(\mathfrak{A}) = (0, k, 0)\}$ и $B_k^* = \{\mathfrak{A}$ — БА : $\mathrm{ch}(\mathfrak{A}) = (0, k, 1)\}$.

14. Теорема. 1. *Всякая булева алгебра с конечным рангом Скотта лежит в одном из классов B_k или B_k^* для $k \in \omega$.*

2. $\mathrm{sr}(B_0) = 0$, $\mathrm{sr}(B_1) = 0$, $\mathrm{sr}(B_k) = [\log_2(k-1)]$ *при* $k \geqslant 2$.

3. $\mathrm{sr}(B_0^*) = 0$, $\mathrm{sr}(B_1^*) = 2$, $\mathrm{sr}(B_2^*) = 2$, $\mathrm{sr}(B_k^*) = [\log_2(k+7)]$ *при* $k \geqslant 3$.

□ 1. Пусть $\mathfrak{A}$ — БА, $\mathrm{sr}(\mathfrak{A}) = n \in \omega$. Покажем, что $\mathrm{ch}_1(\mathfrak{A}) = 0$. Предположим, что $\mathrm{ch}_1(\mathfrak{A}) > 0$, тогда алгебра $\mathfrak{A}$ неразложимая. Возьмем $a, b \in \mathfrak{A}$ такие, что $\hat{a} \cong \mathfrak{B}_{2^n}$, $\hat{b} \cong \mathfrak{B}_{2^n+1}$. Тогда

$$a, b \in I(\mathfrak{A}) \Rightarrow \text{(по лемме 3)}$$
$$\widehat{C(a)}/I(\mathfrak{A})_{C(a)} \cong \mathfrak{A}/I(\mathfrak{A}) \cong \widehat{C(b)}/I(\mathfrak{A})_{C(b)}, \quad I(\mathfrak{A})_{C(a)} = I(\widehat{C(a)}).$$

Аналогично для $I(\mathfrak{A})_{C(b)} \Rightarrow \widehat{C(a)}/I(\widehat{C(a)}) \cong \widehat{C(b)}/I(\widehat{C(b)})$. Кроме того, в $\widehat{C(a)}$ и в $\widehat{C(b)}$ бесконечное количество атомов, и они не атомные. По лемме 11 $(\widehat{C(a)}, 1) \equiv^n (\widehat{C(b)}, 1)$ и $(\hat{a}, 1) \equiv^n (\hat{b}, 1)$. Отсюда по лемме 1 $(\mathfrak{A}, a, C(a)) \equiv^n (\mathfrak{A}, b, C(b))$, но $(\mathfrak{A}, a, C(a)) \not\equiv^{n+1} (\mathfrak{A}, b, C(b))$, так как $(\hat{a}, 1) \not\equiv^{n+1} (\hat{b}, 1)$ по лемме 11. Получили $\mathrm{sr}(\mathfrak{A}) > n$ — противоречие, следовательно, $\mathrm{ch}_1(\mathfrak{A}) = 0$. Совершенно аналогично показывается, что если $\mathfrak{A}$ — разложимая БА и в ней бесконечное количество атомов, то не может быть такого, что $\mathrm{sr}(\mathfrak{A}) \in \omega$. Утверждение 1 доказано.

2. (1) $\mathrm{sr}(B_0) = 0$.

Пусть $\mathfrak{A} \in B_0$. Очевидно, что для любых $a, b \in \mathfrak{A}$ $(\mathfrak{A}, a) \cong (\mathfrak{A}, b)$. По предложению 12 $\mathrm{sr}(\mathfrak{A}) = 0$.

(2) $\mathrm{sr}(B_1) = 0$.

Пусть $\mathfrak{A} \in B_1$, $a, b \in \mathfrak{A}$. На протяжении всего доказательства данной теоремы без явных ссылок будем использовать леммы 1, 11 и предложение 12. Пусть $(\mathfrak{A}, a) \equiv^0 (\mathfrak{A}, b) \Rightarrow (\hat{a}, 1) \equiv^0 (\hat{b}, 1)$ и $(\widehat{C(a)}, 1) \equiv^0 (\widehat{C(b)}, 1)$.

(2.1) $a = 0$. Тогда $\hat{a} \cong \mathfrak{B}_0 \Rightarrow \hat{b} \cong \mathfrak{B}_0 \Rightarrow \widehat{C(a)} \cong \mathfrak{B}_1$ и $\widehat{C(b)} \cong \mathfrak{B}_1 \Rightarrow (\hat{a}, 1) \equiv^1 (\hat{b}, 1)$ и $(\widehat{C(a)}, 1) \equiv^1 (\widehat{C(b)}, 1) \Rightarrow (\mathfrak{A}, a) \equiv^1 (\mathfrak{A}, b)$.

(2.2) $a \neq 0$. Тогда $C(a) = 0$. Рассматривается аналогично.

(3) $\mathrm{sr}(B_2) = 0$.

Пусть $\mathfrak{A} \in B_2$, $a, b \in \mathfrak{A}$, $(\mathfrak{A}, a) \equiv^0 (\mathfrak{A}, b)$.

(3.1) $a = 0$. тогда $(\hat{a}, 1) \equiv^0 (\hat{b}, 1) \Rightarrow b = 0 \Rightarrow C(a) = C(b) = 1 \Rightarrow (\mathfrak{A}, a) \cong (\mathfrak{A}, b) \Rightarrow (\mathfrak{A}, a) \equiv^1 (\mathfrak{A}, b)$.

(3.2) $C(a) = 0$. Рассматривается аналогично.

(3.3) $a \neq 0$ и $C(a) \neq 0$. Тогда $(\hat{a}, 1) \equiv^0 (\hat{b}, 1)$, $(\widehat{C(a)}, 1) \equiv^0 (\widehat{C(b)}, 1) \Rightarrow b \neq 0$ и $C(b) \neq 0 \Rightarrow a$, $C(a)$, b, $C(b)$ — атомы $\mathfrak{A} \Rightarrow \hat{a} \cong \widehat{C(a)} \cong \hat{b} \cong \widehat{C(b)} \Rightarrow (\hat{a}, 1) \cong (\hat{b}, 1)$ и $(\widehat{C(a)}, 1) \cong (\widehat{C(b)}, 1) \Rightarrow (\mathfrak{A}, a) \equiv^1 (\mathfrak{A}, b)$.

(4) $k \geqslant 3$, $\mathfrak{A} \in B_k \Rightarrow \mathrm{sr}(\mathfrak{A}) = [\log_2(k-1)]$.

Пусть $[\log_2(k-1)] = n$. Тогда $n \geqslant 1$ и $n \leqslant \log_2(k-1) < n+1$, откуда $2^n \leqslant k - 1 < 2^{n+1}$. Покажем, что $\mathrm{sr}(\mathfrak{A}) > n - 1$. Пусть $j_1 = 2^{n-1}$ Возьмем $a, b \in \mathfrak{A}$ такие, что $\hat{a} \cong \mathfrak{B}_{j_1}$, $\hat{b} \cong \mathfrak{B}_{j_1+1}$. Тогда $\widehat{C(a)} \cong \mathfrak{B}_{k-j_1}$, $\widehat{C(b)} \cong \mathfrak{B}_{k-j_1-1}$. По условию $2^{n-1} \leqslant k - j_1 - 1 < k - j_1$, значит, $(\hat{a}, 1) \equiv^{n-1} (\hat{b}, 1)$ и $(\widehat{C(a)}, 1) \equiv^{n-1} (\widehat{C(b)}, 1)$. Отсюда $(\mathfrak{A}, a) \equiv^{n-1} (\mathfrak{A}, b)$ и $(\mathfrak{A}, a) \not\equiv^n (\mathfrak{A}, b)$, так как $(\hat{a}, 1) \not\equiv^n (\hat{b}, 1)$. Тем самым $\mathrm{sr}(\mathfrak{A}) > n - 1$.

Покажем теперь, что $\mathrm{sr}(\mathfrak{A}) \leqslant n$. Пусть $a, b \in \mathfrak{A}$, $(\hat{a}, 1) \equiv^n (\hat{b}, 1)$, $(\widehat{C(a)}, 1) \equiv^n (\widehat{C(b)}, 1)$.

(4.1) $\hat{a} \cong \mathfrak{B}_j$, $j \in [0, 2^n - 1] \Rightarrow \hat{b} \cong \mathfrak{B}_j$, $\widehat{C(a)} \cong \mathfrak{B}_{k-j} \cong \widehat{C(b)} \Rightarrow (\hat{a}, 1) \equiv^{n+1} (\hat{b}, 1)$ и $(\widehat{C(a)}, 1) \equiv^{n+1} (\widehat{C(b)}, 1)$.

(4.2) В $\hat{a}$ больше 2^n атомов. Поскольку $k \leqslant 2^{n+1}$, в $\widehat{C(a)}$ меньше 2^n атомов. Эта ситуация аналогична предыдущей.

(4.3) $\hat{a} \cong \mathfrak{B}_{2^n}$, $\widehat{C(a)} \cong \mathfrak{B}_j$. Если $j < 2^n$ или в $\hat{b}$ больше или меньше 2^n атомов, то ситуация также аналогична (4.1). Единственный нерассмотренный вариант — $\widehat{C(a)} \cong \mathfrak{B}_{2^n}$. Тогда $k = 2^{n+1}$, $\hat{b} \cong \mathfrak{B}_{2^n}$, и $\widehat{C(b)} \cong \mathfrak{B}_{2^n}$. Значит, $(\hat{a},1) \cong (\hat{b},1)$ и $(\widehat{C(a)},1) \cong (\widehat{C(b)},1)$, что нам и нужно. Тем самым $\mathrm{sr}(\mathfrak{A}) \leqslant n$.

(5) $\mathrm{sr}(B_0^*) = 0$.

Пусть $a,b \in \mathfrak{A} \in B_0^*$, $(\mathfrak{A},a) \equiv^0 (\mathfrak{A},b) \Rightarrow (\hat{a},1) \equiv^0 (\hat{b},1)$ и $(\widehat{C(a)},1) \equiv^0 (\widehat{C(b)},1)$. Докажем, что $(\mathfrak{A},a) \equiv^1 (\mathfrak{A},b)$.

(5.1) $a = 0$. Тогда $b = 0$, $\widehat{C(a)} \in B_0^*$ и $\widehat{C(b)} \in B_0^*$. Отсюда $(\hat{a},1) \equiv^1 (\hat{b},1)$ и $(\widehat{C(a)},1) \equiv^1 (\widehat{C(b)},1)$, что и требовалось доказать.

(5.2) $C(a) = 0$. Рассматривается аналогично.

(5.3) $a \neq 0$, $C(a) \neq 0 \Rightarrow b \neq 0$, $(C(b) \neq 0 \Rightarrow a, C(a), b, C(b) \in B_0^* \Rightarrow (\hat{a},1) \equiv^1 (\hat{b},1)$ и $(\widehat{C(a)},1) \equiv^1 (\widehat{C(b)},1)$.

(6) $\mathrm{sr}(B_1^*) = 2$.

Докажем, что $\mathrm{sr}(B_1^*) > 1$. Пусть $\mathfrak{A} \in B_1^*$. Возьмем $a,b \in \mathfrak{A}$ такие, что $\hat{a} \in B_0^*$, $\widehat{C(a)} \in B_1^*$, $\hat{b} \in B_1^*$, $\widehat{C(b)} \in B_0^*$. Тогда $(\hat{a},1) \equiv^1 (\hat{b},1)$ и $(\widehat{C(a)},1) \equiv^1 (\widehat{C(b)},1)$, и при этом $(\hat{a},1) \not\equiv^2 (\hat{b},1)$.

