УДК 512.543+512.532+512.552.5

АБСТРАКТНЫЕ ПОЛУГРУППЫ И ГРУППЫ ФОРМАЛЬНЫХ РЯДОВ ОТ ЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ*)

Л. А. Бокуть

Введение

В 1968–1969 гг. мною был опубликован ряд работ, посвященных решению двух проблем алгебры (обе связаны с именем А. И. Мальцева):

1. Существует полугрупповая алгебра, вложимая в группу, но не вложимая в тело [8].

По определению кольцо вложимо в группу, если его мультипликативная полугруппа (без нуля) вложима в группу. Отмечу, что предыдущий пример остается пока единственным примером такого рода. Другие известные примеры колец, вложимых в группу, но не вложимых в тело, не являются полугрупповыми (см. [9, 13, 14]).

2. Существует конечно определенная полугруппа с произвольной тьюринговой степенью неразрешимости проблемы сопряженности [4].

В качестве аппарата в указанных работах использовалось понятие группы с (относительным) стандартным базисом. В книге [12] этот метод назван конструктивным методом в теории HNN-расширений.

Метод построения стандартных базисов в HNN-расширениях групп в некотором смысле аналогичен методу построения линейных базисов алгебр с помощью базисов Гребнера — Ширшова (см. [12]). В том и другом случае речь идет об исключении из слов некоторых заранее указываемых «запрещенных» подслов. В случае алгебр «запрещенными» являются старшие слова определяющих соотношений этой алгебры (если только множество соотношений замкнуто относительно композиций, т. е. является базисом Гребнера — Ширшова алгебры). В случае групп (а именно цепочки HNN-расширений групп) «запрещенные» слова указываются в явном виде и играют роль «старших» подслов определяющих соотношений группы.

Цель этой работы — прояснить с абстрактной точки зрения те полугруппы и группы, которые близки к полугруппам и группам из работ [5, 6] и к которым применим метод построения стандартных базисов. В качестве конкретной цели я собираюсь осмыслить с абстрактной точки зрения следующее основное утверждение работ [5, 6].

Теорема. *Группа частных мультипликативной полугруппы $\overline{CHA}$-алгебры является группой с относительным стандартным базисом. Сама мультипликативная полугруппа $\overline{CHA}$-алгебры вложима в группу.*

Доказательство этого утверждения очень громоздко. Моя идея заключается в том, чтобы ввести понятия абстрактной $\overline{CHA}$-полугруппы M и абстрактной

*) Работа выполнена при поддержке Фонда Сороса «Международный Научный фонд ISF» (грант PRB 000).

$\overline{CHA}$-группы $G(M)$ и разбить доказательство предыдущей теоремы на доказательства двух утверждений:

1. *Мультипликативная полугруппа $\overline{CHA}$-алгебры является абстрактной $\overline{CHA}$-полугруппой (следовательно, ее группа частных является абстрактной $\overline{CHA}$-группой).*

2. *Любая абстрактная $\overline{CHA}$-группа является группой с относительным стандартным базисом. Любая абстрактная $\overline{CHA}$-полугруппа вложима в группу.*

§ 1. M-полугруппы и M-группы

1.1. Свободные Γ-полугруппы и Γ-группы. Пусть Γ — некоторая группа, Σ — множество букв ($\Gamma \cap \Sigma \neq \varnothing$). Предположим, что для любого $p \in \Sigma$ в Γ выделены две изоморфные подгруппы $\Gamma(p)$ и $\Gamma'(p)$, $\partial_p : \Gamma(p) \to \Gamma'(p)$ — изоморфизм. Элементы $\Gamma(p)$, $\Gamma'(p)$ будем обозначать соответственно через $\gamma(p)$, $\gamma'(p)$, причем $\partial_p(\gamma(p)) = \gamma'(p)$. Назовем полугруппу

$$F = \mathrm{Sgr}\langle \Gamma;\ \Sigma;\ \gamma(p)p = p\gamma'(p),\ p \in \Sigma,\ \gamma(p) \in \Gamma(p),\ \gamma'(p) \in \Gamma'(p)\rangle$$

свободной Γ-*полугруппой*. Ее группу частных

$$G(F) = \mathrm{Gr}\langle \Gamma;\ \Sigma;\ \gamma(p)p = p\gamma'(p),\ p \in \Sigma\rangle$$

назовем *свободной* Γ-*группой*.

Положим $\Gamma(p^{-1}) = \Gamma'(p)$, $\Gamma'(p^{-1}) = \Gamma(p)$, $\partial_{p^{-1}} = \partial_p^{-1}$. Тогда $\gamma(p^\varepsilon)p^\varepsilon = p^\varepsilon\gamma'(p^\varepsilon)$, $\varepsilon = \pm 1$.

1.1.1. Замечание. В предыдущих копредставлениях имеется в виду, что группа Γ задана своей таблицей Кэли: $\Gamma = \mathrm{Sgr}\langle \Gamma;\ \gamma_i\gamma_j = \gamma_k\rangle$.

1.1.2. Пример. Пусть k — поле, X — множество, $k\langle\langle X\rangle\rangle$ — алгебра Магнуса, т. е. алгебра формальных рядов от X над полем k (замыкание свободной алгебры $k\langle X\rangle$ по естественной норме). Пусть Γ — группа обратимых элементов $k\langle\langle X\rangle\rangle$ (ряды с ненулевыми свободными членами). Далее, пусть Σ — множество всех неразложимых (в собственное произведение) рядов p, по одному из каждого класса $\Gamma p\Gamma$ ассоциированных элементов. Для $p \in \Sigma$ обозначим

$$\Gamma(p) = \{\alpha + pL,\ 0 \neq \alpha \in k,\ L \in k\langle\langle X\rangle\rangle\},$$
$$\Gamma'(p) = \{\alpha + Lp,\ 0 \neq \alpha \in k,\ L \in k\langle\langle X\rangle\rangle\}.$$

Тогда $k\langle\langle X\rangle\rangle^*$ — свободная Γ-полугруппа, а $G(k\langle\langle X\rangle\rangle^*)$ — свободная Γ-группа.

1.2. Γ-группы и Γ-полугруппы. Пусть $F = \mathrm{Sgr}\langle \Gamma;\ \Sigma;\ \gamma(p)p = p\gamma'(p),\ p \in \Sigma\rangle$ — свободная Γ-полугруппа. Любой ее гомоморфный образ назовем Γ-*полугруппой*. Таким образом, Γ-полугруппа S имеет вид

$$S = \mathrm{Sgr}\langle \Gamma;\ \Sigma;\ \gamma(p)p = p\gamma'(p),\ p \in \Sigma,\ A_i = B_i,\ i \in I\rangle, \tag{1.1}$$

где A_i, B_i — слова от множества $\Gamma \cup \Sigma$.

Аналогично гомоморфный образ свободной Γ-группы назовем Γ-*группой*:

$$G = \mathrm{Gr}\langle \Gamma;\ \Sigma;\ \gamma(p)p = p\gamma'(p),\ p \in \Sigma,\ A_i = B_i,\ i \in I\rangle, \tag{1.2}$$

где A_i, B_i — групповые слова от $\Gamma \cup \Sigma$.

1.2.1. Пример. Пусть $R = k\langle x;\ r_i = 0,\ i \in I\rangle$ — произвольная ассоциативная алгебра, заданная однородными определяющими соотношениями, $\deg r_i \geqslant 1$; $\overline{R}$ — ее пополнение до алгебры формальных рядов; $\Gamma(\overline{R})$ — группа обратимых элементов $\overline{R}$. Тогда $\overline{R}^*$ — $\Gamma(\overline{R})$-полугруппа, а ее группа частных $G(\overline{R}^*)$ — $\Gamma(\overline{R})$-группа (группы $\Gamma(p)$, $\Gamma'(p)$, $p \in \Sigma$, определяются так же, как и выше, $\Gamma(p) = \{\alpha + pL,\ \alpha \neq 0,\ L \in \overline{R}\}$, $\Gamma'(p) = \{\alpha + Lp,\ \alpha \neq 0,\ L \in \overline{R}\}$).

В Г-полугруппе (1.1) и Г-группе (1.2) будем употреблять следующие обозначения. Два слова

$$W = w_0 p_1^{\varepsilon_1} \dots p_k^{\varepsilon_k} w_k, \quad U = u_0 q_1^{\delta_1} \dots q_s^{\delta_s} u_s,$$

где $w_i, u_i \in \Gamma$, $p_i, q_i \in \Sigma$, $\varepsilon, \delta = \pm 1$ (в случае Г-полугруппы $\varepsilon, \delta = 1$), назовем *тождественно равными* (пишем $W \equiv_\Gamma U$), если $k = s$, $p_i = q_i$, $\varepsilon_i = \delta_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$, и $w_0 = u_0 \gamma(p_1^{\varepsilon_1})$, $\gamma'(p_1^{\varepsilon_1}) w_1 = u_1 \gamma(p_2^{\varepsilon_2})$, ..., $\gamma'(p_k^{\varepsilon_k}) w_k = u_k$.

Слово W назовем *Г-несократимым*, если оно не содержит подслов $p^{-\varepsilon}\gamma p^{\varepsilon}$, $p \in \Sigma$, $\gamma \in \Gamma(p^\varepsilon)$. *Г-сокращением* назовем преобразование вида $p^{-\varepsilon}\gamma p^{\varepsilon} \to \gamma'$, где $\gamma \in \Gamma(p^\varepsilon)$, $\gamma' = \partial_{p^\varepsilon}(\gamma)$. Каждое слово W с помощью Г-сокращений можно привести к Г-несократимому виду $c(W)$. Определим *Г-равенство*, $W =_\Gamma U$, условием $c(W) \equiv_\Gamma c(U)$. В этом случае будем также говорить, что равенство $W = U$ является *Г-тривиальным*. Назовем слова W, U *Г-эквивалентными* (пишем $W \sim_\Gamma U$), если $W =_\Gamma \gamma_1 U \gamma_2$ для некоторых $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$. Равенства $A = B$, $C = D$, выполняющиеся в Г-группе, назовем *Г-эквивалентными*, если $C =_\Gamma \gamma_1 A \gamma_2$, $D =_\Gamma \gamma_1 B \gamma_2$ или $C =_\Gamma \gamma_1 B \gamma_2$, $D =_\Gamma \gamma_1 A \gamma_2$. Не Г-эквивалентные равенства назовем *различными*.

1.3. Полугруппы А. И. Мальцева. В работах [10, 11, 15] возникли полугруппы, задаваемые квадратичными соотношениями вида

$$wh = uf, \tag{1.3}$$

где $w, u \in X$, $h, f \in Y$, $X \cap Y = \varnothing$. В качестве конкретных результатов А. И. Мальцевым были получены следующие утверждения.

1. Построен первый пример алгебры без делителей нуля, не вложимой в тело (ответ на вопрос Ван-дер-Вардена).

2. Выписана бесконечная система условий (квазитождеств), описывающих класс полугрупп, вложимых в группы.

3. Доказано, что предыдущая система условий не эквивалентна никакой своей конечной подсистеме.

Изучая полугруппы и группы, заданные соотношениями (1.3), А. И. Мальцев заметил одно общее свойство у этих полугрупп и групп. В работе [11] была доказана лемма, описывающая вид полугрупповых следствий групповых соотношений (1.3). Другими словами, эта лемма описывает вид определяющих соотношений полугруппы $\varphi(S)$, где φ — естественный гомоморфизм полугруппы S вида (1.3) в ее группу частных $G(S)$ (т. е. в группу (1.3)).

Лемма Мальцева [11]. *Полугруппа $\varphi(S)$ задается в исходном множестве порождающих $X \cup Y$ кроме соотношений* (1.3) *еще некоторыми соотношениями того же вида, более точно, соотношениями вида*

$$w'h' = u'f', \quad w' = u', \quad h' = f', \quad \text{где } w', u' \in X,\ h', f' \in Y. \tag{1.4}$$

Лемма Мальцева существенно помогает при выяснении вопроса, вложима ли полугруппа S в группу. Для этого нужно исследовать только равенства $w'h' = u'f'$, выполняющиеся в группе $G(S)$.

Полугруппы (1.3) и аналогичные им Г-полугруппы были названы в работе [3] M-полугруппами.

1.4. Модельная полугруппа. Прежде чем дать определение M-полугруппы, приведем модельный пример M-полугруппы.

1.4.1. Порождающие. Пусть S_0 — полугруппа,

$$S_0 = \mathrm{Sgr}\langle w, h, u, f;\ wh = uf \rangle, \tag{1.5}$$

заданная единственным соотношением. Пусть, далее, k — поле из двух элементов, $k(S_0)$ — полугрупповая алгебра, $\overline{k(S_0)}$ — ее пополнение до алгебры формальных рядов. Полугруппа $M_0 = \overline{k(S_0)^*}$ является модельным примером M-полугруппы и модельным примером абстрактной $\overline{CHA}$-полугруппы.

