УДК 512.54

О ЛОКАЛЬНО НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУППАХ*)

В. В. Блудов

Введение

В 1969 г. Б. И. Плоткин поставил следующий вопрос: «Верно ли, что каждая локально нильпотентная группа есть гомоморфный образ локально нильпотентной группы без кручения?» [7, вопрос 3.47]. В классе локально конечных групп этот вопрос был решен положительно Е. М. Левичем и А. И. Токаренко [4]. Для счетных групп также известно положительное решение этого вопроса (Н. С. Романовский, сообщение на конференции). Для решения этой задачи в общем случае А. Ю. Ольшанский в 1982 г. поставил такой вопрос: Пусть X — конечное множество, а f — функция, принимающая натуральные значения на его подмножествах. Потребуем, чтобы в группе с порождающим множеством X каждая подгруппа $\langle Y\rangle$, $Y \subseteq X$, была нильпотентной ступени не больше $f(Y)$. Верно ли, что свободная относительно этого условия группа G_f не имеет кручения? Из утвердительного ответа на этот вопрос следует утвердительный ответ на вопрос 3.47 [7, вопрос 8.56]. Однако вопрос А. Ю. Ольшанского был решен отрицательно в 1989 г. [3]. Продолжение исследований свойств группы G_f привело к некоторым новым результатам, которые и предлагаются в настоящей работе.

В § 1 приводятся предварительные сведения и основные обозначения. В § 2 определяются основные понятия: функция Ольшанского локально нильпотентной группы, группа G_f и др. Приводятся утверждения, непосредственно вытекающие из определений, строятся примеры нильпотентных групп, необходимые для получения основных результатов. В § 3 рассматриваются коммутаторные соотношения в группе G_f, позволяющие находить в этой группе элементы конечного порядка. Общие свойства группы G_f рассматриваются в § 4. В нем приводятся достаточное условие совпадения функции Ольшанского группы G_f с функцией f (теорема 1), достаточное условие, накладываемое на функцию f, при котором группа G_f не имеет кручения (теорема 2), новое решение вопроса Б. И. Плоткина для счетных групп (следствие 2) и гиперцентральных групп (следствие 3). Получено достаточное условие (также в терминах функции f), при котором группа G_f имеет кручение (утверждение 8). В § 5 приводятся некоторые вспомогательные результаты теоретико-множественного характера. Вопросу Б. И. Плоткина посвящен § 6. Построен пример локально нильпотентной группы G мощности, превышающей континуум, для которой не существует в классе групп вида G_f (или в классе групп с изолированной нижней центральной системой подгрупп) локально нильпотентной группы $\widehat{G}$ без кручения, гомоморфно отображающейся на G (теорема 4), и приводится отрицательный ответ на аналог вопроса Б. И. Плоткина для колец Ли (следствие 5).

*) Работа выполнена при поддержке грантового центра по исследованиям в области математики при Новосибирском государственном университете и при поддержке программы «Университеты России».

§ 1. Предварительные сведения и обозначения

В основном используются стандартные обозначения (см. [1, 5, 6]). Множества натуральных, целых и действительных чисел обозначаются символами $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{R}$ соответственно. Число 0 включается в множество $\mathbb{N}$. Для числовых интервалов множества $\mathbb{R}$ круглые и квадратные скобки используются обычным образом, например: $(0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leqslant 1\}$. Кроме того, квадратные скобки используются для обозначения целой части действительного числа и операции коммутирования в группах. Множество всех подмножеств множества M обозначаем через $\mathscr{B}(M)$, а множество всех конечных подмножеств, состоящих по крайней мере из n элементов множества M, — через $\mathscr{F}_n(M)$. Для сокращения обозначений вместо $f(\{a_1,\dots,a_n\})$ будем писать $f(a_1,\dots a_n)$ там, где это не вызовет путаницы. Мощность множества M обозначаем $|M|$. Для счетной мощности используем знак $\aleph_0$, для мощности континуума — знак $\aleph_1$. Минимальный и максимальный элементы упорядоченного множества S, если не оговорено противное, обозначаются символами $\min S$ и $\max S$ соответственно. Сужение функции f на множество S обозначается $f|_S$.

Единица любой группы обозначается символом e. Подгруппа, порожденная подмножеством S группы G, обозначается через $\langle S\rangle$, нормальная подгруппа, порожденная S, — $\langle S\rangle^G$. Если G — группа, то $H < G$ ($H \lhd G$) обозначает, что H есть (нормальная) подгруппа группы G.

Члены нижнего центрального ряда группы — это $G_0 = G,\dots,G_n = [G_{n-1},G]$. Коммутатор элементов — $[a,b] = a^{-1}b^{-1}ab$, сопряженный элемент — $a^b = b^{-1}ab$. Порождающие элементы группы (в том случае, когда множество порождающих зафиксировано) также считаются коммутаторами — простыми коммутаторами веса 1. Вес простого коммутатора u обозначаем $\mathrm{wt}(u)$. Коммутатор $[u,v]$ простых коммутаторов u и v будет простым коммутатором веса $\mathrm{wt}(u)+\mathrm{wt}(v)$. Все n-кратные коммутаторы левонормированные, т. е. $[a_1,a_2,\dots,a_n]$ обозначает коммутатор $[[\cdots[a_1,a_2],\dots],a_n]$. При $n > 0$ $[a,b^{(n)}]$ обозначает коммутатор $[a,\underbrace{b,\dots,b}_{n}]$, а при $n = 0$ — элемент a. Будем писать $u = u(v_1,\dots,v_n)$, если необходимо подчеркнуть, что простой коммутатор u является результатом некоторой последовательности операций коммутирования простых коммутаторов $v_1,\dots,v_n$. Количество вхождений порождающего a_i в коммутаторное слово $u = u(a_1,\dots,a_n)$ обозначаем $\mathrm{var}_{a_i}(u)$. Через $\mathrm{set}(u)$ обозначаем подмножество порождающих, явно участвующих в записи коммутаторного слова u. Слово, полученное из группового или коммутаторного слова $u = u(x_1,\dots,x_n)$ заменой каждого вхождения каждой переменной x_i на переменную y_i, $i = 1,\dots,n$, будем обозначать $u|_{x_i=y_i}$.

Если элементы u и v являются произведениями коммутаторов одинакового веса n, то вместо $u \equiv v \pmod{G_n}$, $u \equiv e \pmod{G_n}$ будем писать $u \equiv v$, $u \equiv e$ соответственно. Тождество Якоби записываем в следующем виде:

$$[a,b,c] \equiv [a,[b,c]]\cdot[a,c,b]. \tag{1}$$

Применяя тождество (1) n раз к коммутатору $[a,b,c^{(n)}]$ получим формулу Лейбница (см. [6]):

$$[a,b,c^{(n)}] \equiv \prod_{i=0}^{n}[a,c^{(i)},[b,c^{(n-i)}]]^{\tau(n,i)}, \tag{2}$$

где $\tau(n,i) = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ — число сочетаний из n по i. Индукцией по весу коммутатора $u = u(a_1,\dots,a_n)$ из формулы (2) получаем, что

$$[u,b^{(r)}] \equiv \prod_{j_1+\dots+j_n=r} w_{j_1,\dots,j_n}^{\tau(j_1,\dots,j_n)}, \quad \tau(j_1,\dots,j_n) > 0, \tag{3}$$

где $w_{j_1,\dots,j_n} = u|_{a_i=[a_i,b^{(j_i)}]}$.

При построении использовался базис Ширшова (см. [1, 6, 8]) свободной нильпотентной группы (алгебры Ли), который определяется следующим образом. Множество порождающих $X = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ упорядочивается некоторым отношением линейного порядка, которое продолжается до лексикографического линейного порядка на множестве $A(X)$ всех ассоциативных слов над алфавитом X, при этом считаем, что $u \cdot v < u$. Выбираем подмножество $R \subset A(X)$ правильных слов, т. е. таких, что из $u \cdot v \in R$ следует $u \cdot v > v \cdot u$. Каждому простому коммутатору w соответствует ассоциативное слово $\overline{w}$, получаемое из w опусканием скобок. В базис Ширшова B включаются множество порождающих X, а также те и только те простые коммутаторы w, которые удовлетворяют условиям:

(S1) $\overline{w} \in R$,

(S2) $w = [u, v] \Rightarrow \bar{u}, \bar{v} \in R$,

(S3) $w = [[u_1, u_2], v] \Rightarrow \bar{u}_2 \leqslant \bar{v}$.

Базис B однозначно определяется множеством порождающих X и заданным на нем отношением линейного порядка.

Нитевой базис группы [2] — это тройка (B, σ, δ), где B — система порождающих группы, σ — линейное упорядочение B, δ — функция из B в $\mathscr{B}(Z)$ такая, что любой элемент g из группы однозначно представляется в виде

$$g = b_{i_1}^{n_1} \cdot \ldots \cdot b_{i_k}^{n_k}, \tag{4}$$

где $b_{i_1} < \dots < b_{i_k}$, $n_j \in \delta(b_{i_j})$, $n_j \neq 0$, $j = 1, \dots, k$. При этом единица группы представляется пустым произведением вида (4). Элемент b_{i_k} из представления (4) называется представителем элемента g и обозначается $\operatorname{rep}(g)$. Элемент $\operatorname{rep}(e)$ не является элементом группы, но формально считается, что $\operatorname{rep}(e) < b$ для любого $b \in B$.

Используя базис Ширшова B свободной нильпотентной группы N, можно построить нитевой базис $\overline{B}$ в любой фактор-группе $\overline{N} = N/K$, если вполне упорядочить множество B. При этом $\overline{B}$ можно выбрать в образе B при гомоморфизме N на N/K [2]. Хотя базис $\overline{B}$ определяется неоднозначно, в любом случае элементы множества $\overline{B}$ удовлетворяют условиям (S1)–(S3), и поэтому базис $\overline{B}$ также будем называть нитевым базисом Ширшова группы $\overline{N}$.

§ 2. Определения, примеры

В этом параграфе дается ряд определений и приводятся простейшие свойства группы G_f, свободной относительно функции f.

Определение 1. Пусть $S \neq \varnothing$ — некоторое множество. Функция $f : \mathscr{F}_1(S) \to \mathbb{N}$ называется *монотонной*, если из $X \subseteq Y$ следует $f(X) \leqslant f(Y)$ для любых X, Y из $\mathscr{F}_1(S)$.

Определение 2. Пусть заданы два множества S, Q и отображение $\varphi : S \to Q$. Если $f : \mathscr{F}_1(S) \to \mathbb{N}$ и $g : \mathscr{F}_1(Q) \to \mathbb{N}$ такие функции, что $f(X) \geqslant g(\varphi(X))$ для любого $X \in \mathscr{F}_1(S)$, то говорим, что f *мажорирует* g относительно φ и обозначаем это $f \geqslant_\varphi g$. Будем использовать и сокращенное обозначение $f \geqslant g$, если известно, о каком отображении идет речь.

Определение 3. Зафиксируем множество порождающих S локально нильпотентной группы G. Определим функцию $f_{G,S} : \mathscr{F}_1(S) \to \mathbb{N}$, полагая $f_{G,S}(X)$ равным ступени нильпотентности подгруппы $\langle X \rangle$ группы G. Такую функцию назовем *функцией Ольшанского* группы G.

Утверждение 1. *Функция Ольшанского локально нильпотентной группы монотонна и удовлетворяет условиям*

$$(\forall X \in \mathscr{F}_1(S))(|X| = 1 \Rightarrow f(X) \leqslant 1), \tag{5}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall X \in \mathscr{F}_1(S))(\forall Y \subseteq X)((|Y| \leqslant n \Rightarrow f(Y) < n) \Rightarrow f(X) < n), \tag{6}$$

$$(\forall X \in \mathscr{F}_2(S))(\exists x \in X)(\forall y \in X)(f(x, y) \leqslant 1 \Rightarrow (f(X) = \max\{f(x), f(X \setminus \{x\})\}). \tag{7}$$

Доказательство. Монотонность функции $f = f_{G,S}$ и условие (5) следуют непосредственно из определения 3. Проверим выполнение условия (6). Пусть X — подмножество из S и n — натуральное число. Если произвольный простой коммутатор веса n из $\langle X\rangle$ равен e, то $f(X) < n$, если же некоторый коммутатор $u \in \langle X\rangle$ веса n отличен от e, то, полагая $Y = \mathrm{set}(u)$, получим, что $|Y| \leqslant n$, $f(Y) \geqslant n$, и посылка условия (6) не выполняется. Проверим условие (7). Если выполнена посылка условия, то подгруппа $\langle x\rangle$ выделяется прямым множителем в $\langle X\rangle$ и ступень нильпотентности подгруппы $\langle X\rangle$ при $X \neq \{x\}$ не зависит от порождающего x. □

Монотонность и условия (5)–(7) являются необходимыми, но не достаточными для того, чтобы функция $f : \mathscr{F}_1(S) \to \mathbb{N}$ была функцией Ольшанского локально нильпотентной группы, что показывает

Пример 1. Пусть $S = \{a, b, c, d\}$. Определим функцию $f : \mathscr{F}_1(S) \to \mathbb{N}$, полагая

$$f(a,b)=f(a,c)=f(b,c)=f(a,b,c)=1,\quad f(a,d)=f(b,d)=f(c,d)=f(a,b,d)=2,$$
$$f(a,c,d) = f(b,c,d) = 3,\quad f(a,b,c,d) = k \geqslant 3.$$

Функция f монотонна и удовлетворяет условиям (5)–(7). Предположим, что f — функция Ольшанского некоторой группы G. Построим нитевой базис Ширшова группы G, считая $a > b > c > d$.

Коммутаторы веса 1: a, b, c, d.

Коммутаторы веса 2: $[a,d]$, $[b,d]$, $[c,d]$, поскольку $[a,b] = [a,c] = [b,c] = e$ по определению f.

