УДК 519.44

О ТОЧНО ДВАЖДЫ ТРАНЗИТИВНЫХ ГРУППАХ*)

В. Д. Мазуров

Точно 2-транзитивная группа — это 2-транзитивная группа G подстановок (т. е. взаимно однозначных отображений на себя) некоторого множества Ω, в которой только тождественная подстановка оставляет неподвижными два различных символа из Ω. Иными словами, для любых двух пар (α,β) и (γ,δ) элементов из Ω таких, что $\alpha\neq\beta$ и $\gamma\neq\delta$, в G существует ровно один элемент g, для которого $\alpha g=\gamma$ и $\beta g=\delta$. Интерес к таким группам привлек Цассенхауз [1, 2], который связал с каждым почти полем (универсальной алгеброй с двумя бинарными операциями — сложением и умножением, отличающейся от тела отсутствием одного из законов дистрибутивности) точно 2-транзитивную группу с регулярной абелевой нормальной подгруппой и описал строение конечных почти полей одновременно с характеризацией конечных точно 2-транзитивных групп.

Старая гипотеза о том, что в каждой точно 2-транзитивной группе есть регулярная абелева нормальная подгруппа, остается недоказанной. Она эквивалентна утверждению, что каждая точно 2-транзитивная группа подобна аффинной группе некоторого почти поля F, т. е. группе всех подстановок $\pi(\alpha,b)$ множества F, для которых

$$x\pi(a,b)=xa+b(x,a,b\in F).$$

С произвольной точно 2-транзитивной группой G можно связать алгебраическую систему с операциями сложения и умножения — так называемую почти область (Fastbereich), на которой группа G действует как аффинная группа, и отмеченную гипотезу переформулировать так: каждая почти область является почти полем.

На протяжении многих лет исследование точно 2-транзитивных групп велось в рамках теории почти областей с использованием техники вычислений в этих алгебраических системах (см. монографию [3]). Например, Керби и Вефельшайд [4] с помощью таких вычислений показали, что почти область с мультипликативной группой, конечной над центром, является почти полем. В переводе на язык теории подстановок это означает, что в точно 2-транзитивной группе со стабилизатором точки, конечным над центром, есть нормальная абелева регулярная подгруппа.

Цель настоящей работы — показать, что изучение точно 2-транзитивных групп не менее плодотворно можно вести в рамках теории групп, при этом многие известные результаты о таких группах, полученные с помощью вычислений в почти областях, могут быть доказаны более просто и естественно. В частности, мы дадим простое доказательство того, что гипотеза о существовании регулярной нормальной подгруппы верна для точно 2-транзитивных групп со стабилизатором точки, не содержащим бесконечных классов сопряженных элементов. Теоретико-групповое доказательство этого факта было получено в дипломной работе С. Л. Тотьмянина [5], но его рассуждения, по сути, являются переводом на групповой язык доказательства отмеченного выше результата Керби и Вефельшайда.

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96–01–01893).

Пусть G — точно 2-транзитивная группа. Хорошо известно, что G содержит ровно один класс сопряженных инволюций (элементов порядка 2), и изучение группы G зависит от того, фиксирует инволюция некоторую точку или нет. Если стабилизатор точки содержит инволюцию и произведение некоторых двух инволюций имеет бесконечный порядок, то мы покажем, что в стабилизаторе точки содержится подгруппа, изоморфная мультипликативной группе поля рациональных чисел. Более того, в этом случае в группе G есть подгруппа, изоморфная аффинной группе поля рациональных чисел.

Предварительные сведения

На протяжении всей работы через Ω будем обозначать множество, а через G — такую дважды транзитивную группу подстановок множества Ω, что пересечение $G_{\alpha\beta}$ стабилизаторов G_α и G_β двух различных точек α и β из Ω тривиально. Выберем в Ω две различные точки и обозначим их через 0 и 1.

