УДК 512.542

ЦИКЛИЧЕСКИЕ TI-ПОДГРУППЫ ПОРЯДКА 4 В КЛАССИЧЕСКИХ ГРУППАХ ШЕВАЛЛЕ НЕЧЕТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Н. Д. Зюляркина

Подгруппа A группы G называется TI-подгруппой, если $A \cap A^g = 1$ для любого $g \in G - N_G(A)$.

В теории конечных групп изучение 2-групп, являющихся TI-подгруппами, представляет собой особый интерес в связи с задачей классификации конечных простых групп. При исследовании групп, содержащих такую TI-подгруппу A, наименее изучены случаи, когда A либо элементарная абелева, либо циклическая группа порядка 4.

Известно, что если конечная группа G содержит циклическую TI-подгруппу A порядка 4, то A нормализует любую компоненту L из G, если таковые имеются. Ввиду этого факта интерес представляют те группы G, для которых $F^*(G)$ — квазипростая группа и $G = F^*(G)A$. Для изучения таких групп полезно иметь информацию о том, какие известные квазипростые группы могут быть использованы для получения данной конструкции.

В работе изучаются такие группы G, для которых $F^*(G)$ — классическая группа типа группы Ли над полем нечетной характеристики и $G = F^*(G)A$, где A — циклическая TI-подгруппа порядка 4 в G и $A \not\leq Z(F^*(G))$. В этом случае все возможности для $F^*(G)$ и A описываются в теоремах 2.1, 3.1, 4.1, 5.1 и 6.1.

На протяжении всей работы будем считать, что $A = \langle a \rangle$ — циклическая TI-подгруппа порядка 4 некоторой группы G, a_0 — инволюция из A. Заметим, что $A \trianglelefteq C_G(a_0)$.

Обозначения взяты из [3, 5].

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными.

§ 1. Предварительные результаты

Пусть V — векторное пространство размерности n над полем $k = GF(q)$, q нечетно, $\widetilde{Y} = GL_n(k)$, $Y \leqslant \widetilde{Y}$. Обозначим через I_V тождественный автоморфизм V, а через γI_V ($\gamma \in k^\#$) — автоморфизм, при котором каждый вектор из V умножается на элемент поля γ. Неединичные элементы w из Y, для которых $w^2 = \gamma I_V$, назовем *полуинволюциями*. Заметим, что множество инволюций включено в множество полуинволюций. Полуинволюции, не являющиеся инволюциями, будем называть *истинными*.

С каждой инволюцией $w \in Y$ можно связать два подпространства из V, определяемые следующим образом:

$$V_w^+ = C_V(w) = \{v \in V \mid w(v) = v\}, \quad V_w^- = [V, w] = \{v \in V \mid w(v) = -v\}.$$

Тогда имеет место разложение $V = V_w^+ \oplus V^- w$, и тип инволюции w определяется как $\dim_w^-$. Для инволюции w типа m назовем *стандартным* базис в V, в котором первые $n - m$ векторов выбраны из V_w^+, а последние m векторов — из V_w^-. В таком базисе инволюция w имеет стандартный вид: $(I_{V_w^+}, -I_{V_w^-})$.

Пусть теперь w — истинная полуинволюция и $w^2 = \gamma I_V$.

Если $\gamma = \beta^2$ для некоторого элемента β из k, то $w = \beta I_V w_1$, где w_1 — инволюция из $\widetilde{Y}$. Определим в этом случае тип w как минимум из типов двух инволюций w_1 и $-I_V w_1$. Стандартным базисом для w будет стандартный базис той из инволюций w_1 и $-I_V w_1$, у которой тип минимален.

Допустим, что $\gamma \notin (k^{\#})^2$. Тип w считается равным нулю, и по [5, раздел 3A] $n = 2m$. При этом в V можно выбрать такой базис $\{e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_{2m}\}$, что $w(e_i) = e_{m+i}$ и $w(e_{m+i}) = \gamma e_i$ для $1 \leqslant i \leqslant m$. Базис такого вида будем называть *стандартным* для w.

Лемма 1.1. *Пусть $G = F^*(G)A$, $F^*(G) \cap A = 1$. Тогда $C_{F^*(G)}(a_0) = C_{F^*(G)}(a)$.*

Доказательство. Так как $A \trianglelefteq C_G(a_0)$, то $[C_{F^*(G)}(a_0), A] \leqslant F^*(G) \cap A = 1$.

Лемма 1.2. *Пусть $A \leqslant G$, $N \trianglelefteq G$, $a_0 \in C_G(N)$ и N содержит не более одной инволюции. Обозначим через $\overline{G}$ группу G/N, а через $\overline{A}$ — образ A при естественном гомоморфизме. Тогда выполнено одно из утверждений:*

(1) $\overline{A}$ — TI-подгруппа порядка 4 в $\overline{G}$,

(2) $C_{\overline{G}}(a_0) = \overline{C_G(a_0)}\langle\bar{g}\rangle$, где $g \notin C_G(a_0)$, $g^2 \in C_G(a_0)$; в этом случае N содержит единственную инволюцию n_0 и $a_0^g = a_0 n_0$.

Доказательство. Предположим, что $\overline{A}$ не TI-подгруппа. Тогда N содержит инволюцию n_0 и существует такой элемент g из G, что $a_0^g = a_0 n_0$. Заметим, что $n_0 \in Z(G)$, и если g_1 такой элемент из G, что $a_0^{g_1} = a_0 n_0$, то $g g_1 \in C_G(a_0)$. Лемма доказана.

Лемма 1.3. *Пусть $A \leqslant G$ и $\widetilde{G}$ такая группа, что $G \simeq \widetilde{G}/\widetilde{Z}$, $\widetilde{Z} \leqslant Z(\widetilde{G})$ и $|\widetilde{Z}|$ нечетен. Тогда $\widetilde{G}$ содержит циклическую TI-подгруппу $\widetilde{A}$ порядка 4.*

Доказательство. В качестве $\widetilde{A}$ можно взять подгруппу порядка 4 из полного прообраза A при естественном гомоморфизме из $\widetilde{G}$ в G.

Далее до конца работы будем считать, что $G = XA$, где X — классическая группа типа Ли над полем нечетной характеристики, $F^*(G) = X$ и $A \nleq Z(X)$.

Для произвольной группы L типа Ли через L^* обозначим множество таких расширений L, что для произвольной группы $\widetilde{L} \in L^*$ любой элемент из $\widetilde{L} - L$ индуцирует на L внутренне-диагональный автоморфизм.

Если H — произвольная группа, $N \trianglelefteq H$, $M \leqslant H$ и K — непустое подмножество из H, то определим $C_M(K \bmod N)$ как $\{m \in M \mid [m, K] \leqslant N\}$.

§ 2. Линейные группы

В этом параграфе X является накрывающей группой для $L_n(q)$, $n \geqslant 2$, q нечетно, $k = GF(q)$.

Теорема 2.1. *Пусть X — накрывающая группа для $L_n(q)$, $n \geqslant 2$. Тогда либо X — накрывающая группа для $L_2(9)$, $G = X$ и $|Z(X)| = 3$, либо X — частное $SL_n(q)$, $n \geqslant 2$, по центральной подгруппе порядка d и имеет место один из следующих случаев.*

Для нечетного n:

(1) $X \simeq L_3(3)$ или $X \simeq L_3(7)$, $G = X\langle\tau\rangle$, где τ — автоморфизм графа, a_0 соответствует инволюции типа 2 из X;

(2) $G = X$, $q - 1 \equiv 0(4)$, a_0 соответствует инволюции четного типа из $SL_n(q)$.

Для четного n:

(3) $X = L_2(9)$, элемент a индуцирует на X внутренне-полевой автоморфизм, a_0 соответствует полуинволюции типа 1 из $SL_2(9)$;

(4) $G = X$, $q - 1 \equiv 0(4)$, $n > 4$, a_0 соответствует инволюции типа m, $m \equiv 0(4)$, из $SL_n(q)$;

(5) $G = X$, $q-1 \equiv 0(4)$, $n \geqslant 4$, a_0 *соответствует инволюции типа* m, $m \equiv 2(4)$, *из* $SL_n(q)$, $(q-1,n) \neq (q-1,2n)$, *и либо* d *делится на* $(q-1,n/2)$, *если* $n \equiv 0(4)$, *либо* $d \equiv 0(2)$, *если* $n \equiv 2(4)$;

(6) $G = X$, $q-1 \equiv 0(4)$, $n \geqslant 2$, $(q-1,2n) \neq (q-1,4n)$, d *делится на* $(q-1,n)_2$, a_0 *соответствует инволюции нечетного типа из* $GL_n(q)$;

(7) $G = X, q+1 \equiv 0(4)$, d *четно*, $q \equiv -1(8)$ *или* $n \equiv 0(8)$, *элементу* a_0 *соответствует полуинволюция типа* 0 *из* $SL_n(q)$;

(8) $|G:X| = 2$, $G \in X^*$, $q-1 \equiv 0(4)$, $(q-1,2n) = (q-1,n)$, *элементу* a_0 *соответствует инволюция типа* m, $m \equiv 2(4)$, *из* $SL_n(q)$;

(9) $|G:X| = 2$, $G \in X^*$, $q-1 \equiv 0(4)$, $(q-1,2n) \neq (q-1,n)$, $(q-1,4n) = (q_1,2n)$, d *делится на* $(q-1,n)_2$, *элементу* a_0 *соответствует инволюция нечетного типа из* $GL_n(q)$;

(10) $|G:X| = 2$, $G \in X^*$, $q+1 \equiv 4(8)$, $n \equiv 2(4)$, *элементу* a_0 *соответствует полуинволюция типа* 0 *из* $SL_n(q)$;

(11) $|G:X| = 4$, $G \in X^*$, $q-1 \equiv 0(4)$, $(q-1,2n) = (q-1,n)$, *элементу* a_0 *соответствует инволюция нечетного типа из* $GL_n(q)$.

Доказательство теоремы разобьем на ряд лемм.

В леммах 2.2–2.6 X является частным $SL_n(q)$, $n \geqslant 2$, q нечетно.

Лемма 2.2. *Если* $n \geqslant 4$, *то* $G \in X^*$.

Доказательство. Предположим противное. Ввиду строения группы автоморфизмов X [5, лемма 4.27] возможны следующие варианты для элемента a:

1) $a = b\varphi\tau^\varepsilon$, где b индуцирует на X внутренне-диагональный автоморфизм, φ — полевой автоморфизм порядка 4, τ — автоморфизм графа (инверсно-транспонирующий автоморфизм), $\varepsilon = 0$ или $\varepsilon = 1$;

2) $a = b\varphi_0\tau^\varepsilon$, где b индуцирует на X внутренне-диагональный автоморфизм, φ_0 — полевой автоморфизм порядка 2, а τ и ε такие же, как и в п. 1;

3) $a = b\tau$, где b индуцирует на X внутренне-диагональный автоморфизм, а τ — автоморфизм графа.

Допустим сначала, что $a = b\varphi\tau^\varepsilon$. Ввиду [5, лемма 4.27] можно считать, что инволюция a_0 индуцирует на X автоморфизм $\varphi_0 = \varphi^2$. По лемме 1.1 $C_X(a_0) = C_X(a)$. Рассмотрим группу $C_X(a_0) \cap C_X(\varphi\tau^\varepsilon)$, которая содержит подгруппу, изоморфную либо частному $SL_n(\sqrt[4]{q})$, если $a = b\varphi$, либо частному $SU_n(\sqrt[4]{q})$, если $a = b\varphi\tau$. Но тогда эта подгруппа централизуется элементом $b^{\varphi\tau^\varepsilon}$ и b централизует X, что невозможно. Пусть теперь $a = b\varphi_0\tau^\varepsilon$. В этом случае a_0 индуцирует на X внутренне-диагональный автоморфизм.

Если элементу a_0 соответствует полуинволюция w типа 0 из $GL_n(q)$, для которой $w^2 = \gamma I$, то либо $\gamma\gamma^{\varphi_0} = 1$, если $a = b\varphi_0\tau$, либо $\gamma = \gamma^{\varphi_0}$, если $a = b\varphi_0$ (это следует из стандартного вида w и условия $wb = bw^{\varphi_0\tau^\varepsilon}$). В любом случае γ является квадратом, что противоречит выбору w. Значит, элементу a_0 соответствует полуинволюция w типа m, $0 < m < n$, которая имеет вид $w = \beta I w_1$, где w_1 — инволюция из $GL_n(q)$.

Зафиксируем базис V, в котором w имеет стандартный вид. Так как $(\beta I)^\tau = \beta^{-1} I_V = \beta\beta^{-2} I$, а $(\beta I)^{\varphi_0} = \beta^q I = \beta\beta^{q-1} I$, где $q-1$ четно, то можно считать, что $\varphi_0\tau^\varepsilon$ централизует w по модулю центральной подгруппы $\overline{Z}$, содержащей $\beta^2 I_V$. Следовательно, элемент b также централизует w по модулю этой подгруппы. По [5, раздел 3A] $C_X(a_0)$ содержит подгруппы L_1 и L_2, изоморфные соответственно частным $SL_{n-m}(q)$ и $SL_m(q)$, на которых элементы φ_0 и τ индуцируют соответственно полевой и графовый автоморфизмы. Но из этого же раздела следует, что $L_1L_2 \trianglelefteq C_X(a_0)$ и для группы $\widetilde{X} \in X^*$ любой элемент b из $X_{\widetilde{X}}(a_0 \bmod \overline{Z})$ представим в виде $b = b_1x^\varepsilon$, $\varepsilon = 0$ или $\varepsilon = 1$, где b_1 индуцирует на L_1 и L_2 внутренне-диагональные автоморфизмы, а x переставляет подгруппы L_1 и L_2. Ясно, что в любом случае a не централизует подгруппу L_1L_2, что противоречит условию $A \trianglelefteq C_G(a_0)$.

Рассмотрим теперь случай $a = b\tau$. Если элементу a_0 соответствует полуинволюция типа 0 из $GL_n(q)$, для которой $w^2 = \gamma I$, то n четно, $\gamma = -1$ и $b \in C_{GL_n(q)}(w)$. По [5, раздел 3A] $C_X(a_0)$ содержит нормальную подгруппу L, изоморфную частному $SL_{n/2}(q^2)$, на которой τ индуцирует унитарный автоморфизм. Если $\widetilde{X} \in X^*$ и $b \in C_{\widetilde{X}}(a_0)$, то $b = b_1 x^\varepsilon$, $\varepsilon = 0$ или $\varepsilon = 1$, где b_1 индуцирует на L внутренне-диагональный автоморфизм, а x — элемент, индуцирующий на L полевой автоморфизм. Если $n \neq 4$, то ясно, что $a \notin C_G(L)$. Если же $n = 4$, то b должен иметь вид zgx, где $z \in Z(C_{X^*}(a_0))$, а g индуцирует инверсно-транспонирующий автоморфизм на L. Но в этом случае элемент $b\tau = zgx\tau$ является инволюцией и $|a| \neq 4$.