Выделим в M_0 подгруппу Γ обратимых рядов (с ненулевыми свободными членами) и множества

$$\mathscr{P} = \{p_{iw}, p_{iu}\}, \quad \mathscr{Q} = \{q_{if}, q_{ih}\}, \quad \mathscr{P}^* = \{p^*_{iw}\}, \quad \mathscr{Q}^* = \{q^*_{if}\}, \tag{1.6}$$

где $i \in I = \{i,\ 0 \leqslant i < r\}$ — некоторое множество индексов, $p_{0w} = w$, $p_{0u} = u$, $q_{0f} = f$, $q_{0h} = h$.

1.4.1.1. Замечание. $p_{iw} = w + uA_i$, $q_{if} = f + A_i h$, $p_{iu} = u + wC_i$, $q_{ih} = h + C_i f$, $p^*_{iw} = w + uA^*_i$, $q^*_{if} = f + A^*_i h$, где A_i, C_i — необратимые, A^*_i — обратимые ряды с некоторыми дополнительными условиями, которые нужны для того, чтобы никакие два различных элемента (1.6) не были ассоциированными.

Кроме того, выделим в M_0 множество $\mathscr{R}$ неразложимых (в собственное произведение) рядов, не ассоциированных с элементами (1.6) и друг с другом.

Полугруппа M_0 порождается вместе с Γ множеством $\Sigma = \mathscr{P} \cup \mathscr{Q} \cup \mathscr{P}^* \cup \mathscr{Q}^* \cup \mathscr{R}$.

1.4.2. Определяющие соотношения. Для каждого $p \in \Sigma$ выделим в Γ две изоморфные подгруппы:

$$\partial_p : \Gamma(p) \to \Gamma'(p). \tag{1.7}$$

1.4.2.1. Замечание. $\Gamma(p) = \{1 + pL\}$, $\Gamma'(p) = \{1 + Lp\}$, L — произвольные ряды.

Элементы $\gamma(p)$, где $p \in \mathscr{P} \cup \mathscr{Q} \cup \mathscr{P}^* \cup \mathscr{Q}^*$, мы будем обозначать специальным образом: P_{iw}, P_{iu}, Q_{if}, Q_{ih}, P^*_{iw}, Q^*_{if} соответственно (с дополнительными индексами, например: P_{1iw}). Аналогично для $\gamma'(p)$, например, будем обозначать $\gamma'(p_{iw})$ через P'_{iw}, $\gamma'(q^*_{if})$ через $Q^{*\prime}_{if}$.

Полугруппа M_0 задается множеством $\Gamma \cup \Sigma$ и следующей системой определяющих соотношений [2, 5]:

$$p_{kw} X_{ki} q_{ih} = p_{iu} Y_{ik} q_{kf}, \tag{1.8}$$

$$p^*_{nw} X^*_{ni} q_{ih} = p_{iu} Y^*_{in} q^*_{nf}, \tag{1.9}$$

$$p_{kw} \overline{X}^*_{kn} q^*_{nf} = p^*_{nw} \overline{Y}^*_{ik} q_{kf}, \tag{1.10}$$

где $X_{ki}, Y_{ik}, X^*_{ni}, Y^*_{in}, \overline{X}^*_{kn}, \overline{Y}^*_{nk} \in \Gamma$, $X_{0i} = X_{i0} = Y_{i0} = Y_{0i} = 1$,

$$\gamma(p)p = p\gamma'(p), \tag{1.11}$$

где $p \in \Sigma$,

$$X_i = 1 \tag{1.12}$$

(последнее — определяющие соотношения группы Γ (в системе порождающих, состоящей из всего множества Γ)).

1.4.2.2. Замечание. $X_{ki} = (1 - C_i A_k)^{-1}$, $Y_{ik} = (1 - A_k C_i)^{-1}$, $X^*_{ni} = \left(1 - C_i A^*_n\right)^{-1}$, $Y^*_{in} = \left(1 - A^*_n C_i\right)^{-1}$, $\overline{X}^*_{kn} = \overline{Y}^*_{nk} = \left(A^*_n - A_k\right)^{-1}$.

1.5. $\overline{CH}$-алгебры. Алгебра R (с 1) над некоторым полем k называется *CH-алгеброй* [1] (специальной алгеброй с несуммируемыми соотношениями), если она задается определяющими соотношениями

$$x_i y_j = x_k y_l, \tag{1.13}$$

где $x_i, x_k \in X$, $y_j, y_l \in Y$, причем должны выполняться следующие условия.

CH.1. $X \cap Y = \varnothing$, все слова $x_i y_j$, $x_k y_l$ попарно различны между собой.

CH.2. Система соотношений (1.13) удовлетворяет следующему условию несуммируемости. Пусть $AB = CD$ в R, где A, B, C, D — однородные элементы степени 1 (линейные комбинации порождающих). Тогда либо $A = C\alpha$, $D = \alpha B$, $\alpha \in k\backslash\{0\}$, либо существует такое равенство $wh = uf$ из числа (1.13), что $A = \alpha(w + au)$, $B = \beta(h + bf)$, $C = \gamma(u + bw)$, $D = \delta(f + ah)$, где $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in k \setminus \{0\}$, $a, b \in k$, $\alpha\beta = \gamma\delta$.

Естественное пополнение CH-алгебры R до алгебры степенных рядов называется $\overline{CH}$*-алгеброй* $\overline{R}$.

1.5.1. Теорема [2, 5]. *Пусть $\overline{R}$ — $\overline{CH}$-алгебра над полем из двух элементов. Тогда мультипликативная полугруппа $\overline{R}^*$ задается определяющими соотношениями* (1.8)–(1.12), *построенными для всех исходных соотношений* (1.13).

1.6. Определение M-полугруппы и M-группы. Пусть

$$M = \mathrm{Sgr}\langle\Gamma;\ \Sigma;\ \gamma(p)p = p\gamma'(p),\ p \in \Sigma,\ \gamma(p) \in \Gamma(p),\ \gamma'(p) \in \Gamma'(p),\ A_i = B_i,\ i \in I\rangle \tag{1.14}$$

— некоторая Г-группа. Назовем ее M-*полугруппой* (точнее, M-Г-полугруппой), если все соотношения $A_i = B_i$, $i \in I$, имеют вид

$$w\gamma h = u\delta f, \tag{1.15}$$

где $w, u \in X \subseteq \Sigma$, $h, f \in Y \subseteq \Sigma$, $X \cap Y = \varnothing$, $\gamma, \delta \in \Gamma$. Кроме того, потребуем, чтобы в Г выполнялись следующие условия для любого соотношения (1.15):

M1. $$\alpha \in \Gamma(w) \cap \Gamma(u) \Rightarrow \gamma^{-1}\partial_w(\alpha)\gamma \in \Gamma(h),\ \delta^{-1}\partial_u(\alpha)\delta \in \Gamma(f),$$
$$\partial_h(\gamma^{-1}\partial_w(\alpha)\gamma) = \partial_f(\delta^{-1}\partial_u(\alpha)\delta).$$

M2. $$\alpha \in \Gamma(w),\ \gamma^{-1}\partial_w(\alpha)\gamma \in \Gamma(h) \Rightarrow \alpha \in \Gamma(u).$$

M3. $$\beta \in \Gamma'(h) \cap \Gamma'(f) \Rightarrow \gamma\partial_h^{-1}(\beta)\gamma^{-1} \in \Gamma'(w),\ \delta\partial_f^{-1}\delta^{-1} \in \Gamma'(u),$$
$$\partial_w^{-1}(\gamma\partial_h^{-1}(\beta)\gamma^{-1}) = \partial_u^{-1}(\delta\partial_f^{-1}(\beta)\delta^{-1}).$$

M4. $$\beta \in \Gamma'(h),\ \gamma\partial_h^{-1}\gamma^{-1} \in \Gamma'(w) \Rightarrow \beta \in \Gamma'(f).$$

Поскольку мы не фиксировали левую и правую части соотношений (1.15), условия M2, M4 касаются также букв u, f из (1.15).

Группу частных $G(M)$ M-полугруппы называем M-*группой*.

1.6.1. Лемма [3]. *Пусть M и $G(M)$ — M-полугруппа и M-группа соответственно. Пусть Φ — все равенства, выполняющиеся в $G(M)$ и имеющие вид $\gamma = 1$, $\alpha a = b\beta$, $\alpha a\beta b = c\gamma d\delta$, $a, b, c, d \in \Sigma$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Gamma$. Тогда полугруппа $\overline{M} = \mathrm{Sgr}\langle\Gamma;\ \Sigma;\ \overline{\Phi}\rangle$ является подполугруппой группы $G(M)$.*

В случае $\Gamma = 1$ эта лемма превращается в лемму Мальцева.

1.7. MA-Г-полугруппы без циклов длины, не превосходящей 3. Говорят, что M-Г-полугруппа M не содержит левых циклов длины, не превосходящей 3, если система соотношений (1.15) не содержит равенств вида:

1) $w\gamma h = w\delta f$,
2) $w\gamma h = u\delta f$, $w\gamma_1 h_1 = u\delta_1 f_1$, эти соотношения различны (т. е. не Г-эквивалентны),
3) $w\gamma h = u\delta f$, $w_1\gamma_1 h_1 = u\delta_1 f_1$, $w_1\gamma_2 h_2 = w\delta_2 f_2$, эти соотношения попарно различны,
4) $w\gamma h = u\delta f$, $w\gamma h = u_1\delta_1 f_1$, эти соотношения различны.

Аналогично определяется условие отсутствия правых циклов длины, не превосходящей 3.

Будем говорить, что M-Г-полугруппа M *удовлетворяет условию* A, или является MA-*группой*, если выполняются следующие соотношения:

A. $$\Sigma = \dot{\cup}\Sigma_\alpha,\quad 0 \leqslant \alpha < \tau,\quad \Sigma_\alpha \neq \varnothing;\quad \Phi = \dot{\cup}\Phi_\alpha,\quad 0 \leqslant \alpha < \tau,$$
$$\Phi_\alpha = \{a\gamma p = p'\delta b,\ p, p' \in \Sigma_\alpha,\ a, b \in \overline{\Sigma}_\alpha = \cup\Sigma_\beta,\ \beta < \alpha;\ \gamma, \delta \in \Gamma\},$$

1.7.1. Теорема. *Группа частных $G(M)$ любой MA-Г-полугруппы без циклов длины, не превосходящей 3, является группой с относительным стандартным базисом, а сама полугруппа M вложима в группу.*

Доказательство точно такое же, как и в [3].

1.7.2. Замечание. Недавно А. И. Валицкас доказал, что любая чистая M-полугруппа (чистота означает, что в определяющих соотношениях (1.15) все $\gamma(p)$ и $\gamma'(p)$ равны 1 в Г) без циклов длины, не превосходящей 4, вложима в группу.

1.8. Группы с относительным стандартным базисом. Пусть $G = \mathrm{Gr}\langle \Gamma;\ \Sigma;\ \Phi\rangle$ — Г-группа. Мы назовем ее *группой с относительным* (*или* Г-) *стандартным базисом* (ОСБ-группой), если выполняются следующие условия.

ОСБ.1. $\Sigma = \dot\cup \Sigma_i$, $\Phi = \dot\cup \Phi_i$, $i \geqslant 0$; в соотношения Φ_i входят буквы из Г, $\overline{\Sigma}_i = \cup \Sigma_j$, $j < i$, и Σ_i. Положим

$$\overline{\Phi}_i = \cup \Phi_j,\quad j < i,\qquad \overline{G}_i = \mathrm{Gr}\langle \Gamma;\ \overline{\Sigma}_i;\ \overline{\Phi}_i\rangle,\qquad G_i = \mathrm{Gr}\langle \Gamma;\ \overline{\Sigma}_i \cup \Sigma_i;\ \overline{\Phi}_i \cup \Phi_i\rangle.$$

ОСБ.2. Соотношения из Φ_i, $i \geqslant 0$, имеют вид

$$Ap = pB, \tag{1.16}$$

$$\gamma(p)p = p\gamma'(p), \tag{1.17}$$

где $p \in \Sigma_i$, $A, B \in \overline{G}_i \setminus \Gamma$, $\gamma(p) \in \Gamma(p)$, $\gamma'(p) \in \Gamma'(p)$.

Положим $\mathfrak{A}_p = V(A, \gamma(p))$, $\mathfrak{B}_p = V(B, \gamma'(p))$. Тогда $\mathfrak{A}_p p = p\mathfrak{B}_p$. Кроме того, пусть $\mathfrak{A}_{p^{-1}} = \mathfrak{B}_p$, $\mathfrak{B}_{p^{-1}} = \mathfrak{A}_p$.

ОСБ.3. В каждом соотношении (1.16) выделены две буквы, не лежащие в Г:

$$A'xA''p = pB'yB'', \tag{1.18}$$

где

$$x \in \Sigma_j \cup \Sigma_j^{(-)},\quad (\Sigma_j^{(-)} = \{x^{-1}, x \in \Sigma_j\}),\quad y \in \Sigma_k \cup \Sigma_k^{(-)},\quad j, k \geqslant 0.$$

Канонические слова (определение см. ниже), построенные в соответствии с этими выделениями, образуют Г-базис группы G_i, т. е. каждое слово W этой группы равно одному и только одному, с точностью до Г-тождественного равенства, каноническому слову $C(W)$.