Коммутаторы веса 3: $[a,d,c]$, $[b,d,c]$, поскольку $[a,[a,d]] = [a,[b,d]] = [a,d,b] = [b,[b,d]] = [c,[c,d]] = [a,d,d] = [c,d,d] = e$ по определению f, а коммутаторы $[a,[c,d]]$ и $[b,[c,d]]$ выражаются через $[a,d,c]$ и $[b,d,c]$ по модулю G_3. Действительно, $[a,[c,d]] \equiv [a,c,d]\cdot[a,d,c]^{-1} \equiv [a,d,c]^{-1}$, поскольку $[a,c,d] = e$; аналогично получаем, что $[b,[c,d]] \equiv [b,d,c]^{-1}$.

Коммутаторы веса 4: из определения f следует, что все коммутаторы веса 4 от не более чем трех переменных равны единице. Используя уже построенные базисные коммутаторы можно построить только два коммутатора веса 4: $[a,[b,d,c]]$ и $[a,d,c,b]$. Покажем, что эти два коммутатора также равны единице в группе G. Из $[b,c] = [a,d,b] = e$ получаем $[a,d,c,b] \equiv [a,d,b,c]\cdot[a,d,[b,c]]^{-1} = e$, а из $[a,c] = [a,[b,d]] = e$ получим $[a,[b,d,c]] \equiv [a,[b,d],c]\cdot[a,c,[b,d]]^{-1} = e$. Так как группа G нильпотентна, то $[a,d,c,b] = [a,[b,d,c]] = e$. Следовательно, G нильпотентна ступени 3, и, таким образом, при $k > 3$ $f_{G,S} < f$. □

Ниже, в теореме 1 будет приведено достаточное, но не необходимое условие для того, чтобы функция f была функцией Ольшанского локально нильпотентной группы.

Вопрос 1. Найти необходимое и достаточное условие для того, чтобы функция $f : \mathscr{F}_1(S) \to \mathbb{N}$ была функцией Ольшанского (локально) нильпотентной группы.

Определение 4. Пусть $S \neq \varnothing$ и $f : \mathscr{F}_1(S) \to \mathbb{N}$. Группа G называется *свободной* относительно функции f (обозначается G_f), если:

1) S — множество порождающих группы G,

2) $f_{G,S} \leqslant f$,

3) любое отображение φ множества S на множество порождающих Q локально нильпотентной группы H такой, что $f_{H,Q} \leqslant_\varphi f$, продолжается до гомоморфизма G на H.

Утверждение 2. *Для любого непустого множества S и любой функции $f : \mathscr{F}_1(S) \to \mathbb{N}$ группа G_f существует и единственна с точностью до изоморфизма.*

Доказательство. Определим монотонную функцию $\bar{f} : \mathscr{F}_1(S) \to \mathbb{N}$, полагая
$$\bar{f}(X) = \min\{f(Y) \mid X \subseteq Y \in \mathscr{F}_1(S)\}.$$

Проверим, что для любой монотонной функции $g : \mathscr{F}_1(S) \to \mathbb{N}$ из $g \leqslant f$ следует $g \leqslant \bar{f}$. Действительно, $\bar{f}(X) = f(Y) \geqslant g(Y)$ для некоторого $Y \supseteq X$, а из монотонности g получим $g(Y) \geqslant g(X)$.

Пусть $F = F(S)$ — свободная группа с порождающим множеством S и $V \subset F(S)$ — множество простых коммутаторов. Положим $V_f = \{v \in V \mid \mathrm{wt}(v) > \bar{f}(\mathrm{set}(v))\}$, $N = \langle V_f \rangle^F$. Группа $G_f = F/N$ удовлетворяет условию 1 определения 4 по построению, условие 2 следует из определения подгруппы N и того, что $\bar{f} \leqslant f$.

Проверим условие 3. Пусть $\varphi : S \to Q$ и H — локально нильпотентная группа, порожденная множеством Q, такая, что $f_{H,Q} \leqslant_\varphi f$. По утверждению 1 функция $f_{H,Q}$ монотонна и, следовательно, $f_{H,Q} \leqslant_\varphi \bar{f}$. Чтобы отображение φ продолжалось до гомоморфизма G_f на H достаточно, чтобы каждое определяющее соотношение $w(s_1, \dots s_n) = e$, $s_i \in S$, группы G_f влекло соотношение $w(\varphi(s_1), \dots, \varphi(s_n)) = e$ в группе H. По построению группы G_f ее определяющими соотношениями являются соотношения вида $v(s_1, \dots, s_n) = e$, где v — простой коммутатор веса, большего, чем $\bar{f}(s_1, \dots, s_n)$. Поскольку $\mathrm{wt}(v(\varphi(s_1), \dots, \varphi(s_n))) = \mathrm{wt}(v(s_1, \dots, s_n)) > \bar{f}(s_1, \dots, s_n) \geqslant f_{H,Q}(\varphi(s_1), \dots, \varphi(s_n))$, то $v(\varphi(s_1), \dots, \varphi(s_n)) = e$.

Пусть теперь G — некоторая группа, свободная относительно f. По определению 4 группа G порождается множеством S и необходимо имеет множество соотношений V_f. Если в G найдется хотя бы одно соотношение, не выводимое из V_f, то нельзя будет построить гомоморфизм G на F/V_f^F. Таким образом, V_f — множество определяющих соотношений группы G и $G \cong F/V_f^F$. □

Следствие 1. *Пусть $f : \mathscr{F}_1(S) \to \mathbb{N}$ и $g : \mathscr{F}_1(S) \to \mathbb{N}$ такие функции, что $f \leqslant g$, тогда существует гомоморфизм G_g на G_f, тождественный на S.*

Следующие два утверждения следуют непосредственно из определений и утверждения 2.

Утверждение 3. *Пусть $S \neq \varnothing$, $f : \mathscr{F}_1(S) \to \mathbb{N}$ и группа G_f свободна относительно f. Если $Q \subseteq S$ и g — сужение функции $f_{G,S}$ на множество $\mathscr{F}_1(Q)$, то группа $\langle Q \rangle$ свободна относительно функции g.*

Утверждение 4. *Пусть G — локально нильпотентная группа с множеством порождающих $S = \{a_i \mid i \in I\}$, $H = \langle Q \rangle$ — ее подгруппа, порожденная множеством $Q = \{b_i \mid b_i = a_i^{n_i},\ a_i \in S,\ n_i \in \mathbb{Z},\ i \in I\}$, $N \lhd G$ и $K = G/N$ — фактор-группа с множеством порождающих $\overline{S} = \{c_i \mid c_i = a_i N,\ a_i \in S,\ i \in I\}$. Тогда для любого конечного $J \subseteq I$*

1) $f_{H,Q}(\{b_j \in Q \mid j \in J\}) \leqslant \bar{f}_{G,S}(\{a_j \in S \mid j \in J\})$,

2) $f_{K,\overline{S}}(\{c_j \in \overline{S} \mid j \in J\}) \leqslant f_{G,S}(\{a_j \in S \mid j \in J\})$.

Утверждение 5. *Пусть $S = \{a_1, \dots, a_n\}$, $f : \mathscr{F}_1(S) \to \mathbb{N}$ и группа $G = G_f$ свободна относительно f. Если $u(a_1, \dots, a_n) = e$ — соотношение в группе G_f, то $u|_{a_i = a_i^{m_i}} = e$ при любых натуральных m_i.*

Доказательство. Положим $B = \{b_i \mid b_i = a_i^{m_i},\ i = 1, \dots, n\}$ и определим отображение $\varphi : S \to B$, считая $\varphi(a_i) = b_i$. Будем рассматривать подгруппу $H = \langle b_1, \dots, b_n \rangle$ группы G как самостоятельную группу, заданную на множестве B с функцией Ольшанского $f_{H,B}$. Пусть $u(a_1, \dots, a_n) = e$ — соотношение в группе G_f. По утверждению 4 $f_{H,B} \leqslant_\varphi f_{G,S}$, откуда по определению 4 существует гомоморфизм G на H, продолжающий отображение φ, что приводит к соотношению $u|_{a_i = a_i^{m_i}} = e$ в группе H. Поскольку $H < G$, это соотношение выполняется и в самой группе G. □

Следующие примеры понадобятся для доказательства основных результатов.

Пример 2. Пусть k и m — натуральные числа. Построим нильпотентную группу $G(k,m)$ от трех порождающих a, b, c. Найдем q такое, что $2^{q-1} < k+1 \leqslant 2^q$. Положим

$$A = \langle a_0, b_0, d_0 \mid a_0^2 = b_0^2 = e,\ d_0 = [a_0, b_0],\ d_0^{2m} = e \rangle,$$
$$C = \langle c_0 \mid c_0^{2q} = e \rangle.$$

Рассмотрим сплетение $A \operatorname{wr} C$. Зафиксируем элементы в $A \operatorname{wr} C$:

$$a_1 = ((a_0, e, \ldots, e), e), \quad b_1 = ((b_0, e, \ldots, e), e), \quad c = ((e, \ldots, e), c_0),$$
$$a = [a_1, c^{(2^q-k-1)}], \quad b = \left[b_1^{c^{2^{q-1}}}, c^{(2^q-k-1)}\right], \quad d = ((d_0, \ldots, d_0), e).$$

Положим $G(k,m) = \langle a, b, c \rangle$.

Подсчитаем функцию Ольшанского группы $G(k,m)$. Поскольку $2^q - k - 1 \leqslant 2^{q-1}$, то $a = ((\underbrace{*, \ldots, *}_{2^{q-1}}, e, \ldots, e), e)$, $b = ((\underbrace{e, \ldots, e}_{2^{q-1}}, *, \ldots, *), e)$, и подгруппа $\langle a, b \rangle$ абелева. Подгруппы $\langle a, c \rangle$ и $\langle b, c \rangle$ изоморфны. При всех $i, j = 0, \ldots, k$ $[a, c^{(i)}]$ и $[a, c^{(j)}]$ перестановочны, $[a, c^{(k)}] = [a_1, c^{(2^q-1)}] = ((a_0, \ldots, a_0), e) \neq e$, $[a, c^{(k+1)}] = e$. Таким образом ступень нильпотентности подгрупп $\langle a, c \rangle$ и $\langle b, c \rangle$ равна $k+1$. Найдем ступень нильпотентности группы $G(k,m)$. Имеем

$$[a, c^{(k)}, [b, c^{(k)}]^{(m)}] = \left((d_0^{2^{m-1}}, \ldots, d^{2^{m-1}}), e\right) \neq e. \tag{8}$$

Следовательно, ступень нильпотентности группы $G(k,m)$ не менее чем $(k+1)(m+1)$. Ступень нильпотентности подгруппы $H = \langle a_1, b_1 \rangle \cong A$ группы $G(k,m)$ равна $m+1$. Действительно, $[d_0, a_0] = [d_0, b_0] = d_0^{-2}$, откуда $[a_0, b_0^{(m)}] = d_0^{2^{m-1}}$ является коммутатором максимального веса. Построим в $G(k,m)$ нитевой базис Ширшова с упорядочением порождающих $a > b > c$. В этом случае произвольный базисный коммутатор w веса, большего 1, принадлежит нижней подгруппе сплетения и представляет собой коммутаторное слово $w(v_1, \ldots, v_s)$ от коммутаторов $v_\alpha = [x_\alpha, c^{(r_\alpha)}]$, где $x_\alpha = a, b$. Поскольку $[x_\alpha, c^{(k+1)}] = e$, то $0 \leqslant r_\alpha \leqslant k$ и наибольший вес базисного коммутатора группы $G(k,m)$ не превосходит $(k+1)(m+1)$, где $m+1$ — ступень нильпотентности подгруппы H. Окончательно получаем, что ступень нильпотентности группы $G(k,m)$ равна $(k+1)(m+1)$. Функция Ольшанского группы $G(k,m)$ полностью определена:

$$f(a) = f(b) = f(c) = f(a,b) = 1,\ f(a,c) = f(b,c) = k+1,\ f(a,b,c) = (k+1)(m+1). \ \square$$

Пример 3. Пусть $Q = \{q_1 \ldots, q_t\}$ — конечное множество мощности $t \geqslant 2$ и $m \geqslant t$ — натуральное число. Определим монотонную функцию $f : \mathcal{F}_1(Q) \to \mathbb{N}$, полагая $f(Q) = m$, а для остальных T из $\mathcal{F}_1(Q)$ будет $f(Y) = |Y|$. Построим на Q нильпотентную группу с функцией Ольшанского f. Для этого рассмотрим конечное множество $X = \{x_1, \ldots, x_t\}$ мощности $t \geqslant 2$. Через $A(X)$ обозначим свободную ассоциативную $\mathbb{Z}$-алгебру с единицей с системой свободных порождающих X.

Каждый элемент алгебры $A(X)$ представим в виде многочлена от t некоммутирующих переменных $x_1, \ldots, x_t$ с коэффициентами из $\mathbb{Z}$. С каждым одночленом $a = x_{i_1}^{n_1} \cdots x_{i_k}^{n_k}$ свяжем степень $d(a) = n_1 + \cdots + n_k$ и множество переменных $\operatorname{set}(a) = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\}$, входящих в a. Множество всех одночленов алгебры $A(X)$ обозначим через $M(X)$. Положим $V_f = \{a \in M(X) \mid d(a) > f(\operatorname{set}(a))\}$. Через I обозначим двусторонний идеал алгебры $A(X)$, порожденный множеством V_f, а через A_f — фактор-алгебру $A(X)/I$. Порождающие $x_i + I$, а также нулевой и единичный элементы фактор-алгебры A_f в дальнейшем обозначаем теми же символами, что и в алгебре $A(X)$: x_i, 0, 1 соответственно.