Пусть элементу a_0 соответствует полуинволюция типа m $(0 < m < n)$ из $GL_n(q)$. Если $n \neq 4$ или $m \neq n/2$, то доказательство проводится аналогично случаю $a = b\varphi_0\tau^\varepsilon$. Пусть $n = 4$ и $m = 2$. Тогда $C_X(a_0)$ содержит нормальную подгруппу вида L_1L_2, где L_1 и L_2 суть частные $SL_2(q)$. Для группы $\widetilde{X} \in X^*$ любой элемент $b \in C_{\widetilde{X}}(a_0)$ представим в виде $b_1b_2x^\varepsilon$, $\varepsilon = 0$ или $\varepsilon = 1$, где b_1 централизует L_2 и индуцирует на L_1 внутренне-диагональный автоморфизм, а b_2 централизует L_1 и индуцирует на L_2 внутренне-диагональный автоморфизм. Элемент x переставляет подгруппы L_1 и L_2. Так как $a \in C_G(L_1L_2)$, то $b = b_1b_2$, где b_1 совпадает с τ на L_1, а b_2 — на L_2. Но в этом случае $(b\tau)^2 = -I_V$ и $a_0 \neq a^2$. Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Если X — частное $SL_2(q)$ и $G \notin X^*$, то $X = L_2(9)$, элемент a индуцирует на X внутренне-полевой автоморфизм, a_0 соответствует полуинволюции типа 1 из $SL_2(9)$.*

Доказательство. Если $G \notin X^*$, то элемент a имеет вид $b\varphi$, где b индуцирует на X внутренне-диагональный автоморфизм, а φ — полевой автоморфизм порядка 4 или 2. Случай, когда $|\varphi| = 4$, невозможен, как и в лемме 2.1. Значит, $|\varphi| = 2$, и элементу a_0 соответствует полуинволюция типа 1 из $GL_2(q)$. Так как $q - 1 \equiv 0(4)$, то можно считать, что $w \in SL_2(q)$ и $X = L_2(q)$. По [5, раздел 3A] $C_X(a_0) \simeq Z_{(q-1)/2}\langle x\rangle$, где x инвертирует циклическую подгруппу $Z_{(q-1)/2}$ и имеет в стандартном базисе для w вид $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Так как φ централизует w по модулю центра $SL_2(q)$, то $b = b_1x^\varepsilon$, $\varepsilon = 0$ или $\varepsilon = 1$, $b_1 \in C_{GL_2(q)}(w)$. Заметим, что φ централизует в $C_X(a_0)$ подгруппу $Z_{\sqrt{q}-1}\langle x\rangle$, а подгруппу $Z_{\sqrt{q}+1}$ инвертирует. Если $b = b_1$, то ввиду того, что $|C_X(a_0) : C_X(a)| \leqslant 2$, будем иметь $\frac{\sqrt{2}+1}{2} \leqslant 2$ и $q = 9$. Если же $b = b_1x$, то $\frac{\sqrt{q}-1}{2} \leqslant 2$ и возможны два случая: $q = 9$ или $q = 25$.

Если $q = 25$, то можно установить, что $[x, b\varphi] \notin \langle w\rangle Z(GL_2(25))$, и нужной TI-подгруппы не существует. Если же $q = 9$, то $X = L_2(9) \simeq A_6$. Ввиду строения группы внешних автоморфизмов A_6 случай циклической TI-подгруппы порядка 4 возможен лишь тогда, когда $G \simeq S_6$ и a индуцирует на X внутренне-полевой автоморфизм. Лемма доказана.

Лемма 2.4. *Пусть X — частное $SL_3(q)$ и $G \notin X^*$. Тогда $G = X\langle\tau\rangle$, где τ — инверсно-транспонирующий автоморфизм, а $X \simeq L_3(3)$ или $X \simeq L_3(7)$.*

Доказательство. Предположим, что $G \notin X^*$. Тогда, как и в лемме 2.1, для элемента a имеются следующие возможности:

1) $a = b\varphi\tau^\varepsilon$, где b индуцирует на X внутренне-диагональный автоморфизм, а φ — полевой автоморфизм порядка 4, $\varepsilon = 0$ или $\varepsilon = 1$,

2) $a = b\varphi_0\tau^\varepsilon$, где b индуцирует на X внутренне-диагональный автоморфизм, а φ_0 — полевой автоморфизм порядка 2, $\varepsilon = 0$ или $\varepsilon = 1$,

3) $a = b\tau$, где b индуцирует на X внутренне-диагональный автоморфизм.

Первые два случая разбираются так же, как и в лемме 2.1.

Пусть $a = b\tau$ и a_0 соответствует инволюции типа 2 из $SL_3(q)$. Так как $C_X(\tau)$ содержит представители из всех классов сопряженных инволюций в X, то можно считать, что $a_0 \in X$ и по [5, раздел 3A] $C_X(a_0)$ есть частное $CL_2(q)$ и $C_{\widetilde{X}}(a_0) = C_X(a_0)Z_1$, где $\widetilde{X}$ — частное $GL_3(q)$, а подгруппа Z_1 централизует $C_x(a_0)$. Так как A — TI-подгруппа, то A централизует подгруппу L из $C_X(a_0)$, изоморфную $SL_2(q)$. Значит, b и τ индуцируют на L один и тот же автоморфизм. Пусть $Z = Z(C_X(a_0))$, $z \in Z$ и d — элемент из $C_X(a_0)$, индуцирующий на L диагональный автоморфизм. Непосредственные вычисления показывают, что $(b\tau)^z = z^{-2}b\tau$ и $(b\tau)^d = z'b\tau$, где $z' \in Z$, и в группе $GL_2(q)$ элементы z' и d имеют одинаковые порядки. С другой стороны, d либо инвертирует, либо централизует $b\tau$. Значит, $|Z| \leqslant 2$, что влечет $q = 3$ или $q = 7$ и $X \simeq L_3(7)$.

Заметим теперь, что в X есть элемент g порядка 4, квадрат которого совпадает с a_0. Но тогда $gb\tau$ — инволюция, и по [5, лемма 4.27] она сопряжена с τ при помощи внутренне-диагонального автоморфизма. Таким образом, $G = SL_3(3)\langle\tau\rangle$ или $G = L_3(7)\langle\tau\rangle$.

Лемма 2.5. *Пусть X — частное $SL_n(q)$, n нечетно, $G \in X^*$. Тогда $q-1 \equiv 0(4)$, $G = X$ и элемент a_0 соответствует инволюции типа m, $m \equiv 0(2)$, из $SL_n(q)$.*

Доказательство. Ввиду леммы 1.2 достаточно рассмотреть случай $X = SL_n(q)$. Так как n нечетно, то любая группа $\widetilde{X} \in X^*$ не содержит полуинволюций типа 0. Поэтому можно считать, что элементу a_0 соответствует инволюция из $GL_n(q)$. Любая такая инволюция из-за нечетности n индуцирует на $SL_n(q)$ внутренний автоморфизм, что влечет $a_0 \in X$, тип a_0 четен. По [5, раздел 3A] $C_{GL_n}(a_0) \simeq GL(V_{a_0}^+/k) \times GL(V_{a_0}^-/k)$, и циклическая TI-подгруппа порядка 4 существует тогда и только тогда, когда $q - 1 \equiv 0(4)$. Если $\rho^2 = -1$ для $\rho \in k^\#$, то элемент a имеет вид $(I_{V^+}, \rho I_{V^-})$, для $m \equiv 0(4)$ или вид $(-I_{V^+}, \rho I_{V^-})$ для $m \equiv 2(4)$. При этом $a \in X$ и $C = X$.

Лемма 2.6. *Пусть X — частное $SL_n(q)$ по подгруппе Z_1 порядка d, n четно, $G \in X^*$. Тогда имеет место один из случаев* (4)–(11) *теоремы* 2.1.

Доказательство. Для описания всех возможностей для A и X достаточно знать строение централизаторов инволюций в частных $GL_n(q)$. Пусть $Z = Z(GL_n(q))$. Для полуинволюции $w \in GL_n(q)$ обозначим через C_w группу $C_{GL_n(q)}(w)$, а через U_w — группу $\langle Z, w\rangle$. Пусть $N_w = N_{GL_n(q)}(U_w)$. Если ясно, о какой полуинволюции идет речь, нижний индекс будем опускать.

Предположим сначала, что элементу a_0 соответствует инволюция w типа m из $GL_n(q)$, $0 < m < n$. По [5, раздел 3A] $G_w \simeq GL(V^+/k) \times GL(V^+/k)$. Если $m = n/2$, то существует элемент g, переставляющий V^+ и V^-, который централизует w по модулю Z, и $N_w = C_w\langle g\rangle$. Если же $m \neq n/2$, то $N_w = C_w$. Ввиду строения централизатора w циклическая TI-подгруппа порядка 4 возникает лишь тогда, когда $q - 1 \equiv 0(4)$. При этом a имеет либо вид $(I_{V^+}, \rho I_{V^-})$, либо вид $(-I_{V^+}, \rho_{I^-})$, где $\rho^2 = -1$.

Как показано в [5, раздел 3A], w индуцирует на $SL_n(q)$ внешний автоморфизм тогда и только тогда, когда m нечетно и $-1 \notin (k^\#)^n$. Последнее условие говорит о том, что в k любой корень из 1 степени $2n$ является корнем степени n. Это эквивалентно равенству $(q-1, n) = (q-1, 2n)$, что и приводит к (11) (см. теорему 2.1).

Предположим теперь, что m четно. Тогда $w \in SL_n(q)$. Если $m \equiv 0(4)$, то элемент a также индуцирует на $SL_n(q)$ внутренний автоморфизм и $a \in SL_n(q)$. Поэтому $a \in X$ и X может быть любым частным $SL_n(q)$ по центральной подгруппе, что приводит к (4). Если же $m \equiv 2(4)$, то $a \in SL_n(q) \times Z$ тогда и только тогда, когда $-1 \in (k^\#)^n$ или, что то же самое, $(q-1, n) \neq (q-1, 2n)$. Соответствующая элементу a матрица из $SL_n(q)$ будет иметь вид $(xI_{V^+}, \rho x I_{V^-})$, где $x^n = -1$. Центральная подгруппа порядка d, по которой берется частное, должна содержать x^4, откуда следует, что $(q-1, n/2)_2$ делит d. Этого условия достаточно для того, чтобы подгруппа A попадала в X, если $n \equiv 0(4)$. Если же $n \equiv 2(4)$, то необходимо, чтобы d было четным, что приводит к (5) и (8).

Пусть теперь m нечетно и $a_0 \in X$. Это возможно лишь при условии $(q-1,n) \neq (q-1,2n)$. Элемент a индуцирует на $SL_n(q)$ внутренний автоморфизм тогда и только тогда, когда $\rho \in (k^{\#})^n$, т. е. когда $(q-1,2n) \neq (q-1,4n)$. Так как в этом случае элементу a соответствует матрица $(xI_{V^+}, \rho x I_{V^-})$ из $SL_n(q)$, где $x^n = -1$, то Z_1 содержит $x^4 I_V$ и d делится на $(q-1,n)_2$. Если же a индуцирует на $SL_n(q)$ внешний автоморфизм, то $(q-1,2n) = (q-1,4n)$ и d также делится на $(q-1,n)_2$, что приводит к п. (3) или (6) теоремы 2.1.

Рассмотрим случай, когда a_0 соответствует полуинволюции w типа 0 из $GL_n(q)$. Тогда $w^2 = \gamma I_V$ и $\gamma \notin (k^{\#})^2$. Пусть поле K является квадратичным расширением поля k при помощи ρ, $\rho_2 = \gamma$. Пусть $\tau \in \mathrm{Aut}(K)$, $|\tau| = 2$, $\tau(\rho) = -\rho$ и $C_K(\tau) = k$. Тогда $C_w = GL(V/K)$, а $N_w \simeq GL(V/K)\langle\tau\rangle$.

Предположим сначала, что $|G:X| = 4$. Тогда $w \notin Z \times SL_n(q)$, что возможно лишь при условии $(-\gamma)^{n/2} \notin (k^{\#})^n$. Заметим, что $|Z(C_w)| = q^2 - 1$. Так как $\gamma \notin (k^{\#})^2$, то $|\gamma|_2 = (q-1)_2$, и существование циклической TI-подгруппы порядка 4 с инволюцией, соответствующей w, возможно лишь тогда, когда $q + 1 \equiv 0(4)$. Но это влечет, что $-\gamma \in (k^{\#})^2$ и $(-\gamma)^{n/2} \in (k^{\#})^n$. Следовательно, в этом случае ситуация $|G:X| = 4$ невозможна, и можно считать, что $w \in SL_n(q)$. Так как $|\gamma|_2 = (q-1)_2$ и $|Z(C_w)| = q^2 - 1$, то нужная TI-подгруппа существует тогда и только тогда, когда $q + 1 \equiv 0(4)$.

Выясним, при каких условиях указанная TI-подгруппа попадает в X. Любой элемент $z \in Z(C_w)$ задается своим действием на стандартном для w базисе следующим образом: $z(e_i) = xe_i + ye_{n/2+i}$, $z(e_{n/2+i}) = \gamma y e_i + x e_{n/2+i}$. Заметим, что $|Z(C_{SL_n(q)}(w))|$ совпадает с числом решений в k уравнения $(x^2 - \gamma y^2)^{n/2} = 1$. По [2, теорема 6.26] $|Z(C_{SL_n(q)}(w))| = (q+1)d_1$, где $d_1 = (n/2, q-1)$. Можно считать, что w является элементом порядка 4 в $SL_n(q)$. Поэтому $a \in X$ тогда и только тогда, когда $(q+1)d_1$ делится на 8, что приводит к случаям (7) и (10) теоремы 2.1.

Доказательство теоремы 2.1. Ввиду лемм 2.2–2.6 и того факта, что накрывающими группами для простых групп $L_n(q)$, за исключением $L_2(9)$, являются частные $SL_n(q)$, достаточно показать, что если X является накрывающей группой для $L_2(9)$, то либо X — частное $SL_2(9)$, либо $Z(X) \simeq Z_3$ и $G = X$.

Предположим, что X не является частным $SL_2(9)$. Тогда $Z(X)$ содержит подгруппу $Z = \langle z\rangle$, изоморфную Z_3. Рассмотрим группу $\overline{G} = G/Z$. По лемме 1.2 $\overline{A}$ — TI-подгруппа в $\overline{G}$. Из лемм 2.3 и 2.6 следует, что $|G:X| \leqslant 2$.

