УДК 519.48

О СВОЙСТВЕ БЫТЬ ПОЛУРЕШЕТКОЙ ДЛЯ СЧЕТНЫХ СКЕЛЕТОВ ВЛОЖИМОСТИ ДИСКРИМИНАТОРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ*)

А. Г. Пинус

В ряде работ автора [1–7] и в работе Я. Л. Мордвинова [8] изучались счетные скелеты вложимости дискриминаторных многообразий как основа для некоторой классификации этих многообразий универсальных алгебр. В частности, были описаны подобные многообразия, имеющие линейный счетный скелет вложимости [1], счетный скелет вложимости которых является наилучшим квазипорядком [3], является универсальным в классе счетных квазипорядков [2]. В работе [4] было доказано, что скелет вложимости нетривиального дискриминаторного многообразия не является ни нижней, ни верхней полурешеткой. Возникал естественный вопрос об описании дискриминаторных многообразий, счетный скелет вложимости которых является верхней, нижней полурешеткой, решеткой. Подобное описание для локально конечных дискриминаторных многообразий было найдено в работе [8]. В [7] было введено понятие бедной алгебры и доказано, что счетный скелет вложимости дискриминаторного многообразия, обладающего бесконечной конечно-порожденной простой бедной алгеброй, не является ни нижней, ни верхней полурешеткой. Таким образом, оставался вопрос, может ли счетный скелет вложимости не локально конечного дискриминаторного многообразия, все бесконечные конечно-порожденные простые алгебры которого не являются бедными, быть полурешеткой. Отрицательному ответу на этот вопрос и посвящена данная работа.

Напомним, что если $\mathfrak{M}$ — многообразие универсальных алгебр, то $\mathfrak{I}\mathfrak{M}$ — совокупность типов изоморфизма $\mathfrak{M}$-алгебр и для a, $b \in \mathfrak{I}\mathfrak{M}$ отношение $a \leqslant b$ означает изоморфную вложимость алгебры типа изоморфизма a в алгебру типа b. Пусть $\mathfrak{M}_{\aleph_0}$ — совокупность не более чем счетных $\mathfrak{M}$-алгебр. Счетным скелетом вложимости многообразия $\mathfrak{M}$ называется квазиупорядоченное множество $\langle \mathfrak{I}\mathfrak{M}_{\aleph_0}; \leqslant \rangle$. Квазиупорядоченное множество $\langle A; \leqslant \rangle$ будем называть полурешеткой (решеткой), если таковой является фактор этого множества, по естественной эквивалентности связанной с квазипорядком $\leqslant$. Определение и основные свойства дискриминаторных многообразий можно найти, например, в [5, 6, 9].

В работе [2] было показано, что любое дискриминаторное многообразие $\mathfrak{M}$ конечной сигнатуры, не являющееся локально конечным, содержит бесконечную конечно-порожденную простую $\mathfrak{M}$-алгебру $\mathfrak{A}$. Будем считать $\mathfrak{A}$ двупорожденной с порождающими a_0, a_1. Пусть $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ — однозначное перечисление всех элементов алгебры $\mathfrak{A}$. Рассмотрим подалгебру $\mathfrak{A}'$ алгебры $\mathfrak{A}^\omega$, порожденную элементами f_0, f_1, g, где f_i, $g \in \mathfrak{A}^\omega$ и $f_i(n) = a_i$, $g(n) = a_n$ для любых i, $n \in \omega$. Для элементов h, $k \in \mathfrak{A}^\omega$ через $[\![h = k]\!]$ обозначим множество $\{n \in \omega \mid h(n) = k(n)\}$. Как хорошо известно (см., например, [6]), $\langle h, k \rangle \in \theta^{\mathfrak{A}'}_{p,q}$ для любых $h, k, p, q \in \mathfrak{A}'$ тогда и только тогда, когда $[\![p = q]\!] \subseteq [\![h = k]\!]$. Здесь $\theta^{\mathfrak{A}'}_{p,q}$ — главная конгруэнция алгебры $\mathfrak{A}'$, порожденная парой $\langle p, q \rangle$. Таким образом,

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93–01–1520).

так как частично упорядоченная по включению совокупность $\mathrm{Con}_p\,\mathfrak{A}'$ главных конгруэнций алгебры $\mathfrak{A}'$ является булевой алгеброй, то эта алгебра изоморфна булевой алгебре $B(\mathfrak{A}') = \langle\{[\![h = k]\!] \mid h,k \in \mathfrak{A}'\}, \cup, \cap, \neg\rangle$ подмножеств множества ω.