Лемма 1. *Сопоставление $g \to 1g$ является взаимно однозначным отображением множества G_0 на $\Omega^\# = \Omega \setminus \{1\}$. Если отождествить с помощью этого сопоставления G_0 и $\Omega^\#$, то действие G_0 на $\Omega^\#$ совпадет с умножением справа в группе G_0.*

Доказательство сразу вытекает из условия точной 2-транзитивности группы G, поскольку для любого $\beta \neq 0$ из Ω в G_0 найдется единственный элемент, переводящий 1 в β.

В дальнейшем будем считать, что $\Omega = G_0 \cup \{0\}$.

Лемма 2. *В группе G для любых двух различных точек a и b существует ровно одна инволюция, переводящая a в b. Все инволюции группы G сопряжены. Если в стабилизаторе точки есть инволюция, то она единственна и, следовательно, лежит в центре стабилизатора.*

Доказательство. Если a и b — различные точки из Ω, то по условию в G есть элемент t, переводящий a в b, а b в a. Тогда элемент t^2 оставляет a и b на месте и, следовательно, равен 1. Если u — инволюция, переводящая a в b, то u переводит b в a и, следовательно, равна t. Пусть $s = (g,a)\cdots$ и $t = (d,b)\cdots$ — инволюции из G. Тогда в G есть элемент g, переводящий g в d, а a в b. Элемент $s^g = g^{-1}sg$ переводит d в b, а b в d, поэтому $s^g = t$. Пусть $s = (1,a)\cdots$ и $t = (1,b)\cdots$ — инволюции из стабилизатора G_0 точки 0. Тогда $a \neq 1 \neq b$ и в G есть элемент g, переводящий 1 в 1, а a в b. Элемент s^g переводит 1 в b, а b в 1, поэтому $s^g = t$. Поскольку 0 — единственная неподвижная точка как для s, так и для t, то $0g = 0$ и $g = 1$. Лемма доказана.

Обозначим для $a \in \Omega$ через t_a единственную инволюцию из G, которая переводит 0 в a. Если в стабилизаторе G_0 есть инволюция t, то положим $n_a = tt_a$. В противном случае положим $n_a = t_a$. Заметим, что в любом случае n_a переводит 0 в a.

Лемма 3. *Если $a \in G_0$, то $n_a = n_1^a$. Если $\alpha n_a = \alpha n_b$ для некоторого α из Ω, то $a = b$. В частности, при $a \neq 0$ $\alpha n_a \neq \alpha$ для любого α из Ω.*

Доказательство очевидно ввиду леммы 2.

В частности, порядок любого элемента n_a для $a \in G_0$ совпадает с порядком n_1. Этот порядок будем называть характеристикой группы G, если он конечен; в противном случае будем считать, что характеристика группы равна нулю. Обозначим через N множество всех n_a для $a \in \Omega$. Кроме того, определим отображения $r : \Omega \to \Omega$ и $l : \Omega \to \Omega$ равенствами:

$$r(0) = 1, \quad r(x) = (xn_1)x^{-1} \quad \text{для} \quad x \in G_0,$$
$$l(0) = 1, \quad l(x) = x^{-1}(xn_1) \quad \text{для} \quad x \in G_0.$$

Здесь мы считаем, что $0e = e0$ для $e \in G_0$.

Лемма 4. *Любой элемент g из G однозначно представим в виде $g = bn_a$, где $a \in \Omega$, а $b \in G_0$. Любая целая степень элемента n_a принадлежит N и, в частности, характеристика группы G — простое число или нуль. Отображение r — подстановка на множестве Ω, а l взаимно однозначно.*

Доказательство. Пусть элемент g переводит 0 в a. Тогда $gn_a^{-1} \in G_0$. Если $bn_a = cn_d$, где b и c — элементы из G_0, то левый элемент равенства переводит 0 в d, а правый — в a, поэтому $n_a = n_b$.