Допустим, что $|G:X| = 2$. По леммам 2.3 и 2.6 получим, что $\overline{G} \simeq S_6$. Рассмотрим подгруппу $P \in \mathrm{Syl}_3(G)$. По [3, лемма 33.15] P — экстраспециальная группа порядка 27, $P = \langle x, y\rangle$, $|x| = |y| = 3$ и $[x,y] = z$. Пусть t — инволюция из $G - X$ такая, что $\bar{t}$ централизует $\bar{x}$ и инвертирует $\bar{y}$. Заметим, что $G = X\langle t\rangle$. Но t не централизует $z \in O^2(C_X(a_0))$. Противоречие с тем, что $a = bt$, где $b \in X$ и a централизует $O^2(C_X(a_0))$.

Значит, $G = X$, и утверждение теоремы относительно накрывающей группы для $L_2(9)$ следует из лемм 2.3, 2.6 и 1.2. Теорема 2.1 доказана.

§ 3. Симплектические группы

В этом параграфе V — векторное пространство четной размерности n над полем $k = GF(q)$ (q нечетно) с определенной на $V \times V$ симплектической формой f. Каждому элементу u из $GSp_n(q)$ соответствует элемент $r_u \in k^{\#}$ такой, что $f(u(v_1), u(v_2)) = r_u f(v_1, v_2)$ для любых элементов v_1 и v_2 из V. Группа $Sp_n(q)$ состоит из тех элементов $u \in GSp_n(q)$, для которых $r_u = 1$. Обозначим через Z группу $Z(GSp_n(q))$. Известно, что $Z = \{\lambda I_V \mid \lambda \in k^{\#}\}$ [5, раздел 3B].

Для полуинволюции $w \in GSp_n(q)$ обозначим через C_w группу $C_{GSp_n(q)}(w)$, а через U_w — группу $\langle Z, w\rangle$. Пусть $N_w = N_{GSp_n(q)}(U_w)$. Если ясно, о какой полуинволюции идет речь, нижний индекс будем опускать.

Теорема 3.1. *Пусть X — частное $Sp_n(q)$, $n \geqslant 4$, q нечетно. Тогда $X = PSp_n(q)$, $G \in X^*$ и имеет место один из случаев:*

(1) $G = X$, $q - 1 \equiv 0(8)$, элементу a_0 соответствует инволюция w типа $n/2$ из $GSp_n(q)$ с $r_w = -1$;

(2) $G = X$, $q+1 \equiv 0(8)$, элементу a_0 соответствует полуинволюция w типа 0 из $Sp_n(q)$;

(3) $|G : X| = 2$, $q - 1 \equiv 4(8)$, элементу a_0 соответствует инволюция w типа $n/2$ из $GSp_n(q)$ с $r_w = -1$;

(4) $|G : X| = 2$, $q + 1 \equiv 4(8)$, элементу a_0 соответствует полуинволюция w типа 0 из $Sp_n(q)$.

Докажем сначала следующую лемму.

Лемма 3.2. $G \in X^*$.

Доказательство. Предположим, что $G \notin X^*$. Тогда по [5, лемма 4.31] элемент a имеет вид $b\varphi$, где b индуцирует на X внутренне-диагональный автоморфизм, а φ — полевой автоморфизм порядка 4 или 2.

Пусть $|\varphi| = 4$. Тогда по [5, лемма 4.31] инволюция a_0 индуцирует на X полевой автоморфизм φ_0, $\varphi_0 = \varphi^2$, и b централизует $C_X(\varphi)$, что влечет $b \in Z$. Но тогда $C_X(a_0) \in C_X(a)$, что противоречит лемме 1.1.

Пусть теперь $|\varphi| = 2$. Тогда инволюция a_0 соответствует полуинволюции w из $GSp_n(q)$ $w^2 = \gamma I_V$.

Случай 1. $\gamma \in (k^\#)^2$ и $\gamma = \beta^2$ для $\beta \in K^\#$. Тогда $w_1 = \beta^{-1} I_V w$ — инволюция из $GSp_n(q)$ и $C_w = C_{w_1}$.

Если $w_1 \in Sp_n(q)$, то по [5, раздел 3B] группа C_{w_1} изоморфна подгруппе из $GS(V^+/k) \times GSp(V^-/k)$ и содержит подгруппу $Sp(V^+/k) \times Sp(V^-/k)$, на которой φ индуцирует полевой автоморфизм порядка 2. Так как φ централизует w по модулю подгруппы $\overline{Z} = \langle \beta^2 I_V \rangle$, то b также централизует a_0 по модулю этой подгруппы. Но для $\widetilde{X} \in X^*$ любой элемент из $C_{\widetilde{X}}(a_0 \bmod \overline{Z})$ представим в виде $b_1 g^\varepsilon$, $\varepsilon = 0$ или $\varepsilon = 1$, где b_1 индуцирует на $Sp(V^+/k) \times Sp(V^-/k)$ внутренне-диагональный автоморфизм, а g представляет подгруппы $Sp(V^+/k)$ и $Sp(V^-/k)$ (что возможно лишь при $\dim V^- = n/2$). Но тогда a не централизует $Sp(V^+/k)$ и $Sp(V^-/k)$, что противоречит условию $A \trianglelefteq C_G(a_0)$.

Если же $w_1 \notin Sp_n(q)$, то $C_{w_1} \trianglerighteq S_{Sp_n(q)}(w_1) \simeq GL(V^+/k)$ и $\dim V^- = n/2$. Элемент φ индуцирует на $GL(V^+/k)$ полевой автоморфизм, а любой элемент b из $C_{X^*}(a_0)$ внутренний или внутренне-графовый. Но тогда a не централизует $SL(V^+/k)$ и A не TI-группа.

Случай 2. $\gamma \notin (K^\#)$. Так как $b\varphi$ централизует w, то $bw^\varphi = wb$. Непосредственные вычисления в стандартном базисе для w показывают, что это возможно лишь при условии $\gamma^\varphi = \gamma$. Но тогда $\gamma \in (k^\#)^2$, что противоречит выбору элемента γ. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3.1. По лемме 3.2 $G \in X^*$, и для выяснения всех возможных случаев для X и A достаточно рассмотреть строение централизаторов инволюций в частных $GSp_n(q)$.

Предположим сначала, что элементу a_0 соответствует инволюция w типа m из $GSp_n(q)$.

Если $r_w = 1$, то $w \in Sp_n(q)$ и $C_w = \{(w_1, w_2) \in GSp_n(V^+/k) \times GSp_n(V^-/k) \mid r_{w_1} = r_{w_2}\}$. Если $m \neq n/2$, то $N_w = C_w$. Если же $m = n/2$, то $N_w = C_w\langle g \rangle$, где g — инволюция из $Sp_n(q)$, переставляющая V_w^+ и V_w^-. Ясно, что если $A \trianglelefteq C_w$, то $A \leqslant Z(C)$, и элемент a имеет вид $(\alpha_1 I_{V^+}, I_{V^-})$, где $\alpha_1^2 = \alpha_2^2$. Но в $Z(C)$ нет таких элементов α, для которых $a^2 = \beta I_V w$, и нужной TI-подгруппы с инволюцией, соответствующей w, не существует.

Если $R_w = -1$, то [5, раздел 3B] $m = n/2$, V^+ и V^- — изотропные подпространства из V. Пусть $H = \{(\lambda_1 I_{V^+}, \lambda_2 I_{V^-}) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in k^\#\} \leqslant C$. Тогда

$C = C_{Sp_n(q)}(w)H$, где $C_{Sp_n(q)}(w) \simeq GL(V^+/k)$, а $N = C\langle g \rangle$, где g — инволюция из $GSp_n(q) = -1$, $r_q = -1$, $gw = (-I_V)wg$ и g индуцирует на $C_{Sp_n(q)}(w)$ инверсно-транспонирующий автоморфизм. На H элемент g действует следующим образом: $(\lambda_1 I_{V^+}, \lambda_2 I_{V^-})^g = (\lambda_2 I_{V^+}, \lambda_1 I_{V^-})$ для любых $\lambda_1, \lambda_2 \in k^\#$.

Исходя из строения w можно заключить, что требуемая циклическая TI-группа существует, если $q \equiv 1(4)$, что влечет $-1 \in (k^\#)^2$ и $w \in Z * Sp_n(q)$. Так как элементу a_0 в $Sp_n(q)$ соответствует полуинволюция вида $(\rho I_{V^+}, \rho I_{V^-})$, где $\rho^2 = -1$, то $X = PSp_n(q)$.

Выясним, при каких условиях $A \leqslant X$. В $GSp_n(q)$ элементу a соответствует матрица $(I_{V^+}, \rho I_{V^-})$ и по [5, раздел 3B] $r_a = \rho$. Ясно, что a индуцирует на X внутренний автоморфизм тогда и только тогда, когда $\rho \in (k^\#)^2$ или, что эквивалентно, $q - 1 \equiv 0(8)$, что приводит к случаю (1) или (3) теоремы.

Пусть теперь a_0 соответствует полуинволюция w типа 0 из $GSp_n(q)$ и $w^2 = \gamma I_V$. Обозначим через K квадратичное расширение поля k при помощи ρ, $\rho^2 = \gamma$. Пусть $\tau \in \mathrm{Aut}(K)$, $|\tau| = 2$, $\tau(\rho) = -\rho$ и $C_K(\tau) = k$. Так как $r_w^2 = \gamma^2$, то $r_w = \gamma$ или $r_w = -\gamma$.

Если $r_w = \gamma$, то C_w изоморфен подгруппе H из $GSp(V/K)$, состоящей из тех элементов u, для которых $r_u \in K^\#$, а $N_w = H\langle\tau\rangle$. В этом случае нужной TI-подгруппы нет, так как $|Z(H)| = 2(q-1)$, $|\gamma|_2 = (q-1)_2$ и элементу w соответствует в H элемент порядка $2|\gamma|$.

Пусть теперь $r_w = -\gamma$. Тогда по [5, лемма 3B] для w существует стандартный базис $\{v_1, \ldots, v_{n/2}, v_{n/2+1}, \ldots, v_n\}$ такой, что $f(v_i, v_j) = f(v_{n/2+i}, v_{n/2+j}) = 0$, $0 \leqslant i, j \leqslant n/2$ и $f(v_i, v_{n/2+j}) = \delta_{ij}$. В этом случае $C \simeq GU(V/K)$, а $N \simeq GU(V/K)\langle\tau\rangle$. Так как $|\gamma|_2 = (q-1)_2$, то нужная TI-подгруппа возникает, если $q + 1 \equiv 0(4)$ и $w \in Sp_n(q)$.

Выясним, когда возможен случай $G = X$. Если $b \in Z(C)$, то $b(v_i) = xv_i + \gamma y v_{n/2+i}$, $b(v_{n/2+i}) = yv_i + xv_{n/2+i}$, $0 \leqslant i \leqslant n/2$. Ясно, что $b \in Sp_n(q)$ тогда и только тогда, когда $x^2 - \gamma y^2 = 1$. Число решений этого уравнения в k по [2, теорема 6.26] равно $q+1$. Значит, $A \leqslant X$, если $q + 1 \equiv 0(8)$, и $|G : X| = 2$, если $q + 1 \equiv 4(8)$, что приводит к п. (2) или (4) теоремы. Теорема 3.1 полностью доказана.

§ 4. Унитарные группы

В этом параграфе V — векторное пространство размерности n над полем $k = GF(q^2)$ (q нечетно) с определенной на $V \times V$ невырожденной эрмитовой формой f. Как и в § 3, каждому элементу $u \in GU_n(q)$ соответствует $r_u \in k^\#$ такой, что $f(u(v_1), u(v_2)) = r_u f(v_1, v_2)$ для любых векторов $v_1, v_2 \in V$. Тогда $U_n(q) = \{u \in GU_n(q) \mid r_u = 1\}$, а $SU_n(q) = U_n(q) \cap SL_n(q^2)$. Известно, что $GU_n(q) = \widetilde{Z} * U_n(q)$, где $\widetilde{Z} = \{\lambda I_V \mid \lambda \in k^\#\}$.

Для $x \in k$ пусть $\bar{x} = x^q$. Обозначим через σ отображение поля k в себя, определяемое следующим образом:

$$\sigma(x) = x\bar{x}.$$

Ясно, что σ — гомоморфизм из $k^\#$ в $k_0^\#$, где $k_0 = \{x \in k \mid x^q = x\}$. Тогда $Z = Z(U_n(q)) = \{\lambda I_V \mid \lambda \in \ker\sigma\} \simeq Z_{q+1}$, а $Z(SU_n(q)) \simeq Z_{(q+1,n)}$.

Теорема 4.1. *Пусть X — накрывающая группа для $PSU_n(q)$, $n \geqslant 3$. Тогда либо X — накрывающая группа для $PSU_4(3)$, $|Z(X)|$ делится на 9 и $|G : X| = 4$, либо X — частное $SU_n(q)$, $n \geqslant 3$, по центральной подгруппе порядка d и имеет место один из следующих случаев.*

Для нечетного n:

(1) $X \simeq PSU_3(5)$, $G = X\langle\varphi\rangle$, где φ — полевой автоморфизм порядка 2, a_0 соответствует инволюции типа 2 из X;

(2) $G = X$, $q+1 \equiv 0(4)$, a_0 *соответствует инволюции четного типа из* $SU_n(q)$.

Для четного n:

(3) $G = X$, $q+1 \equiv 0(4)$, $n > 4$, a_0 *соответствует инволюции типа* m, $m \equiv 0(4)$, *из* $SU_n(q)$;

(4) $G = X$, $q+1 \equiv 0(4)$, a_0 *соответствует инволюции типа* m, $m \equiv 2(4)$, *из* $SU_n(q)$, $(q+1,n) \neq (q+1,2n)$, *и либо* d *делится на* $(q+1,n/2)_2$, *если* $n \equiv 0(4)$, *либо* $d \equiv 0(2)$, *если* $n \equiv 2(4)$;

(5) $G = X$, $q+1 \equiv 0(4)$, $(q+1,2n) \neq (q+1,4n)$, d *делится на* $(q+1,n)_2$, a_0 *соответствует инволюции нечетного типа из* $U_n(q)$;

(6) $G = X$, $q-1 \equiv 0(4)$, d *четно*, $q-1 \equiv 0(8)$ *или* $n \equiv 0(4)$, *элементу* a_0 *соответствует полуинволюция типа* $n/2$ *из* $SU_n(q)$;

(7) $|G : X| = 2$, $G \in X^*$, $q+1 \equiv 0(4)$, $(q+1,2n) = (q+1,n)$, *элементу* a_0 *соответствует инволюция типа* m, $m \equiv 2(4)$, *из* $SU_n(q)$;

(8) $|G : X| = 2$, $G \in X^*$, $q+1 \equiv 0(4)$, $(q+1,2n) \neq (q+1,n)$, $(q+1,4n) = (q+1,2n)$, d *делится на* $(q+1,n)_2$, *элементу* a_0 *соответствует инволюция нечетного типа из* $U_n(q)$;

(9) $|G : X| = 2$, $G \in X^*$, $q-1 \equiv 4(8)$, $n \equiv 2(4)$, d *четно*, *элементу* a_0 *соответствует полуинволюция типа* $n/2$ *из* $SU_n(q)$;

(10) $|G : X| = 4$, $G \in X^*$, $q+1 \equiv 0(4)$, $(q+1,2n) = (q+1,n)$, *элементу* a_0 *соответствует инволюция нечетного типа из* $U_n(q)$.