1.8.1. Определение. Определим канонические слова в группах G_i, $i \geqslant 0$, по индукции. При $i = 0$ это Г-несократимые слова. Пусть определены канонические слова в группах G_i, $i < j$. Слово

$$W = W_0 p_1^{\varepsilon_1} \ldots p_k^{\varepsilon_k} W_k, \tag{1.19}$$

где $W_j \in \overline{G}_i$, $p_j \in \Sigma_i$, назовем *каноническим*, если

1) W_j — канонические слова,
2) W — Г-несократимое слово,
3) W не содержит «запрещенных» подслов, построенных для всех соотношений (1.18):

$$\begin{aligned} &xC(\mathfrak{B}_x A'')p, && x^{-1}C(\mathfrak{A}_x A'^{-1})p,\\ &yC(\mathfrak{B}_y B'')p^{-1}, && y^{-1}C(\mathfrak{A}_y B'^{-1})p^{-1}. \end{aligned} \tag{1.20}$$

ОСБ.4. При $i = 0$ канонический вид $C(W)$ получается из W с помощью Г-сокращений. Пусть в группах G_i, $i < j$, определен процесс приведения слов к каноническому виду. Рассмотрим некоторое слово W вида (1.19) группы G_i и определим следующий процесс приведения W к каноническому виду:

1) привести W_j, $0 \leqslant j \leqslant k$, к каноническому виду,
2) сделать все Г-сокращения,
3) исключить все вхождения слов (1.20) по правилам

$$\begin{aligned} xC(\mathfrak{B}_x A'')p &\to \mathfrak{A}_x A'^{-1} pB, \\ x^{-1}C(\mathfrak{A}_x A'^{-1})p &\to \mathfrak{B}_x A'' pB^{-1}, \\ yC(\mathfrak{B}_y B'')p^{-1} &\to \mathfrak{A}_y B'^{-1} p^{-1}A, \\ y^{-1}C(\mathfrak{A}_y B'^{-1})p^{-1} &\to \mathfrak{B}_y B'' p^{-1}A^{-1}. \end{aligned} \tag{1.21}$$

При практической проверке условия единственности канонического вида ОСБ.3 используется

1.8.2. Лемма [3]. *Пусть в группах G_i, $i < j$, $i \geqslant 1$, канонический вид существует и единствен. Пусть, кроме того, каждое слово G_i равно некоторому каноническому слову. Тогда канонический вид слов в G_i единствен тогда и только тогда, когда выполняются условия:*

1) Σ_i *— правильная система проходных букв G_i с основанием $\overline{G}_i$, т. е.* $\mathfrak{A}_p = 1(\overline{G}_i) \Leftrightarrow \mathfrak{B}_p = 1(\overline{G}_i)$, *где* $\mathfrak{A}_p p = p\mathfrak{B}_p$, $p \in \Sigma_i$;

2) *если Up^ε, Vp^ε, где $U, V \in \overline{G}_i$, $p \in \Sigma_i$, — канонические слова и $U = V\mathfrak{A}_{p^\varepsilon}$, то* $\mathfrak{A}_{p^\varepsilon} = \gamma(p^\varepsilon)(\overline{G}_i)$.

В действительности, во всех приводимых ниже группах соотношения (1.16) имеют вид

$$Ap = qB, \tag{1.16'}$$

где $p, q \in \Sigma_i$, $A, B \in \overline{G}_i$. Этот случай легко сводится к предыдущему. Определим элементы $\mathfrak{A}_{pq}$, $\mathfrak{B}_{qp}$ такие, что

$$\mathfrak{A}_{pq} p = q\mathfrak{B}_{qp}. \tag{1.22}$$

Именно, выразим из (1.16′) все $q \neq p$ в виде $q = A_0 p B_0^{-1}$, подставим эти выражения в (1.16′). После этого получим систему равенств вида (1.16) и элементы $\mathfrak{A}_p$, $\mathfrak{B}_p$ такие, что $\mathfrak{A}_p p = p\mathfrak{B}_p$. Тогда

$$\mathfrak{A}_{pq} = A_0 \mathfrak{A}_p, \quad \mathfrak{B}_{qp} = B_0 \mathfrak{B}_p.$$

В частности, $\mathfrak{A}_{pp} = \mathfrak{A}_p$, $\mathfrak{B}_{pp} = \mathfrak{B}_p$. Обозначим $\mathfrak{A}_{p^{-1}q^{-1}} = \mathfrak{B}_{qp}$, $\mathfrak{B}_{q^{-1}p^{-1}} = \mathfrak{A}_{pq}$. Множество Σ_i называется *правильной системой проходных букв*, если $\mathfrak{A}_{pp} = 1(\overline{G}_i) \Leftrightarrow \mathfrak{B}_{pp} = 1(\overline{G}_i)$.

В условиях ОСБ.3 предполагается, что соотношения (1.16′) представлены в виде

$$A'xA''p = qB'yB'', \tag{1.18'}$$

где $x \in \Sigma_j \cup \Sigma_j^{(-)}$, $y \in \Sigma_k \cup \Sigma_k^{(-)}$, $j, k \geqslant 0$.

«Запрещенные» подслова (1.20) теперь имеют вид

$$\begin{aligned} &x_1 C(\mathfrak{B}_{x_1 x} A'')p, \quad x_1^{-1}C(\mathfrak{A}_{x x_1} A'^{-1})p, \\ &y_1 C(\mathfrak{B}_{y_1 y} B'')p^{-1}, \quad y^{-1}C(\mathfrak{A}_{y_1 y} B'^{-1})p^{-1}. \end{aligned} \tag{1.20'}$$

Наконец, преобразования (1.21) перепишем в виде

$$\begin{aligned} x_1 C(\mathfrak{B}_{x_1 x} A'')p &\to \mathfrak{A}_{x x_1} A'^{-1} qB, \\ x_1^{-1}C(\mathfrak{A}_{x x_1} A'^{-1})p &\to \mathfrak{B}_{x_1 x} A'' qB^{-1}, \\ y_1 C(\mathfrak{B}_{y_1 y} B'')p^{-1} &\to \mathfrak{A}_{y y_1} B'^{-1} p^{-1}A, \\ y_1^{-1}C(\mathfrak{A}_{y y_1} B'^{-1})p^{-1} &\to \mathfrak{B}_{y_1 y} B'' p^{-1}A^{-1}. \end{aligned} \tag{1.21'}$$

В лемме 1.8.2 условие 2 можно переформулировать следующим образом:

2′. *Если* Up^ε, Vq^ε, *где* $U, V \in \overline{G}_i$, $p, q \in \Sigma_i$, — *канонические слова и* $U = V\mathfrak{A}_{p^\varepsilon q^\varepsilon}$, то $p = q$, $\mathfrak{A}_{p^\varepsilon q^\varepsilon} = \gamma(p^\varepsilon)(\overline{G}_i)$.

1.8.3. Замечание. Пусть

$$G(S) = \mathrm{Gr}\langle \Gamma;\ \Sigma;\ \gamma(p)p = p\gamma'(p),\ w\gamma h = u\delta f\rangle$$

— M-Г-группа. Предположим, что для некоторого расширенного представления

$$G(S) = \mathrm{Gr}\langle \Gamma;\ \Sigma;\ \gamma(p)p = p\gamma'(p),\ w\gamma h = u\delta f,\ A_i = B_i,\ i \in I\rangle$$

группа G оказалась ОСБ-группой. Для того чтобы убедиться, что M-Г-полугруппа S вложима в группу, нужно проверить только, что канонический вид слов вида $W = x\alpha y$, $x, y \in \Sigma$, $\alpha \in \Gamma$, рассматриваемых как слова группы G, получается с помощью полугрупповых преобразований, т. е. $C(W) = W$ в полугруппе S.

§ 2. Абстрактные $\overline{CHA}$-полугруппы и группы

2.1. Модельная полугруппа (продолжение). Модельная Г-полугруппа M_0 обладает рядом дополнительных свойств. Все они формулируются в терминах некоторых условий, выполняющихся в группе Г.

2.1.1. Основные групповые следствия. Пусть $G(M_0)$ — группа частных подгруппы M_0. Самое замечательное свойство группы $G(M_0)$ состоит в том, что исходная система определяющих соотношений этой группы не полна в том смысле, что буквы $\{p^*_{nw},\ q^*_{nf},\ n \in I\}$ не являются правильными проходными буквами группы $G(M_0)$. Выпишем полную систему соотношений группы $G(M_0)$.

В группе $G(M_0)$ выполняются равенства

$$\begin{aligned} &X^*_{nl}q_{lh}Q^{*\prime}_{1nf}q^{-1}_{ih}X^{*-1}_{ni}P^{*\prime}_{1nw}\overline{Y}^*_{nk}q_{kf}Q^{*\prime}_{2nf}q^{-1}_{sf}\overline{Y}^*_{ns}P^{*\prime}_{2nw} \\ &\qquad = P^{*\prime}_{3nw}\overline{Y}^*_{nk}q_{kf}Q^{*\prime}_{3nf}q^{-1}_{sf}\overline{Y}^{*-1}_{3nf}P^{*\prime}_{4nw}X^*_{nl}q_{lh}Q^{*\prime}_{4nf}q^{-1}_{ih}X^{*-1}_{ni}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

если в Г выполняется следующий ряд равенств.

$$\begin{aligned} &1.\ P^*_{1nw} = P_{iu}P_{kw}. \\ &2.\ Y^*_{ln}Q^*_{1nf}Y^{*-1}_{in}P'_{iu} = P'_{lu}Y_{lk}Q_{kf}Y^{-1}_{ik}. \\ &3.\ P'_{kw}\overline{X}^*_{kn}Q^*_{2nf}\overline{X}^{*-1}_{sn} = X_{ki}Q_{ih}X^{-1}_{si}P'_{sw}. \\ &4.\ Q'_{kf}Q'_{ih} = Q'_{lh}Q'_{sf}. \\ &5.\ P_{lu} = P^*_{3nw}P_{1kw}. \\ &6.\ P_{1iu} = P_{sw}P^*_{2nw}. \\ &7.\ P'_{1kw}X_{kl}Q_{lh}X^{-1}_{sl} = \overline{X}^*_{kn}Q^*_{3nf}\overline{X}^{*-1}_{sn}P'_{1sw}. \\ &8.\ Y_{ls}Q_{sf}Y^{-1}_{is}P'_{1iu} = P'_{1lu}Y^*_{ln}Q^*_{4nf}Y^{*-1}_{in}. \\ &9.\ P_{1sw}P_{1lu} = P^*_{4nw}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Действительно, в $G(M_0)$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} &X^*_{ni}q_{ih}Q^{*\prime-1}_{4nf}q^{-1}_{lh}X^{*-1}_{nl}P^{*\prime-1}_{4nw}\overline{Y}^*_{ns}q_{sf}Q^{*\prime-1}_{3nf}q^{-1}_{kf}\overline{Y}^{*-1}_{nk} \\ &\qquad \cdot P^{*\prime-1}_{3nw}X^*_{nl}q_{lh}Q^{*\prime}_{1nf}q^{-1}_{ih}X^{*-1}_{ni}P^{*\prime}_{1nw}\overline{Y}^*_{nk}q_{kf}Q^{*\prime}_{2nf}q^{-1}_{sf}\overline{Y}^{*-1}_{ns}P^{*\prime}_{2nw}p^{*-1}_{nw} \\ &\qquad = p^{*-1}_{nw}p_{iu}Y^*_{in}Q^{*-1}_{4nf}Y^{*-1}_{ln}p^{-1}_{lu}P^{*-1}_{4nw}p_{sw}\overline{X}^*_{sn}Q^{*-1}_{3nf}\overline{X}^*_{nk}p^{-1}_{kw}P^{*-1}_{3nw} \\ &\qquad\qquad \cdot p_{lu}Y^*_{ln}Q^*_{1nf}Y^{*-1}_{in}p^{-1}_{iu}P^*_{1nw}p_{kw}\overline{X}^*_{kn}Q^*_{2nf}\overline{X}^{*-1}_{sn}p^{-1}_{sw}P^*_{2nw}. \end{aligned}$$

Преобразуем правую часть предыдущего равенства, без p^{*-1}_{nw}, пользуясь равенствами (2.2) и определяющими соотношениями группы $G(M_0)$:

$$\begin{aligned}
&p_{iu}P'^{-1}_{1iu}Y_{is}Q^{-1}_{sf}Y^{-1}_{ls}P'_{1lu}p^{-1}_{lu}P^{-1}_{1sw}p_{sw}P'_{1sw}X_{sl}Q^{-1}_{lh}\\
&\qquad\cdot X^{-1}_{kl}P'^{-1}_{1kw}p^{-1}_{kw}P_{1kw}P^{-1}_{lu}p_{lu}P'_{lu}Y_{lk}Q_{kf}Y^{-1}_{ik}P'^{-1}_{iu}p^{-1}_{iu}P_{iu}\\
&\qquad\cdot P_{kw}p_{kw}P'^{-1}_{kw}X_{ki}Q_{ih}X^{-1}_{si}P'_{sw}p^{-1}_{sw}P^{-1}_{sw}P_{1iu}\\
&= P^{-1}_{1iu}p_{iu}Y_{is}Q^{-1}_{sf}q_{sf}q^{-1}_{lh}Q^{-1}_{lh}q_{lh}q^{-1}_{kf}Q_{kf}q_{kf}q^{-1}_{ih}Q_{ih}X^{-1}_{si}p^{-1}_{sw}P_{1iu}\\
&\qquad= P^{-1}_{1iu}p_{sw}X_{si}q_{ih}Q'^{-1}_{sf}Q'^{-1}_{lh}Q'_{kf}q^{-1}_{ih}Q_{ih}X^{-1}_{si}p^{-1}_{sw}P_{1iu} = 1.
\end{aligned}$$

Отсюда следует равенство (2.1),записанное в виде

$$\begin{aligned}
&q^{-1}_{kf}\overline{Y}^{*-1}_{nk}P^{*\prime-1}_{3nw}X^{*}_{nl}q_{lh}Q^{*}_{1nf}q^{-1}_{ih}X^{*-1}_{ni}P^{*\prime}_{1nw}\overline{Y}^{*}_{nk}q_{kf}Q^{*\prime}_{2nf}\\
&\qquad= Q^{*}_{3nf}q^{-1}_{sf}\overline{Y}^{*-1}_{ns}P^{*\prime}_{4nw}X^{*}_{nl}q_{lh}Q^{*\prime}_{4nf}q^{-1}_{ih}X^{*-1}_{ni}P^{*\prime-1}_{2nw}\overline{Y}^{*}_{ns}q_{sf}, \qquad (2.1')
\end{aligned}$$

где выполняются равенства (2.2).