Нетрудно видеть, что многочлен $a \in A(X)$ принадлежит идеалу I тогда и только тогда, когда

$$a = \sum n_i u_i v_i w_i, \tag{9}$$

где $n_i \in \mathbb{Z}$, $v_i \in V_f$, u_i, w_i (возможно, пустые) принадлежат $M(X)$. Заметим, что из определения идеала I следует, что все однородные многочлены степеней, строго больших m, принадлежат I. Таким образом, подалгебра B, состоящая из всех элементов алгебры A_f, свободный член которых равен 1, нильпотентна индекса не более чем $m+1$. Следовательно, множество $1+B$ является нильпотентной группой относительно умножения. Элементы $1+x_i$ обозначим символами q_i. Нас интересует подгруппа $G(m,t)$ группы $1+B$, порожденная множеством $Q = \{q_i \mid i = 1,\dots,t\}$. Отметим, что группа $G(m,t)$ без кручения, поскольку $(1+v)^n = 1+nv+u$, где u представляет собой сумму однородных многочленов степеней, строго больших $d(v)$.

Подсчитаем функцию Ольшанского g группы $G(m,t)$ с множеством порождающих Q. Разделим m на t с остатком: $m = qt + r$. Рассмотрим коммутатор $c = [q_1,\dots,q_t,\dots,q_1,\dots,q_t,q_1,\dots,q_r]$ веса m. Индукцией по m получим $c = 1 + \sum v_i$, где v_i — различные многочлены степени m с коэффициентами ± 1, причем $v_1 = x_1 \cdots x_t \cdots x_1 \cdots x_t x_1 \cdots x_r$ не содержит подслова из порождающего множества V_f идеала I и по условию (9) $v_1 \neq 0$ в A_f, откуда $c \neq e$ в группе G. Поскольку все однородные многочлены степеней, строго больших m, равны нулю в A_f, все простые коммутаторы весов, строго больших m, равны единице в группе $G(m,t)$. Следовательно, ступень нильпотентности группы $G(m,t)$ равна m, и, значит, $g(S) = m$. Аналогично получаем, что $g(Y) = |Y|$ для всех остальных $Y \in \mathscr{F}_1(Q)$. Таким образом, g совпадает с функцией f, что и требовалось. □

§ 3. Некоторые коммутаторные соотношения

Лемма 1. *Пусть G — нильпотентная группа, $a_1,\dots,a_n,b$ — элементы группы G, $u = u(a_1,\dots,a_n)$ — коммутатор, $q_i = \mathrm{var}_{a_i}(u)$. Если для каждого $i = 1,\dots,n$ существуют $k_i \in \mathbb{N}$ такие, что $[a_i, b^{(k_i+1)}] \equiv e$, то*

$$[u, b^{(r)}] \equiv \begin{cases} w_{k_1,\dots,k_n}^{\tau_w},\ \tau_w > 0 & \text{при } r = s = q_1k_1 + \dots + q_nk_n, \\ e & \text{при } r > s, \end{cases} \tag{10}$$

где $w_{k_1,\dots,k_n} = u|_{a_i=[a_i,b^{(k_i)}]}$.

Доказательство. Соотношение (10) следует из формулы (3). Действительно, при $r > s$ все сомножители $w_{j_1,\dots,j_n}$ в правой части формулы (3) эквивалентны e, поскольку в каждом из них присутствует хотя бы один коммутатор $[a_i, b^{(k_i+1)}] \equiv e$, а при $r = s$ по той же причине все сомножители в правой части формулы (3), за исключением, быть может, $w_{k_1,\dots,k_n}$, эквивалентны e. □

Лемма 2. *Пусть G — нильпотентная группа, $a_1,\dots,a_n,b$ — элементы группы G и $u = u(a_1,\dots,a_n)$ — коммутатор. Если существуют натуральные числа $k_1,\dots,k_n$, $\tau_0,\dots,\tau_n$, $\tau_i > 0$, $i = 0,\dots,n$, такие, что $u^{\tau_0} \equiv e$, $[a_i, b^{(k_i+1)}]^{\tau_i} \equiv e$, $i = 1,\dots,n$, то найдется такое натуральное $\tau > 0$, что*

$$(u|_{a_i=[a_i,b^{(k_i)}]})^{\tau} \equiv e.$$

Доказательство. Пусть q_i — число вхождений переменной a_i в слово u. Положим $r = q_1k_1 + \dots + q_nk_n$. Применяя (3) к коммутатору $[u, b^{(r)}]$, получим

$$e \equiv [u, b^{(r)}]^{\tau_0} \equiv w_{k_1,\dots,k_n}^{\tau_0\tau(j_1,\dots,j_n)} \cdot v,$$

где $w_{k_1,\dots,k_n} = u|_{a_i=[a_i,b^{(k_i)}]}$, а v является произведением коммутаторов, каждый из которых содержит хотя бы одно подслово вида $[a_i, b^{(s)}]$, где $s > k_i$, поэтому найдется такое $\tau_v > 0$, что $v^{\tau_v} \equiv e$. Полагая $\tau = \tau_0\tau(j_1,\dots,j_n)\tau_v$, получим требуемое. □

Утверждение 6. *Пусть G — нильпотентная группа с множеством порождающих $S = \{a_1, \dots, a_n, b\}$, f — ее функция Ольшанского и $f(a_1, \dots, a_n) = m$, $f(a_i, b) = k+1$, $i = 1, \dots, n$. Если $u = u(a_1, \dots, a_n)$ — простой коммутатор веса, большего m, то элемент $w = u|_{a_i=[a_i, b^{(k)}]}$ имеет конечный порядок.*

Доказательство достаточно провести для группы G_f, поскольку при гомоморфизме элементы конечного порядка переходят в элементы конечного порядка. По условию теоремы $u = e$. По лемме 2 существует $\tau > 0$ такой, что $w^\tau \equiv e$. Пусть q — ступень нильпотентности группы G_f. Проведем индукцию по числу $p = q - \mathrm{wt}(w)$.

1. $p < 0$. В этом случае $w = e$.

2. $p = 0$. В этом случае $w^\tau \equiv e$ влечет $w^\tau = e$ и, следовательно, w имеет конечный порядок.

3. Пусть для всех $p < p_0$ утверждение доказано и $q - \mathrm{wt}(w) = p_0$. Из $w^\tau \equiv e$ получаем, что w^τ представим в виде произведения коммутаторов весов, больших, чем $\mathrm{wt}(w)$:

$$w^\tau = w_1^{\tau_1} \cdot \ldots \cdot w_r^{\tau_r}. \tag{11}$$

Построим нитевой базис Ширшова группы G_f, считая, что порождающий b меньше любого другого порождающего, и в дальнейшем считаем, что элементы $w_1, \dots, w_r$ из представления (11) выбираются из этого базиса и расположены в (11) в порядке возрастания весов: $\mathrm{wt}(w_1) \leqslant \dots \leqslant \mathrm{wt}(w_r)$, и при этом $w_i \neq w_j$, если $i \neq j$. Среди всех представлений вида (11) выберем одно такое, чтобы $m_1 = \mathrm{wt}(w_1)$ был максимален, а количество w_i с весом m_1 было минимально. Покажем, что такого представления, кроме тривиального ($r = 0$, $w^\tau = e$), не существует. Предположим противное: $r > 0$, $w_1 \neq e$. Рассмотрим два случая.

1. $\mathrm{var}_b(w_1) = k \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{var}_{a_i}(w_1)$. Поскольку w_1 — элемент нитевого базиса Ширшова и $b < a_i$, то $w_1 = w_1(v_1, \dots, v_s)$, где коммутаторы v_j имеют вид $[a_{i_j}, b^{(t_j)}]$. Если при этом хотя бы одно из $t_j > k$, то v_j, а с ним и w_1 равны e. Если же все $t_j \leqslant k$, то равенство $\mathrm{var}_b(w_1) = k \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{var}_{a_i}(w_1)$ приводит к тому, что

$$t_j = k \quad \text{для всех} \quad j = 1, \dots, s. \tag{12}$$

Положим $u_1 = w_1|_{v_j=a_{i_j}}$, равенства (12) гарантируют, что $w_1 = u_1|_{a_i=[a_i, b^{(k)}]}$. Теперь заметим, что $\mathrm{wt}(w_1) = (k+1)\,\mathrm{wt}(u_1)$, а $\mathrm{wt}(w) = (k+1)\,\mathrm{wt}(u)$, поэтому $\mathrm{wt}(u_1) > \mathrm{wt}(u)$ и $p = q - \mathrm{wt}(u_1) < p_0$. По предположению индукции w_1 — элемент конечного порядка, и его можно исключить из представления (11), возводя w в подходящую степень. Противоречие с выбором представления (11).

2. $\mathrm{var}_b(w_1) \neq k \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{var}_{a_i}(w_1)$. По условию теоремы для любого $i = 1, \dots, n$ коммутатор $[a_i, b^{(k)}]$ принадлежит последнему члену нижнего центрального ряда группы $\langle a_i, b\rangle$, поэтому замена переменной ее степенью приводит к чистым равенствам: $[a_i^{2^k}, b^{(k)}] = [a_i, b^{(k)}]^{2^k} = [a_i, (b^2)^{(k)}]$. Отсюда имеем

$$w|_{a_i=a_i^{2^k}} = w|_{b=b^2}. \tag{13}$$

По утверждению 3 соотношение (11) остается в силе после замен $a_i \to a_i^{2^k}$, $b \to b^2$:

$$w|_{a_i=a_i^{2^k}} = w_1^{\tau_1}|_{a_i=a_i^{2^k}} \cdot \ldots \cdot w_r^{\tau_r}|_{a_i=a_i^{2^k}} = w_1^{\nu_1} \cdot w^*, \tag{14}$$

$$w|_{b=b^2} = w_1^{\tau_1}|_{b=b^2} \cdot \ldots \cdot w_r^{\tau_r}|_{b=b^2} = w_1^{\mu_1} \cdot w^{**}, \tag{15}$$

где через w^*, w^{**} обозначены остальные сомножители соответствующих произведений. Явный вид этих элементов не играет роли, важно только отметить, что в представлении w^*, w^{**} через нитевой базис Ширшова остаются те же базисные элементы наименьшего веса, что и в представлении (11), т. е. элементы подмножества $w_2, \dots, w_r$. Из (13)–(15) получим

$$w_1^{\nu_1} w^* = w_1^{\mu_1} \cdot w^{**}.$$

В рассматриваемом случае $\mathrm{var}_b(w_1) \neq k \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{var}_{a_i}(w_1)$, откуда $\nu_1 \neq \mu_1$, $w_1^{\nu_1-\mu_1} = w^{**}(w^*)^{-1}$, и поэтому w_1 должен быть исключен из представления (11). □

Лемма 3. *Пусть:*

1) *G — нильпотентная группа,*
2) *$a, b, c \in G$,*
3) *q — ступень нильпотентности подгруппы $\langle b, c\rangle$,*
4) *n, m и τ — натуральные числа, $\tau > 0$,*
5) *$U \doteq \{u_1, \dots, u_n\}$ — подмножество простых коммутаторов подгруппы $\langle b, c\rangle$,*
6) *$\langle U\rangle$ — нормальная подгруппа группы $\langle b, c\rangle$,*
7) *$[a, u^{(m+1)}]^\tau \equiv e$ для любого $u \in U$,*
8) *если $v = v(b, c)$ — простой коммутатор, то найдутся $u_{\alpha_1}, \dots, u_{\alpha_k}$ из U такие, что*

$$v = u_{\alpha_1}^{\nu_1} \cdot \dots \cdot u_{\alpha_k}^{\nu_k}, \tag{16}$$

и если $v \neq e$, то $\mathrm{wt}(v) = \min\{\mathrm{wt}(u_{\alpha_1}), \dots, \mathrm{wt}(u_{\alpha_k})\}$,

9) *$s(n, q) = 1 + q + \dots + q^{n-1}$.*

Тогда для любого $r > ms(n, q)$ и любого набора элементов $g_1, \dots, g_r$ из $\langle U\rangle$

$$[a, g_1, \dots, g_r]^\tau \equiv e. \tag{17}$$

Доказательство достаточно выполнить для элементов $g_1, \dots, g_r$ из U. Проведем индукцию по числу $n = |U|$.

Пусть $n = 1$. Тогда $s(n, m) = 1$ и $r \geqslant m + 1$. По условию 4 леммы $[a, u^{(m+1)}]^\tau \equiv e$, откуда $[a, u^{(r)}]^\tau \equiv e$.

Предположим, что для всех $n < k$ лемма доказана, и пусть теперь $n = k$. Упорядочим коммутаторы из U по возрастанию весов, считая u_1 коммутатором наименьшего веса. Если u_1 не присутствует среди коммутаторов $u_{\alpha_1}, \dots, u_{\alpha_r}$, то $U_1 = U \setminus \{u_1\}$ также удовлетворяет условиям (5)–(8) леммы и $|U_1| = n - 1 < k$. Применяя лемму к U_1, получим, что (17) выполняется при $r > ms(n-1, q)$, а так как $s(n-1) < s(n, q)$, то (17) выполняется и при $r > ms(n, q)$. Пусть теперь u_1 встречается среди коммутаторов последовательности $u_{\alpha_1}, \dots, u_{\alpha_r}$, и пусть j — количество вхождений u_1 в эту последовательность. Рассмотрим два случая.

1. $j > (q-1)(r-j) + m$. Используя тождество Якоби (1), соберем в $[a, u_{\alpha_1}, \dots, u_{\alpha_r}]$ все коммутаторы u_1 влево, получим

$$[a, u_{\alpha_1}, \dots, u_{\alpha_r}] = w_1 \cdot \dots \cdot w_p,$$

где коммутаторы $w_1, \dots, w_p$ имеют вид

$$\left[a, u_1^{(i_0)}, \left[u_{\beta_1}, u_1^{(i_1)}\right], \dots, \left[u_{\beta_{r-j}}, u_1^{(i_{r-j})}\right]\right],$$

а $i_0 + i_1 + \dots + i_{r-j} = j$.