Докажем предварительно ряд лемм. В леммах 4.2 и 4.3 предполагается, что $\widetilde{H} = GL_{2n}(q^4)$, $H = SL_{2n}(q^4)$, $n \geqslant 2$. Обозначим через τ инверсно-транспонирующий автоморфизм относительно фиксированного базиса $\{e_1,\ldots,e_{2n}\}$, а через φ — полевой автоморфизм порядка 4. Пусть $\varphi_0 = \varphi^2$. Тогда $\widetilde{K} = G_H(\tau\varphi_0)$ изоморфна $SU_{2n}(q^2)$. Далее, пусть h — линейное преобразование, задаваемое следующим образом: $h(e_1) = -e_2$, $h(e_2) = e_1,\ldots,h(e_{2n-1}) = -e_{2n}$, $h(e_{2n}) = e_{2n-1}$, а g — линейное преобразование с диагональной матрицей, у которой все ненулевые элементы равны 1, кроме элемента $t \in \ker\sigma - (\ker\sigma)^2$, стоящего в последней строке.

Лемма 4.2. *Пусть* K *— некоторое частное* $\widetilde{K}$ *по центральной подгруппе. Тогда* $C_K(h\tau) \neq C_K(c\varphi)$ *для любого элемента* $c \in \overline{K}$, *где* $\overline{K} \in K^*$.

Доказательство. Предположим противное и рассмотрим сначала случай $K = \widetilde{K}$. Пусть $Y = C_H(h) \cap C_H(\tau) \cap C_H(\varphi)$. По [5, замечание 4.28] $C_H(\varphi) \cap C_H(h\tau) = Sp_{2n}(q)$, поэтому для выяснения вида Y достаточно знать $C_{Sp_n(q)}(h)$.

Если $q-1 \equiv 0(4)$, то по [5, раздел 3A] $C_{\widetilde{H}}(h) = L_1 \times L_2$, где $L_1 \simeq L_2 \simeq GL_n(q^4)$. Так как $h \in C_H(\varphi) \cap C_H(h\tau)$ и $q-1 \equiv 0(4)$, то h индуцирует на $C_H(h\tau)$ тот же автоморфизм, что и инволюция $w = \rho I_V h$, для которой $r_w = -1$. Поэтому согласно [5, раздел 3B] можно считать, что для каждого $l_1 \in L_1'$ найдется единственный элемент $\bar{l}_1 \in L_2'$ такой, что $l_1\bar{l}_1 \in C_H(h\tau)$. Значит, Y' содержит подгруппу $Y_1 = \{l_1\bar{l}_1 \mid l_1 \in L_1\} \cap C_{L_1\times L_2}(\varphi)$, $Y_1 \simeq SL_n(q)$. Так как $c\varphi$ централизует Y_1, то c централизует Y_1. Тогда ввиду строения $C_{\widetilde{H}}(Y_1)$ элемент c централизует $C_{\widetilde{H}}(h)$. Но, с другой стороны, подгруппа $Y_2 = C_H(h) \cap C_H(\tau) \cap C_H(\varphi_0)$ не централизуется элементом $c\varphi$.

Если $q+1 \equiv 0(4)$, то по [5, раздел 3A] $C_{\widetilde{H}}(h) = GL_n(q^8)$ и $Y \simeq U_n(q) \leqslant GL_n(g^8)$. Так как φ централизует h, то c также централизует h и $c \in C_{\widetilde{H}}(h) \cap C_{\widetilde{H}}(Y)$. Но тогда $c \in Z(C_{\widetilde{H}}(h))$, что невозможно, как и в случае $q-1 \equiv 0(4)$.

Пусть теперь K — собственное число $\widetilde{K}$, а подгруппа Y определена так же, как и выше. Так как $C_k(h\tau) = C_k(c\varphi)$, то для любого элемента $y \in Y$ будем иметь $y^c \in yZ$. Но тогда c централизует $O^2(Y)$, $c \in Z(C_{\widetilde{H}}(h))$, что невозможно, как и в случае $K = \widetilde{K}$.

Лемма 4.3. *Пусть K — некоторое частное $\widetilde{K}$ по центральной подгруппе. Тогда $C_K(g\tau) \neq C_K(c\varphi)$ для любого элемента $c \in \overline{K}$, где $\overline{K} \in K^*$.*

Доказательство. Предположим противное и рассмотрим группу $Y = C_H(\gamma) \cap C_H(g) \cap C_H(\tau)$. По [5, замечание 4.28] $Y \simeq SO_{2n-1}(q)$. Так как φ централизует Y, то $y^c \in yZ$ для любого $y \in Y$. Значит, $c \in C_H(O^2(Y))$. Непосредственные вычисления показывают, что $c(e_i) = \lambda e_i$, $1 \leqslant i \leqslant 2n-1$, $c(e_{2n}) - \beta e_{2n}$, где λ, $\beta \in \ker\sigma$. С другой стороны, $cc^{\varphi^{-1}} = zg$, $z \in Z$, и $z = \alpha I_V$, $\alpha \in \ker\sigma$. Значит, $\lambda\lambda^{\varphi^{-1}} = \alpha$, а $\beta\beta^{\varphi^{-1}} = \alpha t$. Но тогда α, $\alpha t \in (\ker\sigma)^2$, что невозможно. Лемма доказана.

Лемма 4.4. *Пусть X — частное $SU_n(q)$ по центральной подгруппе. Тогда $G \in X^*$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда ввиду строения группы автоморфизмов X [5, лемма 4.29] возможны следующие варианты для a:

1) $a = b\varphi$, где b индуцирует на X внутренне-диагональный автоморфизм, а φ — полевой автоморфизм порядка 4,

2) $a = b\varphi_0$, где b индуцирует на X внутренне-диагональный автоморфизм, а φ — полевой автоморфизм порядка 2.

Предположим, что имеет место первый случай.

Если n нечетно, то ввиду [5, лемма 4.29] можно считать, что a_0 индуцирует на X полевой автоморфизм $\varphi_0 = \varphi^2$. По лемме 1.1 $C_X(a_0) = C_X(a)$ и b централизует $C_X(\varphi)$, что невозможно.

Пусть теперь n четно. Из [5, замечание 4.28] следует, что автоморфизмы τ и $h\tau$ (h, τ определяются, как в лемме 4.2) не сопряжены в группе $PU_n(q)\langle\varphi_0\rangle$ под действием $PU_n(q)$. Кроме того, автоморфизмы $h\tau$ и $g\tau$ также не сопряжены в $PU_n(q)\langle\varphi_0\rangle$ под действием $PU_n(q)$. Заметим, что τ и $g\tau$ относительно действия $PU_n(q)$ представляют разные классы сопряженности, так как определитель любой матрицы из $U_n(q)$, индуцирующей на $SU_n(q)$ преобразование g, лежит в $\ker\sigma - (\ker\sigma)^2$. Таким образом, ввиду [5, лемма 4.29] можно считать, что a_0 индуцирует на X автоморфизм вида φ_0, или $g\tau$, или $h\tau$. (Заметим, что на X автоморфизмы τ и φ_0 совпадают). Первая возможность разбирается так же, как в случае нечетного n, а две оставшиеся невозможны в силу лемм 4.2 и 4.3.

Предположим теперь, что выполняется второй случай. Тогда элементу a_0 соответствует полуинволюция w типа m из $U_n(q)$, $w^2 = \gamma I_V$, $\gamma \in \ker\sigma$.

Случай 1. $\gamma = \beta^2$, $\beta \in \ker\sigma$. Тогда $w_1 = \beta^{-1} I_V w$ — инволюция из $U_n(q)$. Зафиксируем базис V, в котором w имеет стандартный вид. Как и в лемме 1.2, можно показать, что φ_0 и b централизуют w по модулю подгруппы $\overline{Z} = \langle \beta^2 I_V\rangle$. По [5, раздел 3C] $C_X(a_0)$ содержит подгруппы L_1 и L_2, изоморфные частным $SU_{n-m}(q)$ и $SU_m(q)$, на которых φ_0 индуцирует полевой автоморфизм. Из леммы 1.2 также следует, что $L_1L_2 \trianglelefteq C_X(a_0)$, и если $\widetilde{X} \in X^*$, то любой элемент $b \in C_{\widetilde{X}}(a_0 \bmod \overline{Z})$ представим в виде $b = b_1 x^\varepsilon$, $\varepsilon = 0$ или $\varepsilon = 1$, где b_1 индуцирует на L_1 и L_2 внутренне-диагональные автоморфизмы, а x переставляет L_1 и L_2. Ясно, что если $n \neq 4$ или $m \neq n/2$, то a не централизует L_1L_2, что противоречит условию $A \trianglelefteq C_G(a_0)$. Если же $n = 4$ и $m = 2$, то нужной TI-подгруппы не возникает по тем же причинам, что и в лемме 1.2.

Случай 2. $\gamma \in \ker\sigma - (\ker\sigma)^2$. По [5, раздел 3C] получаем, что $n = 2m$. Выберем в V базис $\{e'_1, \dots e'_m, e'_{m+1}, \dots, e'_{2m}\}$, на котором действие w определено следующим образом: $w(e'_i) = e'_{m+i}$, $w(e'_{m+i}) = \gamma e'_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Это можно сделать ввиду [5, лемма 3A]. Так как элемент $b\varphi_0$ централизует w, то $bw^{\varphi_0} = wb$, что возможно лишь при условии $\gamma^{\varphi_0} = \gamma$. Так как $\gamma \in \ker\sigma$, то $\gamma = -1$.

Пусть теперь $\{e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_{2m}\}$ — стандартный базис для w такой, что $f(e_i, e_j) = f(e_{m+i}, e_{m+j}) = 0$, $f(e_{m+i}, e_{m+j}) = \delta_{ij}$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Тогда $w = (\rho I_{V^+}, -\rho I_{V^-})$, где $\rho^2 = -1$. Заметим, что $q - 1 \equiv 0(4)$ и $b \in C_{U_n(q)}(w)$. Но тогда $b\varphi_0$ централизует подгруппу, изоморфную частному $SL_m(q^2)$, на которой φ_0 индуцирует полевой автоморфизм порядка 2. Но это невозможно, так как по [5, раздел 3С] любой элемент b из $C_{U_n(q)}(w)$ индуцирует на этой подгруппе внутренне-диагональный автоморфизм. Лемма доказана.

Лемма 4.5. *Пусть X — частное $SU_3(q)$ и $G \notin X^*$. Тогда $G = PSU_3(5)\langle\varphi_0\rangle$, где φ_0 — полевой автоморфизм порядка 2.*

Доказательство. Предположим, что $G \notin X^*$. Тогда, как и в лемме 4.4, для элемента a имеются следующие возможности:

1) $a = b\varphi$, где b индуцирует на X внутренне-диагональный автоморфизм, а φ — полевой автоморфизм порядка 4,

2) $a = b\varphi_0$, где b индуцирует на X внутренне-диагональный автоморфизм, а φ_0 — полевой автоморфизм порядка 2.

Первый случай разбирается так же, как и в лемме 4.4.

Пусть $a = b\varphi_0$ содержит представители инволюции типа 2 из $SU_3(q)$. Так как $C_X(\varphi_0)$ содержит представители всех классов сопряженных инволюций из X, то можно считать, что $a_0 \in X$ и по [5, раздел 3С] $C_X(a_0)$ есть частное $U_2(q)$, $C_{\widetilde{X}}(a_0) = C_X(a_0)Z_1$, где $\widetilde{X}$ — частное $GU_3(q)$, а подгруппа Z_1 централизует $C_X(a_0)$. Так как A — TI-подгруппа, то A централизует подгруппу L из $C_X(a_0)$, изоморфную $SU_2(q)$. Значит, b и φ_0 индуцируют на L один и тот же автоморфизм. Пусть $Z_2 = Z(C_X(a_0))$, $z \in Z_2$ и d — элемент из $C_X(a_0)$, индуцирующий на L диагональный автоморфизм. Непосредственные вычисления показывают, что $(b\varphi_0)^z = z^{-2}b\varphi_0$ и $(b\varphi_0)^d = z'b\varphi_0$, где $z' \in Z_2$, и в группе $U_2(q)$ элементы z' и d имеют одинаковые порядки. С другой стороны, d либо инвертирует, либо централизует $b\varphi_0$. Значит, $|Z_2| \leqslant 2$, что влечет $q = 5$ и $X \simeq PSU_3(5)$.

Заметим теперь, что в X есть элемент g порядка 4, квадрат которого совпадает с a_0. Но тогда $gb\varphi_0$ — инволюция, и по [5, лемма 4.29] она сопряжена с φ_0 при помощи внутренне-диагонального автоморфизма. Таким образом, $G = PSU_3(5)\langle\varphi_0\rangle$. Лемма доказана.

Лемма 4.6. *Пусть X — частное $SU_n(q)$, $n \geqslant 3$, по центральной подгруппе порядка d. Тогда имеет место один из случаев* (1)–(10) *теоремы* 4.1.

Доказательство. Ввиду лемм 4.4 и 4.5 достаточно рассмотреть случай $G \in X^*$.

Предположим сначала, что n нечетно. Ввиду леммы 1.2 можно считать, что $X = SU_n(q)$. Так как n нечетно, то любая группа $\widetilde{X} \in X^*$ не содержит полуинволюций типа $n/2$ и любая полуинволюция из $\widetilde{X}$ индуцирует на $SU_n(q)$ внутренний автоморфизм, что влечет $a_0 \in X$, тип a_0 четен. По [5, раздел 3С] $C_{U_n(q)}(a_0) \simeq U(V_{a_0}^+/k) \times U(V_{a_0}^-/k)$ и циклическая TI-подгруппа порядка 4 существует тогда и только тогда, когда $q + 1 \equiv 0(4)$. Если $\rho^2 = -1$ для $\rho \in k^\#$, то элемент a имеет вид $(I_{V^+}, \rho I_{V^-})$, для $m \equiv 0(4)$ и вид $(-I_{V^+}, \rho I_{V^-})$ для $m \equiv 2(4)$. Заметим, что в этом случае $a \in X$ и $G = X$, что приводит к (2).

Пусть теперь n четно. Для полуинволюции $w \in GL_n(q)$ обозначим через C_w группу $C_{GL_n(q)}(w)$, а через U_w — группу $\langle Z, w\rangle$. Пусть $N_w = N_{GL_n(q)}(U_w)$.