Отметим, что если $A = B$ — равенство (2.1), то $A^{-1} = B^{-1}$ также равенство (2.1).

Аналогично в $G(M_0)$ имеют место равенства

$$\begin{aligned}
&\overline{X}^{*-1}_{sn}p^{-1}_{sw}P^{*}_{1nw}p_{kw}\overline{X}^{*}_{kn}Q^{*}_{1nf}Y^{*-1}_{in}p^{-1}_{iu}P^{*}_{2nw}p_{lu}Y^{*}_{ln}Q^{*}_{2nf}\\
&\qquad= Q^{*}_{3nf}Y^{*-1}_{in}p^{-1}_{iu}P^{*}_{3nw}p_{lu}Y^{*}_{ln}Q^{*}_{4nf}\overline{X}^{*-1}p^{-1}_{sw}P^{*}_{4nw}p_{kw}\overline{X}^{*}_{kn}, \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

если в Г выполняется следующий ряд равенств.

$$\begin{aligned}
&1.\ Q^{*\prime}_{1nf} = Q'_{kf}Q'_{ih}.\\
&2.\ \overline{Y}^{*-1}_{ns}P^{*}_{1nw}\overline{Y}^{*}_{nk}Q_{kf} = Q_{ih}Y^{-1}_{is}P'_{iu}Y_{ik}.\\
&3.\ Q_{ih}X^{*-1}_{ni}P^{*\prime}_{2mw}X^{*}_{nl} = X^{-1}_{ki}P'_{kw}X_{kl}Q_{lh}.\\
&4.\ P_{iu}P_{kw} = P_{sw}P_{lu}.\\
&5.\ Q'_{sf} = Q^{*\prime}_{3nf}Q'_{1ih}. \qquad\qquad (2.4)\\
&6.\ Q'_{1kf} = Q'_{lh}Q^{*\prime}_{2nf}.\\
&7.\ Q_{1ih}X^{-1}_{si}P'_{sw}X_{sl} = X^{*-1}_{ni}P^{*\prime}_{3nw}X^{*}_{nl}Q_{1lh}.\\
&8.\ Y^{-1}_{ls}P'_{lu}Y_{lk}Q_{1kf} = Q_{1sf}\overline{Y}^{*-1}_{ns}P^{*\prime}_{4nw}\overline{Y}^{*}_{nk}.\\
&9.\ Q'_{1lh}Q'_{1sf} = Q^{*\prime}_{4nf}.
\end{aligned}$$

2.1.1.1. Замечание. Весьма нетривиальным является доказательство того, что системы (2.2) и (2.4) совместны. Более того, для любых P_{lu}, Q_{kf}, $\overline{Q}_{ih}$, q^{*}_{nf} существуют такие элементы $P^{*}_{1nw}, P_{iu}, \ldots, P_{1lu}$, что имеют место равенства (2.2). Аналогично для (2.4).

Включим соотношения (2.1) и (2.3) в число исходных соотношений группы $G(M_0)$.

2.1.2. Принцип двойственности для группы $G(M_0)$. Под предложением для группы $G(M_0)$ будем понимать замкнутую формулу узкого исчисления предикатов, содержащую кроме логических символов и знака равенства символы групповых операций $\cdot$, $()^{-1}$, константу 1 и переменные $p_{iw}, \ldots, q^{*}_{if}, X_{ki}, \ldots, \overline{Y}^{*}_{nk}, P_{iw}, \ldots, Q^{*\prime}_{if}$ (т. е. все символы, участвующие в определяющих соотношениях M_0, кроме p, $\gamma(p)$, $\gamma'(p)$, где $p \in \mathscr{R}$). Предложение истинно в $G(M_0)$, если при соответствующей интерпретации переменных получится истинное утверждение об элементах группы $G(M_0)$.

Определим отображение (антиинволюцию) φ формул. На переменных отображение φ определяется так:

1) p_{iw}, p_{iu}, p^{*}_{iw} переводятся соответственно в q_{if}, q_{ih}, q^{*}_{if}, и наоборот;

2) P_{iw}, P'_{iw}, P_{iu}, P'_{iu}, P^*_{iw}, $P^{*\prime}_{iw}$ переводятся соответственно в Q'_{if}, Q_{if}, Q'_{ih}, Q_{ih}, $Q^{*\prime}_{if}$, Q^*_{if}, и наоборот;

3) X_{ki}, X^*_{ni}, $\overline{X}^*_{nk}$ переводятся соответственно в Y_{ik}, Y^*_{in}, $\overline{Y}^*_{kn}$, и наоборот.

Потребуем, чтобы $\varphi(1) = 1$, $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$, $\varphi(x_1^{\varepsilon_1}\cdots x_n^{\varepsilon_n}) = \varphi(x_n^{\varepsilon_n})\cdots\varphi(x_1^{\varepsilon_1})$, где $x, x_1, \ldots, x_n$ — переменные. Равенство $\varphi(A) = \varphi(B)$ назовем *двойственным* равенству $A = B$. Например, равенства (2.2) двойственны равенствам (2.1) (с точностью до обозначений), а равенства (2.4) — равенствам (2.2).

Принципы двойственности для $G(M_0)$. *Для любого истинного предложения* II *в группе* $G(M_0)$ *выполняется и двойственное ему предложение* $\varphi(\mathrm{II})$.

2.1.2.1. Замечание. Справедливость принципа двойственности для группы $G(M_0)$ следует из того, что полугруппа, антиизоморфная M_0, снова является M_0. В абстрактной ситуации мы будем постулировать, что наряду с каждой аксиомой выполняется и двойственная ей аксиома (часть аксиом будут самодвойственны).

2.1.3. Свойства группы $\Gamma(M_0)$. Этот пункт является в некотором смысле центральным. Мы сформулируем те свойства группы $\Gamma(M_0)$, которые в дальнейшем будут аксиомами абстрактной группы обратимых рядов.

I. Для любого неупорядоченного соотношения $pXq = p'X'q'$ из числа (1.8)–(1.10) выполняются условия M1–M4 из определения M-полугруппы. Например, условие M1 в новых обозначениях имеет вид:

M1. $$\alpha \in \Gamma(p) \cap \Gamma(p') \Rightarrow X^{-1}\partial_p(\gamma)X \in \Gamma(q),\ X'^{-1}\partial_{p'}(\gamma)X' \in \Gamma(q'),$$
$$\partial_q(X^{-1}\partial_p(\gamma)X) = \partial_{q'}(X'^{-1}\partial_{p'}(\gamma)X').$$

II. 1. $Y^*_{in}Q^*_{nf}Y^{*-1}_{in}P'_{iu} = P'_{1iu}Y_{ik}Q_{kf}Y^{-1}_{ik} \Rightarrow Y^*_{in}Q^*_{nf}Y^{*-1}_{in} = \widetilde{P}'_{iu}$.

2. $\overline{X}^*_{kn}Q^*_{nf}\overline{X}^{*-1}_{kn}P'_{kw} = P'_{1kw}X_{ki}Q_{ih}X^{-1}_{ki} \Rightarrow \overline{X}^*_{kn}Q^*_{nf}\overline{X}^{*-1}_{kn} = \widetilde{P}'_{kw}$.

3. $\overline{Y}^*_{nk}Q_{kf}\overline{Y}^{*-1}_{nk}P^{*\prime}_{nw} = P^{*\prime}_{1nw}X^*_{ni}Q_{ih}X^{*-1}_{ni} \Rightarrow \overline{Y}^*_{nk}Q_{kf}\overline{Y}^{*-1}_{nk} = \widetilde{P}^{*\prime}_{nw}$.

4. Двойственные пп. 1–3 условия.

Здесь и ниже опущены кванторы $\forall$, $\exists$ (например, в формуле 1 опущено $(\forall Q^*_{nf}, \ldots, Q_{kf})(\exists \widetilde{P}'_{iu})$).

III. 1. Из равенств 1–6 системы (2.2) следуют равенства 7–9 этой же системы (для некоторых входящих в нее элементов).

2. Из равенств 1–3, 5–9 системы (2.2) следует равенство 6 этой же системы.

3. То же, что и в п. 1, с заменой $A^*_n \to A_k$, $A_k \to A^*_n$, $A_s \to A^*_m$, $A^*_m \to A_s$ (в этом случае Y^*_{ln} заменяется на Y_{lk}, Y_{lk} — на Y^*_{ln}, $\overline{X}^*_{kn}$ — на X^*_{nk}, X_{ki} — на X^*_{ni}).

4. Двойственные пп. 1–3 условия.

IV. 1. Следующая система при $i \neq l$ несовместна:

$$Y^*_{in}Q^*_{nf}Y^{*-1}_{ln}P'_{lu} = P'_{iu}Y_{ir}Q_{rf}Y^{-1}_{lr},$$
$$Q'_{rf} = Q^{*\prime}_{mf}Q'_{lh},$$
$$Y^*_{im}Q^*_{mf}Y^{*-1}_{lm}P'_{l1u} = P'_{1iu}Y_{ik}Q_{kf}Y^{-1}_{lk}.$$

2. Двойственное п. 1 условие.

V. 1. Для любых q_{kf}, q_{ih}, q_{lh}, q_{sf} (включая $q_{kf} = q^*_{kf}, \ldots, q_{sf} = q^*_{sf}$) и Q'_{lh}, Q'_{sf} существуют Q'_{lh}, Q'_{sf} такие, что $Q'_{kf}Q'_{ih} = Q'_{lh}Q'_{sf}$.

2. Двойственное п. 1 условие.

2.1.4. Основные утверждения о модельных полугруппе и группе. Напомним, что в число исходных соотношений группы мы включили соотношения (2.1) и (2.3).

2.1.4.1. Теорема [6]. *Г-группа $G(M_0)$ является группой со стандартным Г-базисом относительно некоторого копредставления, расширяющего исходное копредставление этой группы.*

2.1.4.2. Теорема [6]. *Полугруппа M_0 вложима в группу.*

2.2. $\overline{CHA}$-полугруппы и $\overline{CHA}$-группы. Пусть $\overline{R} = \overline{k\langle S\rangle}$ — некоторая $\overline{CH}$-алгебра. Будем называть ее *$\overline{CHA}$-алгеброй*, если k — поле из двух элементов, S не содержит левых (правых) циклов длины, не превосходящей 3, и выполняется условие (A) (см. 1.7).

Полугруппу $\overline{k\langle S\rangle}^*$ будем называть *$\overline{CHA}$-полугруппой*, а ее группу частных $G(\overline{k\langle S\rangle}^*)$ — *$\overline{CHA}$-группой*.

2.2.1. Теорема [6]. *Любая $\overline{CHA}$-группа $G(\overline{k\langle S\rangle}^*)$ является группой с относительным стандартным базисом для некоторого копредставления, расширяющего исходное представление группы.*

2.2.2. Теорема [6]. *Любая $\overline{CHA}$-полугруппа вложима в группу.*

2.2.3. Замечание. Хотя теоремы 2.1.4.1 и 2.1.4.2 являются частными случаями теорем 2.2.1 и 2.2.2, их доказательства не упрощаются по сравнению с доказательствами теорем 2.2.1 и 2.2.2.