Докажем теперь, что $\mathrm{sr}(\mathfrak{A}) \leqslant 2$. Пусть $a,b \in \mathfrak{A}$, $(\hat{a},1) \equiv^2 (\hat{b},1)$ и $(\widehat{C(a)},1) \equiv^2 (\widehat{C(b)},1)$. Докажем, что $(\mathfrak{A},a) \equiv^3 (\mathfrak{A},b)$.

(6.1) $a = 0$. Тогда $b = 0$, $\widehat{C(a)}, \widehat{C(b)} \in B_1^*$, $(\hat{a},1) \equiv^3 (\hat{b},1)$ и $(\widehat{C(a)},1) \equiv^3 (\widehat{C(b)},1)$.

(6.2) $\hat{a} \cong \mathfrak{B}_1$. Тогда $\hat{b} \cong \mathfrak{B}_1$, $\widehat{C(a)}, \widehat{C(b)} \in B_0^*$. Отсюда следует нужное.

(6.3) $C(a) = 0$ или $\widehat{C(a)} \cong \mathfrak{B}_1$. Разбирается аналогично.

(6.4) $b = 0$, $C(b) = 0$, $\hat{b} \cong \mathfrak{B}_1$, $\widehat{C(b)} \cong \mathfrak{B}_1$. Рассматривается аналогично.

(6.5) $\hat{a} \in B_0^*$ и $\widehat{C(a)} \in B_1^*$. Для $\hat{b}$ существует два варианта: $\hat{b} \in B_0^*$ или $\hat{b} \in B_1^*$. Но второе невозможно в силу $(\hat{a},1) \equiv^2 (\hat{b},1)$. Отсюда $\hat{b} \in B_0^*$. Тогда $\widehat{C(b)} \in B_1^*$, и аналогично предыдущему выводим нужное.

(6.6) $\hat{a} \in B_1^*$ и $\widehat{C(a)} \in B_0^*$. Рассматривается аналогично.

(7) $\mathrm{sr}(B_2^*) = 2$.

Докажем, что $\mathrm{sr}(B_2^*) > 1$. Пусть $\mathfrak{A} \in B_2^*$, возьмем $a \in \mathfrak{A}$ такой, что $\hat{a} \in B_2^*$ и $\widehat{C(a)} \in B_0^*$, и $b \in \mathfrak{A}$ такой, что $\hat{b} \in B_0^*$ и $\widehat{C(b)} \in B_2^*$. Тогда $(\hat{a},1) \equiv^1 (\hat{b},1)$ и $(\widehat{C(a)},1) \equiv^1 (\widehat{C(b)},1)$, но $(\hat{a},1) \not\equiv^2 (\hat{b},1)$, что и требовалось.

Докажем, что $\mathrm{sr}(B_2^*) \leqslant 2$. Пусть $a,b \in \mathfrak{A} \in B_2^*$ и $(\hat{a},1) \equiv^2 (\hat{b},1)$ и $(\widehat{C(a)},1) \equiv^2 (\widehat{C(b)},1)$. Докажем, что $(\mathfrak{A},a) \equiv^3 (\mathfrak{A},b)$

(7.1) $a = 0$. Тогда $b = 0$, $\widehat{C(a)}, \widehat{C(b)} \in B_2^*$. Получаем, что $(\hat{a},1) \equiv^3 (\hat{b},1)$ и $(\widehat{C(a)},1) \equiv^3 (\widehat{C(b)},1)$.

(7.2) $\hat{a} \cong \mathfrak{B}_1$. Тогда $\hat{b} \cong \mathfrak{B}_1$, $\widehat{C(a)}, \widehat{C(b)} \in B_1^*$ — вновь нужное.

(7.3) $\hat{a} \cong \mathfrak{B}_2$. Тогда $\hat{b} \cong \mathfrak{B}_2$, $\widehat{C(a)}, \widehat{C(b)} \in B_0^*$ — аналогично.

(7.4) $\widehat{C(a)} \cong \mathfrak{B}_j$, или $\hat{b} \cong \mathfrak{B}_j$, или $\widehat{C(b)} \cong \mathfrak{B}_j$ для $j = 0,1,2$. Разбираются аналогично.

Пусть в дальнейшем условия (7.1)–(7.4) не выполняются.

(7.5) $\hat{a} \in B_0^*$, $\hat{b} \in B_j^*$ для $j = 0,1,2 \Rightarrow j = 0$, $\widehat{C(a)}, \widehat{C(b)} \in B_2^*$. Выводим аналогично предыдущему.

(7.6) $\hat{a} \in B_1^*$, $\hat{b} \in B_j^*$ для $j = 0,1,2 \Rightarrow j \neq 0$. Если $j = 2$, то $\widehat{C(b)} \in B_0^* \Rightarrow \widehat{C(a)} \in B_0^*$ — противоречие. Значит, $\hat{b} \in B_1^*$. Отсюда $\widehat{C(a)}, \widehat{C(b)} \in B_1^*$, что нам и нужно.

(7.7) $\widehat{C(a)} \in B_0^*$. Разбирается аналогично.

(8) При $k \geqslant 3$ $\operatorname{sr}(B_k^*) = [\log_2(k+7)]$.

Пусть $n = [\log_2(k+7)]$. Тогда

$$n \geqslant 3,\ n \leqslant \log_2(k+7) < n+1 \Leftrightarrow 2^n \leqslant k+7 < 2^{n+1} \Leftrightarrow 2^n - 7 \leqslant k \leqslant 2^{n+1} - 8.$$

Докажем, что $\operatorname{sr}(B_k^*) \leqslant n$. Пусть $\mathfrak{A} \in B_k^*$, $a, b \in \mathfrak{A}$, $(\hat{a}, 1) \equiv^n (\hat{b}, 1)$ и $(\widehat{C(a)}, 1) \equiv^n (\widehat{C(b)}, 1)$. Докажем, что $(\mathfrak{A}, a) \equiv^{n+1} (\mathfrak{A}, b)$.

(8.1) $\hat{a} \cong \mathfrak{B}_j$, $j \in [0, 2^n - 1]$. Тогда $\hat{b} \cong \mathfrak{B}_j$, $\widehat{C(a)}, \widehat{C(b)} \in B_{k-j}^*$. Отсюда $(\hat{a}, 1) \cong (\hat{b}, 1)$ и $(\widehat{C(a)}, 1) \equiv^{n+1} (\widehat{C(b)}, 1)$.

(8.2) $\hat{a}$ атомная, и в $\hat{a}$ не менее 2^n атомов. Тогда $\widehat{C(a)} \in B_j^*$, где $j \in [0, 2^n - 6]$ $\Rightarrow \widehat{C(b)} \in B_j^*$ (так как в $\widehat{C(a)}$ есть j атомов и нет $j+1 \leqslant 2^n - 5 \Rightarrow$ в $\widehat{C(b)}$ также) $\Rightarrow \hat{a}, \hat{b} \in B_{k-j} \Rightarrow (\hat{a}, 1) \cong (\hat{b}, 1)$ и $(\widehat{C(a)}, 1) \equiv^{n+1} (\widehat{C(b)}, 1)$.

(8.3) $\widehat{C(a)}$ атомная и либо $\widehat{C(a)} \cong \mathfrak{B}_j$, $j \in [0, 2^n - 1]$, либо $\widehat{C(a)}$ содержит не менее 2^n атомов. Разбирается аналогично.

(8.4) $\hat{a} \in B_{j_1}^*$, $\widehat{C(a)} \in B_{j_2}^*$, $j_1 + j_2 = k$. Тогда $\hat{b}$ и $\widehat{C(b)}$ не атомные, $\hat{b} \in B_{i_1}^*$, $\widehat{C(b)} \in B_{i_2}^*$, $i_1 + i_2 = k$. Если $j_1 \in [0, 2^n - 5]$, то $j_1 = i_1 \Rightarrow j_2 = i_2$. Отсюда $(\hat{a}, 1) \equiv^{n+1} (\hat{b}, 1)$ и $(\widehat{C(a)}, 1) \equiv^{n+1} (\widehat{C(b)}, 1)$. Если $j_1 > 2^n - 4$, то $j_2 < 2^n - 4$. Далее рассуждаем так же, как и выше. Если j_2, i_1 или i_2 больше либо меньше $2^n - 4$, то ситуация вновь аналогичная. Остается случай $j_1 = j_2 = i_1 = i_2$, для которого очевидно, что $(\hat{a}, 1) \equiv^{n+1} (\hat{b}, 1)$ и $(\widehat{C(a)}, 1) \equiv^{n+1} (\widehat{C(b)}, 1)$.

Докажем, что $\operatorname{sr}(\mathfrak{A}) > n - 1$.

(8.1)′ $n = 3$. Возьмем $a, b \in \mathfrak{A}$ такие, что $\hat{a} \in B_1^*$, $\hat{b} \in B_2^*$, $\widehat{C(a)} \in B_{k-1}^*$, $\widehat{C(b)} \in B_{k-2}^*$. Тогда

$$(\hat{a}, 1) \equiv^2 (\hat{b}, 1),\ (\widehat{C(a)}, 1) \equiv^2 (\widehat{C(b)}, 1),\ (\hat{a}, 1) \not\equiv^3 (\hat{b}, 1)$$
$$\Rightarrow (\mathfrak{A}, a) \equiv^2 (\mathfrak{A}, b),\ (\mathfrak{A}, a) \not\equiv^3 (\mathfrak{A}, b) \Rightarrow \operatorname{sr}(\mathfrak{A}) > 2.$$

(8.2)′ $n \geqslant 4$. Возьмем $a, b \in \mathfrak{A}$ такие, что $\hat{a} \in B_{j_1}^*$, $\widehat{C(a)} \in B_{k-j_1}^*$, $\hat{b} \in B_{j_2}^*$ $\widehat{C(b)} \in B_{k-j_2}^*$, где $j_1 = 2^{n-1} - 4$, $j_2 = 2^{n-1} - 3$. Тогда

$$2^{n-1} - 4 \leqslant (k - j_1), (k - j_2) \Rightarrow (\hat{a}, 1) \equiv^{n-1} (\hat{b}, 1),$$
$$(\widehat{C(a)}, 1) \equiv^{n-1} (\widehat{C(b)}, 1),\ (\hat{a}, 1) \not\equiv^n (\hat{b}, 1) \Rightarrow \operatorname{sr}(\mathfrak{A}) > n - 1. \quad \blacksquare$$

§ 3. Ранги бесконечных алгебр

Из леммы 11 можно вывести одно следствие. Его следовало ожидать, так как в теории булевых алгебр всякая бесконечная формула конечного ранга эквивалентна конечной формуле, но в этой работе это не доказывается.

15. *Лемма.* *Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ — БА. Тогда ($\mathfrak{A} \equiv^\omega \mathfrak{B} \Leftrightarrow \operatorname{ch}(\mathfrak{A}) = \operatorname{ch}(\mathfrak{B})$).*

□ ($\Leftarrow$) Пусть $\operatorname{ch}(\mathfrak{A}) = \operatorname{ch}(\mathfrak{B})$.