Предположим сначала, что элементу a_0 соответствует инволюция w типа m из $U_n(q)$, $0 < m < n$. По [5, раздел 3С] $C_w \simeq U(V^+/k) \times U(V^+/k)$. Если $m = n/2$, то существует элемент g, переставляющий V^+ и V^-, который централизует w по модулю Z, и $N_w = C_w\langle g\rangle$. Если $m \neq n/2$, то $N_w = C_w$. Ввиду строения централизатора w циклическая TI-подгруппа порядка 4 возникает лишь тогда, когда $q+1 \equiv 0(4)$. При этом a имеет либо вид $(I_{V^+}, \rho I_{V^-})$, либо вид $(-I_{V^+}, \rho_{V^-})$, где $\rho^2 = -1$.

Заметим, что w индуцирует на $SU_n(q)$ внешний автоморфизм тогда и только тогда, когда m нечетно и $-1 \notin (\ker\sigma)^n$. Последнее условие эквивалентно равенству $(q+1,n) = (q+1,2n)$, что приводит к (10).

Пусть теперь m четно. Тогда $w \in SU_n(q)$. Если $m \equiv 0(4)$, то элемент a также индуцирует на $SU_n(q)$ внутренний автоморфизм и $a \in SU_n(q)$, что приводит к (3). Если же $m \equiv 2(4)$, то $a \in SU_n(q) * Z$ тогда и только тогда, когда $-1 \in (\ker\sigma)^n$, т. е. когда $(q+1,n) \neq (q+1,2n)$. Соответствующая элементу a матрица из $SU_n(q)$ будет иметь вид $(xI_{V^+}, \rho x I_{V^-})$, где $x^n = -1$. Центральная подгруппа порядка d, по которой берется частное, должна содержать $x^4 I_V$, откуда следует, что $(q+1, n/2)_2$ делит d. Для того чтобы подгруппа A лежала в X, этого условия достаточно, если $n \equiv 0(4)$. Если же $n \equiv 2(4)$, то необходимо, чтобы d было четным, что приводит к (4) или (7).

Пусть теперь m нечетно и $a_0 \in X$. Это возможно лишь при условии $(q+1,n) \neq (q+1,2n)$. Элемент a индуцирует на $SU_n(q)$ внутренний автоморфизм тогда и только тогда, когда $\rho \in (\ker\sigma)^n$ или, что то же самое, $(q+1,2n) \neq (q+1,4n)$. В этом случае элементу a соответствует матрица $(xI_{V^+}, \rho I_{V^-})$ из $SU_n(q)$, где $x^n = -1$. Так как частное берется по подгруппе, содержащей $x^4 I_V$, то d делится на $(q+1,n)_2$. Если же a индуцирует на $SU_n(q)$ внешний автоморфизм, то $(q+1,2n) = (q+1,4n)$ и d также делится на $(q+1,n)_2$, что приводит к (5) или (8).

Пусть теперь элементу a_0 соответствует такая полуинволюция w типа m, что $w^2 = \gamma I_V$, $\gamma \in \ker\sigma - (\ker\sigma)^2$. Как показано в [5, раздел 3C], найдется элемент $\lambda \in k^{\#}$ такой, что $\lambda^2 = \gamma$. Пусть $w_0 = \lambda^{-1} I_V w$. Тогда w_0 — инволюция из $GU_n(q) - U_n(q)$. Ясно, что $C_w = C_{w_0}$. В этом случае $n = 2m$, $V = V^+ \oplus V^-$, $\dim V^+ = n/2 = m$, V^+ и V^- — изотропные подпространства. По [5, раздел 3C] в V^+ можно выбрать базис $\{v_i \mid 1 \leqslant i \leqslant m\}$, а в V^- — базис $\{v_{j+m} \mid 1 \leqslant j \leqslant m\}$ так, что $f(v_i, v_{j+m}) = \delta_{ij}$, $1 \leqslant i,j \leqslant m$. При этом $C_w \simeq GL_{V^+}/k)$, где изоморфизм устанавливается, как и в [5, раздел 3B]. В выбранном базисе полуинволюции w соответствует элемент $(\lambda I_{V^+}, \overline{\lambda^{-1}} I_{V^-})$.

Из строения C_w следует, что если требуемая TI-подгруппа существует, то $a \in Z(C_w)$. Так как $|Z(C_w)| = q^2 - 1$, $|\gamma|_2 = (q+1)_2$, а $|\lambda| = 2|\gamma|$, то циклическая TI-подгруппа имеется тогда и только тогда, когда $q - 1 \equiv 0(4)$. По [5, лемма из 3C] в этом случае $w \in Z * SU_n(q)$.

Выясним, при каких условиях $A \leqslant X$. Для этого найдем $|Z(C_{SU_n(q)}(w))|$. Любой элемент g из $Z(C_{SU_n(q)}(w))$ имеет вид $(\beta I_{V^+}, \overline{\beta^{-1}} I_{V^-})$, а $\det(g) = (\beta\overline{\beta^{-1}})^m$. Рассмотрим уравнение $(\beta\overline{\beta^{-1}})^m = 1$. Оно эквивалентно системе

$$(\beta\overline{\beta^{-1}})^m = \xi, \quad \xi^m = 1.$$

Если $k_0 = \{\lambda \in k \mid \bar\lambda = \lambda\}$, то k — квадратичное расширение k_0 и любой элемент из k представим в виде $x + \eta y$, где $x, y \in k_0$, $\eta \notin k_0$, $\eta^2 \in k_0$. Пусть $\xi = x_0 + \eta y_0$, $\beta = x + \eta y$. Тогда первое уравнение системы преобразуется в следующую систему однородных уравнений:

$$(1 - x_0)x + y_0\eta^2 y = 0, \quad y_0 x - (x_0 + 1)y = 0.$$

Если $\xi\bar\xi = 1$, то эта система имеет в k_0 ровно $q-1$ ненулевых решений; если же $\xi\bar\xi \neq 1$, то ненулевых решений нет.

Всего же существует $(q+1, d_1)$, $d_1 = (m, q^2-1)$, элементов ξ таких, что $\xi^m = 1$ и $\xi \in \ker\sigma$. Если $m \equiv 0(2)$, то $A \leqslant X$ при $q - 1 \equiv 0(4)$. Если же m нечетно, то $A \leqslant X$ при $q - 1 \equiv 0(8)$, что приводит к (6) или (9). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 4.1. Так как накрывающими группами для $PSU_n(q)$, за исключением $PSU_4(3)$, являются частные группы $SU_n(q)$, то нерассмотренным остался случай, когда X является накрывающей группой для $PSU_4(3)$ и $|Z(X)|$ делится на 3. Предположим, что эта ситуация имеет место, и обозначим через $\overline{G}$ группу $G/O(Z(X))$. По лемме 1.2 $\overline{A}$ — TI-подгруппа в $\overline{G}$. Из леммы 4.6 следует, что $|G:X| \geqslant 2$.

Согласно [4], если $|G:X| = 2$, то $G = X\langle t\rangle$, где t индуцирует на X инволютивный автоморфизм, инвертирующий $O(Z(X))$. Противоречие с тем, что a имеет вид bt, где b принадлежит X и централизует $O(C_X(a_0))$.

Если же $|G:X| = 4$, то по [4] $G = XA$, $O(Z(X)) = Z_3 \times Z_3$, элемент a_0 инвертирует $O(Z(X))$. Так как $C_{\overline{X}}(\bar{a}_0) = C_{\overline{X}}(\bar{a})$, то $C_X(a_0) = C_x(a)$. Следовательно, ситуация $|G:X| = 4$ действительно имеет место. Теорема 4.1 доказана.

§ 5. Ортогональные группы

В этом параграфе V — векторное пространство над полем $k = GF(q)$, q нечетно, $(,)$ — определенное на $V \times V$ билинейное симметрическое скалярное произведение.

Группа $GO(V/k)$ состоит из всех невырожденных линейных преобразований u пространства V таких, что для любых векторов $v_1, v_2 \in V$ выполнено равенство $u(v_1, v_2) = r_u(v_1, v_2)$, где элемент r_u называется мультипликатором преобразования u, лежит в $k^{\#}$ и зависит только от u. Обозначим через Z группу $Z(GL(V/k))$.

Группа $O(V/k)$ состоит из тех элементов $u \in GO(V/k)$, для которых $r_u = 1$. Пусть $SO(V/k) = O(V/k) = \cap SL(V/k)$. Через $\Omega(V/k)$ обозначим группу $[O(V/k), O(V/k)]$, а через $P\Omega(V/k)$ — группу $\Omega(V/k)/Z(\Omega(V/k))$. Если $\dim V \geqslant 3$, то по [5, раздел 3D] $C_{GO(V/k)}(\Omega(V/k)) = Z$.

Как и в [5, раздел 3D], будем обозначать через $D(V/k)$ дискриминант пространства V, а через $\mathrm{ind}(V/k)$ — размерность максимальных изотропных подпространств пространства V. Пусть $\dim V = m$.

Если m нечетно, то $\mathrm{ind}(V/k) = (m-1)/2$ и группы $GO(V/k)$, $O(V/k)$, $SO(V/k)$, $\Omega(V/k)$ и $P\Omega(V/k)$ обозначаются как $GO_m(q)$, $O_m(q)$, $SO_m(q)$, $\Omega_m(q)$ и $P\Omega_m(q)$ (или $GO_m^+(q)$, $O_m^+(q)$ и т. д.). В этом случае $GO_m(q) = SO_m(q) \times Z$ [5, раздел 3D].

Если же m четно, то возможны два случая:

$\mathrm{ind}(V/k) = m/2$, $D(V/k) = (-1)^{m/2}(k^{\#})^2$, и мы имеем дело с группами $GO_m^+(q)$, $O_m^+(q)$, $SO_m^+(q)$ $O_m^+(q)$ и $P\Omega_m^+(q)$, либо

$\mathrm{ind}(V/k) = m/2 - 1$, $D(V/k) = (-1)^{m/2}c(k^{\#})^2$, где $c \notin (k^{\#})^2$, и соответствующие группы обозначаются как $GO_m^-(q)$, $O_m^-(q)$, $SO_m^-(q)$, $\Omega_m^-(q)$ и $P\Omega_m^-(q)$.

Известно, что для любого элемента x из $O_m^{\pm}(q)$ найдется последовательность неизотропных векторов $n_i \in V$, $1 \leqslant i \leqslant l$, такая, что $x = x_1 \cdot \ldots \cdot x_l$, где $x_i \in O_m^{\pm}(q)$, и для любого вектора $v \in V$

$$x_i(v) = v - \frac{2(n_i, v)}{(n_i, n_i)} n_i.$$

Отображение $\tilde{\sigma} : O_m^{\pm}(q) \to k^{\#}/(k^{\#})^2$ определим следующим образом:

$$\tilde{\sigma}(x) = (n_1, n_1) \cdot \ldots \cdot (n_l, n_l)(k^{\#})^2.$$

Корректность такого определения показана в [1, § 5]. Сужение $\tilde{\sigma}$ на $SO_m^{\pm}(q)$ называется спинорной нормой и обозначается через σ. Теоремы 5.14 и 5.17 из [1] показывают, что $\ker\sigma = \Omega_m^{\pm}(q)$ при $m \geqslant 2$.

Рассмотрим примеры вычисления $\sigma(x)$ для некоторых частных случаев.

Пример 1. Пусть $\dim V = 2m$, $V = V_1 \oplus V_2$, $\dim V_1 = \dim V_2 = m$, V_1 и V_2 — изотропные пространства. Базисы $\{v_i \mid 1 \leqslant i \leqslant m\}$ и $\{v_{i+m} \mid 1 \leqslant i \leqslant m\}$ в V_1 и V_2 соответственно выберем так, чтобы $(v_i, v_{j+m}) = \delta_{ij}$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Элемент $x \in SO_{2m}^{\pm}(q)$ определим следующим образом:

$$x(v_i) = bv_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \quad b \in k^{\#};$$

$$x(v_{i+m}) = cv_{i+m}, \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \quad c \in k^{\#}.$$

Так как $x \in SO^+_{2m}(q)$, то $bc = 1$. Непосредственно проверяется, что система векторов $\{n_i, n'_i \mid 1 \leqslant i \leqslant m\}$, где $n_i = v_i + bv_{i+m}$ и $n'_i = v_i + v_{i+m}$, определяет отражения, в произведение которых раскладывается x. Так как $(n_i, n_i) = 2b$, $(n'_i, n'_i) = 2$, $1 \leqslant i \leqslant m$, то $\sigma(x) = 2^{2m}b^m(k^\#)^2 = b^m(k^\#)^2$.

Пример 2. Пусть пространства V, V_1, V_2 и базисы $\{v_i \mid 1 \leqslant i \leqslant m\}$ и $\{v_{i+m} \mid 1 \leqslant i \leqslant m\}$ такие же, как и в примере 1, m четно. Определим g следующим образом:

$$g(v_i) = v_{i+m}, \quad g(v_{i+m}) = v_i.$$

Тогда $g \in SO^\pm_{2m}(q)$. Разложение g в произведение отражений обеспечивается системой векторов $\{v_i - v_{i+m} \mid 1 \leqslant i \leqslant m\}$. Так как $(v_i - v_{i+m}, v_i - v_{i+m}) = -2$, то $\sigma(q) = (-2)(k^\#)^2 = (k^\#)^2$ и $g \in \Omega^+_{2m}(q)$.

Заметим, что если m нечетно, то $g \notin Z * \Omega^+_{2m}(q)$, где $Z = Z(GL_{2m}(q))$.

Пример 3. Пусть $\dim V = 2m$, $\gamma \in k^\# - (k^\#)^2$. По [5, раздел 3D] в пространстве V можно выбрать базис $\{v_i, v_{i+m} \mid 1 \leqslant i \leqslant m\}$ такой, что $(v_i, v_j) = (v_i, v_{j+m}) = (v_{i+m}, v_{j+m}) = 0$, если $i \neq j$, $1 \leqslant i, j \leqslant m$; $(v_i, v_i) = 1$, $(v_{i+m}, v_{i+m}) = -\gamma$ и $(v_i, v_{i+m}) = 0$ для $1 \leqslant i \leqslant m$. Пусть элемент $x \in SO^\pm_{2m}(q)$ задается следующим образом:

$$x(v_i) = bv_i + cv_{i+m}, \quad x(v_{i+m}) = \gamma cv_i + bv_{i+m},$$

где $b, c \in k$, $b \neq 0$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Так как $x \in SO^\pm_{2m}(q)$, то b и c связаны равенством $b^2 - \gamma c^2 = 1$. В этом случае x раскладывается в произведение отражений относительно системы векторов $\{n_i, n'_i \mid 1 \leqslant i \leqslant m\}$, где $n_i = (b-1)v_i + cv_{i+m}$, а $n'_i = \gamma cv_i + bv_{i+m}$.