2.3. Определение абстрактных $\overline{CHA}$-полугрупп и $\overline{CHA}$-групп. Пусть S — некоторая вспомогательная полугруппа, заданная порождающими $X\dot{\cup}Y$ и определяющими соотношениями

$$wh = uf, \quad w,u \in X, \quad h,u \in Y. \tag{2.5}$$

Предполагаем, что система (2.5) не содержит левых (правых) циклов длины, не превосходящей 3, и удовлетворяет условию (A) (см. 1.7). Зафиксируем в (2.5) левые и правые части соотношений.

Назовем MA-Г-полугруппу

$$M = \mathrm{Sgr}\langle \Gamma;\ \Sigma;\ \gamma(p)p = p\gamma'(p),\ p\in\Sigma,\ x\gamma y = z\delta t\rangle \tag{2.6}$$

абстрактной $\overline{CHA}$-полугруппой (а ее группу частных $G(M)$ — *абстрактной $\overline{CHA}$-группой*), если выполняются следующие условия.

CH.1. Каждому (упорядоченному) соотношению (2.5) поставлены в соответствие буквы (1.6), входящие в Σ (более подробно, $p_{iw} = p_i(w,u)$, ... , $q^*_{if} = q^*_i(f,h)$; при фиксированном соотношении (2.5) мы будем пользоваться сокращенными обозначениями). Предполагается, что все эти буквы попарно различны, за исключением некоторых букв $p_{0w} = w$, $p_{0u} = u$, $q_{0h} = h$, $q_{0f} = f$, которые могут совпадать друг с другом в соответствии с выбором S. Для элементов $\gamma(p_{iw}),\dots,\gamma'(q^*_{if})$ мы будем использовать те же обозначения, что и в 1.4.2.1, — $P_{iw},\dots,Q^{*\prime}_{if}$.

CH.2. Определяющие соотношения M, входящие в серию $\{x\gamma y = z\delta t,\ x,y,z,t\in\Sigma,\ \gamma,\delta\in\Gamma\}$, имеют вид (1.8)–(1.10) для всех исходных соотношений (2.5).

Из соотношений M следует, что в группе $G(M)$ для любого исходного соотношения (2.5) выполняются равенства (2.1) и (2.3). Включим их в число определяющих соотношений.

Свойства I–V модельной полугруппы M_0 становятся аксиомами полугруппы M:

CH.3. Для любого соотношения $wh = uf$ полугруппы S выполняются условия I–V в группе Г.

Предыдущие условия выполняются для каждого (одного) из исходных соотношений (2.5). Одно условие для двух исходных соотношений мы единственный раз использовали в доказательствах [6].

СН.4. Для двух исходных (не упорядоченных) соотношений $wh = uf$, $uh_1 = w_1 f_1$, если $P_{kw} = \gamma(u)\gamma(w_1)\gamma_1(u)$, то $P_{kw} = \gamma_2(u)$. Двойственно, для этих же соотношений из $Q'_{kf} = \gamma'(h)\gamma'(f_1)\gamma'_1(h)$ следует, что $Q'_{kf} = \gamma'_2(h)$.

2.4. Основные результаты.

2.4.1. Теорема. *Мультипликативная полугруппа $\overline{CHA}$-алгебры является абстрактной $\overline{CHA}$-полугруппой.*

Справедливость этого утверждения была отмечена ранее.

2.4.2. Теорема. *Абстрактная $\overline{CHA}$-группа $G(M)$ является группой с относительным стандартным базисом для копредставления, расширяющего исходное копредставление группы.*

Чтобы убедиться в справедливости этой теоремы, нужно проанализировать доказательство теоремы 2.2.1, данное в работах [5, 6]. Цель этого анализа состоит в том, чтобы убедиться, что все использования вида элементов группы $G(M)$ (как бесконечных рядов) можно элиминировать, заменив их аксиомами, наложенными на полугруппу M.

Следующая лемма является аналогом леммы 3 из [5, § 3].

2.4.3. Лемма. *Всякое соотношение (2.1), в котором $l = i$ или $k = s$, является тривиальным.*

Доказательство. Пусть, например, $l = i$. Перепишем соотношения (2.2), пользуясь аксиомами I и II, равенствами (1.8)–(1.10) и считая $P'_{lu} = \widetilde{P}'_{iu}$, $P'_{1lu} = \widetilde{P}'_{1iu}$ (нумерацию оставляем ту же, что и в (2.2), но добавляем «штрих»):

2′. $Y^*_{in}Q^*_{1nf}Y^{*-1}_{in} = P'_{2iu}$, $Y_{ik}Q_{kf}Y^{-1}_{ik} = P'_{3iu}$, $P'_{2iu}P'_{iu} = \widetilde{P}'_{iu}P'_{3iu}$, $Q^{*\prime}_{1nf} = Q'_{1ih}$, $X^*_{ni}Q_{1ih}X^{*-1}_{ni} = P^{*\prime}_{5nw}$, $Q'_{kf} = Q'_{2ih}$, $X_{ki}Q_{2ih}X^{-1}_{ki} = P'_{2kw}$, $P_{2iu} = P^*_{5nw}$, $P_{2kw} = P_{3iu}$.

8′. $Y_{is}Q_{sf}Y^{-1}_{is} = P'_{4iu}$, $Y^*_{in}Q^*_{4nf}Y^{*-1}_{in} = P'_{5iu}$, $P'_{4iu}P'_{1iu} = \widetilde{P}'_{1iu}P'_{5iu}$, $Q'_{sf} = Q'_{3ih}$, $X_{si}Q_{3ih}X^{-1}_{si} = P'_{2sw}$, $P_{2sw} = P_{4iu}$, $Q^{*\prime}_{4nf} = Q'_{4ih}$, $X^*_{ni}Q_{4ih}X^{*-1}_{ni} = P^{*\prime}_{6nw}$, $P^*_{6nw} = P_{5iu}$.

Ввиду 2′ и 8′ равенство 4 примет вид

4′. $Q'_{2ih}Q'_{ih} = \widetilde{Q}'_{ih}Q'_{3ih}$.

Равенство 3, записанное с помощью 2′, 8′ и 4′ как

3. $P'_{kw}\overline{X}^*_{kn}Q^*_{2nf}\overline{X}^{*-1}_{sn} = X_{ki}Q^{-1}_{2ih}\widetilde{Q}_{ih}Q_{3ih}X^{-1}_{si}P'_{sw} = P'^{-1}_{2kw}P'^{-1}_{1kw}\overline{X}^*_{kn}Q^*_{3nf}\cdot \overline{X}^{*-1}_{sn}P'_{1sw}P'_{2sw}P'_{sw}$, т. е. $\overline{X}^{*-1}_{kn}P'_{1kw}P'_{2kw}P'_{kw}\overline{X}^*_{kn}Q^*_{2nf} = Q^*_{3nf}\overline{X}^{*-1}_{sn}P'_{1sw}\cdot P'_{2sw}P'_{sw}\overline{X}^*_{sn}$,

ввиду I, II дает

3′. $\overline{X}^{*-1}_{kn}P'_{1kw}P'_{2kw}P'_{kw}\overline{X}^*_{kn} = \widetilde{Q}^*_{nf}$, $\overline{X}^{*-1}_{sn}P'_{1sw}P'_{2sw}P'_{sw}\overline{X}^*_{sn} = \widehat{Q}^*_{nf}$, $\widetilde{Q}^*_{nf}Q^*_{2nf} = Q^*_{3nf}\widehat{Q}^*_{nf}$, $P_{1kw}P_{2kw}P_{kw} = P^*_{7nw}$, $\overline{Y}^{*-1}_{nk}P^{*\prime}_{7nw}\overline{Y}^*_{nk} = Q_{1kf}$, $Q'_{1kf} = \widetilde{Q}^{*\prime}_{nf}$, $P_{1sw}P_{2sw}P_{sw} = P^*_{8nw}$, $\overline{Y}^{*-1}_{ns}P^{*\prime}_{8nw}\overline{Y}^*_{ns} = Q_{1sf}$, $\widehat{Q}^{*\prime}_{nf} = Q'_{1sf}$.

Из 3′ следует равенство, дополняющее соотношения (2.2):

10. $Q^{*\prime}_{2nf} = \widetilde{Q}^{*\prime -1}_{nf}Q^{*\prime}_{3nf}\widehat{Q}^{*\prime}_{nf} = Q'^{-1}_{1kf}Q^{*\prime}_{3nf}Q'_{1sf}$.

Учитывая 2′, 8′ и 10, равенство (2.1) перепишем в виде

$$\overline{Y}^{*-1}_{nk}P^{*\prime -1}_{3nw}X^*_{ni}Q_{1ih}X^{*-1}_{ni}P^{*\prime}_{1nw}\overline{Y}^*_{nk}q_{kf}Q'^{-1}_{1kf}Q^*_{3nf}Q'_{1sf}q^{-1}_{sf} = q_{kf}Q^{*\prime}_{3nf}q^{-1}_{sf}\overline{Y}^{*-1}_{ns}P^{*\prime}_{4nw}X^*_{ni}Q_{4ih}X^{*-1}_{ni}P^{*\prime -1}_{2nw}\overline{Y}^*_{ns}. \tag{2.1′}$$

Из 2′ следует, что

$$P^{*\prime -1}_{3nw}X^*_{ni}Q_{1ih}X^{*-1}_{ni}P^{*\prime}_{1nw} = P^{*\prime -1}_{3nw}P^{*\prime}_{5nw}P^{*\prime}_{1nw}.$$

Докажем, что
$$P^{*\prime-1}_{3nw}P^{*\prime}_{5nw}P^{*\prime}_{1nw}=\overline{Y}^{*}_{nk}Q_{1kf}\overline{Y}^{*-1}_{nk}.$$
Ввиду $3'$ это равносильно равенству
$$P^{*\prime-1}_{3nw}P^{*\prime}_{5nw}P^{*\prime}_{1nw}=P^{*\prime}_{7nw},$$
т. е. ввиду 5, $2'$, 1, $3'$ — равенству
$$P_{1kw}\widetilde{P}^{-1}_{iu}P_{2iu}P_{1iu}P_{kw}=P_{1kw}P_{2kw}P_{kw},$$
т. е. ввиду $2'$ — равенству $P_{3iu}=P_{2kw}$, которое верно (см. $(2')$).

Аналогично докажем, что
$$P^{*\prime}_{4nw}X^{*}_{ni}Q_{4ih}X^{*-1}_{ni}P^{*\prime-1}_{2nw}=\overline{Y}^{*}_{ns}Q_{1sf}\overline{Y}^{*-1}_{ns}.$$
В силу $8'$ и $3'$ это равносильно равенству
$$P^{*\prime}_{4nw}P^{*\prime}_{6nw}P^{*\prime-1}_{2nw}=P^{*\prime}_{8nw},$$
т. е. равенству $P^{*}_{4nw}P^{*}_{6nw}P^{*-1}_{2nw}=P^{*}_{8nw}$. Из 9, $8'$, 6, $3'$ вытекает, что последнее равенство равносильно равенству
$$P_{1sw}\widetilde{P}_{1iu}P_{5iu}P^{-1}_{1iu}P_{sw}=P_{1sw}P_{2sw}P_{sw},$$
т. е. в силу $8'$ — равенству $P_{4iu}=P_{2sw}$, которое верно (см. $(8')$). Лемма 2.4.3 доказана.

Следующая лемма является аналогом леммы 7 из [5, § 3].

2.4.4. Лемма. *Пусть имеют место равенства* (2.2), *а также следующие*:

(a) $X^{*-1}_{ni}P^{*\prime}_{1nw}\overline{Y}^{*}_{nk}=Q_{1ih}X^{*-1}_{mi}\widetilde{P}^{*\prime}_{1mw}\overline{Y}^{*}_{mk}Q_{1kf}$,

(b) $Q^{*\prime}_{1nf}Q'_{1ih}=Q'_{1lh}\widetilde{Q}^{*\prime}_{1mf}$,

(c) $Q'_{1kf}Q^{*\prime}_{2nf}=\widetilde{Q}^{*\prime}_{2mf}Q'_{1sf}$,

(1m) $\widetilde{P}^{*}_{1mw}=\widetilde{P}_{iu}\widetilde{P}_{kw}$.