Теперь заметим, что если $i_0 > m$, то $\left[a, u_1^{(i_0)}\right]^\tau \equiv e$, а если хотя бы для одного из $\gamma = 1, \dots, r-j$ $i_\gamma \geqslant q$, то $\left[u_{\beta_\gamma}, u_1^{(i_\gamma)}\right] = e$. Поскольку $i_0 + i_1 + \dots + i_{r-j} = j > (q-1)(r-j) + m$, то хотя бы одно из условий $i_0 > m$, $i_\gamma \geqslant q$ выполняется, следовательно, все $w_1^\tau \cdot \dots \cdot w_p^\tau \equiv e$. Таким образом, тождество (17) выполняется.

2. $j \leqslant (q-1)(r-j) + m$. Также используя тождество Якоби (1), соберем в $[a, u_{\alpha_1}, \dots, u_{\alpha_r}]$ все коммутаторы u_1 вправо, получим

$$[a, u_{\alpha_1}, \dots, u_{\alpha_r}] = v_1 \cdot \dots \cdot v_p,$$

где коммутаторы $v_1, \dots, v_p$ имеют вид

$$[a, [u_{\beta_1}, u_1^{(i_1)}], \dots, [u_{\beta_{r-j}}, u_1^{(i_{r-j})}], u_1^{(i_0)}]^{\pm 1}, \quad i_0 + i_1 + \dots + i_{r-j} = j. \tag{18}$$

Из $j \leqslant (q-1)(r-j)+m$ получаем $r-m \leqslant (q-1)(r-j)+r-j = q(r-j)$, откуда $r_1 = r-j \geqslant (r-m)/q$, и поскольку $r > ms(n,q)$, то $r_1 > m\frac{s(n,q)-1}{q} = ms(n-1,q)$. Поскольку U удовлетворяет условиям (5)–(8), то все коммутаторы u_{β_γ}, $\gamma = 1, \dots, r_1$, из выражения (18) представимы в виде произведения элементов u_δ из U, и так как $\mathrm{wt}(u_\delta) > \mathrm{wt}(u_1)$, то все u_δ принадлежат U_1. Применяя предположение индукции к U_1, получим

$$[a, u_{\delta_1}, \dots, u_{\delta_r}]^\tau \equiv e,$$

откуда следует, что $v^\tau \equiv e_i$ для всех v вида (18). Тем самым (17) справедливо и в этом случае. □

Лемма 4. *Пусть G — нильпотентная группа, $a, b, c \in G$, $n, m, q, \nu \in \mathbb{N}$, $\nu > 0$, $[a, b^{(n+1)}]^\nu \equiv [a, c^{(m+1)}]^\nu \equiv e$ и ступень нильпотентности подгруппы $\langle b, c\rangle$ равна $q+1$. Тогда для любых $i, k \in \mathbb{N}$ и любого натурального $r > mq+n$ существует натуральное число $\mu \neq 0$ такое, что $[a, c^{(i)}, [b, c^{(k)}]^{(r)}]^\mu$ эквивалентен (возможно, пустому) произведению коммутаторов вида $[a, c^{(j)}, v_1, \dots, v_t]$, и при этом $i \leqslant j \leqslant m$, $\mathrm{var}_b(w_i) = r$, $\mathrm{var}_c(w_i) = kr+i$, $\mathrm{var}_b(v_\alpha) \geqslant 1$ для всех $\alpha = 1, \dots, t$, а количество тех v_α, у которых $\mathrm{var}_c(v_\alpha) = k\,\mathrm{var}_b(v_\alpha)$, не превышает $mq+n$.*

Доказательство достаточно провести для $i \leqslant m$, $k \leqslant q$, поскольку в противном случае $[a, c^{(i)}, [b, c^{(k)}]^{(r)}]^\nu = e$. Положим $g = a^\nu$. По лемме 1 при $r > mq+n$ имеем $[g, c^{(i)}, b^{(r)}] \equiv e$. Коммутируя левую часть kr раз элементом c и применяя формулу (3), получим

$$e \equiv [g, c^{(i)}, b^{(r)}, c^{(kr)}] \equiv [g, c^{(i)}, [b, c^{(k)}]^{(r)}]^{\tau(0,k,\dots,k)} \cdot W_1 \cdot W_2, \tag{19}$$

где $\tau(k_0, \dots, k_n) > 0$,

$$W_1 = \prod_{\substack{k_1+\dots+k_r = kr \\ |k-k_1|+\dots+|k-k_r| \neq 0}} [g, c^{(i)}, [b, c^{(k_1)}], \dots, [b, c^{(k_r)}]]^{\tau(0,k_1,\dots,k_n)},$$

$$W_2 = \prod_{k_0=1}^{m-i} \prod_{k_1+\dots+k_r = kr-k_0} [g, c^{(i+k_0)}, [b, c^{(k_1)}], \dots, [b, c^{(k_r)}]]^{\tau(k_0,\dots,k_n)}.$$

Отметим, что в произвольном сомножителе произведений W_1, W_2 количество подслов $[b, c^{(k)}]$ строго меньше r.

Сомножитель $[g, c^{(i)}, [b, c^{(k)}]^{(r)}]^{\tau(0,k,\dots,k)}$ выражения (19) перенесем в левую часть, получим $[g, c^{(i)}, [b, c^{(k)}]^{(r)}]^{\tau(0,k,\dots,k)} \equiv W_2^{-1} W_1^{-1}$. Сделаем обратную замену $a^\nu = g$ и вынесем показатель ν за коммутаторные скобки, получим

$$[a, c^{(i)}, [b, c^{(k)}]^{(r)}]^\mu \equiv W_2^{-1} W_1^{-1}, \tag{20}$$

где $\mu = \nu\tau(0, k, \dots, k) \neq 0$. Проведем индукцию по r.

1. $r = mq+n+1$. В этом случае разложение (20) и будет требуемым.

2. Пусть лемма справедлива для всех r таких, что $mq+n < r < r_0$. При $r = r_0$ сначала разложим $[a, c^{(i)}, [b, c^{(k)}]^{(r)}]^\mu$ по формуле (20), затем в тех сомножителях произведений W_1, W_2, в которых количество подслов $[b, c^{(k)}]$ строго больше $mq+n$, проведем следующее преобразование. Используя формулу (3), соберем все подслова $[b, c^{(k)}]$ влево вплоть до коммутатора $[a, c^{(i)}]$ ($[a, c^{(i+k_0)}]$), получим коммутаторы вида

$$[a, c^{(j)}, v^{(s)}, v_1, \dots, v_t], \tag{21}$$

где только v имеет вид $[b, c^{(k)}]$, и при этом $0 \leqslant s < r_0$, остальные $v_1, \ldots, v_t$ имеют вид $[b, c^{(k_\beta)}]$, $k_\beta \neq k$, или $[b, c^{(k_\gamma)}, [b, c^{(k)}]^{(p)}]$ — в обоих случаях $\mathrm{var}_c(v_\alpha) \neq k\,\mathrm{var}_b(v_\alpha)$. Поскольку $s < r_0$, согласно предположению индукции при $mq+n < s$ соответствующие степени коммутаторов $[a, c^{(j)}, v^{(s)}]$ имеют требуемое в лемме представление W в виде произведения коммутаторов $[a, c^{(j)}, u_1, \ldots, u_h]$. Возведем коммутатор (21) в необходимую степень, перенесем показатель степени на подкоммутатор $[a, c^{(j)}, v^{(s)}]$ и заменим полученное выражение эквивалентным ему произведением W. Вынося знак произведения за коммутаторные скобки, получим, что некоторая ненулевая степень коммутатора (21) эквивалентна произведению коммутаторов вида $[a, c^{(j)}, u_1, \ldots, u_h, v_1, \ldots, v_t]$, в которых количество тех u_α, для которых $\mathrm{var}_c(u_\alpha) = k\,\mathrm{var}_b(u_\alpha)$, не превышает $mq + n < s$ по предположению индукции, а для всех $\beta = 1, \ldots, t$ по построению имеем $\mathrm{var}_c(v_\beta) \neq k\,\mathrm{var}_b(v_\beta)$. □

Лемма 5. *Пусть G — нильпотентная группа с множеством порождающих $S = \{a, b, c\}$ и ступень нильпотентности подгруппы $\langle b, c\rangle$ равна $q + 1$. Пусть i, n, m, ν, μ — натуральные числа и $\nu, \mu > 0$. Если $[a, b^{(n)}]^\nu \equiv [a, c^{(m)}]^\mu \equiv e$ и $r \geqslant n+m-i-1$, то существует натуральное $\sigma > 0$ такое, что $[a, c^{(i)}, [b, c^{(q)}]^{(r)}]^\sigma \equiv e$.*

Доказательство достаточно провести для $i < m$. Положим $j = m - i$ и проведем индукцию по числу j.

1. $j = 1$. В этом случае $m > 0$. Полагая в лемме 2 $a_1 = a$, $a_2 = b$, $b = c$, $u = [a, b^{(n)}]$, $k_1 = i = m - j = m - 1$, $k_2 = q$, $\tau_0 = \nu$, $\tau_1 = \mu$, $\tau_2 = 1$, найдем $\tau > 0$ такое, что $[a, c^{(i)}, [b, c^{(q)}]^{(n)}]^\tau \equiv e$. Поскольку $r \geqslant n$, утверждение леммы справедливо.

2. Пусть утверждение леммы справедливо для всех $1 \leqslant j \leqslant j_0$. Положим $j = j_0$. По условию леммы $r > n + m - i - 1 = n + j - 1 \geqslant n$, значит,

$$[a, b^{(r)}]^\nu \equiv e. \tag{22}$$

Коммутируя (22) $qr + j$ раз элементом c и применяя формулу (3) к коммутатору $[[a, b^{(r)}], c^{(qr+j)}]$, получим

$$e \equiv [[a, b^{(r)}], c^{(qr+j)}] \equiv \prod_{j_0+\cdots+j_r=qr+j} [a, c^{(j_0)}, [b, c^{(j_1)}], \ldots, [b, c^{(j_r)}]]^{\tau(j_0,\ldots,j_r)}, \tag{23}$$

где $\tau(j_1, \ldots, j_n) > 0$. Так как $[b, c^{(q)}]$ лежит в центре группы $\langle b, c\rangle$, то $[b, c^{(q)}]$ перестановочен с $[b, c^{(k)}]$ при любом k. Поэтому в каждом сомножителе правой части выражения (23) все подслова $[b, c^{(q)}]$ можно собрать влево вплоть до $[a, c^{(j_0)}]$. После этого преобразования вычеркнем из полученного произведения эквивалентные e сомножители (возводя произведение в необходимую степень). При этом будут вычеркнуты сомножители, в которых $j_0 \geqslant m$ или $j_\alpha > q$, $\alpha = 1, \ldots, r$, и те сомножители, в которых $j_0 > j$, а количество подслов $[b, c^{(q)}]$ не менее чем $n+m-j-1$ — последние будут вычеркнуты в силу предположения индукции. Поскольку сумма всех вхождений элемента c в каждом из сомножителей равна $qr + j$, невычеркнутым останется только сомножитель $[a, c^{(j)}, [b, c^{(q)}]^{(r)}]^\sigma$, и утверждение индукции доказано. □

Определение 5. Определим индуктивно монотонную функцию $h(x, y, z, t)$ натуральных аргументов, полагая

1) $h(x, y, z, 0) = x$ для всех x, y, z.

2) Пусть $h(x, y, z, k)$ определена при $k \leqslant t$ для всех x, y, z. Положим

2.1) $h(x, y, 0, t + 1) = x$ для всех $x, y, t \in \mathbb{N}$.

2.2) Пусть $h(x, y, k, t + 1)$ определена при $k \leqslant z$ для всех x, y. Положим

2.2.1) $h(x, 0, z + 1, t + 1) = h(x, t, z, t + 1) \cdot (t + 1)^{2^t+1}$.

2.2.2) Пусть $h(x, k, z + 1, t + 1)$ определена при $k \leqslant y$ для всех x. Положим $h(x, y + 1, z + 1, t + 1) = h(h(x, y, z + 1, t + 1), t, t, t)$.

Непосредственно из определения следует, что $h(x,y,z,t)$ не убывает по любому аргументу и $h(x,y,z,t) \geqslant x$ для всех $x,y,z,t \in \mathbb{N}$. Теперь полагая

$$g(x,k) = h(x,k,k,k+1), \tag{24}$$

получим

$$\begin{gathered} g(x,k) \geqslant x, \\ g(x,k) \geqslant h(x,y,z,t) \text{ для всех } y,z \leqslant k,\ t \leqslant k+1. \end{gathered} \tag{25}$$

Утверждение 7. *Пусть $n,q,\nu \in \mathbb{N}$ и $\nu > 0$. Пусть $G(n,\nu,q,a,b,c)$ — нильпотентная группа с множеством порождающих $S = \{a,b,c\}$, в которой ступень нильпотентности подгруппы $\langle b,c\rangle$ равна $q+1$ и выполняется соотношение*

$$[a,b^{(n)}]^\nu \equiv [a,c^{(n)}]^\nu \equiv e.$$

Пусть $g(x,y)$ — функция натуральных аргументов, определенная по формуле (24). Тогда

$$(\forall v \in \langle b,c\rangle)(\forall r \geqslant g(n,q))(\exists \sigma > 0)([a,v^{(r)}]^\sigma \equiv e). \tag{26}$$

Доказательство. Проведем индукцию по числу q.