Так как $(n_i, n_i) = 2(1-b)$, $(n'_i, n'_i) = -\gamma$, то $\sigma(x) = (2\gamma(b-1))^m(k^\#)^2$.

Известны следующие изоморфизмы между ортогональными группами и другими классическими группами [5, раздел 3D]:

$\Omega^+_2(q) \simeq Z_{(q-1)/2}$,
$\Omega^-_2(q) \simeq Z_{(q+1)/2}$,
$\Omega_3(q) \simeq PSL_2(q)$,
$\Omega^+_4(q) \simeq SL_2(q) \times SL_2(q)$,
$\Omega^-_4(q) \simeq PSL_2(q^2)$,
$\Omega_5(q) \simeq PSp_4(q)$,
$\Omega^+_6(q) \simeq SL_4(q)/B$, $|B| = 2$,
$\Omega^-_6(q) \simeq SU_4(q)/B$, $|B| = 2$.

Ввиду этого в дальнейшем будем считать, что $\dim V \geqslant 7$.

Теорема 5.1. *Пусть X — частное $\Omega^\pm_m(q)$ по центральной подгруппе. Тогда имеет место один из следующих случаев.*

Для нечетного m:

(1) $q^2 - 1 \equiv 0(16)$, $G = X$, a_0 — инволюция типа 2 из $\Omega_m(q)$;

(2) $q^2 - 1 \equiv 8(16)$, $|G : X| = 2$, $G \in X^*$, a_0 — инволюция типа 2 из $\Omega_m(q)$.

Для $m = 2n$ и $\mathrm{ind}(V/K) = n$:

(3) $G = X$, n нечетно, $q + 1 \equiv 0(4)$, инволюция a_0 из A соответствует инволюции типа 2 из $\Omega^+_{2n}(q)$;

(4) $G = X$, n четно и $q^2 - 1 \equiv 0(16)$ или n нечетно и $q - 1 \equiv 0(4)$, инволюция a_0 из A соответствует инволюции типа 2 из $\Omega^+_{2n}(q)$;

(5) $G = X$, $X = P\Omega^+_{2n}(q)$, n четно, $2 \in (k^\#)^2$, $q + 1 \equiv 0(4)$, a_0 соответствует полуинволюции 0 из $\Omega^+_{2n}(q)$;

(6) $G = X$, $X = P\Omega^+_{2n}(q)$, n четно, $q - 1 \equiv 0(8)$, a_0 соответствует полуинволюции типа n из $\Omega^+_{2n}(q)$;

(7) $G = X$, $X = P\Omega^+_{2n}(q)$, n *четно*, $q - 1 \equiv 0(16)$, a_0 *соответствует полуинволюции типа* n *из* $\Omega^+_{2n}(q)$;

(8) $|G : X| = 2$, n *четно и* $q^2 - 1 \equiv 8(16)$ *или* n *нечетно и* $q - 1 \equiv 0(4)$, *инволюция* a_0 *из* A *соответствует инволюции типа* 2 *из* $\Omega^+_{2n}(q)$;

(9) $|G : X| = 2$, $X = P\Omega^+_{2n}(q)$, n *четно*, $2 \notin (k^\#)^2$, $q + 1 \equiv 0(4)$, a_0 *соответствует полуинволюции типа* 2 *из* $\Omega^+_{2n}(q)$;

(10) $|G : X| = 2$, $X = P\Omega^+_{2n}(q)$, n *четно*, $q - 1 \equiv 4(8)$, a_0 *соответствует полуинволюции типа* 2 *из* $\Omega^+_{2n}(q)$;

(11) $|G : X| = 2$, $X = P\Omega^+_{2n}(q)$, n *нечетно*, $q - 1 \equiv 8(16)$, a_0 *соответствует полуинволюции типа* n *из* $\Omega^+_{2n}(q)$;

(12) $|G : X| = 4$, n *нечетно*, $q - 1 \equiv 4(8)$, a_0 *соответствует полуинволюции типа* n *из* $GO^+_{2n}(q)$.

Для $m = 2n$ *и* $\mathrm{ind}(V/k) = n - 1$:

(13) $G = X$, n *четно*, a_0 *соответствует инволюции типа* 2 *из* $\Omega^-_{2n}(q)$;

(14) $G = X$, n *нечетно*, $Q \equiv 1, 5, 7(8)$, a_0 *соответствует инволюции типа* 2 *из* $\Omega^-_{2n}(q)$;

(15) $G = X$, n *нечетно*, $q + 1 \equiv 0(4)$, $2 + \alpha \in (k^\#)^2$, *где* $\alpha^2 = 2$, a_0 *соответствует полуинволюции типа* 0 *из* $\Omega^-_{2n}(q)$;

(16) $|G : X| = 2$, n *нечетно*, $q + 1 \equiv 4(8)$, a_0 *соответствует инволюции типа* 2 *из* $\Omega^-_{2n}(q)$;

(17) $|G : X| = 2$, n *нечетно*, $q + 1 \equiv 0(4)$, $2 \in (k^\#)^2$, *но* $2 + \alpha \notin (k^\#)^2$, *где* $\alpha^2 = 2$, a_0 *соответствует полуинволюции типа* 0 *из* $\Omega^-_{2n}(q)$;

(18) $|G : X| = 4$, n *нечетно*, $q + 1 \equiv 0(4)$, $2 \notin (k^\#)^2$, a_0 *соответствует полуинволюции типа* 0 *из* $PGO^-_{2n}(q)$;

Лемма 5.2. *Пусть* $X \simeq \Omega_n(q)$, $n \geqslant 7$, n *и* q *нечетны. Тогда* $X \in X^*$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда ввиду строения группы автоморфизмов X [5, лемма 4.32] для элемента a имеются следующие возможности:

1) $a = b\varphi$, где b индуцирует на X внутренне-диагональный автоморфизм, а φ — полевой автоморфизм порядка 4,

2) $a = b\varphi_0$, где b индуцирует на X внутренне-диагональный автоморфизм, а φ_0 — полевой автоморфизм порядка 2.

В первом случае ввиду [5, лемма 4.32] можно считать, что a_0 индуцирует на x автоморфизм φ^2, и по лемме 1.1 $C_X(a) = C_X(a_0)$. Но это невозможно, так как $C_x(\varphi) \neq C_X(\varphi^2)$.

Во втором случае инволюция a_0 лежит в $SO_n(q)$, по [5, раздел 3D] $C_X(a_0)$ изоморфен подгруппе из $O(V^+_{a_0}/k) \times O(V^-_{a_0}/k)$ и содержит подгруппу $\Omega(V^+_{a_0}/k) \times \Omega(V^-_{a_0}/k)$. Можно считать, что φ_0 и b централизуют a_0. С другой стороны, по крайней мере одна из подгрупп $\Omega(V^+_{a_0}/k)$ или $\Omega(V^-_{a_0}/k)$ централизуется элементом a, что невозможно.

Лемма 5.3. *Пусть* $X \simeq \Omega_n(q)$, $n \geqslant 7$, n *и* q *нечетны. Тогда имеет место один из следующих случаев:*

(1) $q^2 - 1 \equiv 0(16)$, $G = X$, a_0 — *инволюция типа* 2 *из* $\Omega_n(q)$;

(2) $q^2 - 1 \equiv 8(16)$, $|G : X| = 2$, $G \in X^*$, a_0 — *инволюция типа* 2 *из* $\Omega_n(q)$.

Доказательство. По лемме 5.2 $G \in X^*$, и достаточно рассмотреть централизаторы инволюций в $SO_n(q)$. Пусть w — инволюция из $SO_n(q)$. Тогда $C_{SO_n(q)}(w)$ изоморфен подгруппе из $O(V^+_w/k) \times O(V^-_w/k)$, а $C_{\Omega_n(q)}(w)$ содержит подгруппу $\Omega(V^+_w/k) \times \Omega(V^-_w/k)$. Если $\dim V^-_m > 2$, то требуемой TI-подгруппы с инволюцией w не существует. Значит, w — инволюция типа 2.

Пусть $w \in \Omega_n(q)$. По [5, раздел 3D] это равносильно тому, что $D(V^-_w/k) \in (k^\#)^2$.

Если $q-1 \equiv 0(4)$, то по [5, раздел 3D] $SO_2(q) \simeq Z_{q-1}$ $\Omega_2(q) \simeq Z_{(q-1)/2}$. Значит, всегда существует такой элемент $a \in SO(V^-/k)$, что $a^2 = w$, и $\langle a \rangle \trianglelefteq C_{SO_n(q)}(w)$. Так как V_w^+ и V_w^-, то $\sigma(a) = \sigma_1(a)$, где σ — спинорная норма на $O_n(q)$, а σ_1 — спинорная норма на $O_2(q) = O(V_w^-/k)$. Значит, $a \in \Omega_n(q)$ тогда и только тогда, когда $a \in \Omega_2(q) = O(V_w^-/k)$, т. е. когда $q-1 \equiv 0(8)$.

Если $q+1 \equiv 0(4)$, то $SO_2(q) \simeq Z_{q+1}$, $\Omega_2(q) \simeq Z_{(q+1)/2}$ и, как и в случае $q-1 \equiv 0(4)$, $a \in \Omega_n(q)$ тогда и только тогда, когда $q+1 \equiv 0(8)$.

Пусть теперь $w \notin \Omega$, что равносильно $D(V_w^-/k) \notin (k^\#)^2$. По [5, раздел 3D] если $q-1 \equiv 0(4)$, то $O_2(q) \simeq D_{2(q+1)}$, а если $q+1 \equiv 0(4)$, то $O_2(q) \simeq D_{2(q-1)}$. Значит, в этом случае нет нужной TI-подгруппы, содержащей инволюцию w. Лемма доказана.

Лемма 5.4. *Пусть X — частное $\Omega_{2n}^+(q)$, $n \geqslant 4$. Тогда $G/Z(X)$ — подгруппа из частного $PGO_{2n}^+(q)$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда ввиду строения группы автоморфизмов X [5, лемма 4.33] для элемента a имеются следующие возможности:

1) $a = b\varphi$, где b индуцирует на X автоморфизм, соответствующий элементу из $GO_{2n}^+(q)$, а φ — полевой автоморфизм порядка 4,

2) $a = b\varphi_0$, где b индуцирует на X автоморфизм, соответствующий элементу из $CO_{2n}^+(q)$, а φ_0 — полевой автоморфизм порядка 2.

В первом случае ввиду [5, лемма 4.33] можно считать, что a_0 индуцирует на X автоморфизм φ^2, и по лемме 1.1 $C_X(a) = C_X(a_0)$. Но это невозможно, так как $C_X(\varphi) \neq C_X(\varphi_2)$.

Во втором случае инволюции a_0 соответствует инволюция w из $GO_n^+(q)$ и можно считать, что φ_0 и b централизуют w.

Если $C_{O_{2n}^+(q)}(a_0)$ изоморфен подгруппе из $O(V_{a_0}^+/k) \times O(V_{a_0}^-/k)$ и содержит подгруппу $\Omega(V_{a_0}^+/k) \times \Omega(V_{a_0}^-/k)$, то по крайней мере одна из подгрупп $\Omega(V_{a_0}^+/k)$ или $\Omega(V_{a_0}^-/k)$ централизуется элементом a, что невозможно.

Если же $C_{O_{2n}^+(q)}(a_0)$ изоморфен $GL_n(q)$, то подгруппа вида $SL_n(q)$ должна централизоваться элементом a, что невозможно ввиду того, что φ_0 индуцирует на ней полевой автоморфизм, а элемент b внутренне-диагонально-графовый.

Лемма 5.5. *Пусть X — частное $\Omega_{2n}^+(q)$, $n \geqslant 4$. Тогда имеет место один из случаев (3)–(12) теоремы 5.1.*

Доказательство. Ввиду леммы 5.4 достаточно рассмотреть централизаторы инволюций в частных группы $GO_{2n}^+(q)$. Для полуинволюции $w \in GO_{2n}^+(q)$ обозначим через C_w группу $C_{GO_{2n}^+(q)}(w)$, а через U_w — группу $\langle Z, w\rangle$. Пусть $N_w = N_{CO_n^+(q)}(U_w)$.

Предположим сначала, что элементу a_0 соответствует инволюция w типа m из $GO_{2n}^+(q)$.

Если $r_w = 1$, то [5, раздел 3D] $C_w = \{(w_1, w_2) \in GO(V_w^+/k) \times GO(V_w^-/k) \mid r_{w_1} = r_{w_2}\}$ и $D(V/k) = D(V_w^+/k)D(V_w^-/k)$. Если $m = n$, то существует элемент g, переставляющий V^+ и V^-, который централизует по модулю Z, и $N_w = C_w\langle g\rangle$. Если $m \neq n$, то $N_w = C_w$. Заметим, что если $m \neq 2$, то TI-подгруппы нет. Значит, $m = 2$.

Если n четно, то по [5, раздел 3D] $D(V/k) \in (k^\#)^2$. Как и в лемме 5.3, требуемая TI-подгруппа существует тогда и только тогда, когда $w \in \Omega_{2n}^+(q)$, и она попадает в X, если $q^2 - 1 \equiv 0(16)$.

Если n нечетно и $q-1 \equiv 0(4)$, то по [5, раздел 3D] $D(V/k) \in (k^\#)^2$, и нужная TI-подгруппа существует всегда, попадая в X при $q-1 \equiv 0(8)$. Эти ситуации описаны в (4) и (8).

Если же n нечетно и $q+1 \equiv 0(4)$, то $D(V/k) \notin (k^{\#})^2$, и требуемая TI-подгруппа A с инволюцией, соответствующей w, существует тогда и только тогда, когда $D(V_w^-/k) \in (k^{\#})^2$ и $w \in \Omega_{2n}^+(q)$. Заметим, что в этом случае $-I_V \notin \Omega_{2n}^+(q)$ и A всегда попадает в X, что соответствует (3).

Пусть теперь $w \notin O_{2n}^+(q)$. По лемме 4.33 и [5, раздел 3D] получим, что если $q+1 \equiv 0(4)$, то w индуцирует на $P\Omega_{2n}^+(q)$ автоморфизм, из которого не извлекается корень.

Пусть $q-1 \equiv 0(4)$. В этом случае $w \in Z * SO_{2n}^+(q)$, $V = V_w^+ \oplus V_w^-$ w типа n, V_w^+ и V_w^- — изотропные подпространства. По [5, раздел 3D] в V^+ можно выбрать базис $\{v_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$, а в V^- — базис $\{v_{j+n} \mid 1 \leqslant j \leqslant n\}$ так, что $(v_i, v_{j+m}) = \delta_{ij}$, $1 \leqslant i,j \leqslant n$. При этом $C_{O_{2n}^+(q)}(w \pmod Z)) \simeq GL(V^+/k)\langle g\rangle$, где g — инволюция, которая переставляет v_i и v_{n+i} и индуцирует на $C_{O_{2n}^+(q)}(w) = GL(V^+/k)$ автоморфизм графа. Ясно, что всегда найдется элемент a из $CO_{2n}^+(q)$, централизующий $C_{O_{2n}^+(q)}(w)$, квадрат которого совпадает с w. При этом a имеет вид $(I_{V^+}, \nu I_{V^-})$, где ν такой элемент поля k, что $\nu^2 = -1$.