Тогда в Γ *выполняются равенства* (*мы различаем* 1, (1) *и* (1m)):

(1) $\overline{Y}^{*-1}_{nk}P^{*\prime-1}_{3nw}X^{*}_{nl}Q_{1lh}=Q_{2kf}\overline{Y}^{*-1}_{mk}\widetilde{P}^{*\prime-1}_{3mw}X^{*}_{ml}$,

(2) $X^{*-1}_{ni}P^{*\prime-1}_{2nw}\overline{Y}^{*}_{ns}Q^{-1}_{1sf}=Q_{2ih}X^{*-1}_{mi}\widetilde{P}^{*\prime-1}_{2mw}\overline{Y}^{*}_{ms}$,

(3) $Q^{*\prime}_{4nf}Q'_{2ih}=Q'_{2lh}Q^{*\prime}_{4mf}$,

(4) $\overline{Y}^{*-1}_{ns}P^{*\prime}_{4nw}X^{*}_{ml}Q_{2lh}=Q_{2sf}\overline{Y}^{*-1}_{ms}\widetilde{P}^{*\prime}_{4mw}X^{*}_{ml}$,

(5) $Q^{*\prime}_{3nf}Q'_{2sf}=Q'_{2kf}\widetilde{Q}^{*\prime}_{3mf}$,

(2m) $Y^{*}_{lm}\widetilde{Q}^{*}_{1mf}Y^{*-1}_{im}\widetilde{P}'_{iu}=\widetilde{P}'_{lu}Y_{lk}\widetilde{Q}_{kf}Y^{-1}_{ik}$,

(3m) $\widetilde{P}'_{kw}\overline{X}^{*}_{km}\widetilde{Q}^{*}_{2mf}\overline{X}^{*-1}_{sm}=X_{ki}\widetilde{Q}_{ih}X^{-1}_{si}\widetilde{P}'_{sw}$,

(4m) $\widetilde{Q}'_{kf}\widetilde{Q}'_{ih}=\widetilde{Q}'_{lh}\widetilde{Q}'_{sf}$,

(5m) $\widetilde{P}_{lu}=\widetilde{P}^{*}_{3mw}\widetilde{P}_{1kw}$,

(6m) $\widetilde{P}_{1iu}=\widetilde{P}_{sw}\widetilde{P}^{*}_{2mw}$,

(7m) $\widetilde{P}'_{1kw}X_{kl}\widetilde{Q}_{lh}X^{-1}_{sl}=\overline{X}^{*}_{km}\widetilde{Q}^{*}_{3mf}\overline{X}^{*-1}_{sm}\widetilde{P}'_{1sw}$,

(8m) $Y_{ls}\widetilde{Q}_{sf}Y^{-1}_{is}\widetilde{P}'_{1iu}=\widetilde{P}'_{1lu}Y^{*}_{lm}\widetilde{Q}^{*}_{4mf}Y^{*-1}_{im}$,

(9m) $\widetilde{P}_{1sw}\widetilde{P}_{1lu}=\widetilde{P}^{*}_{4mw}$.

Доказательство. Все рассуждения, приведенные в [5, § 3], при доказательстве леммы 7, проходят и здесь, за исключением тех, где мы специально настаиваем, что те или другие элементы обладают дополнительными свойствами. Пропустим все эти дополнительные замечания и не будем считать, что элементы из доказательства леммы 7 [5] обладают какими-нибудь дополнительными свойствами. Таким образом, будут выполняться все равенства из доказательства леммы 7, кроме (53) и (54). Имеем: равенство (1) — это равенство (39) работы [5], равенство (2) — это (42), равенство (3) — это (45), равенство (4) — это (46′), равенство (5) — это «почти» равенство (49), только в (49) вместо нужного нам элемента Q'_{2kf} стоит элемент Q'_{3kf} («настоящее» равенство (5) будет получено ниже). Далее, равенство (2m) — это (40) работы [5], равенство (3m) — это (43), равенство (4m) будет следовать из остальных в силу CH.3 (III.2), равенство (5m) — это (41), равенство (6m) — это (44), (7m) — это «почти» (51) (в (51) вместо нужного нам $\widetilde{P}'_{1kw}$ стоит $\widetilde{P}'_{2kw}$), равенство (8m) — это (47), наконец, равенство (9m) — это (48).

Из равенств (39) и (50) работы [5] в силу I, II получаем (вместо (53)):

(53′) $\overline{Y}^*_{mk}Q^{-1}_{2kf}Q_{3kf}\overline{Y}^{*-1}_{mk} = \widehat{P}^{*\prime}_{mw}$, $X^*_{ml}Q^{-1}_{1lh}Q_{3lh}X^{*-1}_{ml} = \check{P}^{*\prime}_{mw}$, $\widehat{P}^*_{mw} = \widehat{P}_{kw}$, $\check{P}^*_{mw} = \check{P}_{lu}$, $\widetilde{P}^{*\prime}_{3mw}\widehat{P}^{*\prime}_{mw} = \check{P}^{*\prime}_{mw}\widetilde{P}^{*\prime}_{5mw}$, $Q'^{-1}_{2kf}Q'_{3kf} = \widehat{Q}^{*\prime}_{mf}$, $\overline{X}^*_{km}\widehat{Q}^*_{mf}\overline{X}^{*-1}_{km} = \widehat{P}'_{kw}$.

Из последних равенств и (41), (52) [5] имеем

$$\widetilde{P}_{lu}\widetilde{P}^{-1}_{1kw}\widehat{P}^*_{mw} = \check{P}^*_{mw}\widetilde{P}_{2lu}\widetilde{P}^{-1}_{kw}, \quad \widetilde{P}^{-1}_{1kw}\widehat{P}_{kw}\widetilde{P}_{2kw} = \widetilde{P}^{-1}_{lu}\check{P}_{lu}\widetilde{P}_{2lu},$$

т. е. в силу I

(53″) $X^{-1}_{kl}\widetilde{P}'^{-1}_{1kw}\widehat{P}'_{kw}\widetilde{P}'_{2kw}X_{kl} = \widehat{Q}_{lh}$, $Y^{-1}_{lk}\widetilde{P}'^{-1}_{lu}\check{P}'_{lu}\widetilde{P}'_{2lu}Y_{lk} = \widehat{Q}_{kf}$, $\widehat{Q}'_{lh} = \widehat{Q}'_{kf}$.

Перепишем (49) и (51) из [5], пользуясь (53′), в виде

(49′) $Q^{*\prime}_{3nf}Q'_{2sf} = Q'_{2kf}(\widehat{Q}^{*\prime}_{mf}\widetilde{Q}^{*\prime}_{3mf})$,

(51′) $\widetilde{P}'_{2kw}X_{kl}\widetilde{Q}_{lh}X^{-1}_{sl} = \overline{X}^*_{km}\widehat{Q}^{*-1\prime}_{mf}\overline{X}^{*-1}_{km}\overline{X}^*_{km}(\widehat{Q}^{*\prime}_{mf}\widetilde{Q}^{*\prime}_{3mf})\overline{X}^{*-1}_{sm}\widetilde{P}'_{1sw} = \widehat{P}^{-1}_{kw} \cdot \overline{X}^*_{km}(\widehat{Q}^{*\prime}_{mf}\widetilde{Q}^{*\prime}_{3mf})\overline{X}^{*-1}_{sm}\widetilde{P}'_{1sw}$.

Перепишем еще раз равенства (51′), пользуясь (53′) и (53″):

(51″) $\widetilde{P}'_{1kw}(\widetilde{P}'^{-1}_{1kw}\widehat{P}'_{kw}\widetilde{P}'_{2kw})X_{kl}\widetilde{Q}_{lh}X^{-1}_{sl} = \overline{X}^*_{km}(\widehat{Q}^{*\prime}_{mf}\widetilde{Q}^{*\prime}_{3mf})\overline{X}^{*-1}_{sm}\widetilde{P}'_{1sw}$, $\widetilde{P}'_{1kw} \cdot X_{kl}(\widehat{Q}_{lh}\widetilde{Q}_{lh})X^{-1}_{sl} = \overline{X}^*_{km}(\widehat{Q}^{*\prime}_{mf}\widetilde{Q}^{*\prime}_{3mf})\overline{X}^{*-1}_{sm}\widetilde{P}'_{1sw}$.

Итак, мы переписали (49) и (51) в виде (49′) и (51″) так, что в них стоят Q'_{2kf} и $\widetilde{P}'_{1kw}$ соответственно. Это и будут равенства (5) и (7m). Но теперь изменились элементы $\widetilde{Q}^{*\prime}_{3mf}$ и $\widetilde{Q}_{lh}$: $\widetilde{Q}^{*\prime}_{3mf} \to \widehat{Q}^{*\prime}_{mf}\widetilde{Q}^{*\prime}_{3mf}$, $\widetilde{Q}_{lh} \to \widehat{Q}_{lh}\widetilde{Q}_{lh}$. Дело с $\widetilde{Q}^{*\prime}_{3mf}$ на этом заканчивается, так как этот элемент входит лишь в (5) и (7m) и в обеих формулах вместо него мы поставили $\widehat{Q}^{*\prime}_{mf}\widetilde{Q}^{*\prime}_{3mf}$. Дело с $\widetilde{Q}_{lh}$ еще проще: оно входит лишь в (7m) и (4m). В равенстве (7m) мы поставили $\widehat{Q}_{lh}\widetilde{Q}_{lh}$, а равенство (4m) для $\widehat{Q}_{lh}\widetilde{Q}_{lh}$ вместо $\widetilde{Q}_{lh}$ следует из остальных в силу III. На этом все изменения заканчиваются. Лемма 2.4.4 доказана.

Следующее утверждение является вариантом следствия 1 леммы 7 из [5, § 3].

2.4.5. *Следствие.* *Пусть выполняются равенства* (2.2), *равенства* (a), (b) *леммы* 2.4.4 *и равенство*

(d) $\overline{Y}^{*-1}_{nk}P^{*\prime-1}_{3nw}X^*_{nl}Q_{1lh} = \overline{Q}_{2kf}\overline{Y}^{*-1}_{3mw}P^{*\prime-1}_{3mw}X^*_{ml}$.

Тогда равенство (2.1) *эквивалентно равенству того же вида, в котором n заменено на m, $P^{*\prime}_{1nw}$ — на $\widetilde{P}^{*\prime}_{1mw}$, $Q^{*\prime}_{1nf}$ — на $\widetilde{Q}^{*\prime}_{1mf}$, $P^{*\prime}_{3nw}$ — на $\overline{P}^{*\prime}_{3mw}$.*

Доказательство. Справедливы условия леммы 2.4.4 (равенства (c) и (1m) следуют из аксиом V). Поэтому имеют место все равенства, перечисленные в заключении этой леммы. Мы должны теперь «заменить» $\widetilde{P}^*_{3mw}$ на $\overline{P}^*_{3mw}$. Сравним равенство (d) из следствия 2.4.5 и равенство (1) из леммы 2.4.4:

$$Q_{2kf}\overline{Y}^*_{mk}\widetilde{P}^{*\prime-1}_{3mw}X^*_{mk} = \overline{Q}_{2kf}\overline{Y}^{*-1}_{mk}\overline{P}^{*\prime-1}_{3mw}X^*_{ml}.$$

Отсюда имеем

$$\overline{Y}^*_{mk}\widetilde{P}^{*\prime-1}_{3mw}\widetilde{P}^{*\prime-1}_{3mw}\overline{Y}^*_{mk} = Q^{-1}_{2kf}\overline{Q}_{2kf},$$

т. е. в силу аксиом II получаем, что

$$\widetilde{P}^{*-1}_{3mw}\overline{P}^*_{3mw} = \widehat{P}_{kw}, \quad \overline{X}^{*-1}_{km}\widehat{P}'_{kw}\overline{X}^*_{km} = \widehat{Q}^*_{mf}, \quad \widehat{Q}^{*\prime}_{mf} = Q^{-1}_{2kf}\overline{Q}_{2kf}.$$

Мы должны в (5m) заменить $\widetilde{P}^*_{3mw}$ на $\overline{P}^*_{3mw}$:

$(5m)'$ $\widetilde{P}_{lu} = \overline{P}^*_{3mw}(\widehat{P}^{-1}_{kw}\widetilde{P}_{1kw})$.

Это приводит к необходимости пересмотреть (7m):

$(7m)'$ $(\widehat{P}'^{-1}_{kw}\widetilde{P}_{1kw})X_{kl}\widetilde{Q}_{lh}X^{-1}_{sl} = \overline{X}^*_{km}(\widehat{Q}^*_{mf}\widetilde{Q}^*_{3mf})\overline{X}_{sm}\widetilde{P}'_{1sw}$.

На этом все изменения заканчиваются. Следствие 2.4.5 доказано.

Аналогично следствию 2 леммы 7 из [5, § 3] имеем

2.4.6. Следствие. *Пусть выполняются равенства* (2.2) *и равенство* (a) *из леммы* 2.4.4. *Тогда равенство* (2.1) *эквивалентно равенству того же вида, в котором n заменено на m, $P^{*\prime}_{1nw}$ — на $\widetilde{P}^{*\prime}_{1mw}$.*

Доказательство. Равенства (b), (c) и (1m) из леммы 2.4.4 выполняются в силу аксиом V.

Следующая лемма является аналогом теоремы 3 из [5].

2.4.7. Лемма. *Пусть $A = B$ и $B = C$ — равенства вида $(2.1)'$. Тогда $A = C$ снова равенство вида $(2.1)'$.*

Доказательство. Пусть $A = B$ имеет вид $(2.1)'$ (в обозначениях $(2.1)'$), а $B = C$ — вид (56) из [5, теоремы 3]. Из (58) [5] и следствия 2.4.5 получаем, что без ограничения общности можно считать, что в равенствах (56), (57) [5]

$$n = m, \quad \widetilde{P}^{*\prime}_{1mw} = P^{*\prime-1}_{2nw}, \quad \widetilde{Q}^*_{1mf} = Q^*_{4nf}, \quad \widetilde{P}^{*-1}_{3mw} = P^*_{4nw}.$$

Далее, рассуждая как в [5, теорема 3], получаем, что $A = C$ эквивалентно равенству (62) [5], имеющему вид $(2.1)'$, если мы докажем равенства (63) [5]. Все равенства из (63), кроме третьего и шестого, у нас имеются (обоснование, как и в [5, теорема 3]). Рассмотрим третьи равенства, соответствующие $A = B$ и $B = C$:

3. $P'_{kw}\overline{X}^*_{kn}Q^*_{2nf}\overline{X}^{*-1}_{sn} = X_{ki}Q_{ih}X^{-1}_{si}P'_{sw}$.