1. $\operatorname{ch}_1(\mathfrak{A}) = m \in \omega$. Тогда $m = \operatorname{ch}_1(\mathfrak{B})$ и для любого $l < m$ $\mathfrak{A}/I_l(\mathfrak{A})$, $\mathfrak{B}/I_l(\mathfrak{B})$ содержит ненулевой безатомный элемент и бесконечное количество атомов. Отсюда для любого $k \in \omega$

$$(\mathfrak{A}, 1) \equiv^{k+4\cdot m} (\mathfrak{B}, 1) \Leftrightarrow (\mathfrak{A}/I_1(\mathfrak{A}), 1) \equiv^{k+4\cdot(m-1)} (\mathfrak{B}/I_1(\mathfrak{B}), 1)$$
$$\Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow (\mathfrak{A}/I_m(\mathfrak{A}), 1) \equiv^k (\mathfrak{B}/I_m(\mathfrak{B}), 1).$$

Пусть $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}/I_m(\mathfrak{A})$, $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}/I_m(\mathfrak{B})$. Получаем $\mathfrak{A} \equiv^\omega \mathfrak{B} \Leftrightarrow (\mathfrak{A}, 1) \equiv^\omega (\mathfrak{B}, 1)$ $\Leftrightarrow$ для любого $k \in \omega$ $(\mathfrak{A}, 1) \equiv^k (\mathfrak{B}, 1) \Leftrightarrow$ для любого $k \in \omega$ $(\mathfrak{A}', 1) \equiv^k (\mathfrak{B}', 1)$, $\mathfrak{A}'/I(\mathfrak{A}') \cong \mathfrak{B}_0 \cong \mathfrak{B}'/I(\mathfrak{B}') \Rightarrow$ (по лемме 11) для любого $k \in \omega$ $(\mathfrak{A}', 1) \equiv^k (\mathfrak{B}', 1)$ $\Leftrightarrow \mathrm{ch}_2(\mathfrak{A}') = \mathrm{ch}_2(\mathfrak{B}')$ и $\mathrm{ch}_3(\mathfrak{A}') = \mathrm{ch}_3(\mathfrak{B}')$, так как $\mathrm{ch}_j(\mathfrak{A}) = \mathrm{ch}_j(\mathfrak{A}')$ для $j = 2, 3$. Аналогично для $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}'$.

2. $\mathrm{ch}_1(\mathfrak{A}) = \mathrm{ch}_1(\mathfrak{B}) = \infty$. Тогда для любого $m \in \omega$ и любого $i = 0, \ldots, 3$ $(\mathfrak{A}/I_m(\mathfrak{A}), 1) \equiv^i (\mathfrak{B}/I_m(\mathfrak{B}), 1)$. По лемме 11 аналогично предыдущему заключаем, что для любого $m \in \omega$ и любого $i = 0, \ldots, 3$ $(\mathfrak{A}, 1) \equiv^{4\cdot m+i} (\mathfrak{B}, 1)$.

$(\Rightarrow)$ Пусть $\mathfrak{A} \equiv^\omega \mathfrak{B}$. Пусть $m = \min\{\mathrm{ch}_1(\mathfrak{A}), \mathrm{ch}_1(\mathfrak{B})\}$ и для определенности $m = \mathrm{ch}_1(\mathfrak{A})$. Рассмотрим сначала случай, когда $m \in \omega$. Тогда, как отмечалось ранее, $(\mathfrak{A}/I_{m+1}(\mathfrak{A}), 1) \equiv^\omega (\mathfrak{B}/I_{m+1}(\mathfrak{B}), 1)$, но $\mathfrak{A}/I_{m+1}(\mathfrak{A}) \cong \mathfrak{B}_0 \Rightarrow \mathfrak{B}/I_{m+1}(\mathfrak{B}) \cong \mathfrak{B}_0 \Rightarrow \mathrm{ch}_1(\mathfrak{B}) \leqslant m \Rightarrow \mathrm{ch}_1(\mathfrak{B}) = m = \mathrm{ch}_1(\mathfrak{A})$. Имея $(\mathfrak{A}/I_m(\mathfrak{A}), 1) \equiv^\omega (\mathfrak{B}/I_m(\mathfrak{B}), 1)$ и рассуждая аналогично предыдущему, получаем, что $\mathrm{ch}_j(\mathfrak{A}) = \mathrm{ch}_j(\mathfrak{B})$ для $j = 2, 3$. Если $m = \infty$, то $\mathrm{ch}_1(\mathfrak{B}) = \infty$, и доказывать нечего. ■

16. Лемма. *Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ — БА, α, γ — ординалы. Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ α-атомные, $\mathfrak{A}/F_\alpha(\mathfrak{A}) \not\cong \mathfrak{B}_0$, $\mathfrak{B}/F_\alpha(\mathfrak{B}) \not\cong \mathfrak{B}_0$. Тогда*

$$(\mathfrak{A}, 1) \equiv^{\omega\cdot\alpha+\gamma} (\mathfrak{B}, 1) \Leftrightarrow (\mathfrak{A}/F_\alpha(\mathfrak{A}), 1) \equiv^\gamma (\mathfrak{B}/F_\alpha(\mathfrak{B}), 1).$$

□ Доказывать будем индукцией по парам ординалов (α, γ), где $(\alpha_1, \gamma_1) \leqslant (\alpha_2, \gamma_2) \Leftrightarrow \alpha_1 < \alpha_2$ или $\alpha_1 = \alpha_2$ и $\gamma_1 \leqslant \gamma_2$. Очевидно, что если утверждение неверно для какой-то пары, то существует наименьшая пара, для которой оно неверно, и тем самым индукция возможна.

1. Для пар $(0, \gamma)$ лемма очевидна.

2. Пусть λ — предельный ординал и лемма верна для любых $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и пар, меньших $(\lambda, 0)$. Докажем ее для $(\lambda, 0)$. $(\mathfrak{A}, 1) \equiv^{\omega\cdot\lambda} (\mathfrak{B}, 1) \Leftrightarrow$ для любого $\beta < \lambda$ $(\mathfrak{A}, 1) \equiv^{\omega\cdot\beta} (\mathfrak{B}, 1)$. $F_\beta(\mathfrak{A}) \subseteq F_\lambda(\mathfrak{A}) \Rightarrow$ для любого $\beta < \lambda$ $\mathfrak{A}/F_\beta(\mathfrak{A}) \not\cong \mathfrak{B}_0$, аналогично для $\mathfrak{B}/F_\beta(\mathfrak{B}) \Rightarrow$ по предположению индукции $(\mathfrak{A}, 1) \equiv^{\omega\cdot\lambda} (\mathfrak{B}, 1) \Leftrightarrow$ для любого $\beta < \lambda$ $(\mathfrak{A}/F_\beta(\mathfrak{A}), 1) \equiv^0 (\mathfrak{B}/F_\beta(\mathfrak{B}), 1)$, а это верно по лемме 11, и из нее также следует, что $(\mathfrak{A}/F_\lambda(\mathfrak{A}), 1) \equiv^0 (\mathfrak{B}/F_\lambda(\mathfrak{B}), 1) \Rightarrow$ эквивалентность есть.

3. Пусть лемма верна для пар, меньших $(\alpha+1, 0)$. Докажем ее для $(\alpha+1, 0)$. Как замечено выше, $\mathfrak{A}/F_{\alpha+1}(\mathfrak{A}) \not\cong \mathfrak{B}_0 \Rightarrow \mathfrak{A}/F_\alpha(\mathfrak{A}) \not\cong \mathfrak{B}_0$. Аналогично для $\mathfrak{B}/F_\alpha(\mathfrak{B})$. $(\mathfrak{A}, 1) \equiv^{\omega\cdot(\alpha+1)} (\mathfrak{B}, 1) \Leftrightarrow (\mathfrak{A}, 1) \equiv^{\omega\cdot\alpha+\omega} (\mathfrak{B}, 1) \Leftrightarrow$ для любого $k \in \omega$ $(\mathfrak{A}, 1) \equiv^{\omega\cdot\alpha+k} (\mathfrak{B}, 1) \Leftrightarrow$ (по предположению индукции) для любого $k \in \omega$ $(\mathfrak{A}/F_\alpha(\mathfrak{A}), 1) \equiv^k (\mathfrak{B}/F_\alpha(\mathfrak{B}), 1) \Leftrightarrow (\mathfrak{A}/F_\alpha(\mathfrak{A}), 1) \equiv^\omega (\mathfrak{B}/F_\alpha(\mathfrak{B}), 1)$. Имеем: $\mathfrak{A}/F_\alpha(\mathfrak{A})$ — атомная БА. Если в ней число атомов конечно, то $\mathfrak{A}/F_{\alpha+1}(\mathfrak{A}) \cong \mathfrak{B}_0$, а это не так, значит, в ней бесконечное число атомов. Аналогично для $\mathfrak{B}/F_\alpha(\mathfrak{B})$ $\Rightarrow$ (по лемме 15) $(\mathfrak{A}/F_\alpha(\mathfrak{A}), 1) \equiv^\omega (\mathfrak{B}/F_\alpha(\mathfrak{B}), 1) \Rightarrow (\mathfrak{A}, 1) \equiv^{\omega\cdot(\alpha+1)} (\mathfrak{B}, 1)$. Кроме того, по лемме 11 $(\mathfrak{A}/F_{\alpha+1}(\mathfrak{A}), 1) \equiv^0 (\mathfrak{B}/F_{\alpha+1}(\mathfrak{B}), 1) \Rightarrow$ эквивалентность есть.

4. Пусть лемма верна для всех пар, меньших (α, λ), где $\lambda \neq 0$ — предельный ординал. $(\mathfrak{A}, 1) \equiv^{\omega\cdot\alpha+\lambda} (\mathfrak{B}, 1) \Leftrightarrow$ для всех $\beta < \lambda$ $(\mathfrak{A}, 1) \equiv^{\omega\cdot\alpha+\beta} (\mathfrak{B}, 1) \Leftrightarrow$ (по предположению индукции) для любых $\beta < \lambda$ $(\mathfrak{A}/F_\alpha(\mathfrak{A}), 1) \equiv^\beta (\mathfrak{B}/F_\alpha(\mathfrak{B}), 1) \Leftrightarrow$ $(\mathfrak{A}/F_\alpha(\mathfrak{A}), 1) \equiv^\lambda (\mathfrak{B}/F_\alpha(\mathfrak{B}), 1)$.

5. Пусть лемма верна для (α, γ) и всех меньших пар. Докажем ее для $(\alpha, \gamma+1)$. $(\mathfrak{A}, 1) \equiv^{\omega\cdot\alpha+\gamma+1} (\mathfrak{B}, 1) \Leftrightarrow$ (по лемме 2) $\forall a \in \mathfrak{A} \exists b \in \mathfrak{B}[(\hat{a}, 1) \equiv^{\omega\cdot\alpha+\gamma} (\hat{b}, 1) \& (\widehat{C(a)}, 1) \equiv^{\omega\cdot\alpha+\gamma} (\widehat{C(b)}, 1)]$ и $\forall b \in \mathfrak{B} \exists a \in \mathfrak{A}[(\hat{a}, 1) \equiv^{\omega\cdot\alpha+\gamma} (\hat{b}, 1) \& (\widehat{C(a)}, 1) \equiv^{\omega\cdot\alpha+\gamma} (\widehat{C(b)}, 1)]$. Аналогично $(\mathfrak{A}/F_\alpha(\mathfrak{A}), 1) \equiv^{\gamma+1} (\mathfrak{B}/F_\alpha(\mathfrak{B}), 1) \Leftrightarrow \forall a \in \mathfrak{A} \exists b \in \mathfrak{B}[(\widehat{a/F_\alpha(\mathfrak{A})}, 1) \equiv^\gamma (\widehat{b/F_\alpha(\mathfrak{B})}, 1) \& (\widehat{C(a)/F_\alpha(\mathfrak{A})}, 1) \equiv^\gamma (\widehat{C(b)/F_\alpha(\mathfrak{B})}, 1)]$ и $\forall b \in \mathfrak{B}$ $\exists a \in \mathfrak{A}[\ldots]$. Докажем эквивалентность этих утверждений.

$(\Rightarrow)$ Пусть $(\mathfrak{A}, 1) \equiv^{\omega\cdot\alpha+\gamma+1} (\mathfrak{B}, 1)$, $a \in \mathfrak{A}$ — произвольный элемент. (Докажем первый член конъюнкции, для второго все аналогично.) Если $a/F_\alpha(\mathfrak{A}) = 0$, то положим $b = 0$. Тогда $\widehat{a/F_\alpha(\mathfrak{A})} \cong \mathfrak{B}_0 \cong \widehat{b/F_\alpha(\mathfrak{B})}$. В дальнейшем в доказательстве леммы 16 будем неявно использовать лемму 10: $\mathfrak{A}$ — БА, $a \in \mathfrak{A}$, α — ординал $\Rightarrow \hat{a}/F_\alpha(\hat{a}) \cong \widehat{a/F_\alpha(\mathfrak{A})}$.