Заметим, что по примеру 2 $g \notin \Omega_{2n}^+(q)$ тогда и только тогда, когда n нечетно. Рассмотрим этот случай. По [5, раздел 3D] $w \in Z * \Omega_{2n}^+(q)$ тогда и только тогда, когда $\nu^n \in (k^{\#})^2$. Так как n нечетно, то $w \in Z * \Omega_{2n}^+(q)$ тогда и только тогда, когда $q-1 \equiv 0(8)$, что дает (12). Если $q-1 \equiv 0(8)$ и $\rho^2 = \nu^{-1}$, то $\rho I_V a \in SO_{2n}^+(q)$ и $\sigma(\rho I_V a) = \rho^n (k^{\#})^2$. Так как n нечетно, то $\rho^n \in (k^{\#})^2$ тогда и только тогда, когда $q-1 \equiv 0(16)$, что дает (11) или (7).

Пусть теперь n четно. В этом случае $W \in Z * \Omega_{2n}^+(q)$. Как и выше, если $q-1 \equiv 0(8)$ и $\rho^2 = \nu^{-1}$, то $\rho I_V a \in SO_{2n}^+(q)$ и $\sigma(\rho I_V a) = \rho^n (k^{\#})^2 \in (k^{\#})^2$. Значит, при $q-1 \equiv 0(8)$ получается (6), а при $q-1 \equiv 4(8)$ возникает (10).

Предположим теперь, что инволюция a_0 из A соответствует полуинволюции w из $GO_{2n}^+(q)$ и $w^2 = \gamma I_V$, $\gamma \notin (k^{\#})^2$. Как показано в [5, раздел 3D], это влечет $r_w = \pm\gamma$.

Если $r_w = \gamma$, то $C_w = \{x \in GO(V/K) \mid r_x \in k\}$, где $K = k(\rho)$, $\rho^2 = \gamma$. Если бы требуемая TI-подгруппа существовала, то она находилась бы в $Z(GO(V/K))$. Но так как $r_w = \gamma$ и $\gamma \notin (k^{\#})^2$, то такой TI-подгруппы не существует.

Пусть $r_w = -\gamma$, $K = k(\rho)$, $\rho^2 = \gamma$. В этом случае $C_w \simeq GU_n(K)$. Предположим, что $q-1 \equiv 0(4)$. Так как $\gamma \notin (k^{\#})^2$, то $|\gamma|_2 = (q-1)_2$. Но $Z(GU_n(K)) \simeq Z_{q^2-1}$, и корень из элемента ρI_V в $Z(GU_n(K))$ не извлекается.

Пусть теперь $q+1 \equiv 0(4)$. По [5, раздел 3D] в пространстве V существует базис $\{v_i, v_i\rho \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$ такой, что $(v_i, V_j) = (v_i, v_j\rho) = (v_i\rho, v_j\rho) = 0$ при $i \neq j$, $1 \leqslant i,j \leqslant n$. Поскольку мы рассматриваем случай $\operatorname{ind}(V/k) = n$, то ввиду [5, раздел 3D] n четно и $C_w \simeq GU_n(K)$. Так как $Z(GU_n(K)) \simeq Z_{q^2-1}$ и $|\gamma|_2 = (q-1)_2$, то в $GO_{2n}^+(q)$ всегда существует элемент a из $Z(C_w)$, квадрат которого совпадает с w.

Выясним, при каких условиях a и w лежат в $Z*\Omega_{2n}^+(q)$. Так как $q+1 \equiv 0(4)$, то существует элемент $\nu \in k^{\#}$ такой, что $\nu^2 = -\gamma^{-1}$ и $w_1 = \nu I_V w \in SO_{2n}^+(q)$. Так как по примеру 3 $\sigma(w_1) = 2^n (k^{\#})^2$ и n четно, то $w \in Z * \Omega_{2n}^+(q)$. Если $a \in C_w$ и $a^2 = w$, то $a(v_i) = bv_i + cv_i\rho$, $a(v_i\rho) = \gamma c v_i + bv_i\rho$, где $1 \leqslant i \leqslant n$, а b и c являются решениями в k уравнений $b^2 + \gamma c^2 = 0$ и $2cb = 1$. Если $a \in Z(SO_{2n}^+(q))$, то существует элемент β такой, что $\beta^2(b^2 - c^2\gamma) = 1$ или, так как $b^2 + \gamma c^2 = 0$, $b^2 2b^2 = 1$. Значит, если $2 \notin (k^{\#})^2$, то $a \notin Z * \Omega_{2n}^+(q)$, и мы имеем случай (9). Пусть $2 \in (k^{\#})^2$ и $a_1 = \beta I_V a \in SO_{2n}^+(q)$. Так как $\sigma(a_1) = (1-\beta b)^n (k^{\#})^2 = (k^{\#})^2$, то $a_1 \in \Omega_{2n}^+(q)$, что дает (5).

Лемма 5.6. *Пусть X — частное $\Omega_{2n}^-(q)$ по центральной подгруппе, $n \geqslant 4$. Тогда $G/Z(X)$ — подгруппа из частного $PGO_{2n}^-(q)$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда ввиду строения группы автоморфизмов X [5, лемма 4.34] элемент a представляется в следующем виде:

$a = b\varphi$, где b индуцирует на X автоморфизм, соответствующий элементу из $GO_{2n}^-(q)$, а φ соответствует полевому автоморфизму порядка 4 поля $GF(q)$. Заметим также, что $-I_V \notin \Omega_{2n}^-(q)$ и $X = \Omega_{2n}^-(q)$

В этом случае a_0 имеет вид $b_0\varphi_0$, где $\varphi_0 = \varphi^2$, а b_0 — элемент из $GO_{2n}^-(q)$. По [5, лемма 4.34] элемент a_0 индуцирует на X тот же автоморфизм, что и некоторая полуинволюция w из $GO_{2n}^-(q)$.

Предположим сначала, что w имеет тип m, $m \neq 0$. Тогда $C_{O_{2n}^-(q)}(w)$ содержит подгруппу $O(V_{a_0}^+/k) \times O(V_{a_0}^-/k)$. По [5, раздел 3D] в $O(V_{a_0}^+/k) \times O(V_{a_0}^-/k)$ найдется такая инволюция t типа $2s$, что $t \in \Omega_{2n}^-(q)$ и $2s \geqslant 4$. Заметим, что $A \leqslant C_G(t)$. Можно считать, что t записана в стандартном базисе, φ_0 и b_0 централизуют t. При этом φ_0 индуцирует на подгруппе $X_1 = \Omega(V_t^-/k)$ полевой автоморфизм порядка 2, а b_0 — внутренне-диагональный. Так как $t \in \Omega_{2n}^-(q)$ и $q = 1 \equiv 0(4)$, то $X_1 \simeq \Omega_{2s}^+(q)$. Рассмотрим группу $G_1 = AX_1$, в которой A — TI-подгруппа, а $F^*(G_1) = X_1$. Если $s \geqslant 4$, то данная конструкция невозможна ввиду леммы 5.5. Если же $2 \leqslant s \leqslant 3$, то G_1 не существует ввиду теорем 2.1 и 4.1.

Пусть теперь w имеет тип 0 и $\{v_i, v_{i+n}\}$ — стандартный базис для w. Скалярное произведение на базисных векторах в этом случае определяется так же, как и в примере 3. Пусть t инвертирует векторы v_1, v_2, v_{i+1}, v_{i+2} и централизует остальные векторы стандартного базиса. Тогда $t \in C_X(w)$, тип t равен 4 и A централизует t. Противоречие получается, как и в случае, когда w ненулевого типа. Лемма доказана.

Лемма 5.7. *Пусть X — частное $\Omega_{2n}^-(q)$, $n \geqslant 4$, и G — подгруппа из частного $PGO_{2n}^-(q)$. Тогда имеет место один из случаев* (13)–(18) *теоремы* 5.1.

Доказательство. Ввиду леммы 5.5 достаточно рассмотреть централизаторы инволюций в частных группах $GO_{2n}^-(q)$. Для полуинволюции $w \in GO_{2n}^-(q)$ обозначим через C_w группу $C_{GO_{2n}^-(q)}(w)$, а через U_w — группу $\langle Z, w\rangle$. Пусть $N_w = N_{GO_n^-(q)}(U_w)$.

Предположим сначала, что элементу a_0 соответствует инволюция w типа m из $GO_{2n}^-(q)$.

Если $r_w = 1$, то по [5, раздел 3D] $C_w = \{(w_1, w_2) \in GO(V_w^+/k) \times GO(V_w^-/k) \mid r_{w_1} = r_{w_2}\}$ и $D(V/k) = D(V_w^+/k)D(V_w^-/k)$. Если $m = n$, то существует элемент g, переставляющий V^+ и V^-, который централизует w по модулю Z, и $N_w = C_w\langle g\rangle$. Если $m \neq n$, то $N_w = C_w$. Заметим, что если $m \neq 2$, то нужной TI-подгруппы нет. Значит, $m = 2$.

Если n четно, то по [5, раздел 3D] $D(V/k) \notin (k^\#)^2$, а $w \in Z * \Omega_{2n}^-(q)$ тогда и только тогда, когда $D(V^-/k) \in (k^\#)$. Как и в предыдущей лемме, требуемая TI-подгруппа существует, только если $w \in Z * \Omega_{2n}^-(q)$. Так как $D(V/k) \notin (k^\#)^2$ и $-I_V\Omega_{2n}^-(q)$, то эта TI-подгруппа всегда попадает в X, что дает (13).

Если n нечетно и $q - 1 \equiv 0(4)$, то $D(V/k) \notin (k^\#)^2$, и все рассуждения для из (14) проводятся так же, как и в случае четного n.

Если n нечетно и $q + 1 \equiv 0(4)$, то $D(V/k) \in (k^\#)^2$. Заметим, что нужная TI-подгруппа существует, если $D(V_w^-/k) \in (k^\#)^2$ и $w \in Z * \Omega_{2n}^-(q)$. Так как в этом случае по [5, раздел 3D] $\operatorname{ind}(V_w^-/k) = 0$, и $|\Omega_2^-(q)| = (q+1)/2$, то $G = X$ тогда и только тогда, когда $q + 1 \equiv 0(8)$, что приводит к (14) и (16).

Предположим теперь, что инволюция a_0 соответствует полуинволюции w из $GO_{2n}^-(q)$ и $w^2 = \gamma I_V$, $\gamma \notin (k^\#)^2$. Как и в лемме 5.6, требуемая TI-подгруппа существует тогда и только тогда, когда $r_w = -\gamma$ и $q + 1 \equiv 0(4)$.

Пусть ρ, $K = k(\rho)$ и базис $\{v_i, v_i\rho \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$ такие же, как и в лемме 5.5. В рассматриваемом случае $\mathrm{ind}(V/k) = n - 1$ и ввиду [5, раздел 3D] n нечетно. Так как $C_w \simeq GU_n(K)$, $Z(GU_n(K)) \simeq Z_{q^2-1}$, то в $Z(C_w)$ всегда существует элемент a такой, что $a^2 = w$. Пусть элементы w_1 и a_1 такие же, как и в лемме 5.5. Так как $\sigma(w_1) = 2^n(k^{\#})^2$ и n нечетно, то $w \notin Z * \Omega_{2n}^-(q)$ тогда и только тогда, когда $2 \notin (k^{\#})^2$, что дает (18). Если $2 \in (k^{\#})^2$ и $\alpha^2 = 2$, то по примеру 3 $\sigma(a_1) = (1+\alpha^{-1})^n(k^{\#})^2$. Так как n нечетно, то $a \in Z * \Omega_{2n}^-(q)$ тогда и только тогда, когда $2+\alpha \in (k^{\#})^2$, что дает (15) или (17).

Доказательство леммы 5.7 завершает доказательство теоремы 5.1.

§ 6. Накрывающие для ортогональных групп

Теорема 6.1. *Если существует группа G, представимая в виде XA, где X — накрывающая группа для $\Omega_m(q)$, $X \neq \Omega_m(q)$, $m \geqslant 6$, то $|G : X| \geqslant 2$, $m = 2n$, n нечетно и выполнено одно из следующих условий:*

(1) $X = \mathrm{Spin}_{2n}^+(q)$, $q - 1 \equiv 4(8)$, $|G : X| = 2$, инволюции a_0 соответствует инволюция типа 2 из $\Omega_{2n}^+(q)$;

(2) $X = \mathrm{Spin}_{2n}^-(q)$, $q + 1 \equiv 4(8)$, $|G : X| = 2$, инволюции a_0 соответствует инволюция типа 2 из $\Omega_{2n}^-(q)$;

(3) $X = \mathrm{Spin}_{2n}^+(q)$, $q - 1 \equiv 4(8)$, $|G : X| = 4$, инволюция a_0 индуцирует на $X/Z(X)$ автоморфизм, соответствующий полуинволюции типа n из $GO_{2n}^+(q) - O_{2n}^+(q)$;

(4) $X = \mathrm{Spin}_{2n}^-(q)$, $q + 1 \equiv 0(4)$, $|G : X| = 4$, инволюция a_0 индуцирует на $X/Z(X)$ автоморфизм, соответствующий полуинволюции типа 0 из $GO_{2n}^-(q)$.

Докажем предварительно ряд лемм.

Лемма 6.2. *Пусть $\overline{Y} \simeq \Omega_n^{\pm}(q)$, $n \geqslant 6$, q нечетно и полная накрывающая группа для $\overline{Y}$ не содержит в центре элементов порядка 4. Пусть Y — полная накрывающая группа для $\overline{Y}$, если $\overline{Y} \neq \Omega_7(3)$. Если же $\overline{Y} = \Omega_7(3)$, то $Y = \mathrm{Spin}_7(3)$. Пусть $\overline{w}$ — инволюция типа 2 из $\overline{Y}$ и w — элемент из полного прообраза $\overline{w}$ в Y при естественном гомоморфизме. Тогда $w^2 \neq 1$.*

Доказательство. Применим индукцию по n.

Пусть $\overline{Y} = \Omega_7(q)$, $Y = \mathrm{Spin}_7(q)$. Из строения централизаторов инволюций в ортогональных группах [5, раздел 3D] и из [5, лемма 4.10] следует, что в Y существует единственный класс сопряженных нецентральных инволюций, который соответствует классу сопряженных инволюций типа 4 в $\Omega_7(q)$. Значит, инволюции $\overline{w}$ в Y соответствует элемент порядка 4.