1. $q = 0$. В этом случае группа $\langle b,c\rangle$ коммутативна и произвольный простой коммутатор v из $\langle b,c\rangle$ есть b или c. По определению (24) $g(n,0) = h(n,0,0,1) = n$, но тогда $[a,v^{(r)}]^\nu \equiv e$ при $r \geqslant g(n,0)$, и утверждение справедливо.

2. Пусть утверждение справедливо для всех $0 \leqslant q < q_0$. Положим $q = q_0$ и построим систему из q подмножеств:

$$U_j = \{[b,c^{(q-j+1)}],[[b,c^{(q-j+1)}],g_1],\ldots,[[b,c^{(q-j+1)}],g_1,\ldots,g_{j-1}] \mid g_i \in \{b,c\}\},$$

где $1 \leqslant j \leqslant q$. Обозначив $N_j = |U_j|$, получим

$$N_j = 2^j - 1 < 2^q. \tag{27}$$

Из тождества Якоби (1) получаем, что все U_i удовлетворяют условиям 5)–8) леммы 3. Более того, если некоторый коммутатор v содержит подслово $[b,c^{(i)}]$, $i > 0$, то он представим в виде произведения (16) элементов v_α из U_{q+1-i}, а так как $[b,c] \in U_q$, то любой простой коммутатор $v \neq b,c$ из $\langle b,c\rangle$ представим в виде произведения элементов $v_\alpha \in U_q$ и $\mathrm{wt}(v) = \min\{\mathrm{wt}(v_\alpha) \mid 1 \leqslant \alpha \leqslant s\}$. Кроме того, при $v = b,c$ утверждение справедливо автоматически, поэтому достаточно доказать выполнение условия (26) для любого $v \in U_q$.

Произвольный простой коммутатор v из U_j характеризуется парой чисел: $j(v)$ и $d(v)$, где $j(v)$ — наименьшее j, при котором $v \in U_j$ и $d(v) = \mathrm{wt}(v) + j(v) - (q+2)$. При этом $j(v) > 0$. Учитывая вышесказанное и неравенство (25), вместо условия (26) достаточно доказать выполнение следующего условия: для любого $j = 1,\ldots,q$

$$(\forall v \in U_j)(\forall r \geqslant h(n,d(v),j(v),q+1))(\exists \sigma > 0)([a,v^{(r)}]^\sigma \equiv e). \tag{28}$$

Проведем индукцию по числу j.

2.1. $j = 1$. В этом случае $v = [b,c^{(q)}]$, $r \geqslant h(n,0,1,q+1) = n \cdot (q+1)^{2^q+1} > 2n-1$, и по лемме 5 условие (28) справедливо.

2.2. Пусть для $1 \leqslant j < j_0$ предположение индукции выполняется. Положим $j = j_0$. Если $j(v) < j$, то $v \in U_{j(v)}$, и утверждение (28) выполняется в силу предположения индукции, поэтому считаем в дальнейшем $j = j(v)$. Проведем индукцию по числу $d(v) = \mathrm{wt}(v) + j(v) - (q+2)$.

2.2.1. $d(v) = 0$. В этом случае $v = [b,c^{(k)}]$, где $k = q-j+1$. Так как $r \geqslant h(n,0,j,q+1) \geqslant h(n,0,1,q+1) = n(q+1)^{2^q+1} > n(q+1)$, то по лемме 4 найдется натуральное число $\mu > 0$ такое, что

$$[a,[b,c^{(k)}]^{(r)}]^\mu \equiv \prod_{i=1}^{s} w_i, \tag{29}$$

где w_i имеет вид
$$[a, c^{(m)}, v_1, \ldots, v_t], \tag{30}$$
и при этом $0 \leqslant m \leqslant n$, $\operatorname{var}_b(w_i) = r$, $\operatorname{var}_c(w_i) = kr$, $\operatorname{var}_b(v_\alpha) \geqslant 1$ для всех $\alpha = 1, \ldots, t$, а количество тех v_α, у которых $\operatorname{var}_c(v_\alpha) = k\operatorname{var}_b(v_\alpha)$, не превышает $n(q+1)$. Разобьем множество $V(w_i) = \{v_1, \ldots, v_t\}$ на три подмножества:
$$V_+ = \{v \in V(w_i) \mid \operatorname{var}_c(v) > k\operatorname{var}_b(v)\}, \quad V_= = \{v \in V(w_i) \mid \operatorname{var}_c(v) = k\operatorname{var}_b(v)\},$$
$$V_- = \{v \in V(w_i) \mid \operatorname{var}_c(v) < k\operatorname{var}_b(v)\}.$$

Покажем, что при $r \geqslant h(n, 0, j, q+1)$ для каждого w_i из представления (29) найдется натуральное $\mu_i > 0$ такое, что
$$w_i^{\mu_i} \equiv e. \tag{31}$$
Поскольку ступень нильпотентности группы $\langle b, c\rangle$ равна $q+1$, справедливость условия (31) достаточно показать для тех w_i, у которых вес любого подслова v_α из выражения (30) не превосходит числа $q+1$. При таком предположении $\operatorname{wt}(w_i) = 1 + m + \operatorname{wt}(v_1) + \cdots + \operatorname{wt}(v_t) \leqslant 1 + m + t(q+1)$, а из (29) имеем $\operatorname{wt}(w_i) = \operatorname{wt}([a, [b, c^{(k)}]^{(r)}]) = 1 + r(k+1)$. Таким образом,
$$t \geqslant (r(k+1) - m)/(q+1) \geqslant (r(k+1) - n)/(q+1). \tag{32}$$

Введем обозначения: $n_+ = |V_+|$, $n_= = |V_=|$, $n_- = |V_-|$. Представление (29), (30) выбрано таким образом, что $n_= \leqslant n(q+1)$, и поскольку $n_+ + n_= + n_- = t$, то $t - n_+ - n_- \leqslant n(q+1)$, что дает
$$n_- \geqslant t - n_+ - n(q+1). \tag{33}$$
Далее обозначим
$$\beta_+ = \sum_{v \in V_+} \operatorname{var}_b(v), \quad \beta_= = \sum_{v \in V_=} \operatorname{var}_b(v), \quad \beta_- = \sum_{v \in V_-} \operatorname{var}_b(v),$$
$$\gamma_+ = \sum_{v \in V_+} \operatorname{var}_c(v), \quad \gamma_= = \sum_{v \in V_=} \operatorname{var}_c(v), \quad \gamma_- = \sum_{v \in V_-} \operatorname{var}_c(v)$$
и заметим, что
$$\beta_+ + \beta_= + \beta_- = r, \quad \gamma_+ + \gamma_= + \gamma_- = kr - m \geqslant kr - n. \tag{34}$$
Из $\operatorname{var}_c(v) < k\operatorname{var}_b(v)$ следует
$$\operatorname{var}_c(v) + 1 \leqslant k\operatorname{var}_b(v). \tag{35}$$
Суммируя неравенство (35) по всем $v \in V_-$, получим $\gamma_- + n_- \leqslant k\beta_-$, что равносильно
$$k\beta_- - \gamma_- \geqslant n_-. \tag{36}$$
Из $\gamma_= = k\beta_=$ и (34) следует, что $\gamma_+ + \gamma_- \geqslant k\beta_+ + k\beta_- - n$, откуда $\gamma_+ \geqslant k\beta_+ + k\beta_- - \gamma_- - n$, что вместе с (36) приводит к соотношению
$$\gamma_+ \geqslant k\beta_+ + n_- - n. \tag{37}$$
Из формул (33) и (37) вытекает
$$\gamma_+ \geqslant k\beta_+ + t - n_+ - n(q+2). \tag{38}$$

Как было отмечено выше, в каждом из подслов $v \in V(w_i)$ присутствует хотя бы один символ b, т. е. $\beta_+ \geqslant n_+$, что вместе с (38) дает
$$\gamma_+ \geqslant (k-1)n_+ + t - n(q+2). \tag{39}$$

Поскольку ступень нильпотентности группы $\langle b, c\rangle$ равна $q+1$, в каждом из $v \in V(w_i)$ присутствует не более чем q символов c, откуда $n_+ \geqslant \gamma_+/q$, что вместе с (39) дает $(q+1-k)n_+ \geqslant t - n(q+2)$, и, выразив t из (32), получим $(q+1-k)n_+ \geqslant (r(k+1)-n)/(q+1)-n(q+2)$. Подставив в последнее неравенство $k = q-j+1$, получим $jn_+ \geqslant (r(q-j+2)-n)/(q+1)-n(q+2)$. Поскольку $1 \leqslant j \leqslant q$, это неравенство влечет

$$qn_+ \geqslant (2r-n)/(q+1)-n(q+2) = r/(q+1)+(r-n((q+1)(q+2)+1))/(q+1). \quad (40)$$

Так как $q \geqslant 1$ и $r \geqslant h(n,0,1,q+1) = n(q+1)^{2^q+1} \geqslant n(q+1)^3 \geqslant n((q+1)(q+2)+1)$, т. е. $r - n((q+1)(q+2)+1) \geqslant 0$, то (40) влечет $n_+ \geqslant r/q(q+1)$. Учитывая, что $r \geqslant h(n,0,j,q+1) = h(n,q,j-1,q+1)\cdot(q+1)^{2^q+1}$, окончательно получим

$$n_+ \geqslant h(n,q,j-1,q+1)\cdot(q+1)^{2^q}/q. \quad (41)$$

Вспомним, что n_+ обозначает количество подслов v_α из представления (30) коммутатора w_i, для которых $\mathrm{var}_c(v_\alpha) > k\,\mathrm{var}_b(v_\alpha)$. Поскольку $k = q-j+1$, все такие v_α принадлежат $\langle U_{j-1}\rangle$. Используя (1), соберем в коммутаторе (30) все подслова $v \in V_+$ влево вплоть до элемента a, получим, что коммутатор (30) эквивалентен произведению коммутаторов вида

$$[a, [v_{\alpha_1}, x_1, \ldots, x_{i_1}], \ldots, [v_{\alpha_d}, y_1, \ldots, y_{i_d}], \ldots, v_\beta], \quad (42)$$

где каждое из $[v_{\alpha_1}, x_1, \ldots, x_{i_1}], \ldots, [v_{\alpha_d}, y_1, \ldots, y_{i_d}]$ принадлежит $\langle U_{j-1}\rangle$. По предположению индукции для любого u из U_{j-1} справедливо условие (28). Теперь в силу неравенств (27), (41) и леммы 3 некоторая ненулевая степень коммутатора (42) эквивалентна e. Следовательно, (31) выполнено, и в силу произвольности w_i из представления (29) условие (28) справедливо для любого v из U_j, для которого $d(v) = 0$.

2.2.2. Пусть предположение индукции (условие (28)) выполняется для любого v из U_j, для которого $0 \leqslant d(v) < d$. Покажем справедливость условия (28) для тех v из U_j, для которых $d(v) = d$. В этом случае $v = [v_1, x]$, где x равен b или c, $v_1 \in U_j$ и $0 \leqslant d(v_1) < d$. По предположению индукции найдется $\nu_1 > 0$ такое, что $[a, v_1^{(r)}]^{\nu_1} \equiv e$ при условии $r \geqslant h(n, d(v_1), j(v_1), q+1)$. Положим $n_1 = h(n, g(v_1), j(v_1), q+1) \geqslant n$, q_1 — ступень нильпотентности подгруппы $\langle v_1, x\rangle$. Так как $\mathrm{wt}(v_1) \geqslant 2$ (любой коммутатор из любого U_j имеет вес не менее чем 2), то $q_1 < q$. По основному предположению индукции (относительно параметра q) условие (26) выполняется для группы $G(n_1, \nu_1, q_1, a, v_1, x)$, и, таким образом, для любого $r \geqslant g(n_1, q_1)$ найдется $\sigma > 0$ такое, что

$$[a, [v_1, x]^{(r)}]^\sigma \equiv e.$$

Поскольку $G(n_1, \nu_1, q_1, a, v_1, x) < G(n, \nu, q, a, b, c)$, вышеприведенное соотношение выполняется и в группе $G(n, \nu, q, a, b, c)$ при $r \geqslant h(n_1, q, q, q) \geqslant h(n_1, q_1, q_1, q_1+1) = g(n_1, q_1)$. Подставляя значение $n_1 = h(n, d(v_1), j(v_1), q+1)$ в $h(n_1, q, q, q)$ и пользуясь определением 5, получим $h(h(n, d(v_1), j(v_1), q+1), q, q, q) = h(n, d(v_1)+1, j(v_1), q+1) \geqslant h(n, d(v), j(v), q+1)$. Следовательно, условие (28) имеет место для элемента v, и предположение индукции относительно параметра $d(v)$ выполнено. □

Повторением рассуждений из доказательств лемм 3–5 и утверждения 7 в терминах $\mathbb{Z}$-алгебры Ли получаем

Следствие 2. *Пусть $n, q, \nu \in \mathbb{N}$ и $\nu > 0$, пусть $L(n, \nu, q, a, b, c)$ — нильпотентная алгебра Ли над кольцом $\mathbb{Z}$ с множеством порождающих $S = \{a, b, c\}$, в которой ступень нильпотентности подалгебры $L(b, c)$, порожденной элементами b, c, равна $q+1$ и выполняется соотношение $\nu ab^n = \nu ac^n = 0$. Пусть $g(x, y)$ — функция натуральных аргументов, определенная по формуле (24). Тогда*

$$(\forall v \in L(b, c))(\forall r \geqslant g(n, q))(\exists \sigma > 0)(\sigma a v^r = 0).$$

§ 4. Свойства группы G_f

Теорема 1. *Пусть $f : \mathscr{F}_1(S) \to \mathbb{N}$ — монотонная функция, $f(X) \geqslant |X|$ для любого $X \in \mathscr{F}_1(S)$ и $f(X) = 1$ при $|X| = 1$, тогда функция Ольшанского $f_{G,S}$ группы $G = G_f$ совпадает с функцией f. Кроме того, если $\widehat{G}$ — фактор-группа группы G по ее периодической части, то функция Ольшанского $f_{\widehat{G},S}$ также совпадает с f.*

Доказательство. Пусть X — некоторое подмножество множества S, $|X| = t > 1$ и $f(X) = m$. Тогда по условию теоремы $m \geqslant t$. Рассмотрим группу $G(m,t)$ из примера 3. Эта группа задана на множестве Q мощности t, поэтому существует изоморфная ей группа H, заданная на множестве S с изоморфизмом, продолжающим отображение: $x_i \to q_i$ при $x_i \in X$, $y \to e$ при $y \in S \setminus X$. Как было показано в примере 2, функция Ольшанского группы $G(m,t)$, а с ней и функция Ольшанского $f_{H,S}$ группы H удовлетворяют условию $f_{H,S}(X) = m$, $f_{H,S}(Y) \leqslant |Y|$ для остальных $Y \in \mathscr{F}_1(S)$. Следовательно, $f_{H,S} \leqslant f_{G,S}$ и по определению 4 существует гомоморфизм группы G_f на H, тождественный на S, а так как H не имеет кручения, то аналогичный гомоморфизм будет и из $\widehat{G}$ на H. Из существования этих гомоморфизмов выводим, что ступень нильпотентности подгруппы $\langle X \rangle$ группы G (или $\widehat{G}$) не менее чем $m = f(X)$. Ввиду произвольности подмножества X получаем $f_{G,S} \geqslant f$. По определению 4 $f_{G,S} \leqslant f$, откуда $f_{G,S} = f$. $\square$

Определение 6. Функция $f : \mathscr{F}_1(S) \to \mathbb{N}$ называется *ступенчатой*, если существует такое линейное упорядочение множества S, что для любого $X \in \mathscr{F}_1(S)$ и любого непустого $Y \subset X$ $\max X \in Y$ влечет $f(Y) = f(X)$.