Имеем

$$C(a)/F_\alpha(\mathfrak{A}) = 1_{\mathfrak{A}}/F_\alpha(\mathfrak{A}), \quad C(b)/F_\alpha(\mathfrak{A}) = 1_{\mathfrak{B}}/F_\alpha(\mathfrak{B}).$$

По предположению индукции

$$(\mathfrak{A}/F_\alpha(\mathfrak{A}), 1) \equiv^\gamma (\mathfrak{B}/F_\alpha(\mathfrak{B}), 1)$$
$$\Rightarrow (\widehat{C(a)/F_\alpha}(\mathfrak{A}), 1) \cong (\mathfrak{A}/F_\alpha(\mathfrak{A}), 1) \equiv^\gamma (\mathfrak{B}/F_\alpha(\mathfrak{B}), 1) \cong (\widehat{C(b)/F_\alpha}(\mathfrak{B}), 1).$$

Теперь нужные нам эквивалентности очевидны. Если $C(a)/F_\alpha(\mathfrak{A}) = 0$, то поступаем аналогично. Пусть $a/F_\alpha(\mathfrak{A}) \neq 0$ и $C(a)/F_\alpha(\mathfrak{A}) \neq 0$. По лемме 2 существует $b \in \mathfrak{B}$ такой, что $(\hat{a}, 1) \equiv^{\omega\cdot\alpha+\gamma} (\hat{b}, 1)$ и $(\widehat{C(a)}, 1) \equiv^{\omega\cdot\alpha+\gamma} (\widehat{C(b)}, 1)$. Тогда по предположению индукции

$$(\hat{a}/F_\alpha(\hat{a}), 1) \equiv^\gamma (\hat{b}/F_\alpha(\hat{b}), 1), \quad (\widehat{C(a)}/F_\alpha(\widehat{C(a)}), 1) \equiv^\gamma (\widehat{C(b)}/F_\alpha(\widehat{C(b)}), 1).$$

Отсюда легко выводим нужные эквивалентности.

($\Leftarrow$) Пусть $(\mathfrak{A}/F_\alpha(\mathfrak{A}), 1) \equiv^{\gamma+1} (\mathfrak{B}/F_\alpha(\mathfrak{B}), 1)$, и пусть $a \in \mathfrak{A}$ произвольный. (Вновь докажем лишь первый член конъюнкции, для второго доказательство аналогично.)

1. $a/F_\alpha(\mathfrak{A}) \neq 0$, $C(a)/F_\alpha(\mathfrak{A}) \neq 0$. Существует $b \in \mathfrak{B}$ такой, что

$$\hat{a}/F_\alpha(\hat{a}), 1) \equiv^\gamma (\hat{b}/F_\alpha(\hat{b}), 1), \quad (\widehat{C(a)}/F_\alpha(\widehat{C(a)}), 1) \equiv^\gamma (\widehat{C(b)}/F_\alpha(\widehat{C(b)}), 1).$$

Так как $a/F_\alpha(\mathfrak{A}) \neq 0$, то $\hat{a}/F_\alpha(\hat{a}) \not\cong \mathfrak{B}_0 \Rightarrow \hat{b}/F_\alpha(\hat{b}) \not\cong \mathfrak{B}_0$. Аналогично для $\widehat{C(a)}$ и $\widehat{C(b)}$. Теперь по предположению индукции $(\hat{a}, 1) \equiv^{\omega\cdot\alpha+\gamma} (\hat{b}, 1)$ и $(\widehat{C(a)}, 1) \equiv^{\omega\cdot\alpha+\gamma} (\widehat{C(b)}, 1)$ — нужные эквивалентности.

2. $a/F_\alpha(\mathfrak{A}) = 0$. Тогда $C(a)/F_\alpha(\mathfrak{A}) \neq 0$ (иначе $\mathfrak{A}/F_\alpha(\mathfrak{A}) \cong \mathfrak{B}_0$). Если $a = 0$, то положим $b = 0$, и нужные эквивалентности очевидны, так как из предположения индукции следует, что $(\mathfrak{A}, 1) \equiv^{\omega\cdot\alpha+\gamma} (\mathfrak{B}, 1)$. Пусть $a \neq 0$. Тогда существует наименьший ординал β_0 такой, что $a/F_{\beta_0}(\mathfrak{A}) = 0$. Докажем, что β_0 — непредельный ординал. Предположим обратное. $a/F_0(\mathfrak{A}) \neq 0 \Rightarrow \beta_0 \neq 0$. $a/F_{\beta_0}(\mathfrak{A}) = 0 \Leftrightarrow a \in F_{\beta_0}(\mathfrak{A})$. $F_{\beta_0}(\mathfrak{A}) = \bigcup\limits_{\delta<\beta_0} F_\delta(\mathfrak{A}) \Rightarrow$ существует $\delta < \beta_0$ такой, что $a \in F_\delta(\mathfrak{A}) \Rightarrow \beta_0$ — не наименьший. Противоречие. Тем самым $\beta_0 = \beta + 1$ для некоторого β. Тогда $a/F_{\beta+1}(\mathfrak{A}) = 0$. Отсюда по определению $F_{\beta+1}(\mathfrak{A})$ $a/F_\beta(\mathfrak{A}) \in F(\mathfrak{A}/F_\beta(\mathfrak{A})) \Rightarrow a/F_\beta(\mathfrak{A})$ есть объединение k атомов $\mathfrak{A}/F_\beta(\mathfrak{A})$ для некоторого $k \in \omega$, $k \neq 0$. Имеем: $\beta < \alpha$, $\mathfrak{B}/F_\beta(\mathfrak{B})$ — атомная БА, содержащая бесконечное число атомов (если число атомов конечно, то $\mathfrak{B}/F_{\beta+1}(\mathfrak{B}) \cong \mathfrak{B}_0$ и $\beta + 1 \leqslant \alpha$ — противоречие). Можно найти такое $b \in \mathfrak{B}$, что $b/F_\beta(\mathfrak{B})$ также состоит из k атомов $\mathfrak{B}/F_\beta(\mathfrak{B})$. Тогда $\widehat{a/F_\beta(\mathfrak{A})} \cong \widehat{b/F_\beta(\mathfrak{B})}$. Отсюда для любого δ $(\widehat{a/F_\beta(\mathfrak{A})}, 1) \equiv^\delta (\widehat{b/F_\beta(\mathfrak{B})}, 1)$. Теперь по предположению индукции для любого δ

$$(\hat{a}, 1) \equiv^{\omega\cdot\beta+\delta} (\hat{b}, 1) \Rightarrow (\hat{a}, 1) \cong_p (\hat{b}, 1) \Rightarrow (\hat{a}, 1) \equiv^{\omega\cdot\alpha+\gamma} (\hat{b}, 1).$$

По лемме 3

$$\widehat{C(a)}/F_{\beta+1}(\widehat{C(a)}) \cong \mathfrak{A}/F_{\beta+1}(\mathfrak{A}) \Rightarrow \widehat{C(a)}/F_\alpha(\widehat{C(a)}) \cong \mathfrak{A}/F_\alpha(\mathfrak{A}).$$

Аналогично

$$\widehat{C(b)}/F_\alpha(\widehat{C(b)}) \cong \mathfrak{B}/F_\alpha(\mathfrak{B}) \Rightarrow (\widehat{C(a)}/F_\alpha(\widehat{C(a)}), 1) \equiv^\gamma (\widehat{C(b)}/F_\alpha(\widehat{C(b)}), 1).$$

По предположению индукции $(\widehat{C(a)}, 1) \equiv^{\omega\cdot\alpha+\gamma} (\widehat{C(b)}, 1)$. Требуемые эквивалентности получены.

3. $C(a)/F_\alpha(\mathfrak{A}) = 0$. Доказывается аналогично. ■

17. Лемма. *Пусть* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ *— α-атомные БА, γ, β — произвольные ординалы и* $(\mathfrak{A},1) \equiv^{\omega\cdot\alpha+\gamma} (\mathfrak{B},1)$. *Тогда*
1) $(\mathfrak{A}/F_\alpha(\mathfrak{A}),1) \equiv^\gamma (\mathfrak{B}/F_\alpha(\mathfrak{B}),1)$,
2) $(\mathfrak{A}/F_\alpha(\mathfrak{A}),1) \equiv^\beta (\mathfrak{B}/F_\alpha(\mathfrak{B}),1) \Rightarrow (\mathfrak{A},1) \equiv^{\omega\cdot\alpha+\beta} (\mathfrak{B},1)$.

□ 1. Если $\mathfrak{A}/F_\alpha(\mathfrak{A}) \not\cong \mathfrak{B}_0$ и $\mathfrak{B}/F_\alpha(\mathfrak{B}) \not\cong \mathfrak{B}_0$, то утверждение 1 леммы следует из леммы 16. Предположим, что $\mathfrak{A}/F_\alpha(\mathfrak{A}) \cong \mathfrak{B}_0 \Rightarrow 1_\mathfrak{A} \in F_\alpha(\mathfrak{A})$. Пусть β' — наименьший ординал такой, что $\mathfrak{A}/F_{\beta'}(\mathfrak{A}) \cong \mathfrak{B}_0$. Если $\beta' = 0$, то $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}_0$. По лемме 11 $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{B}_0$. Отсюда $\mathfrak{A}/F_\alpha(\mathfrak{A}) \cong \mathfrak{B}_0 \cong \mathfrak{B}/F_\alpha(\mathfrak{B})$. Получаем утверждение леммы. Если ординал β' не равен нулю, то он непредельный. Предположим, что β' предельный. Тогда $1_\mathfrak{A} \in F_{\beta'}(\mathfrak{A})$, $F_{\beta'}(\mathfrak{A}) = \bigcup\limits_{\delta<\beta'} F_\delta(\mathfrak{A})$. Следовательно, существует $\delta < \beta$ такой, что $1_\mathfrak{A} \in F_\delta(\mathfrak{A}) \Rightarrow \mathfrak{A}/F_\delta(\mathfrak{A}) \cong \mathfrak{B}_0$ — противоречие с минимальностью β'. Пусть $\beta' = \beta_0 + 1$. Для некоторого $k \in \omega$, $k \neq 0$

$$(\mathfrak{A}/F_{\beta_0}(\mathfrak{A}))/F(\mathfrak{A}/F_{\beta_0}(\mathfrak{A})) \cong \mathfrak{B}_0$$
$$\Rightarrow 1_\mathfrak{A}/F_{\beta_0}(\mathfrak{A}) \in F(\mathfrak{A}/F_{\beta_0}(\mathfrak{A})) \Rightarrow \mathfrak{A}/F_{\beta_0}(\mathfrak{A}) \cong \mathfrak{B}_k.$$

Если $\mathfrak{B}/F_\alpha(\mathfrak{B}) \cong \mathfrak{B}_0$, то доказывать нечего. Предположим, что $\mathfrak{B}/F_\alpha(\mathfrak{B}) \not\cong \mathfrak{B}_0$. Тогда $\mathfrak{B}/F_{\beta_0}(\mathfrak{B}) \not\cong \mathfrak{B}_0$, поскольку $\beta_0 < \alpha$. Для всякого $n \in \omega$ $(\mathfrak{A},1) \equiv^{\omega\cdot\beta_0+n} (\mathfrak{B},1)$. По лемме 16 для любого $n \in \omega$ $(\mathfrak{A}/F_{\beta_0}(\mathfrak{A}),1) \equiv^n (\mathfrak{B}/F_{\beta_0}(\mathfrak{B}),1)$. По лемме 11 $\mathfrak{A}/F_{\beta_0}(\mathfrak{A}) \cong \mathfrak{B}/F_{\beta_0}(\mathfrak{B}) \Rightarrow \mathfrak{A}/F_\alpha(\mathfrak{A}) \cong \mathfrak{B}/F_\alpha(\mathfrak{B})$. Опять пришли к противоречию. Если $\mathfrak{B}/F_\alpha(\mathfrak{B}) \cong \mathfrak{B}_0$, то рассуждаем аналогично.