Пусть $\overline{Y} = \Omega_8^+(q)$, $Y = \mathrm{Spin}_8^+(q)$. Из [5, раздел 3D, лемма 4.13] следует, что в Y есть единственный класс сопряженных нецентральных инволюций, который соответствует классу сопряженных инволюций типа 4 в $\Omega_8^+(q)$. Значит, инволюции $\overline{w}$ в Y соответствует элемент порядка 4.

Аналогично разбирается случай, когда $\overline{Y} = \Omega_8^-(q)$, $Y = \mathrm{Spin}_8^-(q)$. Требуемое утверждение вытекает из [5, лемма 4.14].

Пусть $\overline{Y} = \Omega_6^+(q)$. Тогда по [5, раздел 3D] $\overline{Y} \simeq SL_4(q)/B$, где B — центральная подгруппа из $SL_4(q)$ порядка 2. В этом случае $Y \simeq SL_4(q)$, и так как $Z(Y)$ не содержит элементов порядка 4, то $q + 1 \equiv 0(4)$. По теореме 5.1(3) в $\overline{Y}$ имеется циклическая TI-подгруппа порядка 4 с инволюцией типа 2. По теореме 2.1 этой инволюции соответствует элемент порядка 4 в $Y \simeq SL_4(q)$, что и требовалось.

Случай $\overline{Y} = \Omega_6^-(q)$ разбирается аналогично с учетом того, что $\overline{Y} \simeq SU_4(q)/B$, где B — центральная подгруппа из $SU_4(q)$ порядка 2, $q-1 \equiv 0(4)$ и $Y \simeq SU_4(q)$ [5, раздел 3D].

Пусть $\overline{Y} = \Omega^+_{2m}(q)$, $m \geqslant 6$ и m четно. Из [5, лемма 4.15, пп. (b) и (c)] следует, что инволюции t типа 4 из $\overline{Y}$ соответствует инволюция τ из Y. При этом $C_Y(\tau)$ содержит компоненту $\mathrm{Spin}^+_{2m-4}(q)$, которой в $C_{\overline{Y}}(t)$ соответствует компонента $\Omega^+_{2m-4}(q)$. Ввиду строения централизаторов инволюций в ортогональных группах и критерия сопряженности [5, раздел 3D] можно считать, что $\overline{w}$ централизует t и содержится в компоненте $\Omega^+_{2m-4}(q)$. Но тогда w содержится в $\mathrm{Spin}^+_{2m-4}(q)$ и является элементом порядка 4 по предположению индукции.

Предположение индукции, леммы 4.16–4.18 и раздел 3D из [5] позволяют утверждать, что инволюции типа 2 из $\Omega^-_{2m}(q)$, $m \geqslant 6$ и m четно, из $\Omega^+_{2m}(q)$, $m \geqslant 5$, $q+1 \equiv 0(4)$, m нечетно, и из $\Omega^-_{2m}(q)$, $m \geqslant 5$, $q-1 \equiv 0(4)$, m нечетно, соответствует элемент порядка 4 из универсальной накрывающей группы. Доказательство проводится аналогично случаю $\overline{Y} = \Omega^+_{2m}(q)$, $m \geqslant 6$ и m четно.

Пусть теперь $\overline{Y} = \Omega_{2m+1}(q)$, $m \geqslant 4$. Из п. (e) леммы 4.12 [5] и из строения централизаторов инволюций в $\Omega_{2m+1}(q)$ [5] следует, что если m четно, то инволюции t типа $2m$ из $\overline{Y}$ соответствует инволюция j из $Y = \mathrm{Spin}_{2m+1}(q)$ такая, что $C_Y(j)$ содержит компоненту $J \simeq \mathrm{Spin}^+_{2m}(q)$. Эта компонента является полным прообразом компоненты $K \simeq \Omega^+_{2m}(q)$ из $C_X(t)$. По [5, раздел 3D] можно считать, что $\overline{w} \in K$, а по предположению индукции w — элемент порядка 4. Если же m нечетно, то аналогичные рассуждения можно провести для инволюции t типа $2m-2$, прообраз которой содержит в своем централизаторе компоненту $J \simeq \mathrm{Spin}^+_{2m-2}(q)$. Лемма доказана.

Лемма 6.3. *Пусть $Y = \mathrm{Spin}^+_{2n}(q)$, $q-1 \equiv 0(8)$, n нечетно и $n \geqslant 3$. Обозначим через $\overline{Y}$ группу $Y/\langle z\rangle$, где z — инволюция из $Z(Y)$. Если $\overline{B} = \langle \bar{b}\rangle$ — циклическая TI-подгруппа порядка 4 из $\overline{Y}$ с инволюцией $\bar{b}_0$ типа 2, то полный прообраз $\bar{b}$ в Y не содержит элементов порядка 4.*

Доказательство. Применим индукцию по n.

Пусть $n = 3$. Тогда $\Omega^+_6(q) \simeq SL_4(q)/C$, где $|C| = 2$ и $\mathrm{Spin}^+_6(q) \simeq SL_4(q)$. В $SL_4(q)$ есть два класса сопряженных инволюций с представителями t_1 и t_2. При этом элементу t_1 соответствует инволюция τ_1 типа 2 из $SL_4(q)$, а элементу t_2 — полуинволюция $\rho I_V \tau_1$. По теореме 5.1 в $\Omega^+_6(q)$ есть циклическая TI-подгруппа $\overline{B}$ порядка 4 с инволюцией типа 2. Поэтому элемент t_2 соответствует инволюции типа 2, а элемент t_1 — инволюции типа 4. Из вида t_2 следует, что любой элемент b из полного прообраза $\bar{b}$ представим как $(\varepsilon_1 x I_{V^+_{\tau_1}}, \varepsilon_2 \rho x I_{V^-_{\tau_1}})$, где x — первообразный корень степени 8 из 1 в поле $GF(q)$, а ε_1, $\varepsilon_2 = \pm 1$. Ясно, что $|b| = 8$.

Пусть теперь $n > 3$. По [5, лемма 4.17] получим, что в $\mathrm{Spin}^+_{2n}(q)$ есть класс сопряженных инволюций с представителем τ такой, что $\bar{\tau}$ — инволюция типа 4 в $\overline{Y}$ и $C_Y(\tau)$ содержит компоненту $J = \mathrm{Spin}^+_{2n-4}(q)$, которой в $C_{\overline{Y}}(\tau)$ соответствует компонента $\overline{J} = \Omega^+_{2n-4}(q)$. Инволюции $\bar{b}_0$ и $\bar{\tau}$ можно выбрать так, что будет $b_0 \in \overline{J} \leqslant C_{\overline{Y}}(\bar{\tau})$. Так как $\overline{B} \leqslant \overline{J}$, то полный прообраз элемента $\bar{b}$ содержится в J и по предположению индукции состоит из элементов порядка 8.

Лемма 6.4. *Пусть $Y = \mathrm{Spin}^-_{2n}(q)$ $q+1 \equiv 0(8)$, n нечетно и $n \geqslant 3$. Обозначим через $\overline{Y}$ группу $Y/\langle z\rangle$, где z — инволюция из $Z(Y)$. Если $\overline{B} = \langle \bar{b}\rangle$ — циклическая TI-подгруппа порядка 4 из $\overline{Y}$ с инволюцией $\bar{b}_0$ типа 2, то полный прообраз $\bar{b}$ в Y не содержит элементов порядка 4.*

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 6.3 с учетом леммы 4.18 из [5] и того, что $\Omega^-_6(q) \simeq SU_4(q)/C$, где $|C| = 2$.

Лемма 6.5. *Пусть X — накрывающая группа для $\Omega_n(q)$, $n \geqslant 7$, n и q нечетны. Тогда $X = \Omega_n(q)$.*

Доказательство. Предположим противное и рассмотрим сначала случай, когда $X = \mathrm{Spin}_n(q)$. Пусть $Z = Z(X)$ и $\overline{G} = G/Z$. По лемме 1.2 $\overline{A}$ либо является TI-подгруппой в $\overline{G}$, либо нормальна в подгруппе индекса 2 группы $C_{\overline{G}}(\bar{a}_0)$.

Если $\overline{A}$ — TI-подгруппа в $\overline{G}$, то $\bar{a}_0$ соответствует инволюции типа 2 из $\Omega_n(q)$. Но это невозможно по лемме 6.2.

Допустим, что выполняется вторая ситуация. Так как централизаторы инволюций в любой группе $\overline{X}_1$ из $\overline{X}^*$ не содержат конструкции, описанной в лемме 1.2, то $\overline{G} \notin \overline{X}^*$. Как и в лемме 5.2, для элемента $\bar{a}$ имеются следующие возможности:

1) $\bar{a} = b\varphi$, где b индуцирует на $\overline{X}$ внутренне-диагональный автоморфизм, а φ — полевой автоморфизм порядка 4;

2) $\bar{a} = b\varphi_0$, где b индуцирует на $\overline{X}$ внутренне-диагональный автоморфизм, а φ_0 — полевой автоморфизм порядка 2.

В первом случае ввиду [5, лемма 4.32] можно считать, что $\bar{a}_0$ индуцирует на $\overline{X}$ автоморфизм φ^2 и $\bar{a}$ централизует $O^2(C_{\overline{X}}(\bar{a}_0))$. Но это невозможно, так как φ не централизует $O^2(C_{\overline{X}}(\varphi^2))$.

Во втором случае инволюция $\bar{a}_0$ лежит в $SO_n(q)$ и по [5, раздел 3D] $C_{O_n(q)}(\bar{a}_0)$ изоморфен подгруппе из $O(V^+_{\bar{a}_0}/k) \times (V^-_{\bar{a}_0}/k)$ и содержит подгруппу $\Omega(V^+_{\bar{a}_0}/k) \times \Omega(V^-_{\bar{a}_0}/k)$. Можно считать, что φ_0 и b централизуют a_0. С другой стороны, по крайней мере одна из подгрупп $\Omega(V^+_{\bar{a}_0}/k)$ или $\Omega(V^-_{\bar{a}_0}/k)$ централизуется элементом $\bar{a}$, что невозможно.

Так как $X \neq \mathrm{Spin}_n(q)$, то X — накрывающая группа для $\Omega_7(3)$ и $Z(X) \simeq Z_3$. Пусть $\overline{G} = G/Z(X)$. По лемме 1.2 $\overline{A}$ — TI-подгруппа в $\overline{G}$. Значит, $\bar{a}_0$ соответствует инволюции типа 2 из $\overline{X}$. Но это невозможно ввиду того, что по [4] элемент инвертирует $Z(X)$, а $a_0 \in X$. Лемма доказана.

Лемма 6.6. *Пусть $X = \mathrm{Spin}^+_{2n}(q)$, $n \geqslant 4$, q нечетно. Если z — инволюция из $Z(X)$ такая, что $\langle z\rangle \trianglelefteq G$, а $\overline{G} = G/\langle z\rangle$, то $\overline{A}$ — TI-подгруппа в $\overline{G}$.*

Доказательство. Предположим противное. Заметим, что $\overline{X} \simeq \Omega^+_{2n}(q)$. Пусть τ — автоморфизм графа группы $\overline{X}$. Так как централизаторы инволюций в группе $\overline{X}_1\langle\tau\rangle$, где $\overline{X}_1 \in \overline{X}^*$, не содержат конструкции, описанной в лемме 1.2, то $\overline{G} \notin \overline{X}^*\langle\tau\rangle$.

Ввиду строения группы автоморфизмов $\overline{X}$ [5, лемма 4.33] для элемента $\bar{a}$ имеются следующие возможности:

1) $\bar{a} = b\varphi$, где b индуцирует на $\overline{X}$ автоморфизм, соответствующий элементу из $CO^+_{2n}(q)$, а φ — полевой автоморфизм порядка 4,

2) $\bar{a} = b\varphi_0$, где b индуцирует на $\overline{X}$ автоморфизм, соответствующий элементу из $CO^+_{2n}(q)$, а φ_0 — полевой автоморфизм порядка 2.

В первом случае ввиду [5, лемма 4.33] можно считать, что $\bar{a}_0$ индуцирует на $\overline{X}$ автоморфизм φ^2, так как $\bar{a}$ централизует $O^2(C_{\overline{X}}(\bar{a}_0))$. Но это невозможно, так как φ не централизует $O^2(C_{\overline{X}}(\varphi^2))$.

Во втором случае инволюции $\bar{a}_0$ соответствует инволюция w из $CO^+_{2n}(q)$ и можно считать, что φ_0 и b централизуют w.

Если $C_{O^+_{2n}(q)}(w)$ изоморфен подгруппе из $O(V^+_w/k) \times O(V^-_w/k)$ и содержит подгруппу $\Omega(V^+_w/k) \times \Omega(V^-_w/k)$, то по крайней мере одна из подгрупп $\Omega(V^+_w/k)$ или $\Omega(V^-_w/k)$ централизуется элементом $\bar{a}$, что невозможно.

Если же $C_{O^+_{2n}(q)}(w)$ изоморфен $GL_n(q)$, то подгруппа вида $SL_n(q)$ должна централизоваться элементом $\bar{a}$, что невозможно ввиду того, что φ_0 индуцирует на ней полевой автоморфизм, а элемент b внутренне-диагонально-графовый. Лемма доказана.

Лемма 6.7. *Пусть* $X = \mathrm{Spin}_{2n}^-(q)$, $n \geqslant 4$, q *нечетно. Если* z *— инволюция из* $Z(X)$ *такая, что* $\langle z \rangle \trianglelefteq G$, *и* $\overline{G} = G/\langle z \rangle$, *то* $\overline{A}$ *—* TI*-подгруппа в* $\overline{G}$.

Доказательство. Предположим противное. Заметим, что $\overline{X} \simeq \Omega_{2n}^-(q)$. Для $\overline{X}_1 \in \overline{X}^*$ пусть τ — внешний автоморфизм группы $\overline{X}_1$ порядка 2. Так как централизаторы инволюций в группе $\overline{X}_1\langle\tau\rangle$ не содержат конструкции, описанной в лемме 1.2, то $\overline{G} \notin \overline{X}^*\langle\tau\rangle$. Но этот случай невозможен по тем же причинам, что и в лемме 5.6, если учесть, что $\bar{a}$ централизует $O^2(C_{\overline{X}}(\bar{a}_0))$.

Доказательство леммы 6.7 с учетом теоремы 5.1 завершает доказательство теоремы 6.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Артин Э.* Геометрическая алгебра. М.: Наука, 1969.
2. *Лидл Р., Нидеррайтер Г.* Конечные поля. М.: Мир, 1988.
3. *Aschbacher M.* Finite group theory. Cambridge Univ. Press, 1986.
4. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.
5. *Harris M. E.* Finite groups containing an intrinsic 2-component of Chavalley type over field of odd order // Trans. Amer. Math. Soc. 1982. V. 272, N 1. P. 1–65.

г. Челябинск *Статья поступила 1 октября 1994 г.*