В работе [7] была отмечена связь булевой алгебры $B(\mathfrak{A}')$ с булевой алгеброй совокупностей решений систем уравнений с одной неизвестной x над алгеброй $\mathfrak{A}$. Под системой уравнений над алгеброй $\mathfrak{A}$ с одной неизвестной x понимаем при этом систему

$$\mathfrak{T} = \begin{cases} t_1^1(x,\bar a_1^1) = t_2^1(x,\bar a_2^1), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ t_1^n(x,\bar a_1^n) = t_2^n(x,\bar a_2^n), \end{cases}$$

где $t_j^i(x,\bar y)$ — некоторые термы сигнатуры алгебры $\mathfrak{A}$, а $\bar a_j^i$ — кортежи элементов алгебры $\mathfrak{A}$. Так как алгебра $\mathfrak{A}$ порождена элементами a_0, a_1, то можно считать, что $\bar a_j^i = \langle a_0, a_1\rangle$ для любых i, j. Совокупность решений системы $\mathfrak{T}$ в алгебре $\mathfrak{A}$ — это множество

$$S_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{T}) = \left\{ b \in \mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \models \mathop{\&}_{i=1}^{n} t_1^i(b,\bar a_1^i) = t_2^i(b,\bar a_2^i) \right\}.$$

В [7] показано, что $\mathfrak{B}(\mathfrak{A}) = \langle\{S_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{T}) \mid \mathfrak{T}$ — система уравнений над $\mathfrak{A}\}; \cup, \cap, \neg\rangle$ является для дискриминаторной алгебры $\mathfrak{A}$ булевой алгеброй. При этом любая система уравнений $\mathfrak{T}$ над дискриминаторной алгеброй $\mathfrak{A}$ эквивалентна (имеет ту же совокупность решений в $\mathfrak{A}$) некоторому одному уравнению. Кроме того, отображение $f(n) = a_n$ индуцирует изоморфизм φ булевой алгебры $B(\mathfrak{A}')$ на булеву алгебру $\mathfrak{B}(\mathfrak{A})$.

В работе [7] алгебра $\mathfrak{A}$ была определена как бедная, если двоичное дерево не может быть дизъюнктно вложено в совокупность решений систем уравнений над алгеброй $\mathfrak{A}$. Там же замечено, что для дискриминаторной алгебры $\mathfrak{B}(\mathfrak{A})$ ее бедность эквивалентна суператомности булевой алгебры $\mathfrak{B}(\mathfrak{A})$, а значит, и изоморфных ей алгебр $\mathrm{Con}_p(\mathfrak{A}')$, $B(\mathfrak{A}')$.

Четверка элементов a, b, c, d квазиупорядоченного множества $\langle A; \leqslant\rangle$ в работе [4] названа дырой, если $a \leqslant c$, $a \leqslant d$, $b \leqslant c$, $b \leqslant d$, элементы a, b и c, d не сравнимы в $\langle A; \leqslant\rangle$ и в $\langle A; \leqslant\rangle$ нет такого элемента x, что a, $b \leqslant x \leqslant c$, d. Очевидно, что если в квазиупорядоченном множестве $\langle A; \leqslant\rangle$ есть дыра, то $\langle A; \leqslant\rangle$ не будет ни нижней, ни верхней полурешеткой.

Лемма. *Если в многообразии $\mathfrak{M}$ с продолжимыми конгруэнциями существуют счетные простые алгебры $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ с одноэлементными подалгебрами такие, что $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1$ изоморфно вложимы в $\mathfrak{A}_2$, а $\mathfrak{A}_0$ и $\mathfrak{A}_1$ изоморфно не вложимы друг в друга, то счетный скелет вложимости многообразия $\mathfrak{M}$ не будет ни верхней, ни нижней полурешеткой.*