2. Если $\mathfrak{A}/F_\alpha(\mathfrak{A}) \not\cong \mathfrak{B}_0$ и $\mathfrak{B}/F_\alpha(\mathfrak{B}) \not\cong \mathfrak{B}_0$, то утверждение 2 леммы следует из леммы 16. Предположим, что $\mathfrak{A}/F_\alpha(\mathfrak{A}) \cong \mathfrak{B}_0$. Если $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}_0$, то по лемме 11 $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{B}_0$ и доказывать нечего. Предположим, что $\mathfrak{A} \not\cong \mathfrak{B}_0$. Найдем минимальный ординал δ такой, что $\mathfrak{A}/F_\delta(\mathfrak{A}) \cong \mathfrak{B}_0$. Как показано в доказательстве утверждения 1, в этом случае $\delta = \delta_0 + 1$ и $\mathfrak{A}/F_{\delta_0}(\mathfrak{A}) \cong \mathfrak{B}_k$ для некоторого $k \in \omega$, $k \neq 0$. Поскольку $\delta_0 < \alpha$, по п. 1 для любого $n \in \omega$ $(\mathfrak{A}/F_{\delta_0}(\mathfrak{A}),1) \equiv^n (\mathfrak{B}/F_{\delta_0}(\mathfrak{B}),1)$, так как для любого $n \in \omega$ $(\mathfrak{A},1) \equiv^{\omega\cdot\delta_0+n} (\mathfrak{B},1)$. По лемме 11 $\mathfrak{B}/F_{\delta_0}(\mathfrak{B}) \cong \mathfrak{B}_k$. Тем самым имеем $\mathfrak{A}/F_{\delta_0}(\mathfrak{A}) \not\cong \mathfrak{B}_0$, $\mathfrak{B}/F_{\delta_0}(\mathfrak{B}) \not\cong \mathfrak{B}_0$ и для любого δ $(\mathfrak{A}/F_{\delta_0}(\mathfrak{A}),1) \equiv^\delta (\mathfrak{B}/F_{\delta_0}(\mathfrak{B}),1)$. Тогда по лемме 16 для любого δ $(\mathfrak{A},1) \equiv^\delta (\mathfrak{B},1)$, и мы получили нужную эквивалентность. ■

В [2] доказан факт: если $\mathfrak{M}$ — модель языка $\mathscr{L}'$, $\mathrm{sr}(\mathfrak{M}) = \alpha$, то существует бесконечное предложение θ языка $\mathscr{L}'$, $\mathrm{qr}(\theta) \leqslant \alpha + \omega$, такое, что для любой модели $\mathfrak{N}$ языка $\mathscr{L}'$ $\mathfrak{N} \models \theta \Rightarrow \mathfrak{M} \cong_p \mathfrak{N}$. Тем самым для любой $\mathfrak{N}$ $\mathfrak{M} \equiv^{\alpha+\omega} \mathfrak{N} \Rightarrow \mathfrak{M} \cong_p \mathfrak{N}$. Для булевых алгебр достаточно эквивалентности $\equiv^{\alpha+2}$, что доказывается ниже. Если рассмотреть $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_3$, то будем иметь $\mathrm{sr}(\mathfrak{A}) = 0$ (по теореме 14), $\mathfrak{A} \equiv^1 \mathfrak{B}$ (по лемме 11), но $\mathfrak{A} \not\cong_p \mathfrak{B}$. Тем самым эквивалентности $\equiv^{\alpha+1}$ недостаточно.

18. Предложение. *Пусть* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ *— БА,* $\mathrm{sr}(\mathfrak{A}) \leqslant \alpha$, $\mathfrak{A} \equiv^{\alpha+2} \mathfrak{B}$. *Тогда* $\mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$.

□ Докажем сначала вспомогательное утверждение. Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ — БА, $\mathrm{sr}(\mathfrak{A}) \leqslant \alpha$, $\mathfrak{A} \equiv^{\alpha+2} \mathfrak{B}$, тогда для любых $\bar{a} \in \mathfrak{A}$, $\bar{b} \in \mathfrak{B}$

$$(\mathfrak{A},\bar{a}) \equiv^\alpha (\mathfrak{B},\bar{b}) \Rightarrow (\mathfrak{A},\bar{a}) \equiv^{\alpha+1} (\mathfrak{B},\bar{b}).$$

Пусть $\bar{a} = (a_1,\ldots,a_k) \in \mathfrak{A}$, $\bar{b} = (b_1,\ldots,b_k) \in \mathfrak{B}$ и $(\mathfrak{A},\bar{a}) \equiv^\alpha (\mathfrak{B},\bar{b})$. Это эквивалентно тому, что $(\mathfrak{A},B(\bar{a})) \equiv^\alpha (\mathfrak{B},B(\bar{b}))$. Нам надо доказать, что $(\mathfrak{A},\bar{a}) \equiv^{\alpha+1} (\mathfrak{B},\bar{b})$, а это, в свою очередь, эквивалентно $(\mathfrak{A},B(\bar{a})) \equiv^{\alpha+1} (\mathfrak{B},B(\bar{b}))$. Поэтому сразу будем считать, что $\bar{a}$ — разбиение единицы в $\mathfrak{A}$, $\bar{b}$ — разбиение единицы в $\mathfrak{B}$. Поскольку $(\mathfrak{A},\bar{a}) \equiv^\alpha (\mathfrak{B},\bar{b})$, для любого $i = 1,\ldots,k$ $(\hat{a}_i,1) \equiv^\alpha (\hat{b}_i,1)$. Докажем, что для $\mathfrak{M} = (\mathfrak{A},\bar{a})$ и $\mathfrak{N} = (\mathfrak{B},\bar{b})\mathfrak{M} \equiv^{\alpha+1} \mathfrak{N}$, т. е. верно:

$$\forall x \in \mathfrak{M} \exists y \in \mathfrak{N} (\mathfrak{M},x) \equiv^\alpha (\mathfrak{N},y) \& \forall y \in \mathfrak{N} \exists x \in \mathfrak{M} (\mathfrak{M},x) \equiv^\alpha (\mathfrak{N},y).$$

Пусть $x \in \mathfrak{A}$ — произвольный элемент. Тогда $x = x_1 \cup \dots \cup x_k$, $x_i = x \cap a_i$, $x_i \in \hat{a}_i$. Рассуждения ведем для некоторого $i \in [1, k]$. $\mathfrak{A} \equiv^{\alpha+2} \mathfrak{B}$, $b_i \in \mathfrak{B}$ $\Rightarrow$ существует $a_i^* \in \mathfrak{A}$ такой, что $(\mathfrak{A}, a_i^*) \equiv^{\alpha+1} (\mathfrak{B}, b_i)$. $(\mathfrak{A}, a_i) \equiv^{\alpha} (\mathfrak{B}, b_i) \Rightarrow$ $(\mathfrak{A}, a_i^*) \equiv^{\alpha} (\mathfrak{A}, a_i)$; $\mathrm{sr}(\mathfrak{A}) \leqslant \alpha \Rightarrow (\mathfrak{A}, a_i^*) \equiv^{\alpha+1} (\mathfrak{A}, a_i)$. $x \in \mathfrak{A} \Rightarrow$ существует $x_i^* \in \mathfrak{A}$ такой, что $(\mathfrak{A}, a_i^*, x_i^*) \equiv^{\alpha} (\mathfrak{A}, a_i, x_i)$. $x_i^* \in \mathfrak{A}$, $(\mathfrak{A}, a_i^*) \equiv^{\alpha+1} (\mathfrak{B}, b_i)$ $\Rightarrow$ существует $y_i \in \mathfrak{B}$ такой, что $(\mathfrak{A}, a_i^*, x_i^*) \equiv^{\alpha} (\mathfrak{B}, b_i, y_i) \Rightarrow (\mathfrak{A}, a_i, x_i) \equiv^{\alpha}$ $(\mathfrak{B}, b_i, y_i)$. $B(a_i, x_i) = (C(a_i), a_i \setminus x_i, 0, x_i)$, $B(b_i, y_i)$ — аналогично $\Rightarrow$ (по лемме 1) $(\widehat{a_i \setminus x_i}, 1) \equiv^{\alpha} (\widehat{b_i \setminus y_i}, 1)$ и $(\hat{x}_i, 1) \equiv^{\alpha} (\hat{y}_i, 1)$ для произвольного $i = 1, \dots, k \Rightarrow$ (по лемме 1) $(\mathfrak{A}, a_1 \setminus x_1, x_1, \dots, a_k \setminus x_k, x_k) \equiv^{\alpha} (\mathfrak{B}, b_1 \setminus y_1, y_1, \dots, b_k \setminus y_k, y_k)$. Очевидно, что обогащения $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — это с точностью до перестановки и выкидывания 0 и 1 $(\mathfrak{A}, B(\bar{a}, x))$ и $(\mathfrak{B}, B(\bar{b}, y))$ соответственно, где $y = y_1 \cup \dots \cup y_k \Rightarrow$ $(\mathfrak{A}, \bar{a}, x) \equiv^{\alpha} (\mathfrak{B}, \bar{b}, y)$. Итак, искомый y найден. Пусть теперь $y \in \mathfrak{B}$ — произвольный элемент, $y = y_1 \cup \dots \cup y_k$, $y_i = y \cap b_i$, $y_i \in \hat{b}_i$, $i = 1, \dots, k$. Рассуждения ведем для некоторого $i \in [1, k]$. $\mathfrak{A} \equiv^{\alpha+2} \mathfrak{B}$, $b_i \in \mathfrak{B} \Rightarrow$ существует $a_i^* \in \mathfrak{A}$ такой, что $(\mathfrak{A}, a_i^*) \equiv^{\alpha+1} (\mathfrak{B}, b_i)$, $(\mathfrak{B}, b_i) \equiv^{\alpha} (\mathfrak{A}, a_i) \Rightarrow (\mathfrak{A}, a_i) \equiv^{\alpha} (\mathfrak{A}, a_i^*)$. $\mathrm{sr}(\mathfrak{A}) \leqslant \alpha \Rightarrow (\mathfrak{A}, a_i) \equiv^{\alpha+1} (\mathfrak{A}, a_i^*)$. $y_i \in \mathfrak{B} \Rightarrow$ существует $x_i^* \in \mathfrak{A}$ такой, что $(\mathfrak{A}, a_i^*, x_i^*) \equiv^{\alpha} (\mathfrak{B}, b_i, y_i)$. $x_i^* \in \mathfrak{A} \Rightarrow$ существует $x_i \in \mathfrak{A}$ такой, что $(\mathfrak{A}, a_i^*, x_i^*) \equiv^{\alpha}$ $(\mathfrak{A}, a_i, x_i) \Rightarrow (\mathfrak{A}, a_i, x_i) \equiv^{\alpha} (\mathfrak{B}, b_i, y_i)$. Далее аналогично предыдущему, если положить $x = x_1 \cup \dots \cup x_k$, получим, что $(\mathfrak{A}, \bar{a}, x) \equiv^{\alpha} (\mathfrak{B}, \bar{b}, y)$. Тем самым мы доказали, что $(\mathfrak{A}, \bar{a}) \equiv^{\alpha+1} (\mathfrak{B}, \bar{b})$.