3′. $\widetilde{P}'_{sw}\overline{X}^*_{sn}\widetilde{Q}^*_{2nf}\overline{X}^{*-1}_{s_1n} = X_{si}\widetilde{Q}_{ih}X^{-1}_{s_1i}\widetilde{P}'_{s_1w}$.

Рассуждая, как и в [5, теорема 3], мы вместо равенств (61) [5] получаем равенства

$(61)'$ $\widetilde{P}^*_{1nw} = P^{*-1}_{2nw} = \widetilde{P}_{iu}\widetilde{P}_{sw} = P^{-1}_{1iu}P_{sw}$, т. е. $P_{1iu}\widetilde{P}_{iu} = P_{sw}\widetilde{P}^{-1}_{sw}$; $\widetilde{P}^{*-1}_{3nw} = P^*_{4nw} = \widetilde{P}_{1sw}\widetilde{P}_{lu} = P_{1sw}P_{1lu}$, т. е. $P^{-1}_{1sw}\widetilde{P}_{1sw} = P_{1lu}\widetilde{P}^{-1}_{lu}$.

Таким образом, в силу аксиом I имеем

$(61)''$ $Y^{-1}_{is}P'_{1iu}\widetilde{P}'_{iu}Y_{is} = \widehat{Q}_{sf}, X^{-1}_{si}P'_{sw}\widetilde{P}'^{-1}_{sw}X_{si} = \widehat{Q}_{ih}, \widehat{Q}'_{sf} = \widehat{Q}'_{ih}, X^{-1}_{sl}P'^{-1}_{1sw}\widetilde{P}'_{1sw}$. $X_{sl} = \check{Q}_{lh}, Y^{-1}_{ls}P'_{1lu}\widetilde{P}'^{-1}_{lu}Y_{ls} = \check{Q}_{sf}, \check{Q}'_{lh} = \check{Q}'_{sf}$.

Тогда из 3 и 3′ получаем, что

$$P'_{kw}\overline{X}^*_{kn}Q^*_{2nf}\widetilde{Q}^*_{2nf}\overline{X}^{*-1}_{s_1n}$$
$$= X_{ki}Q_{ih}X^{-1}_{si}P'_{sw}\widetilde{P}'^{-1}_{sw}X_{si}\widetilde{Q}_{ih}X^{-1}_{s_1i}\widetilde{P}'_{s_1w} = X_{ki}Q_{ih}\widehat{Q}_{ih}\widetilde{Q}_{ih}X^{-1}_{s_1i}\widetilde{P}'_{s_1w}.$$

Таким образом, в третьем равенстве в (63) [5] вместо ранее стоявшего элемента $Q_{ih}\widetilde{Q}_{ih}$ мы получили $Q_{ih}\widehat{Q}_{ih}\widetilde{Q}_{ih}$. Это нас вполне устраивает.

Точно так же из равенств

7. $P'_{1kw}X_{kl}Q_{lh}X^{-1}_{sl} = \overline{X}^*_{kn}Q^*_{3nf}\overline{X}^{*-1}_{sn}P'_{1sw}$,

7′. $\widetilde{P}'_{1sw}X_{sl}\widetilde{Q}_{lh}X^{-1}_{s_1l} = \overline{X}^*_{sn}\widetilde{Q}^*_{3nf}\overline{X}^{*-1}_{s_1n}\widetilde{P}'_{1s_1w}$

для $A = B$ и $B = C$ вытекает, что

$$\overline{X}^*_{kn}Q^*_{3nf}\widetilde{Q}^*_{3nf}\overline{X}^{*-1}_{s_1n}\widetilde{P}'_{1s_1w}$$
$$= P'_{1kw}X_{kl}Q_{lh}X^{-1}_{sl}P'^{-1}_{1sw}\widetilde{P}'_{1sw}X_{sl}\widetilde{Q}_{lh}X^{-1}_{s_1l} = P'_{1kw}X_{kl}Q_{lh}\check{Q}_{lh}\widetilde{Q}_{lh}X^{-1}_{s_1l}.$$

Итак, в шестом равенстве из (63) [5] мы вместо $Q_{lh}\widetilde{Q}_{lh}$ имеем $Q_{lh}\check{Q}_{lh}\widetilde{Q}_{lh}$. Это нас вполне устраивает. Лемма 2.4.7 доказана.

Следующая лемма является аналогом теоремы 4 из [5]. Дадим сначала определения. Два соотношения типа $(2.1)'$ $A = B$ и $C = D$, одно из которых имеет вид (3) [5, § 3], а второе — (5) [5, § 3], называются *зацепленными по A и C*, если выполняются условия (6) [5, § 3]. Они же называются *сильно зацепленными по A и C*, если дополнительно выполняется условие (7) [5, § 3].

2.4.8. Лемма. *Пусть имеют место равенства $A = B$, $C = D$ вида $(2.1)'$, зацепленные по A и C. Тогда существует соотношение $B = C_1$ типа $(2.1)'$ такое, что соотношения $A = C_1$ и $C = D$ являются сильно зацепленными по A и C.*

Доказательство. Будем рассуждать так же, как и при доказательстве теоремы 4 из [5]. Из равенства (65) [5] получаем

$(65)'$ $P_{iu}P_{kw} = \widetilde{P}_{iu}\widetilde{P}_{kw}$, т. е. $\widetilde{P}^{-1}_{iu}P_{iu} = \widetilde{P}_{kw}P^{-1}_{kw}$.

Отсюда в силу аксиом I имеем

$(65)''$ $Y^{-1}_{ik}\widetilde{P}'^{-1}_{iu}P'_{iu}Y_{ik} = \widehat{Q}_{kf}$, $X^{-1}_{ki}\widetilde{P}'_{kw}P'^{-1}_{kw}X_{ki} = \widehat{Q}_{ih}$, $\widehat{Q}'_{kf} = \widehat{Q}'_{ih}$.

Вместо системы равенств, написанной в доказательстве теоремы 4 из [5], в силу $(65)''$ будем иметь

$$P^{*-1}_{2nw} = P^{-1}_{1iu}P_{sw},\quad Y^*_{ln}Q^*_{4nf}Y^{*-1}_{in}P'^{-1}_{1iu} = P'^{-1}_{1lu}Y_{ls}Q_{sf}Y^{-1}_{is},$$
$$P'_{sw}\overline{X}^*_{sn}Q^{*-1}_{2nf}\widetilde{Q}^*_{2nf}\overline{X}^{*-1}_{s_1n} = X_{si}Q^{-1}_{ih}\widehat{Q}^{-1}_{ih}\widetilde{Q}_{ih}X^{-1}_{s_1i}\widetilde{P}_{s_1w},$$
$$P^{-1}_{1lu} = P^{*-1}_{4nw}P_{1sw},\quad \widetilde{P}_{1iu} = \widetilde{P}_{s_1w}P^*_{2nw}.$$

Отсюда, как и в [5, теорема 3], получаем нужное нам равенство $A = C_1$ (только вместо леммы 2.5 [5] нужно использовать аксиому III.3). Лемма 2.4.8 доказана.

Наконец, следующая лемма является аналогом теоремы 5 из [5].

2.4.9. Лемма. *Пусть имеют место равенства $A = B$, $C = D$ типа $(2.1)'$. Если они являются сильно зацепленными по A и C, то $(\exists\gamma \in \Gamma)$ $A\gamma C^{-1} = B\gamma D^{-1}$ эквивалентно соотношению типа $(2.1)'$.*

Доказательство. Опять будем следовать [5], на этот раз доказательству теоремы 5. Из $\widetilde{P}^*_{1nw} = P^*_{1nw}$ вытекает, что $P_{iu}P_{kw} = \widetilde{P}_{iu}\widetilde{P}_{kw}$, т. е. $\widetilde{P}^{-1}_{iu}P_{iu} = \widetilde{P}_{kw}P^{-1}_{kw}$. Отсюда получаем замену (68) [5]:

$(68')$ $Y^{-1}_{ik}\widetilde{P}'^{-1}_{iu}P'_{iu}Y_{ik} = \widehat{Q}_{kf}$, $X^{-1}_{ki}\widetilde{P}'_{kw}P^{-1}_{kw}X_{ki} = \widehat{Q}_{ih}$, $\widehat{Q}'_{kf} = \widehat{Q}'_{ih}$.

Из равенств (в обозначениях [5, теорема 5])

3. $P'_{kw}\overline{X}^*_{kn}Q^*_{2nf}\overline{X}^{*-1}_{sn} = X_{ki}Q_{ih}X^{-1}_{si}P'_{sw}$,

$\widetilde{3}$. $\widetilde{P}'_{kw}\overline{X}^*_{kn}\widetilde{Q}^*_{2nf}\overline{X}^{*-1}_{sn} = X_{ki}\widetilde{Q}_{ih}X^{-1}_{si}\widetilde{P}'_{sw}$

в силу $(68')$ имеем замену (69) [5]:

$(69')$ $P'_{sw}\overline{X}^*_{sn}Q^{*-1}_{2nf}\widetilde{Q}^*_{2nf}\overline{X}^{*-1}_{sn} = X_{si}Q^{-1}_{ih}X^{-1}_{ki}P'_{kw}\widetilde{P}'^{-1}_{kw}X_{ki}\widetilde{Q}_{ih}X^{-1}_{si}\widetilde{P}'_{sw} = X_{si}\cdot Q^{-1}_{ih}\widehat{Q}^{-1}_{ih}\widetilde{Q}_{ih}X^{-1}_{si}\widetilde{P}'_{sw}$.

Отсюда и из аксиом I, II получаем замену (70) [5]:

$(70')$ $\overline{X}^*_{sn}Q^{*-1}_{2nf}\widetilde{Q}^*_{2nf}\overline{X}^{*-1}_{sn} = \widehat{P}'_{1sw}$, $X_{si}Q^{-1}_{ih}\widehat{Q}^{-1}_{ih}\widetilde{Q}_{ih}X_{si} = P'_{sw}\widehat{P}'_{1sw}\widetilde{P}'^{-1}_{sw}$, $Q^{*\prime-1}_{2nf}\widetilde{Q}^{*\prime}_{2nf} = \widehat{Q}'_{sf}$, $\overline{Y}^*_{ns}\widehat{Q}_{sf}\overline{Y}^{*-1}_{ns} = \widehat{P}^{*\prime}_{nw}$, $\widehat{P}^*_{nw} = \widehat{P}_{1sw}$, $Q'^{-1}_{ih}\widehat{Q}'^{-1}_{ih}\widetilde{Q}_{ih} = \widehat{Q}'_{sf}$, $Y_{is}\widehat{Q}_{sf}Y^{-1}_{is} = \widehat{P}'_{iu}$, $\widehat{P}_{iu} = p_{sw}\widehat{P}_{1sw}\widetilde{P}^{-1}_{sw}$.

Из равенств (в обозначениях [5, теорема 5])

6. $P_{1iu} = P_{sw}P^*_{2nw}$,
$\widetilde{6}$. $\widetilde{P}_{1iu} = \widetilde{P}_{sw}\widetilde{P}^*_{2nw}$
в силу (70′) и аксиом II получаем замену (71) [5]:

$$(71')\ P_{1iu} = \widehat{P}_{iu}\widetilde{P}_{sw}\widehat{P}^{-1}_{1sw}P^*_{2nw} = \widehat{P}_{iu}\widetilde{P}_{sw}\widehat{P}^{*-1}_{nw}P^*_{2nw} = \widehat{P}_{iu}\widetilde{P}_{1iu}\widetilde{P}^{*-1}_{2nw}\widehat{P}^{*-1}_{nw}P^*_{2nw},$$
$$P^{-1}_{1iu}\widehat{P}_{iu}\widetilde{P}_{1iu} = P^{*-1}_{2nw}\widehat{P}^*_{nw}\widetilde{P}^*_{2nw},\ Y^{*-1}_{in}P'^{-1}_{1iu}\widehat{P}'_{iu}\widetilde{P}'_{1iu}Y^*_{in} = \widehat{Q}^*_{nf},\ X^{*-1}_{ni}P^{*\prime-1}_{2nw}\cdot$$
$$\widehat{P}^{*\prime}_{2nw}\widetilde{P}^{*\prime}_{2nw}X^*_{ni} = \widehat{Q}'_{ih},\ \widehat{Q}^{*\prime}_{nf} = \widehat{Q}'_{ih}.$$

Отсюда заключаем, что $AC^{-1} = BD^{-1}$ с помощью Г-преобразований и сокращений приводится к виду (72) [5], где вместо $(1+Lp_{iu}Y^*_{in}q^*_{nf})$ стоит $\widehat{Q}^*_{nf}$. Нужно доказать, что (72) [5] имеет вид (2.1)′, т. е. выполняются равенства, приведенные в теореме 5 после (72) (см. [5]). Все нужные равенства имеются, кроме (73) и (74) [5].