Теорема 2. *Если $f : \mathscr{F}_1(S) \to \mathbb{N}$ — монотонная ступенчатая функция и $f(X) \geqslant 1$ для любого $X \in \mathscr{F}_1(S)$, то группа G_f не имеет кручения.*

Доказательство. Достаточно показать, что для любого непустого конечного подмножества $Q \subset S$ подгруппа $H = \langle Q \rangle$ не имеет кручения. Считаем Q по определению 6 упорядоченно линейным порядком на множестве S. Положим: $q = f(Q)$ — ступень нильпотентности группы H, $n = |Q|$, $G(Q)$ — свободная q-ступенно нильпотентная группа, порожденная множеством Q с заданным на нем линейным порядком, B — базис Ширшова группы $G(Q)$. На множество B будем смотреть не только как на подмножество элементов группы $G(Q)$, но и как на множество слов над алфавитом Q. Пусть $V_f = \{v \in B \mid \mathrm{wt}(v) > f(\mathrm{set}(v))\}$. Построим подмножество B_f включив в него все коммутаторы $u \in B$, содержащие хотя бы одно подслово v из V_f. Индукцией по ступени нильпотентности группы $G(Q)$ покажем, что

$$N = \langle B_f \rangle \lhd G(Q). \tag{43}$$

1. $q = 1$. В этом случае $G(Q)$ — свободная абелева группа и, следовательно, N — нормальная подгруппа.

2. Пусть утверждение (43) справедливо для всех $1 \leqslant q < q_0$. Положим $q = q_0$ и проведем индукцию по количеству порождающих группы $G(Q)$.

2.1. $n = 1$. В этом случае $G(Q)$ — бесконечная циклическая группа, $B_f = \varnothing$, $N = \{e\}$ и утверждение (43) справедливо.

2.2. Пусть утверждение (43) справедливо при $|Q| < n$. Докажем его при $|Q| = n$. Положим $a_n = \max Q$. Для выполнения (43) достаточно, чтобы выполнялось

$$(\forall u \in B_f)(\forall v \in B)([u,v] \in N). \tag{44}$$

В силу предположения индукции относительно q и n утверждение (44) справедливо, когда $\mathrm{wt}([u,v]) < q$ или $|\mathrm{set}([u,v])| < n$. Поэтому предполагаем, что $\mathrm{wt}([u,v]) = q$ и $|\mathrm{set}([u,v])| = n$. Представим $[u,v]$ через базис Ширшова B: $[u,v] = w_1 \cdots w_s$. При этом, как известно [1, 5], коммутаторы $w_1, \ldots, w_s$ появляются после конечного числа трех типов преобразований:

(i) $[u, v] = [v, u]^{-1}$,
(ii) $[u, v_1v_2] = [u, v_1][u, v_2]$,
(iii) $[u_1, u_2, v] = [u_1, [u_2, v]][u_1, v, u_2]$
(здесь использование знака $=$ вместо знака $\equiv$ правомерно, поскольку вес преобразуемых коммутаторов совпадает со ступенью нильпотентности группы). Если некоторое подслово w из V_f содержалось в одном из коммутаторов u, u_1, u_2, v или в каждом из коммутаторов v_1, v_2, то в полученных после любого из преобразований (i)–(iii) коммутаторах также содержится подслово w. Пусть подслово из V_f есть коммутатор $[u_1, u_2]$, покажем, что в рассматриваемом случае преобразование (iii) не должно применяться к $[u_1, u_2]$. По определению множества V_f $f(\mathrm{set}([u_1, u_2])) < \mathrm{wt}([u_1, u_2]) < q$, и поскольку f — ступенчатая функция и $a_n = \max Q$, то $a_n \notin \mathrm{set}([u_1, u_2])$. В рассматриваемом случае $|\mathrm{set}([u_1, u_2, v])| = n$, поэтому $a_n \in \mathrm{set}(v)$. Поскольку a_n — наибольший из порождающих, то ассоциативное слово $\bar{v}$ (обязательно правильное!), полученное из v стиранием скобок, больше $\overline{[u_1, u_2]}$, а преобразование (iii) применяется только к коммутаторам $[u_1, u_2, v]$, для которых $\bar{v} < \overline{[u_1, u_2]}$ и $\overline{u_2} > \bar{v}$. Таким образом, утверждение (44) справедливо, и, следовательно, N — нормальная подгруппа.

Теперь заметим, что замкнутость подгруппы относительно коммутирования элементами группы равносильна замкнутости относительно сопряжения, поэтому $N = \langle V_f \rangle^{G(Q)}$. По утверждению 3 группа $H = \langle Q \rangle$ свободна относительно $f|_Q$. Повторяя рассуждения из доказательства утверждения 2, получим, что $H \cong G(Q)/N$. В силу единственности представления элементов группы $G(Q)$ в базисе B ни один из элементов вида

$$u = v_1^{m_1} \cdots v_k^{m_k}, \tag{45}$$

где $\{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq B \setminus B_f$, $m_1 \cdots m_k \neq 0$, не принадлежит $N = \langle B_f \rangle$. Поскольку представление элемента u^t, $t \neq 0$, в базисе B имеет те же сомножители наименьшего веса, что и представление u, то u^t также не принадлежит N. Пусть $g \in G(Q)$ и $g \notin N$ Так как N — нормальная подгруппа, то g имеет представление $g = uh$, где u — элемент вида (45), $h \in N$, откуда $g^t = u^t h_1$, $h_1 \in N$ и $g^t \notin N$. Следовательно, $G(Q)/N \cong H$ — группа без кручения. □

Следствие 3. *Для всякой счетной локально нильпотентной группы G существует локально нильпотентная группа без кручения $\overline{G}$, гомоморфно отображающаяся на G.*

Доказательство. Зафиксируем множество порождающих S группы G. Пусть $f = f_{G,S}$ — функция Ольшанского группы G (см. определение 3). По утверждению 1 f — монотонная функция. Занумеруем элементы множества S натуральными числами $S = \{s_1, \ldots, s_n, \ldots\}$ и упорядочим в соответствии с заданной нумерацией: $s_i \leqslant s_j \Leftrightarrow i \leqslant j$. С каждым X из $\mathscr{F}_1(S)$ свяжем подмножество $\overline{X} = \{s \in S \mid s_1 \leqslant s \leqslant \max X\}$. Определим функцию $g : \mathscr{F}_1(S) \to \mathbb{N}$, полагая $g(X) = f(\overline{X})$. Теперь из монотонности f следует, что g — монотонная ступенчатая функция и $g \geqslant f$. По теореме 2 G_g — группа без кручения, а по следствию 1 существует гомоморфизм из G_g на G_f. □

В нижеприведенном следствии под гиперцентральной понимается группа, являющаяся объединением счетной цепочки своих гиперцентров.

Следствие 4. *Для всякой гиперцентральной группы G существует локально нильпотентная группа без кручения $\overline{G}$, гомоморфно отображающаяся на G.*

Доказательство. Пусть

$$e \subset Z_1 \subset \cdots \subset Z_n \subset \cdots \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i = G$$

— система гиперцентров группы G, и пусть S — система порождающих группы G. Определим функцию $h : S \to \mathbb{N}$, полагая $h(s) = \min\{i \in \mathbb{N} \mid s \in Z_i\}$. Определим частичный порядок на S: $s \leqslant t \Leftrightarrow (s = t) \vee (h(s) < h(t))$ — и продолжим его до линейного порядка на S произвольным образом. Определим функцию $g : \mathscr{F}_1(S) \to \mathbb{N}$, полагая $g(X) = \max\{h(s) \mid s \in X\}$. Непосредственно проверяется, что g — монотонная ступенчатая функция. Проверим, что $g \geqslant f$, где $f = f_{G,S}$ — функция Ольшанского группы G. Пусть $X = \{s_1, \ldots, s_n\}$ — конечное множество, $s_n = \max X$ и $k = h(s_n)$, тогда $X \subset Z_k$ и $f(X) \leqslant k = g(X)$. Теорема 2 и следствие 1 завершают доказательство. □

Вопрос 2. Найти необходимые и достаточные условия, накладываемые на функцию $f : \mathscr{F}_1(S) \to \mathbb{N}$, при которых группа G_f не имеет кручения.

Утверждение 8. *Пусть S — непустое множество и $f : \mathscr{F}_1(S) \to \mathbb{N}$. Если для некоторых трех элементов a, b, c из S $f(a,b) \geqslant 1$, $f(a,c) = f(b,c) \geqslant 2$ и $f(a,b,c) \geqslant f(a,c)(f(a,b)+1)$, то группа G_f имеет кручение.*

Доказательство. Положим $k = f(a,c) - 1$, $m = f(a,b)$. Получим, что f мажорирует функцию Ольшанского группы $G(k,m)$ из примера 2. По определению 4 существует гомоморфизм группы G_f на группу $G(k,m)$, тождественный на $S = \{a,b,c\}$. По условию (8) элемент $[a, c^{(k)}, [b, c^{(k)}]]^{(m)} \neq e$, а по утверждению 6 этот элемент имеет конечный порядок. □

§ 5. Функции на множествах большой мощности

Пример 4. Пусть $I = [0,1]$ — подмножество действительных чисел. Определим монотонную функцию $f : \mathscr{F}_2(I) \to \mathbb{N}$ следующим образом:

$$f(A) = [\max\{(a-b)^{-1} \mid a, b \in A,\ a > b\}] + 1. \tag{46}$$

Монотонность функции f следует непосредственно из формулы (46). Эта функция интересна там, что в любом подмножестве $A \in \mathscr{F}_2(I)$ найдется такая пара элементов a, b, что $f(a,b) \geqslant |A|$. Действительно, если n различных чисел расположены на интервале $[0,1]$ и $n \geqslant 2$, то хотя бы два из них, скажем a и b, расположены на расстоянии $r \leqslant \frac{1}{n-1}$, откуда $f(a,b) = [r^{-1}] \geqslant n$. Отсюда и из монотонности f получаем

$$\forall A \in \mathscr{F}_2(I)\ f(A) \geqslant |A|. \tag{47}$$

Пример 5. Пусть X — множество всех непустых подмножеств числового интервала $J = (0,1)$. На X имеется частичный порядок: $A \preceq B \Leftrightarrow A \subseteq B$, $A, B \in X$. Зафиксируем некоторую функцию выбора, сопоставляющую каждому подмножеству $Y \in \mathscr{F}_1(X)$ один из элементов этого подмножества, максимальный относительно порядка $\preceq$. Выбранный таким образом элемент будем обозначать $\mathrm{MAX}(Y)$. Кроме того, вполне упорядочим J, через $\mathrm{Min}(A)$ будем обозначать минимальный относительно такого упорядочения элемент непустого подмножества $A \subseteq J$ и формально положим $\mathrm{Min}(\varnothing) = 0$. Символы min и max остаются для обозначения минимальных и максимальных элементов подмножеств множества J относительно обычного порядка на действительных числах. С каждым конечным подмножеством $Y \in \mathscr{F}_1(X)$ свяжем конечный набор чисел $\xi(Y)$ из интервала $[0,1]$, полагая

$$\xi(Y) = \{\mathrm{Min}\{A_i \setminus A_j\} \mid i,j = 1, \ldots, n\} \cup \{1\}. \tag{48}$$

Отметим, что из (48) следует $0, 1 \in \xi(Y)$ для всех $Y \in \mathscr{F}_2(X)$, поэтому $\xi(Y)$ состоит не менее чем из двух элементов.

Теперь определим функцию $g : \mathscr{F}_1(X) \to \mathbb{N}$. Положим $g(Y) = 1$, если $|Y| = 1$, а для $Y \in \mathscr{F}_2(X)$ положим

$$g(Y) = (f(\xi(Y)))^{f(\xi(Y))}, \tag{49}$$

где функция f определяется по формуле (46).