Докажем теперь основное утверждение. Определим F такой, что $F : \mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$. Положим F равным $\{f$: существуют $k \in \omega$, $a_1, \dots, a_k$ — разбиение единицы в $\mathfrak{A}$, $b_1, \dots, b_k$ — разбиение единицы в $\mathfrak{B}$, такие, что $f : \mathfrak{A}[a_1, \dots, a_k] \cong \mathfrak{B}[b_1, \dots, b_k]$, $f(a_i) = b_i$ при $i = 1, \dots, k$ и $(\mathfrak{A}, \bar{a}) \equiv^{\alpha} (\mathfrak{B}, \bar{b})\}$. F не пусто, так как $f : \mathfrak{A}[1_{\mathfrak{A}}] \to \mathfrak{B}[1_{\mathfrak{B}}]$ принадлежит F в силу $(\mathfrak{A}, 1) \equiv^{\alpha+2} (\mathfrak{B}, 1)$. Нетрудно проверить, что F удовлетворяет всем свойствам из определения $\cong_p$. Пусть $f \in F$, $x \in \mathfrak{A}$. Тогда $f : \mathfrak{A}[a_1, \dots, a_k] \cong \mathfrak{B}[b_1, \dots, b_k]$, $(\mathfrak{A}, \bar{a}) \equiv^{\alpha} (\mathfrak{B}, \bar{b})$. По доказанному выше $(\mathfrak{A}, \bar{a}) \equiv^{\alpha+1} (\mathfrak{B}, \bar{b})$. Значит существует $y \in \mathfrak{B}$ такой, что $(\mathfrak{A}, \bar{a}, x) \equiv^{\alpha} (\mathfrak{B}, \bar{b}, y)$. Отсюда $(\mathfrak{A}, B(\bar{a}, x)) \equiv^{\alpha} (\mathfrak{B}, B(\bar{b}, y))$ и $f : \mathfrak{A}[B(\bar{a}, x)] \cong \mathfrak{B}[B(\bar{b}, y)]$. Мы получили искомое расширение, так как очевидно, что $x \in \mathfrak{A}[B(\bar{a}, x)]$. Если $y \in \mathfrak{B}$ — произвольный элемент, то продолжение находим аналогичным образом. ■

19. Теорема. *Пусть $\mathfrak{A}$ — α-атомная БА, α — ординал, $\mathfrak{A}/F_\alpha(\mathfrak{A}) \not\cong \mathfrak{B}_0$. Тогда $\mathrm{sr}(\mathfrak{A}) = \omega \cdot \alpha + \mathrm{sr}(\mathfrak{A}/F_\alpha(\mathfrak{A}))$.*

□ Пусть $\beta = \mathrm{sr}(\mathfrak{A}/F_\alpha(\mathfrak{A}))$. Докажем, что $\mathrm{sr}(\mathfrak{A}) \leqslant \omega \cdot \alpha + \beta$. Пусть $a, b \in \mathfrak{A}$ и $(\mathfrak{A}, a) \equiv^{\omega \cdot \alpha + \beta} (\mathfrak{A}, b)$. По лемме 1 $(\hat{a}, 1) \equiv^{\omega \cdot \alpha + \beta} (\hat{b}, 1)$ и $(\widehat{C(a)}, 1) \equiv^{\omega \cdot \alpha + \beta}$ $(\widehat{C(b)}, 1)$. По лемме 17 $(\hat{a}/F_\alpha(\hat{a}), 1) \equiv^{\beta} (\hat{b}, F_\alpha(\hat{b}), 1)$ и $(\widehat{C(a)}/F_\alpha(\widehat{C(a)}), 1) \equiv^{\beta}$ $(\widehat{C(b)}/F_\alpha(\widehat{C(b)}), 1)$. По лемме 10 $\hat{a}/F_\alpha(\hat{a}) \cong \widehat{a/F_\alpha(\mathfrak{A})}$, для $\hat{b}$, $\widehat{C(a)}$, $\widehat{C(b)}$ аналогично $\Rightarrow$ $(\widehat{a/F_\alpha(\mathfrak{A})}, 1) \equiv^{\beta} (\widehat{b/F_\alpha(\mathfrak{B})}, 1)$ и $(\widehat{C(a)/F_\alpha(\mathfrak{A})}, 1) \equiv^{\beta} (\widehat{C(b)/F_\alpha(\mathfrak{B})}, 1)$. По лемме 1 $(\mathfrak{A}/F_\alpha(\mathfrak{A}), a/F_\alpha(\mathfrak{A})) \equiv^{\beta} (\mathfrak{B}/F_\alpha(\mathfrak{B}), b/F_\alpha(\mathfrak{B}))$, откуда $(\mathfrak{A}/F_\alpha(\mathfrak{A}), a/F_\alpha(\mathfrak{A}))$ $\equiv^{\beta+1} (\mathfrak{B}/F_\alpha(\mathfrak{B}), b/F_\alpha(\mathfrak{B}))$. Проводя рассуждения в обратном порядке и используя лемму 17, получаем, что $(\mathfrak{A}, a) \equiv^{\omega \cdot \alpha + \beta + 1} (\mathfrak{A}, b)$.

Далее рассмотрим варианты:

1. β — непредельный ординал, т. е. $\beta = \beta_0 + 1$. Покажем, что $\mathrm{sr}(\mathfrak{A}) >$ $\omega \cdot \alpha + \beta_0$. По предложению 12 существуют $a, b \in \mathfrak{A}$ такие, что

$$(\mathfrak{A}/F_\alpha(\mathfrak{A}), a/F_\alpha(\mathfrak{A})) \equiv^{\beta_0} (\mathfrak{A}/F_\alpha(\mathfrak{A}), b/F_\alpha(\mathfrak{A})),$$
$$(\mathfrak{A}/F_\alpha(\mathfrak{A}), a/F_\alpha(\mathfrak{A})) \not\equiv^{\beta_0+1} (\mathfrak{A}/F_\alpha(\mathfrak{A}), b/F_\alpha(\mathfrak{A})).$$

В силу лемм 1 и 10 отсюда следует, что

$$(\hat{a}/F_\alpha(\hat{a}), 1) \equiv^{\beta_0} (\hat{b}/F_\alpha(\hat{b}), 1), \quad (\widehat{C(a)}/F_\alpha(\widehat{C(a)}), 1) \equiv^{\beta_0} (\widehat{C(b)}/F_\alpha(\widehat{C(b)}), 1),$$

и в одной из этих пар нет $\equiv^{\beta_0+1}$. Пусть для определенности $(\hat{a}/F_\alpha(\hat{a}),1) \not\equiv^{\beta_0+1}$ $(\hat{b}/F_\alpha(\hat{b}),1)$, Заметим, что $\hat{a}/F_\alpha(\hat{a}) \not\cong \mathfrak{B}_0$. Иначе по лемме 11 $\hat{b}/F_\alpha(\hat{b}) \cong \mathfrak{B}_0$, откуда $\hat{a}/F_\alpha(\hat{a}) \cong \hat{b}/F_\alpha(\hat{b})$, что противоречит $\not\equiv^{\beta_0+1}$. Аналогично $\hat{b}/F_\alpha(\hat{b}) \not\cong \mathfrak{B}_0$. Предположим, что $\widehat{C(a)}/F_\alpha(\widehat{C(a)}) \cong \mathfrak{B}_0$. По лемме 10 $\widehat{C(a)/F_\alpha}(\mathfrak{A}) \cong \mathfrak{B}_0$. Следовательно,

$$C(a)/F_\alpha(\mathfrak{A}) = 0/F_\alpha(\mathfrak{A}) \\ \Rightarrow a/F_\alpha(\mathfrak{A}) = 1/F_\alpha(\mathfrak{A}) \Rightarrow \hat{a}/F_\alpha(\hat{a}) \cong a/\widehat{F_\alpha(\mathfrak{A})} \cong \mathfrak{A}/F_\alpha(\mathfrak{A}).$$

Тогда и $\widehat{C(b)}/F_\alpha(\widehat{C(b)}) \cong \mathfrak{B}_0$. Аналогично $\hat{b}/F_\alpha(\hat{b}) \cong \mathfrak{A}/F_\alpha(\mathfrak{A})$, откуда $\hat{a}/F_\alpha(\hat{a}) \cong \hat{b}/F_\alpha(\hat{b})$ — вновь противоречие с тем, что $(\hat{a}/F_\alpha(\hat{a}),1) \not\equiv^{\cdots} (\hat{b}/F_\alpha(\hat{b}),1)$. Как и выше, убеждаемся, что $\widehat{C(b)}/F_\alpha(\widehat{C(b)}) \not\cong \mathfrak{B}_0$. Применяя лемму 16, получим, что $(\hat{a},1) \equiv^{\omega\cdot\alpha+\beta_0} (\hat{b},1)$ и $(\widehat{C(a)},1) \equiv^{\omega\cdot\alpha+\beta_0} (\widehat{C(b)},1)$. По лемме 1 $(\mathfrak{A},a) \equiv^{\omega\cdot\alpha+\beta_0}$ $(\mathfrak{B},b)$. Предполагая $(\mathfrak{A},a) \equiv^{\omega\cdot\alpha+\beta_0+1} (\mathfrak{B},b)$ и проводя рассуждения в обратном порядке, получим, что $(\hat{a}/F_\alpha(\hat{a}),1) \equiv^{\beta_0+1} (\hat{b}/f_\alpha(\hat{b}),1)$, что неверно. Тем самым $\mathrm{sr}(\mathfrak{A}) > \omega\cdot\alpha+\beta_0$.

2. $\beta \neq 0$ — предельный ординал. Тогда достаточно показать, что для любого $\gamma < \beta$ $\mathrm{sr}(\mathfrak{A}) > \omega\cdot\alpha+\gamma$. Доказательство точно такое же, как и в случае 1.

3. $\beta = 0$. Если $\alpha = 0$, то теорема обращается в тождество. Пусть $\alpha \neq 0$. Покажем, что для любого $\gamma < \alpha$ и любого $k \in \omega$ $\mathrm{sr}(\mathfrak{A}) > \omega\cdot\gamma + k$ (отсюда будет следовать, что $\mathrm{sr}(\mathfrak{A}) \geqslant \omega\cdot\alpha$ и в случае, когда α — предельный ординал, и в случае, когда α непредельный). Пусть $\gamma < \alpha$, $k \in \omega$. Пусть $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}/F_\gamma(\mathfrak{A})$ — атомная БА с бесконечным числом атомов (если число атомов в ней конечно, то $\mathfrak{A}/F_{\gamma+1}(\mathfrak{A}) \cong \mathfrak{B}_0$, $\gamma+1 \leqslant \alpha \Rightarrow \mathfrak{A}/F_\alpha(\mathfrak{A}) \cong \mathfrak{B}_0$ — противоречие с условием). Найдем $a', b' \in \mathfrak{A}'$ такие, что $\hat{a}' \cong \mathfrak{B}_{2^k}$, $\hat{b}' \cong \mathfrak{B}_{2^k+1}$. Пусть $a' = a/F_\gamma(\mathfrak{A})$, $b' = b/F_\gamma(\mathfrak{A})$. Тогда $\widehat{C(a')}$, $\widehat{C(b')}$ — атомные БА с бесконечным числом атомов. По леммам 10 и 11

$$(\hat{a}/F_\gamma(\hat{a}),1) \equiv^k (\hat{b}/F_\gamma(\hat{b}),1),$$
$$(\widehat{C(a)}/F_\gamma(\widehat{C(a)}),1) \equiv^k (\widehat{C(b)}/F_\gamma(\widehat{C(b)}),1), \quad (\hat{a}/F_\gamma(\hat{a}),1) \not\equiv^{k+1} (\hat{b}/F_\gamma(\hat{b}),1).$$

По лемме 16

$$(\hat{a},1) \equiv^{\omega\cdot\gamma+k} (\hat{b},1),$$
$$(\widehat{C(a)},1) \equiv^{\omega\cdot\gamma+k} (\widehat{C(b)},1), \quad (\hat{a},1) \not\equiv^{\omega\cdot\gamma+k+1} (\hat{b},1).$$