Из равенств

2. $Y^*_{ln}Q^*_{1nf}Y^{*-1}_{in}P'_{iu} = P'_{lu}Y_{lk}Q_{kf}Y^{-1}_{ik}$,
$\widetilde{2}$. $Y^*_{l_1n}\widetilde{Q}^*_{1nf}Y^{*-1}_{in}\widetilde{P}'_{iu} = \widetilde{P}'_{l_1u}Y_{l_1k}\widetilde{Q}_{kf}Y^{-1}_{ik}$

и (71′) получаем замену (73) [5]:

$$(73')\ Y^*_{ln}Q^*_{1nf}\widetilde{Q}^{*-1}_{1nf}Y^{*-1}_{l_1n}\widetilde{P}_{l_1u} = P'_{lu}Y_{lk}Q_{kf}\widehat{Q}^{-1}_{kf}\widetilde{Q}_{kf}Y^{-1}_{l_1k}.$$

Из равенств

8. $Y_{ls}Q_{sf}Y^{-1}_{is}P'_{1iu} = P'_{1lu}Y^*_{ln}Q^*_{4nf}Y^{*-1}_{in}$,
$\widetilde{8}$. $Y_{l_1s}\widetilde{Q}_{sf}Y^{-1}_{is}\widetilde{P}'_{1iu} = \widetilde{P}'_{1l_1u}Y^*_{l_1n}\widetilde{Q}^*_{4nf}Y^{*-1}_{in}$

в силу (71′) получаем замену (74) [5]:

$$(74')\ Y_{ls}Q_{sf}\widehat{Q}^{-1}_{sf}\widetilde{Q}^{-1}_{sf}Y^{-1}_{l_1s}\widetilde{P}'_{1l_1u} = P'_{1lu}Y^*_{ln}Q^*_{4nf}Y^{*-1}_{in}P'^{-1}_{1iu}\widehat{P}'_{1iu}\widetilde{P}'_{1iu}Y^*_{in}\widetilde{Q}^{*-1}_{4nf}Y^{*-1}_{l_1n}$$
$$= P'_{1lu}Y^*_{ln}Q^*_{4nf}\widehat{Q}^*_{nf}\widetilde{Q}^{*-1}_{4nf}Y^{*-1}_{l_1n}.$$

Это доказывает лемму 2.4.9.

Верны двойственные предыдущим леммам утверждения.

После доказательства лемм 2.4.3, 2.4.4, 2.4.7–2.4.9 дальнейшее доказательство существования относительного стандартного базиса в абстрактной $\overline{CHA}$-группе G проходит так же, как и в [5, 6]. Проанализируем лишь доказательство правильности проходных букв $\{p^*_{nw}, q^*_{nf}\}$ группы G''' из [6, § 4]. Для этого в доказательстве теоремы 1 из [6, § 4] нужно заменить ссылки на вид элементов. Таким образом, нужно проверить, что что элементы $\mathfrak{A}_{q^*_{nf}}$ и $\mathfrak{B}_{q^*_{nf}}$ можно считать полуканоническими. В обозначениях [6, § 4] имеем:

I. (а) Если $P^*_{nw} = P_{iu}$, то в силу аксиом I $Y^{*-1}_{in}P'_{iu}Y^*_{in} = Q^*_{nf}$, $X^{*-1}_{ni}P^{*\prime}_{nw}X^*_{ni} = Q_{ih}$, $Q'_{ih} = Q^{*\prime}_{nf}$. Таким образом, после Г-сокращений выделенные слова заменяются на Q^*_{nf} и $Q^{*\prime}_{nf}$ соответственно.

(б) Аналогично.

(в) Пусть $\mathfrak{A}_{q^*_{nf}}$ и $\mathfrak{B}_{q^*_{nf}}$ содержат соответственно подслова

(i) $\overline{X}^{*-1}_{sn}P'_{sw}X_{si}q_{ih}Q'_{sf}q^{-1}_{lh}X^{-1}_{sl}P'_{1sw}\overline{X}^*_{sn}$, $\quad q^{-1}_{sf}\overline{Y}^{*-1}_{ns}P^{*\prime}_{nw}X^*_{ni}q_{ih}Q^{*\prime}_{nf}q^{-1}_{lh}X^{*-1}_{nl}\cdot$
$P^{*\prime}_{1nw}\overline{Y}^*_{ns}q_{sf}$,

где $P^*_{nw} = P_{sw}P_{iu}$, $P_{1sw} = \overline{P}_{lu}P^*_{1nw}$, $P'_{iu}Y^*_{in}Q^*_{nf}Y^{*-1}_{ln} = Y_{is}Q_{sf}Y^{-1}_{is}\overline{P}'_{lu}$. Предположим, что $l = i$, $Q'_{sf} = \widetilde{Q}_{ih}$. Тогда в силу аксиом I, III

$$Y_{is}Q_{sf}Y^{-1}_{is} = \widetilde{P}'_{iu},\quad X_{si}\widetilde{Q}_{ih}X^{-1}_{si} = \widetilde{P}'_{sw},\quad \widetilde{P}_{iu} = \widetilde{P}_{sw},\quad Y^*_{in}Q^*_{nf}Y^{*-1}_{in} = P'^{-1}_{iu}\widetilde{P}'_{iu}\overline{P}'_{iu},$$
$$Q^{*\prime}_{nf} = Q'_{ih},\quad X^*_{ni}Q_{ih}X^{*-1}_{ni} = \widetilde{P}^{*\prime}_{nw},\quad \widetilde{P}^*_{nw} = P^{-1}_{iu}\widetilde{P}_{iu}\overline{P}_{iu}.$$

Согласно последним равенствам слова (i) равны соответственно словам

(ii) $\overline{X}^{*-1}_{sn}P'_{sw}\widetilde{P}'_{sw}P'_{1sw}\overline{X}^*_{sn}$, $q^{-1}_{sf}\overline{Y}^{*-1}_{ns}P^{*\prime}_{nw}\widetilde{P}^{*\prime}_{nw}P^{*\prime}_{1nw}\overline{Y}^*_{ns}q_{sf}$.

Имеем $P^*_{nw}\widetilde{P}^*_{nw}P^*_{1nw} = P_{sw}P_{iu}P_{iu}^{-1}\widetilde{P}_{iu}P_{lu}P_{lu}^{-1}P_{1sw} = P_{sw}\widetilde{P}_{sw}P_{1sw}$. Поэтому опять из аксиом I получаем, что

$$\overline{X}^{*-1}_{sn}P'_{sw}\widetilde{P}'_{sw}P'_{1sw}\overline{X}^*_{sn} = \widetilde{Q}^*_{nf}, \quad \overline{Y}^{*-1}_{ns}P^{*\prime}_{nw}\widetilde{P}^{*\prime}_{nw}\widetilde{P}^{*\prime}_{1nw}\overline{Y}^*_{ns} = \widetilde{Q}_{sf},$$

В результате слова (ii) заменятся на $\widetilde{Q}^*_{nf}$ и $\widetilde{Q}^{*\prime}_{nf}$ соответственно.

II. Этот случай рассматривается так же, как и случай I.2 из доказательства теоремы 1 из [6, § 4], без всяких изменений.

II, III. Эти случаи также не требуют никаких изменений.

IV. Пусть $Ap^*_{mw} = p^*_{mw}B$, где

$$\begin{aligned} A =& p_{lu}Y^*_{lm}\widetilde{Q}^*_{1mf}Y^{*-1}_{in}p_{iu}^{-1}\widetilde{P}^*_{1mw}p_{kw}\overline{X}^*_{km}\widetilde{Q}^*_{2mf}\overline{X}^{*-1}_{sm}p_{sw}^{-1}, \\ B =& X^*_{ml}q_{lh}\widetilde{Q}^{*\prime}_{1mf}q_{ih}^{-1}X^{*-1}_{mi}\widetilde{P}^{*\prime}_{1mw}\overline{Y}^*_{mk}q_{kf}\widetilde{Q}^*_{2mf}q_{sf}^{-1}\overline{Y}^{*-1}_{ms}. \end{aligned}$$

Предположим, что

$$\widetilde{Q}^{*\prime}_{1mf} = \widetilde{Q}'^{-1}_{1lh}Q^{*\prime}_{1nf}Q'_{1ih}, \quad \widetilde{Q}^*_{2mf} = Q'_{1kf}Q^{*\prime}_{2nf}Q'^{-1}_{1sf},$$
$$Q_{1ih}X^{*-1}_{mi}\widetilde{P}^{*\prime}_{1mw}\overline{Y}^*_{mk}Q_{1kf} = X^*_{ni}P^{*\prime}_{1nw}\overline{Y}^*_{nk}$$

и выполняются равенства (2.1) и (2.2). Тогда

$$B = \widetilde{P}^{*\prime-1}_{3mw}\overline{Y}^*_{mk}q_{kf}\widetilde{Q}^{*\prime}_{3mf}q_{sf}^{-1}\overline{Y}^{*-1}_{ms}P^{*\prime}_{4mw}X^*_{ml}q_{lh}\widetilde{Q}^{*\prime}_{4mf}q_{ih}^{-1}X^{*-1}_{mi}\widetilde{P}^{*\prime-1}_{2mw}$$

— равенство вида (2.1) и

$$A = \widetilde{P}^{*-1}_{3mw}p_{kw}\overline{X}^*_{km}\widetilde{Q}^*_{3mf}\overline{X}^{*-1}_{sm}p_{sw}^{-1}\widetilde{P}^*_{4mw}p_{lu}Y^*_{lm}\widetilde{Q}^*_{4mf}Y^{*-1}_{im}p_{iu}^{-1}\widetilde{P}^{*\prime-1}_{2mw},$$

причем последнее равенство является следствием соотношений (1.8).

Доказательство этого утверждения точно такое же, как и в теореме 1 из [6], но с использованием леммы 2.4.4. Итак, мы установили аналог теоремы 1 из [6].

Все остальные рассуждения из [6] не нуждаются в изменениях, так как нигде не используют вида элементов, а используют только те свойства, которые доказаны в леммах. Доказательство теоремы 2.4.2 завершено.

Из теоремы 2.4.2 так же, как и в [6, § 5] следует

2.4.10. Теорема. *Абстрактная $\overline{CHA}$-полугруппа вложима в группу.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бокуть Л. А.* Факторизационные теоремы для некоторых классов колец без делителей нуля. I // Алгебра и логика. 1965. Т. 4, № 4. С. 25–52.
2. *Бокуть Л. А.* Факторизационные теоремы для некоторых классов колец без делителей нуля. II // Алгебра и логика. 1965. Т. 4, № 5. С. 17–46.
3. *Бокуть Л. А.* Группы с относительным стандартным базисом // Сиб. мат. журн. 1968. Т. 9, № 3. С. 499–521.
4. *Бокуть Л. А.* Степени неразрешимости проблемы сопряженности для конечно определенных групп // Алгебра и логика. 1968. Т. 7, № 5. С. 4–70; № 6. С. 4–52.
5. *Бокуть Л. А.* Группы частных мультипликативных полугрупп некоторых колец. I // Сиб. мат. журн. 1969. Т. 10, № 2. С. 246–286.
6. *Бокуть Л. А.* Группы частных мультипликативных полугрупп некоторых колец. II // Сиб. мат. журн. 1969. Т. 10, № 4. С. 744–799.
7. *Бокуть Л. А.* Группы частных мультипликативных полугрупп некоторых колец. III // Сиб. мат. журн. 1969. Т. 10, № 4. С. 800–819.
8. *Бокуть Л. А.* О проблеме Мальцева // Сиб. мат. журн. 1969. Т. 10, № 5. С. 965–1005.
9. *Валицкас А. И.* Примеры необратимых колец, вложимых в группы // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 28, № 2. С. 35–49.
10. *Мальцев А. И.* О вложении ассоциативных систем в группы // Мат. сб. 1939. Т. 6. С. 331–336.

11. *Мальцев А. И.* О вложении ассоциативных систем в группы. II // Мат. сб. 1940. Т. 8. С. 251–264.
12. *Bokut L. A.*, *Kukin G. P.* Algorithmic and Combinatorial Algebra. Dordtrecht: Kluwer Academic Press, 1994. P. 384.
13. *Bowtell A. J.* On a question of Mal'cev // J. Algebra. 1967. V. 7. P. 126–139.
14. *Klein A. A.* Rings nonembeddable in fields with multiplicative semigroups embeddable in groups // J. Algebra. 1967. V. 7. P. 100–125.
15. *Mal'cev A. I.* On the immersion of an algebraic ring into a field // Math. Ann. 1937. V. 113. P. 686–691.

г. Новосибирск *Статья поступила 6 апреля 1995 г.*