Если характеристика G равна двум, то любая степень n_a равна n_a или $n_0 = 1$, поэтому в доказательстве второго утверждения леммы можно считать, что в G_0 есть инволюция. В этом случае $n_a^{-1} = t_a t = t \cdot tt_a t = tt_{at} = n_{at}$, поскольку инволюция $tt_a t$ переводит 0 в at и, значит, совпадает с t_{at} по лемме 2. Пусть теперь m — натуральное число. Тогда в зависимости от четности или нечетности числа m элемент n_a^m равен $t(t_a tt_a \cdots t_a)t(t_a tt_a \cdots t_a)$ или $(t(t_a tt_a \cdots t)t_a(tt_a t \cdots t_a)$, где в скобках стоит произведение $m-1$ инволюций. Поэтому элемент n_a^m равен произведению t на некоторую инволюцию и, значит, принадлежит N. Если m — простой делитель порядка n_a и $n_a^m \neq 1$, то n_a^m и n_a сопряжены по лемме 3, что невозможно. Поэтому характеристика G не может быть составным числом.

Покажем, что r — подстановка. Если характеристика группы равна 2, то для любого элемента $s \neq 1$ из G_0 в N существует неединичный элемент n, переставляющий s и 1. Если же характеристика отлична от 2, то для любого элемента s из G_0, отличного от 1, в G есть инволюция u, переводящая t в s. Подстановка $n = tu$ — неединичный элемент из N, переводящий 1 в s. В любом случае n сопряжен некоторым элементом x из G_0 с n_1, и, значит, n_1 переводит x в xs, т. е. $r(x) = s$. Если $r(x) = r(y)$ и $x \neq y$, то $x \neq 0 \neq y$ и n_1 переводит x в sx, а y в sy, где $s = r(x)$. Но тогда n_x^{-1} и n_y^{-1} переводят 1 в s, что противоречит лемме 3. Если $l(x) = l(y)$ для $x \neq y$, то снова $x \neq 0 \neq y$ и n_1 переводит x в xs, а y в ys, где $s = l(x)$. Но тогда $n_1 s$ оставляет x и y неподвижными, и, значит, $n_1 = s^{-1}$ лежит в стабилизаторе точки, что противоречит лемме 3. Лемма доказана.

Предложение 1. *Если G — точно 2-транзитивная группа, то следующие утверждения эквивалентны.*

1. *Группа G обладает регулярной нормальной подгруппой.*
2. *Множество N, определенное перед леммой 4, — подгруппа.*
3. *Группа G обладает единственной регулярной нормальной подгруппой, и эта подгруппа абелева.*
4. *Произведение любых трех инволюций из G — инволюция.*
5. *Множество $I = \{ij \mid i, j$ — инволюции группы $G\}$ — подгруппа.*

Доказательство. Предположим, что в G есть регулярная нормальная подгруппа R. Тогда, очевидно, $G = G_0 R$, $G_0 \cap R = 1$. Предположим вначале, что характеристика группы равна 2. По лемме 2 в G_0 нет инволюций и, следовательно, все инволюции лежат в R. Поэтому N лежит в R. Поскольку N — транзитивное множество, имеем $N = R$. Пусть характеристика отлична от 2. Тогда по лемме 2 $\{t^r \mid r \in R\}$ — множество всех инволюций из G. Теперь элементы n_a по определению являются коммутаторами элемента t с элементами из R и, значит, лежат в R. Отсюда, как и выше, получаем $N = R$.

Пусть N — подгруппа. Тогда подгруппа G_0 нормализует N, и поскольку $G = G_0 N$, то N — нормальная подгруппа в G. Очевидно, в этом случае N — регулярная подгруппа. Если характеристика равна 2, то $n^2 = 1$ для любого n из N. Если же характеристика отлична от 2, то $tn_a t = tt t_a t = n_a^{-1}$. И в том и в другом случае N коммутативна и является единственной регулярной нормальной подгруппой.

Пусть R — абелева регулярная нормальная подгруппа группы G. По первому абзацу доказательства $R = N$. Если характеристика группы G равна 2, то произведение трех инволюций отлично от 1, лежит в N и, следовательно, является инволюцией. Если же характеристика G отлична от 2, то произведение любых трех инволюций сопряжено с $s = t_u t t_v$ для некоторых u и v, поэтому элемент $ts = n_u n_v$ лежит в N и равен $n_x = tt_x$ для некоторого x из Ω. Поэтому $s = t_x$ — инволюция.