По лемме 1
$$(\mathfrak{A},a) \equiv^{\omega\cdot\gamma+k} (\mathfrak{B},b), \quad (\mathfrak{A},a) \not\equiv^{\omega\cdot\gamma+k+1} (\mathfrak{B},b).$$

Тем самым $\mathrm{sr}(\mathfrak{A}) > \omega\cdot\gamma + k$. ■

20. Лемма. *Пусть $\mathfrak{A}$ — БА, α — ординал, $\mathfrak{A}/F_\alpha(\mathfrak{A}) \cong \mathfrak{B}_0$. Тогда $\mathfrak{A}$ — α-атомная БА.*

□ Докажем сначала более простой факт: если $\mathfrak{A}$ — БА, α — ординал, $\mathfrak{A}/F_\alpha(\mathfrak{A}) \cong \mathfrak{B}_0$, то $\mathfrak{A}$ — атомная БА. Предположим, что $\mathfrak{A}$ — не атомная. Тогда существует $b \in \mathfrak{A}$ такой, что $b \neq 0$ и b — безатомный элемент, т. е. $\hat{b}$ — безатомная БА. В таком случае $o(\hat{b}) = 0$. Значит, для любого β $F_\beta(\hat{b}) = F_{o(\hat{b})} = \{0\}$, и тем самым для любого β $\hat{b}/F_\beta(\hat{b}) \cong \hat{b}$. По лемме 10 $\hat{b}/F_\alpha(\hat{b}) \cong b/\widehat{F_\alpha(\mathfrak{A})} \cong \mathfrak{B}_0 \Rightarrow \hat{b} \cong \mathfrak{B}_0 \Rightarrow b = 0$ — противоречие. Тем самым утверждение доказано.

Вернемся к доказательству леммы. Пусть $\beta < \alpha$. Предположим, что $\mathfrak{A}/F_\beta(\mathfrak{A})$ не атомная. Тогда существует $b \in \mathfrak{A}$ такой, что $\widehat{b/F_\beta(\mathfrak{A})}$ — ненулевая безатомная БА. Тогда по лемме 10 $\hat{b}/F_\beta(\hat{b})$ безатомная. Отсюда

$$o(\hat{b}) \leqslant \beta \Rightarrow F_\beta(\hat{b}) = F_{o(\hat{b})}(\hat{b}) = F_\alpha(\hat{b}) \Rightarrow \hat{b}/F_\beta(\hat{b}) \cong \hat{b}/F_\alpha(\hat{b}) \cong \widehat{b/F_\alpha(\mathfrak{A})} \cong \mathfrak{B}_0.$$

Тем самым $\widehat{b/F_\beta(\mathfrak{A})} \cong \mathfrak{B}_0$. Пришли к противоречию, что и доказывает лемму. ■

21. Теорема. *Пусть* $\mathfrak{A}$ *— БА,* $o(\mathfrak{A}) = \alpha \neq 0$*. Тогда*

1) *если* α *— предельный ординал, то* $\mathrm{sr}(\mathfrak{A}) \geqslant \omega \cdot \alpha$,
2) *если* $\alpha = \alpha_0 + 1$ *и в* $\mathfrak{A}/F_{\alpha_0}(\mathfrak{A})$ *бесконечное число атомов, то* $\mathrm{sr}(\mathfrak{A}) \geqslant \omega \cdot \alpha$,
3) *если* $\alpha = \alpha_0 + 1$ *и в* $\mathfrak{A}/F_{\alpha_0}(\mathfrak{A})$ *ровно* k *атомов,* $k \in \omega$*, то* $\mathrm{sr}(\mathfrak{A}) \geqslant \omega \cdot \alpha_0 + \mathrm{sr}(\mathfrak{B}_k)$,
4) *если* $\mathfrak{A}$ *— суператомная БА, то* $\alpha = \alpha_0 + 1$*, в* $\mathfrak{A}/F_{\alpha_0}(\mathfrak{A})$ k *атомов для* $k \in \omega$ *и* $\mathrm{sr}(\mathfrak{A}) = \omega \cdot \alpha_0 + \mathrm{sr}(\mathfrak{B}_k)$.

□ Доказательство утверждений леммы будем проводить в удобном для нас порядке.

3. Пусть в $\mathfrak{A}/F_{\alpha_0}(\mathfrak{A})$ k атомов. Тогда существует $b \in \mathfrak{A}$ такой, что $\widehat{b/F_{\alpha_0}(\mathfrak{A})} \cong \mathfrak{B}_k$. По лемме 10 $\hat{b}/F_{\alpha_0}(\hat{b}) \cong \mathfrak{B}_k$, откуда $\hat{b}/F_{\alpha_0+1}(\hat{b}) \cong \mathfrak{B}_0$. Следовательно, с учетом леммы 20 $\hat{b}$ α-атомный. Понятно, что $k \neq 0$, иначе $o(\mathfrak{A}) \leqslant \alpha_0$. Следовательно, по теореме 19 $\mathrm{sr}(\hat{b}) = \omega \cdot \alpha_0 + \mathrm{sr}(\mathfrak{B}_k)$ и тем самым по предложению 13 $\mathrm{sr}(\mathfrak{A}) \geqslant \omega \cdot \alpha_0 + \mathrm{sr}(\mathfrak{B}_k)$.

2. Если в $\mathfrak{A}/F_{\alpha_0}(\mathfrak{A})$ бесконечное число атомов, то аналогично предыдущему покажем, что для любого $k \in \omega$ $\mathrm{sr}(\mathfrak{A}) \geqslant \omega \cdot \alpha_0 + \mathrm{sr}(\mathfrak{B}_k)$, откуда $\mathrm{sr}(\mathfrak{A}) \geqslant \omega \cdot \alpha_0 + \omega = \omega \cdot \alpha$.

1. Если α — предельный ординал, то для любого $\beta < \alpha$ $\mathfrak{A}/F_\beta(\mathfrak{A})$ не безатомная. Следовательно, для любого $\beta < \alpha$ существует $b \in \mathfrak{A}$ такой, что $\hat{b}/F_\beta(\hat{b}) \cong \mathfrak{B}_1$. Тогда аналогично п. 3 покажем, что $\mathrm{sr}(\mathfrak{A}) \geqslant \omega \cdot \beta$ для любого $\beta < \alpha$. Отсюда $\mathrm{sr}(\mathfrak{A}) \geqslant \omega \cdot \alpha$.

4. Если $\mathfrak{A}$ суператомная, то $\mathfrak{A}/F_{\alpha_0}(\mathfrak{A}) \cong \mathfrak{B}_k$ для $k \neq 0$, $k \in \omega$. По определению $\mathfrak{A}$ — α_0-атомная. Значит, по теореме 19 $\mathrm{sr}(\mathfrak{A}) = \omega \cdot \alpha_0 + \mathrm{sr}(\mathfrak{B}_k)$. ■

22. Лемма. *Пусть* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ *— разложимые БА,* $1_{\mathfrak{A}} = t_{\mathbf{A}} \cup p_{\mathbf{A}}$, $1_{\mathfrak{B}} = t_{\mathbf{B}} \cup p_{\mathbf{B}}$*, где* $t_{\mathbf{A}}$, $t_{\mathbf{B}}$ *— атомные элементы,* $p_{\mathbf{A}}$, $p_{\mathbf{B}}$ *— безатомные и* $p_{\mathbf{A}} = 0_{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow p_{\mathbf{B}} = 0_{\mathfrak{B}}$*. Тогда для любого ординала* $\alpha \geqslant \omega$

$$((\mathfrak{A}, 1) \equiv^\alpha (\mathfrak{B}, 1) \Leftrightarrow (\hat{t}_{\mathbf{A}}, 1) \equiv^\alpha (\hat{t}_{\mathbf{B}}, 1)).$$

□ Доказывать будем индукцией по α. Из разложимости $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ следует, что $(\mathfrak{A}, 1) \equiv^\omega (\mathfrak{B}, 1) \Leftrightarrow ((\hat{t}_{\mathbf{A}}, 1) \equiv^\omega (\hat{t}_{\mathbf{B}}, 1)$ и $\mathrm{ch}_3(\mathfrak{A}) = \mathrm{ch}_3(\mathfrak{B}))$. Тем самым базис индукции найден. пусть лемма верна для α. Докажем для $\alpha + 1$. Пусть $(\mathfrak{A}, 1) \equiv^{\alpha+1} (\mathfrak{B}, 1)$, т. е. доказываем $(\Rightarrow)$. По лемме 2 достаточно показать, что

$$\forall a' \in \hat{t}_{\mathbf{A}} \exists b' \in \hat{t}_{\mathbf{B}}[(\hat{a}', 1) \equiv^\alpha (\hat{b}', 1) \text{ и } (\widehat{t_{\mathbf{A}} \setminus a'}, 1) \equiv^\alpha (\widehat{t_{\mathbf{B}} \setminus b'}, 1)],$$
$$\forall b' \in \hat{t}_{\mathbf{B}} \exists a' \in \hat{t}_{\mathbf{A}}[\ldots].$$

Докажем первое утверждение, второе аналогично. Пусть $a' \in \hat{t}_{\mathbf{A}}$ — произвольный элемент и $a' \in \mathfrak{A}$. По лемме 2 существует $b' \in \mathfrak{B}$ такой, что $(\hat{a}', 1) \equiv^\alpha (\hat{b}', 1)$ и $(\widehat{1_{\mathfrak{A}} \setminus a'}, 1) \equiv^\alpha (\widehat{1_{\mathfrak{B}} \setminus b'}, 1)$. Тогда по лемме 15 в силу $\alpha \geqslant \omega$ заключаем, что b' — атомный элемент и тем самым $b' \leqslant t_{\mathbf{B}}$. Кроме того, $\widehat{1_{\mathfrak{A}} \setminus a'}$, $\widehat{1_{\mathfrak{B}} \setminus b'}$ — разложимые БА, $1_{\mathfrak{A}} \setminus a' = p_{\mathbf{A}} \cup (t_{\mathbf{A}} \setminus a')$, $1_{\mathfrak{B}} \setminus b' = p_{\mathbf{B}} \cup (t_{\mathbf{B}} \setminus b')$. Отсюда по предположению индукции $(\widehat{t_{\mathbf{A}} \setminus a'}, 1) \equiv^\alpha (\widehat{t_{\mathbf{B}} \setminus b'}, 1)$. Нужные эквивалентности получены.