Доказательство. Для доказательства утверждения леммы достаточно указать дыру в $\langle \mathfrak{IM}_{\aleph_0}; \leqslant\rangle$. Таковой, в частности, будет четверка алгебр $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_0 \times \mathfrak{A}_1$. Действительно, достаточно заметить несравнимость в $\langle \mathfrak{IM}_{\aleph_0}; \leqslant\rangle$ алгебр $\mathfrak{A}_2$ и $\mathfrak{A}_0 \times \mathfrak{A}_1$, а также отсутствие в $\mathfrak{M}_{\aleph_0}$ алгебры $\mathfrak{C}$, в которую были бы вложимы алгебры $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1$ и которая, в свою очередь, была бы вложима в $\mathfrak{A}_2$ и в $\mathfrak{A}_0 \times \mathfrak{A}_1$, так как вложимость $\mathfrak{A}_0$ и $\mathfrak{A}_1$ в $\mathfrak{A}_0 \times \mathfrak{A}_1$ следует из существования в $\mathfrak{A}_0$ и $\mathfrak{A}_1$ одноэлементных подалгебр. Вложимость $\mathfrak{A}_0 \times \mathfrak{A}_1$ в $\mathfrak{A}_2$ невозможна в силу простоты $\mathfrak{A}_2$ и продолжимости конгруэнций для многообразия $\mathfrak{M}$. Если же алгебра $\mathfrak{A}_2$ была бы вложима в алгебру $\mathfrak{A}_0 \times \mathfrak{A}_1$, то алгебра $\mathfrak{A}_2$ в силу своей простоты была бы вложима в $\mathfrak{A}_0$ либо в $\mathfrak{A}_1$. Но так как $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1 \leqslant \mathfrak{A}_2$, то это, в свою очередь, влекло бы вложимость $\mathfrak{A}_0$ в $\mathfrak{A}_1$ либо $\mathfrak{A}_1$ в $\mathfrak{A}_0$ в противоречие с условием леммы. Невозможность существования алгебры $\mathfrak{C}$ со свойствами, указанными выше, доказывается аналогично: вложимость $\mathfrak{C}$ в $\mathfrak{A}_2$ влекла бы простоту $\mathfrak{C}$, и тогда вложимость $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1$ в $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{C}$ в $\mathfrak{A}_0 \times \mathfrak{A}_1$ влекла бы вложимость $\mathfrak{A}_0$ в $\mathfrak{A}_1$ либо $\mathfrak{A}_1$ в $\mathfrak{A}_0$. Наличие же в $\langle \mathfrak{IM}_{\aleph_0}; \leqslant\rangle$ дыры $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_0 \times \mathfrak{A}_1$ и доказывает, как замечено перед леммой, утверждение последней.

Теорема 1. *Если $\mathfrak{M}$ не локально конечное дискриминаторное многообразие конечной сигнатуры, то счетный скелет вложимости $\mathfrak{M}$ не является нижней полурешеткой.*

Доказательство. Утверждение теоремы в случае, когда $\mathfrak{M}$ содержит конечно-порожденную бесконечную простую бедную алгебру, доказано в [7]. Таким образом, будем считать, что все конечно-порожденные бесконечные простые $\mathfrak{M}$-алгебры не являются бедными, и пусть $\mathfrak{A}$ одна из таких алгебр. Если $\mathfrak{A}$ не содержит одноэлементной подалгебры, то очевидно, что $\langle \Im\mathfrak{M}_{\aleph_0}; \leqslant\rangle$ не является нижней полурешеткой. Там самым будем считать, что $\mathfrak{A}$ содержит одноэлементную подалгебру. Как и выше, будем считать $\mathfrak{A}$ порожденной парой элементов a_0, a_1, а $\mathfrak{A}'$ — построенной выше подалгеброй алгебры $\mathfrak{A}^\omega$. В силу отмеченного изоморфизма булевых алгебр $\mathrm{Con}_p\,\mathfrak{A}'$ и $B(\mathfrak{A}')$, для любого ультрафильтра $\mathfrak{F}$ булевой алгебры $B(\mathfrak{A}')$ фактор-алгебра $\mathfrak{A}'/\mathfrak{F}$ будет простой $\mathfrak{M}$-алгеброй. При этом очевидно, что элемент $g/\mathfrak{F}$ алгебры $\mathfrak{A}'/\mathfrak{F}$ будет являться решением в алгебре $\mathfrak{A}'/\mathfrak{F}$ всех уравнений $t^1(f_0/\mathfrak{F}, f_1/\mathfrak{F}, x) = t^2(f_0/\mathfrak{F}, f_1/\mathfrak{F}, x)$ таких, что $[\![t^1(f_0, f_1, g) = t^2(f_0, f_1, g)]\!] \in \mathfrak{F}$.