Пусть произведение любых трех инволюций группы G — инволюция. Тогда произведение любых четырех инволюций равно произведению двух, поэтому множество I замкнуто относительно умножения. Поскольку обратный элемент к произведению двух инволюций тоже произведение двух инволюций, то I — подгруппа.

Пусть I — подгруппа. Ясно, что I — транзитивная нормальная подгруппа и, в частности, содержит более одного элемента. Если какой-либо неединичный элемент x из I оставляет неподвижной некоторую точку, то и каждая из инволюций, произведением которых является x, оставляет эту точку неподвижной. По лемме 2 эти инволюции совпадают, т. е. $x = 1$. Полученное противоречие показывает, что I — регулярная нормальная подгруппа. Предложение доказано.

Следует отметить, что часть утверждений предложения 1 была доказана раньше с помощью вычислений в почти областях (см. [3]).

Основной результат

Теорема 1. *Точно 2-транзитивная группа G обладает регулярной абелевой нормальной подгруппой, если выполнено любое из следующих условий.*

1. *Стабилизатор точки в G — группа с конечными классами сопряженных элементов.*
2. *Каждые три инволюции группы G порождают конечную подгруппу.*
3. *Характеристика группы G равна 3.*

Доказательство. Пусть выполнено условие 1. Покажем, что отображение l, определенное перед леммой 4, является подстановкой множества Ω. Действительно, по определению для $x \neq 0$ $l(x) = x^{-1}r(x)x$. Если C — какой-либо класс сопряженных элементов группы $G_0 = \Omega \setminus \{0\}$, то по лемме 4 $C = \{r(x_j) \mid j \in J\}$ для некоторого множества индексов J и, значит, $\{l(x_j) \mid j \in J\}$ содержится в C. Поскольку l взаимно однозначно и множество C конечно, то $\{l(x_j) \mid j \in J\} = C$. Таким образом, каждый неединичный элемент из G_0 равен $l(u)$ для некоторого u из G_0. Теперь доказательство можно получить, как в [6]. Именно, покажем, что N — подгруппа. Предположим противное. Пусть произведение элементов x и y из N не принадлежит N. По лемме 3 $xy = zc$, где c — неединичный элемент из стабилизатора точки 0, а $z \in N$. Если z — неединичный элемент, то, так как по лемме 3 G_0 при сопряжении действует транзитивно на неединичных элементах N, не в ущерб общности можно считать, что $z = n_1$. Если теперь $c^{-1} = l(u)$, то xy оставляет точку u неподвижной. Таким образом, в любом случае xy лежит в стабилизаторе некоторой точки. Если характеристика группы равна 2, то инволюции x и y, инвертируя xy, оставляют эту точку тоже неподвижной, что противоречит лемме 3. Если же характеристика G отлична от 2, то произведение xy по определению множества N равно произведению двух инволюций, которое в G сопряжено с неединичным элементом из N и, следовательно, не имеет неподвижных точек. Таким образом, множество N замкнуто относительно умножения. Поскольку N всегда замкнуто относительно взятия обратных элементов, то N — подгруппа. Предложение 1 показывает теперь, что в случае 1 теорема верна.

Пусть выполнено условие 2. Если характеристика группы нечетна, то по условию $H = \langle t, t_u, t_v \rangle$ является конечной подгруппой для любых элементов u, v из G_0 и $t \in H_0 = H \cap G_0 \neq 1$. Если $H_0^h \cap H_0 \neq 1$ для элемента h из H, то $0h = h$ и $h \in H_0$. Поэтому H — группа Фробениуса с дополнительным множителем H_0. Порядок H_0 четен, и, значит, ядро Фробениуса — абелева группа, а t, инвертируя n_u и n_v, инвертирует и их произведение. Таким образом, $n_u n_v$ как произведение t и некоторой инволюции принадлежит N, и N — подгруппа. Пусть характеристика равна 2 и N не является подгруппой. Тогда по лемме 4 найдутся инволюции n, n_u и n_v такие, что пересечение H_0 подгруппы $H = \langle n_a, n_u, n_v\rangle$ с G_0 содержит элемент b, отличный от 1. Как и раньше, H — группа Фробениуса с дополнением H_0. Так как H_0 не содержит инволюций, то все инволюции из H лежат в ядре Фробениуса группы H и не могут порождать H.