Покажем, что в любом подмножестве $Y \in \mathscr{F}_3(X)$ найдется такая тройка A, B, C, что

$$g(A,B,C) \geqslant |Y|. \tag{50}$$

Как было отмечено выше, для любого $Y \in \mathscr{F}_1(X)$ $|\xi(Y)| \geqslant 2$, откуда $f(\xi(Y)) \geqslant 2$ и $g(Y) \geqslant 4$. Поэтому можно считать, что $n = |Y| > 4$. Найдем наибольшее целое k, для которого $k^k \leqslant n$. Так как $n > 4$, то $k \geqslant 2$. Рассмотрим два случая.

1. Найдется подмножество $M = \{A_1, B_1, \ldots, B_{k+1}\} \subseteq Y$ такое, что числовое подмножество $S_M = \{\mathrm{Min}(A_1 \setminus B_i) \mid i = 1, \ldots, k+1\}$ состоит из $k+1$ различных чисел из интервала $[0,1]$. В этом случае в S_M найдется пара чисел $x_1 = \mathrm{Min}(A_1 \setminus B_{i_1})$ и $x_2 = \mathrm{Min}(A_1 \setminus B_{i_2})$, расстояние между которыми меньше чем $1/k$. Поскольку $x_1, x_2 \in \xi(A_1, B_{i_1}, B_{i_2})$, из формулы (46) получим $m = f(\xi(A_1, B_{i_1}, B_{i_2})) \geqslant k+1$, откуда $g(A_1, B_{i_1}, B_{i_2}) = m^m \geqslant (k+1)^{k+1} > n$.

2. Пусть первый случай не выполняется. Положим $n_i = k^{k+1-i}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $n_{k+1} = k-1$. Так как $k \geqslant 2$, то $n_i \geqslant 2$ для любого $i = 1, \ldots, k$. Построим по индукции три последовательности $S_1 = \{Y_i\}_{i=1,\ldots,k+1}$, $S_2 = \{A_i\}_{i=1,\ldots,k+1}$ и $S_3 = \{m_i\}_{i=1,\ldots,k+1}$, такие, что для любых $1 \leqslant i \leqslant k+1$ выполняются условия:

1) $Y_i \subseteq Y$ и $|Y_i| \geqslant n_i$,
2) $A_i = \mathrm{MAX}(Y_i)$,
3) если $1 \leqslant j < i$, то $Y_i \subset Y_j$,
4) если $1 \leqslant j < i$ и $B \in Y_i$, то $\mathrm{Min}(A_j \setminus B) = m_{j+1}$,
5) если $1 \leqslant j < i$, то $A_j \notin Y_i$.

Положим $m_1 = 0$, $Y_1 = Y$, $A_1 = \mathrm{MAX}(Y_1)$. Тогда $|Y_1| = n \geqslant k^k$, и условия 1, 2 выполнены. Для $i = 1$ условия 3–5 проверять не надо.

Пусть построены последовательности $Y_1, \ldots, Y_i$, $A_1, \ldots, A_i$ и $m_1, \ldots, m_i$, удовлетворяющие условиям 1–5. Построим Y_{i+1}, A_{i+1}, m_{i+1}.

Если $i = k$, то положим $Y_{k+1} = Y_k \setminus \{A_k\}$. Поскольку $|Y_k| \geqslant n_k = k \geqslant 2$, то $|Y_{k+1}| = k - 1 \geqslant 1$ и $Y_{k+1} \neq \varnothing$. Теперь положим $A_{k+1} = \mathrm{MAX}(Y_{k+1})$, $m_{k+1} = \mathrm{Min}(A_k \setminus A_{k+1})$.

Если $i < k$, то сначала построим числовое множество $M_i = \{\mathrm{Min}(A_i \setminus B) \mid B \in Y_i\}$. Так как первый случай не имеет места, то $|M_i| \leqslant k$. Поэтому хотя бы для одного числа $m \in [0,1]$ найдется подмножество $Z \subseteq Y_i$ не менее чем из $n_i/k = n_{i+1}$ элементов таких, что $|\{\mathrm{Min}(A_i \setminus B) \mid B \in Z\}| = 1$. Положим $Y_{i+1} = Z$, $m_{i+1} = m$, $A_{i+1} = \mathrm{MAX}(Y_{i+1})$.

Условия 1–4 выполнены по построению. Проверим выполнение последнего условия. Предположим противное: $A_j \in Y_i$ при $1 \leqslant j < i \leqslant k+1$. По условию 4 числа $\mathrm{Min}(A_j \setminus B) = m_{j+1}$ одинаковы для любого $B \in Y_i$, и все они равны m_{j+1}. Поскольку $\mathrm{Min}(A_j \setminus A_j) = 0$, получим $m_{j+1} = 0$. Отсюда $A_j \setminus B = \varnothing$ для любого $B \in Y_i$. Так как A_j — максимальный по включению множеств элемент из Y_j и $Y_i \subseteq Y_j$, то Y_i состоит из одного элемента A_j, что противоречит условию $|Y_i| \geqslant n_i \geqslant 2$.

Покажем, что все числа в последовательности S_3 различны и тем самым $|S_3| = k+1$. Из условий 2 и 5 следует, что для любых $1 \leqslant j < i \leqslant k+1$ $A_j \setminus A_i \neq \varnothing$. Следовательно, $m_{j+1} \in A_j$ и $m_{j+1} \notin A_i$, откуда все m_{j+1} различны и не равны $0 = m_1$. Все числа из S_3 расположены на интервале $[0,1]$, поэтому найдутся два таких числа m_{j_1} и m_{j_2}, расстояние между которыми не превышает $1/k$. Если $1 < j_1 < j_2$, то положим $A = A_{j_1-1}$, $B = A_{j_2-1}$, $C = A_{j_2}$, иначе в качестве A возьмем произвольный элемент из $Y \setminus \{B, C\}$. Теперь воспользуемся формулой (48) и получим $m_{j_1}, m_{j_2} \in \xi(A,B,C)$, откуда по формуле (46) имеем $f(\xi(A,B,C)) > k$. Наконец, применяя (49), получим (50): $g(A,B,C) \geqslant n = |Y|$.

Определение 7. Пусть S — вполне упорядоченное множество, на котором определена функция $g : S \times S \to \mathbb{N}$ такая, что

$$g(a,a) = 1; \quad g(a,b) \geqslant 2, \text{ если } a \neq b. \tag{51}$$

Для каждого $a \in S$ положим $C_a = \{x \in S \mid x \leqslant a\}$ и трансфинитной индукцией по элементу x определим две функции:

$$\nu_a : C_a \to \mathbb{N}, \quad \mu_a : C_a \to \mathscr{B}(S).$$

На каждом шаге индукции сначала определяем функцию μ, затем ν по нижеприведенным формулам (52), в которых $y+1$ обозначает элемент, непосредственно следующий за элементом y:

$$
\begin{array}{l}
1)\ \mu_a(\min S) = S;\\
2)\ \mu_a(x) = \begin{cases} \cap_{y<x}\mu_a(y), & \text{если } x \text{ предельный},\\ \mu_a(y), & \text{если } (x = y+1)\&(\nu_a(y) = 0),\\ \{z \in \mu_a(y) \mid g(y,z) = g(y,a)\}, & \text{если } (x = y+1)\&(\nu_a(y) > 0); \end{cases}\\
3)\ \nu_a(\min S) = g(\min S, a);\\
4)\ \nu_a(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } (x < a)\&(x \neq \min\mu_a(x)),\\ g(x,a), & \text{если } (x < a)\&(x = \min\mu_a(x)),\\ 1, & \text{если } x = a. \end{cases}
\end{array}
\tag{52}
$$

Лемма 6. *Пусть S — вполне упорядоченное множество, на котором заданы функции $g : S \times S \to \mathbb{N}$, $\nu_a : C_a \to \mathbb{N}$ и $\mu_a : C_a \to \mathscr{B}(S)$ по формулам* (51), (52). *Тогда для любых $x, y \in C_a$ выполняются условия*

$$x \leqslant \min\mu_a(x), \tag{53}$$

$$a \in \mu_a(x), \tag{54}$$

$$y < x \Rightarrow \mu_a(x) \subseteq \mu_a(y), \tag{55}$$

$$(y < x)\&(\nu_a(y) > 1) \Rightarrow (\forall z \in \mu_a(x))(g(y,z) = \nu_a(y)), \tag{56}$$

$$a = \min\mu_a(a). \tag{57}$$

Доказательство формул (53)–(56) проводим трансфинитной индукцией по элементу $x \in S$. При $x = \min S$ имеем $\mu_a(x) = S$, и формулы (53), (54) верны. Формулы (55), (56) справедливы ввиду ложности посылки. Пусть теперь для всех $t < x$ формулы (53)–(56) верны. Рассмотрим два случая.

1. x — предельный элемент. Проверим (53). Предположим противное: $x > z = \min\mu_a(x)$. Так как x предельный, то $z+1 < x$, откуда по предположению индукции $z+1 \leqslant \min\mu_a(z+1)$. С другой стороны, $\mu_a(x) = \cap_{t<x}\mu_a(t) \subseteq \mu_a(z+1)$, откуда следует $\min\mu_a(z+1) \leqslant \min\mu_a(x) = z$, и получаем противоречие: $z+1 \leqslant z$. Формула (54) следует из того, что $\mu_a(x) = \cap_{t<x}\mu_a(t)$ (см. формулу (52)), и из предположения индукции $a \in \mu_a(t)$. Формула (55) следует непосредственно из определения $\mu_a(x)$ (формула (52) для предельного x). Наконец, проверим (56). Пусть $y < x$ и $\nu_a(y) > 1$. Поскольку x предельный, то $y < y+1 < x$, и по предположению индукции для всех $z \in \mu_a(y+1)$ выполняется $f(y,z) = \nu_a(y)$, но $\mu_a(x) \subseteq \mu_a(y+1)$, следовательно, и для всех $z \in \mu_a(x)$ будет $f(y,z) = \nu_a(y)$.

2. Существует y такой, что $x = y+1$. Если $\nu_a(y) = 0$, то $\mu_a(x) = \mu_a(y)$, и формулы (54), (55) выполняются автоматически. По предположению индукции $y \leqslant \min\mu_a(y)$, и, поскольку $\nu_a(y) = 0$, случай $y = \min\mu_a(y)$ исключается по определению $\nu_a(y)$ (формула (52)). Следовательно, $y < \min\mu_a(y)$, откуда $x = y+1 \leqslant \min\mu_a(y) = \min\mu_a(x)$, и условие (53) выполняется. Формула (56) верна ввиду ложности посылки. Пусть теперь $\nu_a(y) > 0$. Поскольку $y+1 = x \leqslant a$, то $y < a$, и из (52) получаем $y = \min\mu_a(y)$. Из (52) имеем

$$\mu_a(x) = \{z \in \mu_a(y) \mid g(y,z) = g(y,a)\} \tag{58}$$

и $\mu_a(x) \subseteq \mu_a(y)$. Отсюда и из предположения индукции получим (55). Проверим (54). По предположению индукции $a \in \mu_a(y)$, и поскольку $g(y,a) = g(y,a)$, то $a \in \mu_a(x)$ (см. (58)). Далее, поскольку $g(y,y) = 1$ (см. (51)), то $y \notin \mu_a(x)$ (условие (58)), а так как $y \leqslant \min\mu_a(y)$, $\mu_a(y) \supset \mu_a(y+1)$, то $y < \min\mu_a(y+1)$, $y+1 \leqslant \mu_a(y+1)$, и условие (53) выполняется. Проверим (56) для $z < x$. Если $z < y$, то (56) следует из предположения индукции и условия (55). Если же $z = y$, то (56) следует из (58).

Полагая $x = a$, получим (57) из условий (53) и (54). □

Определение 8. Пусть I и J — вполне упорядоченные множества. Функции $f : I \to \mathbb{N}$ и $g : J \to \mathbb{N}$ назовем *эквивалентными*, если существует такое отображение φ множества I на J, что для любых $x, y \in I$

$$1)\ x < y \Rightarrow \varphi(x) < \varphi(y), \quad 2)\ f(x) = g(\varphi(x)).$$

Эквивалентность функций f и g будем обозначать так: $f \cong g$. Множество всех неэквивалентных функций, заданных на не более чем счетных вполне упорядоченных множествах со значениями в $\mathbb{N}$, обозначим $\mathbf{NEQ}(\mathbb{N})$.

Утверждение 9. $|\mathbf{NEQ}(\mathbb{N})| = \aleph_1$.