Докажем теперь ($\Leftarrow$). Пусть $(\hat{t}_{\mathbf{A}}, 1) \equiv^{\alpha+1} (\hat{t}_{\mathbf{B}}, 1)$. Возьмем произвольное $a \in \mathfrak{A}$. Тогда $a = p'_{\mathbf{A}} \cup t'_{\mathbf{A}}$, $C(a) = p''_{\mathbf{A}} \cup t''_{\mathbf{A}}$, где $p'_{\mathbf{A}} \cup p''_{\mathbf{A}} = p_{\mathbf{A}}$, $t'_{\mathbf{A}} \cup t''_{\mathbf{A}} = t_{\mathbf{A}}$. Если $p_{\mathbf{A}} = 0$, то $p_{\mathbf{B}} = 0$, и доказывать нечего. Предположим, что $p_{\mathbf{A}} \neq 0$. Тогда $p_{\mathbf{B}} \neq 0$. Поскольку $t''_{\mathbf{A}} = C_{\hat{t}_{\mathbf{A}}}(t'_{\mathbf{A}})$, по лемме 2 найдется $b' \in \hat{t}_{\mathbf{B}}$ такой, что $(\hat{t}'_{\mathbf{A}}, 1) \equiv^{\alpha} (\hat{b}', 1)$ и $(\hat{t}''_{\mathbf{A}}, 1) \equiv^{\alpha} (\widehat{t_{\mathbf{B}} \setminus b'}, 1)$. Пусть $t_{\mathbf{B}} \setminus b' = b''$. Образуем b так, что $b \cap p_{\mathbf{B}} = 0 \Leftrightarrow p'_{\mathbf{A}} = 0$ и $C(b) \cap p_{\mathbf{B}} = 0 \Leftrightarrow p''_{\mathbf{A}} = 0$, $b' \leqslant b$, $b'' \leqslant C(b)$. Тогда по предположению индукции $(\hat{b}, 1) \equiv^{\alpha} (\hat{a}, 1)$ и $(\widehat{C(a)}, 1) \equiv^{\alpha} (\widehat{C(b)}, 1)$ — нашли такое b. Взяв произвольный $b \in \mathfrak{B}$, аналогично находим для него a с нужными свойствами. Тем самым по лемме 2 $(\mathfrak{A}, 1) \equiv^{\alpha+1} (\mathfrak{B}, 1)$. ■

23. Теорема. *Пусть $\mathfrak{A}$ — разложимая БА, $1_{\mathfrak{A}} = t_{\mathbf{A}} \cup p_{\mathbf{A}}$, $t_{\mathbf{A}}$ — атомный элемент, $p_{\mathbf{A}}$ — безатомный. Тогда для любого $\alpha \geqslant \omega$*

$$\mathrm{sr}(\mathfrak{A}) = \alpha \Leftrightarrow \mathrm{sr}(\hat{t}_{\mathbf{A}}) = \alpha.$$

□ По предложению 15 $\mathrm{sr}(\hat{t}_{\mathbf{A}}) \leqslant \mathrm{sr}(\mathfrak{A})$. Докажем, что при выполнении условий леммы и при $\mathrm{sr}(\hat{t}_{\mathbf{A}}) \geqslant \omega$ $\mathrm{sr}(\hat{t}_{\mathbf{A}}) \geqslant \mathrm{sr}(\mathfrak{A})$. По предложению 12 достаточно доказать, что если $\mathrm{sr}(\hat{t}_{\mathbf{A}}) = \beta$, то для любых $a, b \in \mathfrak{A}$

$$((\mathfrak{A}, a) \equiv^{\beta} (\mathfrak{A}, b) \Rightarrow (\mathfrak{A}, a) \equiv^{\beta+1} (\mathfrak{A}, b)).$$

Пусть $\beta \geqslant \omega$, $a, b \in \mathfrak{A}$ — произвольные элементы, $(\mathfrak{A}, a) \equiv^{\beta} (\mathfrak{A}, b)$. По лемме 1 $(\hat{a}, 1) \equiv^{\beta} (\hat{b}, 1)$ и $(\widehat{C(a)}, 1) \equiv^{\beta} (\widehat{C(b)}, 1)$. По лемме 15 $\mathrm{ch}_3(\hat{a}) = \mathrm{ch}_3(\hat{b})$ и $\hat{a}$, $\hat{b}$ — разложимые БА. По лемме 22 $(\widehat{t_{\mathbf{A}} \cap a}, 1) \equiv^{\beta} (\widehat{t_{\mathbf{A}} \cap B}, 1)$, аналогично $(\widehat{t_{\mathbf{A}} \cap C(a)}, 1) \equiv^{\beta} (\widehat{t_{\mathbf{A}} \cap C(b)}, 1)$. По лемме 1 $(\hat{t}_{\mathbf{A}}, t_{\mathbf{A}} \cap a, C_{\hat{t}_{\mathbf{A}}}(t_{\mathbf{A}} \cap a)) \equiv^{\beta} (\hat{t}_{\mathbf{A}}, t_{\mathbf{A}} \cap b, C_{\hat{t}_{\mathbf{A}}}(t_{\mathbf{A}} \cap b))$. Отсюда $(\hat{t}_{\mathbf{A}}, t_{\mathbf{A}} \cap a, C_{\hat{t}_{\mathbf{A}}}(t_{\mathbf{A}} \cap a)) \equiv^{\beta+1} (\hat{t}_{\mathbf{A}}, t_{\mathbf{A}} \cap b, C_{\hat{t}_{\mathbf{A}}}(t_{\mathbf{A}} \cap b))$. Проводя рассуждения в обратном порядке, получаем, что $(\mathfrak{A}, a) \equiv^{\beta+1} (\mathfrak{A}, b)$, что и требовалось. Для доказательства теоремы осталось разобрать случаи: $\mathrm{sr}(\mathfrak{A}) \geqslant \omega$, $\mathrm{sr}(\hat{t}_{\mathbf{A}}) \in \omega$. Но тогда по теореме 14 $\hat{t}_{\mathbf{A}} \cong \mathfrak{B}_k$ для некоторого $k \in \omega$, и в этом случае $\mathrm{sr}(\mathfrak{A})$ также конечен — противоречие. Итак, этот случай невозможен. ■

24. Предложение. *Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ — БА, $\max(\mathrm{sr}(\mathfrak{A}), \mathrm{sr}(\mathfrak{B})) = \alpha$. Тогда $\alpha \leqslant \mathrm{sr}(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}) \leqslant \alpha + 4$.*

□ Пусть $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, $1^*_{\mathfrak{A}} = (1_{\mathfrak{A}}, 0_{\mathfrak{B}})$, $1^*_{\mathfrak{B}} = (0_{\mathfrak{A}}, 1_{\mathfrak{B}})$, если $|\mathfrak{A}'| = |\mathfrak{A}| \times |\mathfrak{B}|$. По предложению 13 $\mathrm{sr}(\hat{1}^*_{\mathfrak{A}}) \leqslant \mathrm{sr}(\mathfrak{A}')$, $\hat{1}^*_{\mathfrak{A}} \cong \mathfrak{A} \Rightarrow \mathrm{sr}(\mathfrak{A}) \leqslant \mathrm{sr}(\mathfrak{A}')$. Аналогично $\mathrm{sr}(\mathfrak{B}) \leqslant \mathrm{sr}(\mathfrak{A}')$. Докажем, что $\mathrm{sr}(\mathfrak{A}') \leqslant \alpha + 4$. По предложению 12 достаточно показать, что для любых $a, b \in \mathfrak{A}'$

$$[(\mathfrak{A}', a) \equiv^{\alpha+4} (\mathfrak{A}', b) \Rightarrow (\mathfrak{A}', a) \equiv^{\alpha+5} (\mathfrak{A}, b)].$$

Пусть для некоторых $a, b \in \mathfrak{A}'$ $(\mathfrak{A}', a) \equiv^{\alpha+4} (\mathfrak{A}', b)$. Тогда существуют $d_{\mathbf{A}} \in \mathfrak{A}'$ такой, что $(\mathfrak{A}', a, 1^*_{\mathfrak{A}}) \equiv^{\alpha+3} (\mathfrak{A}', b, d_{\mathbf{A}})$, и $d_{\mathbf{B}} \in \mathfrak{A}'$ такой, что

$$(\mathfrak{A}', a, 1^*_{\mathfrak{A}}, d_{\mathbf{B}}) \equiv^{\alpha+2} (\mathfrak{A}', b, d_{\mathbf{A}}, 1^*_{\mathfrak{B}}).$$

$$\begin{aligned} B(a, 1^*_{\mathfrak{A}}, d_{\mathbf{B}}) = \big(&C(a) \cap 1^*_{\mathfrak{B}} \cap C(d_{\mathbf{B}}), a \cap 1^*_{\mathfrak{B}} \cap C(d_{\mathbf{B}}), C(a) \cap 1^*_{\mathfrak{A}} \cap C(d_{\mathbf{B}}), \\ &a \cap 1^*_{\mathfrak{A}} \cap C(d_{\mathbf{B}}), C(a) \cap 1^*_{\mathfrak{B}} \cap d_{\mathbf{B}}, a \cap 1^*_{\mathfrak{B}} \cap d_{\mathbf{B}}, C(a) \cap 1^*_{\mathfrak{A}} \cap d_{\mathbf{B}}, a \cap 1^*_{\mathfrak{A}} \cap d_{\mathbf{B}}\big). \end{aligned}$$

Пусть это равно $(a^*_1, \ldots, a^*_8)$. Тогда, как легко видеть, для любого $i = 1, \ldots, 8$ $a^*_i \leqslant 1^*_{\mathfrak{A}}$ или $a^*_i \leqslant 1^*_{\mathfrak{B}}$. Если $B(b, d_{\mathbf{A}}, 1^*_{\mathfrak{B}}) = (b^*_1, \ldots, b^*_8)$, то аналогично убеждаемся, что для любого $i = 1, \ldots, 8$ $b^*_i \leqslant 1^*_{\mathfrak{A}}$ или $b^*_i \leqslant 1^*_{\mathfrak{B}}$. В $\mathfrak{A}'$ $(a_1, a_2) \leqslant (b_1, b_2) \Leftrightarrow a_1 \leqslant_{\mathfrak{A}} b_1$ и $a_2 \leqslant_{\mathfrak{B}} b_2$ — легко видеть $\Rightarrow$ все a^*_i имеют вид $(a_i, 0_{\mathfrak{B}})$ или $(0_{\mathfrak{A}}, a_i)$ — введем a_i таким образом (если $a^*_i = (0_{\mathfrak{A}}, 0_{\mathfrak{B}})$, то для определенности полагаем

$a_i = 0_{\mathfrak{A}})$. Тогда очевидно, что $\hat{a}_i^*$ как подалгебра в $\mathfrak{A}'$ и a_i как подалгебра в $\mathfrak{A}$ или в $\mathfrak{B}$ (в зависимости от того, где лежит a_i) изоморфны. Введем аналогичным образом b_i так, что $b_i^* = (b_i, 0_{\mathfrak{B}})$ или $b_i^* = (0_{\mathfrak{A}}, b_i)$. Тогда $(\mathfrak{A}', \bar{a}^*) \equiv^{\alpha+2} (\mathfrak{A}', \bar{b}^*)$. По лемме 1 для любого $i = 1, \ldots, 8$ $(\hat{a}_i^*, 1) \equiv^{\alpha+2} (\hat{b}_i^*, 1)$, откуда $(\hat{a}_i, 1) \equiv^{\alpha+2} (\hat{b}_i, 1)$. Рассуждения ведем для конкретного i. Пусть a_i лежит в $\mathfrak{A}$ или в $\mathfrak{B}$, $\mathrm{sr}(\mathfrak{A}) \leqslant \alpha$, $\mathrm{sr}(\mathfrak{B}) \leqslant \alpha$. По предложению 13 $\mathrm{sr}(\hat{a}_i) \leqslant \alpha$. По предложению 18 $(\hat{a}_i, 1) \cong_p (\hat{b}_i, 1)$. Тогда для любого β $(\hat{a}_i^*, 1) \equiv^{\beta} (\hat{b}_i^*, 1)$, $i = 1, \ldots, 8$. По лемме 1 для любого β $(\mathfrak{A}', \bar{a}^*) \equiv^{\beta} (\mathfrak{A}', \bar{b}^*)$. Значит, $(\mathfrak{A}', a, 1_{\mathfrak{A}}^*, d_{\mathbf{B}}) \equiv^{\beta} (\mathfrak{A}', b, d_{\mathbf{A}}, 1_{\mathfrak{B}}^*)$. Следовательно, для любого β $(\mathfrak{A}', a) \equiv^{\beta} (\mathfrak{A}', b)$, откуда $(\mathfrak{A}', a) \equiv^{\alpha+5} (\mathfrak{A}', b)$. Нужная эквивалентность получена. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. *Barwise J.* Admissible sets and structures. Berlin etc.: Springer-Verlag, 1975.
2. *Гончаров С. С.* Счетные булевы алгебры. Новосибирск: Наука, 1988.

г. Новосибирск *Статья поступила 1 октября 1994 г.*