Пусть характеристика группы G равна 3. Тогда для любых инволюций a, b из G произведение ab имеет порядок 1 или 3, и, значит, $aba = bab$. Пусть теперь x, y, z — три инволюции, для которых $(zxy)^2 = v \neq 1$. Тогда

$$xvx = (xzx)(yzxyx) = zx(zyz)xyx = zxyz(yxyx) = zxyzxy = v.$$

Но тогда и $zxy \in C_G(x)$, $zxyx \in C_G(x)$. Обозначим $n = zx$, $m = yx$. Тогда

$$nm = xnmx = n^{-1}m^{-1}, \quad n^{-2} = m^{-2}, \quad n = m, \quad z = y, \quad v = 1.$$

Полученное противоречие показывает, что произведение любых трех инволюций группы G — инволюция. Теперь теорема вытекает из предложения 1.

Теорема 2. *Пусть G — точно дважды транзитивная группа характеристики 0. Тогда стабилизатор точки содержит подгруппу, изоморфную мультипликативной группе рациональных чисел, а в группе G есть подгруппа, изоморфная аффинной группе поля рациональных чисел.*

Доказательство. Пусть r и s — отличные от нуля целые числа. По условию и лемме 4 n_1^r и n_1^s принадлежат N и отличны от $1 = n_0$. По лемме 3 в G_0 есть единственный элемент $b(r,s)$, переводящий при сопряжении n_1^r в n_1^s. Поэтому $b(r,s) = b(mr, ms)$ для любого целого числа m, отличного от 0. Далее, если $b(r,s) = b(u,v)$, то $b(ur, us) = b(ru, rv)$ и $us = rv$. Наоборот, если $us = rv$, то $b(ur, us) = b(ru, rv)$ и $b(r,s) = b(u,v)$. Поэтому отображение $b(r,s) \to s/r$ является взаимно однозначным отображением множества $B = \{b(r,s) \mid r, s$ — ненулевые целые числа$\}$ на множество $\mathbb{Q}^{\#}$ ненулевых рациональных чисел. Поскольку $b(r,s)b(s,t) = b(r,t)$, то $b(r,s)b(u,v) = b(ru, su)b(su, sv) = b(ru, sv)$, и наше взаимно однозначное отображение — изоморфизм. Пусть $Q = \{1\} \cap \{n_1^b \mid b \in B\}$. Поскольку при $s \neq -v$

$$n_1^{b(r,s)} n_1^{b(r,v)} = n_1^{b(1,s)b(r,1)} n_1^{b(1,v)b(r,1)}$$
$$= n_1^{sb(r,1)} n_1^{vb(r,1)} = n_1^{(s+v)b(r,1)} = n_1^{b(1,s+v)b(r,1)} = n_1^{b(r,s+v)},$$

множество Q является подгруппой, изоморфной аддитивной группе рациональных чисел, а подгруппа QB изоморфна как абстрактная группа аффинной группе поля рациональных чисел. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Zassenhus H.* Kennzeichnung endlicher linearen Gruppen als Permutationsgruppen // Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg. 1935. Bd 11, N 1–2. S. 17–40.
2. *Zassenhaus H.* Über endliche Fastkörper // Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg. 1936. Bd 11, N 3. S. 187–220.
3. *Wahling H.* Theorie der Fastkörper. Essen: Thales-Verl., 1987.
4. *Kerby W., Wefelscheid H.* Conditions of finiteness on sharply 2-transitive groups // Aequationes Math. 1972. Bd. 8. S. 287–290.
5. *Тотьмянин С. Л.* Точно 2-транзитивные группы (Дипломная работа). Новосибирск: Новосиб. ун-т, 1991.
6. *Мазуров В. Д.* О дважды транзитивных группах подстановок // Сиб. мат. журн. 1990. Т. 31, № 4. С. 102–104.

г. Новосибирск *Статья поступила 30 октября 1994 г.*