Доказательство. Множество всех функций из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$ имеет мощность $\aleph_1$, множество всех не более чем счетных ординалов также имеет мощность $\aleph_1$, откуда $|\mathbf{NEQ}(\mathbb{N})| = \aleph_1 \times \aleph_1 = \aleph_1$. □

Теорема 3. *Если мощность множества S превышает $\aleph_1$, то для любой функции $f : \mathscr{F}_1(S) \to \mathbb{N}$ найдутся константа $k \in \mathbb{N}$ и бесконечное подмножество $Q \subseteq S$ такие, что для любой пары различных элементов $a, b \in Q$ $f(a,b) = k$.*

Доказательство. Вполне упорядочим S и определим функцию $g : S \times S \to \mathbb{N}$, полагая $g(a,a) = 1$, а при $b \neq a$ полагая $g(a,b) = \max\{2, f(a,b)\}$. Воспользуемся определением 6 и построим для каждого $a \in S$ функции $\nu_a : C_a \to \mathbb{N}$, $\mu_a : C_a \to \mathscr{B}(S)$, удовлетворяющие условиям (53)–(57). Выберем из каждого C_a подмножество $I_a = \{x \in C_a \mid \nu_a(x) > 0\}$ и положим

$$\sigma_a(x) = \nu_a(x)|_{I_a}. \tag{59}$$

Покажем, что

$$\sigma_a \cong \sigma_b \Rightarrow a = b. \tag{60}$$

Поскольку $a = \min \mu_a(a)$, $b = \min \mu_b(b)$ (условие (54)), достаточно показать, что

$$\sigma_a \cong \sigma_b \Rightarrow \mu_a = \mu_b. \tag{61}$$

Пусть для определенности $b \leqslant a$. Положим $Y_a = \{x \in C_a \mid \mu_a(x) \neq \mu_b(x)\} \cup \{x \in C_a \mid \nu_a(x) \neq \nu_b(x)\}$. Если $Y_a \neq \varnothing$, то пусть $y_a = \min Y_a$. Покажем, что

$$(\nu_a(y_a) > 0) \& (\nu_b(y_a) > 0) \Rightarrow \nu_a(y_a) = \nu_b(y_a). \tag{62}$$

Если $y_a = \min S$, то $y_a = \min I_a = \min I_b$, и так как $\sigma_a \cong \sigma_b$, то $\varphi(y_a) = y_a$ и $\nu_a(y_a) = \nu_b(y_a)$. Пусть теперь $y_a > \min S$ и $x < y_a$. Тогда $\nu_a(x) = \nu_b(x)$ и, следовательно, $I_a^* = \{x \in I_a \mid x < y_a\} = \{x \in I_b \mid x < y_a\}$. Поскольку I_a^* — вполне упорядоченное множество, всякая биективная монотонная функция, определенная на I_a^*, тождественна. Отсюда и из $\sigma_a \cong \sigma_b$ получим, что $\varphi(y_a) = y_a$ и $\nu_a(y_a) = \nu_b(y_a)$. Утверждение (62) доказано. Для доказательства (61) рассмотрим четыре случая.

1. $y_a = \min S$. Тогда $\mu_a(y_a) = S = \mu_b(y_a)$ (формула (52)). Так как $y_a = \min S$, то $\nu_a(y_a) > 0$ и $\nu_b(y_a) > 0$ (формула (52)), и из (62) получаем $\nu_a(y_a) = \nu_b(y_a)$. Противоречие с определением элемента y_a.

2. y_a предельный. Тогда по определению 7 $\mu_a(y_a) = \cap_{x<y}\mu_a(x) = \cap_{x<y}\mu_b(x) = \mu_b(y_a)$. Если $y_a = a$, то ввиду предельности a необходимо $a = b$, и (60) получено. Пусть $y_a < a$. Покажем, что $\nu_a(y_a) = \nu_b(y_a)$. Если $\nu_a(y_a) = 0$ ($\nu_b(y_a) = 0$), то $y_a \neq \min \mu_a(y_a) = \min \mu_b(y_a)$, и, следовательно, по определению 7 (формула (52)) $\nu_b(y_a) = 0$ ($\nu_a(y_a) = 0$) и $\nu_a(y_a) = \nu_b(y_a)$. Если же $\nu_a(y_a) > 0$ и $\nu_b(y_a) > 0$, то из (62) снова получаем $\nu_a(y_a) = \nu_b(y_a)$. Противоречие с определением элемента y_a.

3. $y_a = y + 1$ и $\nu_a(y) = \nu_b(y) = 0$. По определению 7 (формула (52)) $\mu_a(y_a) = \mu_a(y)$. По определению элемента y_a имеем $\mu_a(y) = \mu_b(y)$, откуда по формуле (52) получаем $\mu_b(y+1) = \mu_b(y)$ и, значит, $\mu_a(y+1) = \mu_b(y+1)$. Теперь покажем, что $\nu_a(y+1) = \nu_b(y+1)$. Если $y + 1 \neq \min \mu_a(y+1) = \min \mu_b(y+1)$, то $\nu_a(y+1) = \nu_b(y+1) = 0$. Если $y + 1 = \min \mu_a(y+1) = \min \mu_b(y+1)$, то

$\nu_a(y+1) > 0$ и $\nu_b(y+1) > 0$, и из (62) получаем $\nu_a(y+1) = \nu_b(y+1)$. Противоречие с определением элемента y_a.

4. $y_a = y + 1$ и $\nu_a(y) = \nu_b(y) > 0$. Сначала заметим, что из (52) следует $\nu_a(y) = g(y, a) = \nu_b(y) = g(y, b)$. Теперь по определению 7 (формула (52)) имеем $\mu_a(y+1) = \{z \in \mu_a(y) \mid g(y,z) = g(y,a)\} = \{z \in \mu_b(y) \mid g(y,z) = g(y,b)\} = \mu_b(y+1)$. Равенство $\nu_a(y+1) = \nu_b(y+1)$ доказывается аналогично случаю 3. Следовательно, случай 4 также приводит к противоречию с определением элемента y_a. Поскольку других вариантов нет, то y_a не определяется и, значит, $Y_a = \varnothing$. Тем самым утверждение (61), а с ним и (60) выполняются.

По утверждению 9 множество всех неэквивалентных функций, заданных на не более чем счетных вполне упорядоченных множествах, имеет мощность $\aleph_1$, а так как мощность S по условию теоремы больше $\aleph_1$, то найдется $a \in S$ такой, что $|I_a| > \aleph_0$. Поскольку множество значений функции σ_a содержится в $\mathbb{N}$ и, следовательно, имеет не более чем счетную мощность, найдутся натуральное число k_a и бесконечное подмножество $J_a \subseteq I_a$ такие, что $\sigma_a(x) = k_a$ для всех $x \in J_a$. Заметим, что $k_a > 1$, поскольку $\nu_a(x)$, а с ней и $\sigma_a(x)$ принимают значение 1 в единственной точке $x = a$. Из неравенства $\nu_a(x) > 1$, $x \in J_a$, и из формулы (52) получаем $x = \min \mu_a(x)$, откуда $x \in \mu_a(x)$. Теперь из условия (56) получаем $g(x,y) = k_a$ для всех $x > y \in J_a$, а так как $g(x,y) \geqslant f(x,y)$, то для всех $x > y \in J_a$ будет $f(x,y) \leqslant k_a$. В силу бесконечности J_a найдутся число $k \leqslant k_a$ (фактически $k = 1$ или $k = k_a$) и бесконечное подмножество $J \subseteq J_a$ такие, что $f(x,y) = k$ для всех различных x, y из J. □

§ 6. Основные результаты

Теорема 4. *Существует локально нильпотентная группа G с множеством порождающих S мощности, большей чем $\aleph_1$, такая, что:*

1) если свободная относительно некоторой функции $f : \mathscr{F}_1 \to \mathbb{N}$ группа G_f гомоморфно отображается на G и этот гомоморфизм тождествен на S, то G_f имеет кручение;

2) ни одна локально нильпотентная группа $\overline{G}$ с множеством порождающих S и с изолированными подгруппами нижнего центрального ряда не допускает гомоморфного отображения на G, тождественного на S.

Доказательство. 1. Пусть X — множество всех непустых подмножеств числового интервала $J = (0,1)$ из примера 5 и функция $g : \mathscr{F}_1(X) \to \mathbb{N}$ определена по формуле (49). Из определения g непосредственно следует, что g монотонна, $g(Y) \geqslant 2$ при $|Y| = 2$ и $g(Y) = 1$ при $|Y| = 1$. В силу монотонности и условия (50) $g(Y) \geqslant |Y|$ для любых $Y \in \mathscr{F}_3(X)$. Положим $G = G_g$. По теореме 3 функция Ольшанского группы G совпадает с функцией g.

Пусть существует функция $f : \mathscr{F}_1(S) \to \mathbb{N}$ и группа G_f такие, что G_f гомоморфно отображается на G и этот гомоморфизм тождествен на S. По теореме 3 найдем натуральную константу k и бесконечное подмножество Q в S такие, что $f(a,b) = k$ для любой пары различных элементов из Q. По утверждению 4 (условие 2) f мажорирует g, следовательно, условие (50) справедливо и для f. Поскольку Q — бесконечное множество, в нем найдется подмножество Q_1 мощности $k(k+1)$. По условию (50) найдутся по крайней мере три элемента a, b, c в Q_1 такие, что $f(a,b,c) \geqslant |Q_1| = k(k+1)$. Так как $f(a,b) = f(a,c) = f(b,c) = k \geqslant 2$, то по утверждению 8 группа G_f имеет кручение. Утверждение 1 теоремы доказано.

2. Пусть h — функция Ольшанского группы $\overline{G}$ с множеством порождающих S, с изолированными подгруппами нижнего центрального ряда, и гомоморфизм $\varphi : \overline{G} \to G$ тождествен на S. Как и в первом случае, найдем натуральную константу k и бесконечное подмножество Q в S такие, что $h(a,b) = k$ для любой пары различных элементов из Q. Положим $r = g(k, k-1)$, где функция $g(x,y)$ определена по формуле (24). Выберем в Q подмножество Q_1 мощности $2(r+1)$. По утверждению 4 (условие 2) h мажорирует g, следовательно, условие (50) справедливо и для h. По условию (50) в Q_1 найдутся по крайней мере три элемента a, b, c такие, что $h(a,b,c) \geqslant |Q_1| = 2(r+1)$. Так как $h(a,b) = h(a,c) =$

$h(b,c) = k \geqslant 2$, то по утверждению 7 существует натуральное $\sigma > 0$ такое, что $[a,[b,c]^{(r)}]^{(\sigma)} \equiv e$. В силу изолированности подгрупп нижнего центрального ряда группы $\overline{G}$, элемент $[a,[b,c]^{(r)}]$ принадлежит подгруппе $\overline{G}_{2r+1}$, и, следовательно, $[a,[b,c]^{(r)}]$ лежит в G_{2r+1}. Вернемся к группе $G = G_g$. Функция g мажорирует функцию Ольшанского группы $G(1,r)$, поэтому существует гомоморфизм ψ группы G на $G(1,r)$, тождественный на $\{a,b,c\}$. Непосредственный подсчет показывает, что $\psi([a,[b,c]^{(r)}]) = ((d_0^{2^{r-1}}, e), e) \notin G(1,r)_{2r+1}$. Противоречие. □

***Следствие* 5.** *Существует локально нильпотентная алгебра Ли L над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$, такая, что всякая локально нильпотентная алгебра $\overline{L}$ над $\mathbb{Z}$, гомоморфно отображающаяся на L, имеет аддитивное кручение.*

Доказательство. Пусть X, $g : \mathscr{F}_1(X) \to \mathbb{N}$ и G_g определены, как в теореме 4, и L — групповая алгебра Ли над $\mathbb{Z}$ группы G_g, построенная по системе подгрупп нижнего центрального ряда группы (см. [6]). Из локальной нильпотентности группы G_g получаем локальную нильпотентность алгебры L. Кроме того, L порождается множеством X, а ее функция Ольшанского (сопоставляющая каждому конечному подмножеству порождающих Y класс нильпотентности подалгебры, порожденной множеством Y) совпадает с функцией g. Пусть $\overline{L}$ — локально нильпотентная алгебра над $\mathbb{Z}$ и $\varphi : \overline{L} \to L$ — гомоморфизм $\overline{L}$ на L. Поскольку φ — отображение на L, в $\overline{L}$ найдется подмножество $\overline{X}$, находящееся во взаимно однозначном соответствии с подмножеством $X \subset L$ относительно отображения φ. Через $\widehat{L}$ обозначим подалгебру алгебры $\overline{L}$, порожденную множеством $\overline{X}$, а через f — функцию Ольшанского алгебры $\widehat{L}$. Из определения множества $\overline{X}$ получим, что сужение φ на $\widehat{L}$ является гомоморфизмом $\widehat{L}$ на L, поэтому $f \geqslant_\varphi g$. Следовательно, условие (50) справедливо для f. По теореме 3 найдем натуральную константу k и бесконечное подмножество Y в $\overline{X}$ такие, что $f(a,b) = k$ для любой пары различных элементов из Y. Положим $r = g(k, k-1)$, где функция $g(x,y)$ определена по формуле (24). Пусть $Y_1 \subset Y$ — некоторое подмножество мощности $2(r+1)$. По условию (50) найдем в Y_1 три элемента a, b, c такие, что $f(a,b,c) \geqslant |Y_1| = 2(r+1)$. Так как $f(a,b) = f(a,c) = f(b,c) = k \geqslant 2$, то по следствию 4 существует натуральное $\sigma > 0$ такое, что $\sigma a(bc)^r = 0$. Проверим, что $a(bc)^r \neq 0$ в $\widehat{L}$. Как было показано в доказательстве теоремы 4, $[a,[b,c]^{(r)}] \notin G_{2r+1}$, где $G = G_f$, и, следовательно, $a(bc)^r \neq 0$ в групповой алгебре Ли L. Таким образом, $\widehat{L}$, а значит, и $\overline{L}$ имеют аддитивное кручение. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бахтурин Ю. А.* Тождества в алгебрах Ли. М.: Наука, 1985.
2. *Блудов В. В.* О нитевых базисах в группах // Третья международная конференция по алгебре памяти М. И. Каргаполова: Тез. докл. Красноярск: ИНОПРОФ, 1993. С. 43–44.
3. *Блудов В. В., Клейменов В. Ф., Хламов Е. В.* Контрпример к одному вопросу Ольшанского // Алгебра и логика. 1990. Т. 29, № 2. С. 139–140.
4. *Левич Е. М., Токаренко А. И.* Замечание о локально нильпотентных группах без кручения // Сиб. мат. журн. 1970. Т. 9, № 6. С. 1406–1408.
5. *Магнус В, Каррас А, Солитер Д.* Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974.
6. *Общая* алгебра / О. В. Мельников, В. Н. Ремесленников, В. А. Романьков и др. М.: Наука, 1990.
7. *Нерешенные* вопросы теории групп. Коуровская тетрадь. Изд. 12-е. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1992.
8. *Ширшов А. И.* Избранные труды. Кольца и алгебры. М.: Наука, 1984.

г. Иркутск *Статья поступила 28 сентября 1994 г.*