Через $B(\mathfrak{A}')^*$ обозначим совокупность всех ультрафильтров булевой алгебры $B(\mathfrak{A}')$ — стоуновское пространство булевой алгебры $B(\mathfrak{A}')$. При этом будем отождествлять элементы булевой алгебры $B(\mathfrak{A}')$ с открыто-замкнутыми подмножествами пространства $B(\mathfrak{A}')^*$. В силу того, что алгебра $\mathfrak{A}$ не является бедной, т. е. булева алгебра $B(\mathfrak{A}')$ не суператомна, имеет место равенство $|B(\mathfrak{A}')^*| = 2^{\aleph_0}$. Через $\sim$ обозначим отношение на $B(\mathfrak{A}')^*$, определенное следующим образом: $\mathfrak{F} \sim \mathfrak{G}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}/'\mathfrak{F} \cong \mathfrak{A}'/\mathfrak{G}$. Для каждого ультрафильтра $\mathfrak{F}$ множество $\{\mathfrak{G} \in B(\mathfrak{A}')^* \mid \mathfrak{G} \sim \mathfrak{F}\}$ не более чем счетно. Действительно, в противном случае в силу того, что все алгебры $\mathfrak{A}'/\mathfrak{G}$ порождаются тремя элементами $f_0/\mathfrak{G}$, $f_1/\mathfrak{G}$ и $g/\mathfrak{G}$, а сами эти алгебры счетны, в случае, если бы для некоторого ультрафильтра $\mathfrak{F}$ множество $\{\mathfrak{G} \in B(\mathfrak{A}')^* \mid \mathfrak{G} \sim \mathfrak{F}\}$ было несчетным, то нашлись бы пара ультрафильтров $\mathfrak{G}_1 \neq \mathfrak{G}_2$ и некоторый изоморфизм φ алгебр $\mathfrak{A}'/\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{A}'/\mathfrak{G}_2$ такие, что $\varphi(f_0/\mathfrak{G}_1) = f_0/\mathfrak{G}_2$, $\varphi(f_1/\mathfrak{G}_1) = f_1/\mathfrak{G}_2$, $\varphi(g/\mathfrak{G}_1) = g/\mathfrak{G}_2$. Но, с другой стороны, в силу отделимости различных точек пространства $B(\mathfrak{A}')^*$ открыто-замкнутыми множествами (элементами алгебры $B(\mathfrak{A}')$) найдутся термы $p_1(y,z,x)$, $p_2(y,z,x)$ такие, что

$$[\![p_1(f_0,f_1,g) = p_2(f_0,f_1,g)]\!] \in \mathfrak{G}_1, \quad [\![p_1(f_0,f_1,g) \neq p_2(f_0,f_1,g)]\!] \in \mathfrak{G}_2,$$

а значит, как отмечено выше,

$$\mathfrak{A}'/\mathfrak{G}_1 \models p_1(f_0/\mathfrak{G}_1, f_1/\mathfrak{G}_1, g/\mathfrak{G}_1) = p_2(f_0/\mathfrak{G}_1, f_1/\mathfrak{G}_1, g/\mathfrak{G}_1),$$

в то время как

$$\mathfrak{A}'/\mathfrak{G}_2 \models p_1(f_0/\mathfrak{G}_2, f_1/\mathfrak{G}_2, g/\mathfrak{G}_2) \neq p_2(f_0/\mathfrak{G}_2, f_1/\mathfrak{G}_2, g/\mathfrak{G}_2).$$

Последнее противоречит существованию изоморфизма φ. Таким образом, $|B(\mathfrak{A}')^*/\sim| = 2^{\aleph_0}$.

Аналогичным образом замечаем, что если $\mathfrak{R} = \{\mathfrak{G} \in B(\mathfrak{A}')^* \mid$ алгебра $\mathfrak{A}'/\mathfrak{G}$ не является изоморфно вложимой в алгебру $\mathfrak{A}\}$, то $|\mathfrak{R}/\sim| = 2^{\aleph_0}$.

Под двоичным деревом $\mathfrak{D}_2$ будем понимать совокупность всех конечных кортежей, образованных элементами 0, 1, при этом для $t_1, t_2 \in \mathfrak{D}_2$ положим $t_1 \leqslant t_2$ тогда и только тогда, когда t_1 является начальным интервалом кортежа t_2. Будем говорить, что *двоичное дерево $\mathfrak{D}_2$ разделяет некоторое подмножество S пространства $B(\mathfrak{A}')^*$*, если существует дизъюнктное антиизотонное отображение ψ дерева $\mathfrak{D}_2$ в булеву алгебру $B(\mathfrak{A}')$ такое, что для любых $s_1 \neq s_2$ из S найдутся не сравнимые в $\mathfrak{D}_2$ кортежи t_1, t_2 такие, что $\psi(t_i) \ni s_i$ для $i = 1, 2$; для любой цепи $P \subseteq \mathfrak{D}_2$ имеет место неравенство $\bigcap\limits_{t\in P} \psi(t) \cap S \neq \varnothing$, и для любой бесконечной цепи $P \subseteq \mathfrak{D}_2$ множество $\bigcap\limits_{t\in P} \psi(t) \cap S$ одноэлементно. Под дизъюнктностью же ψ имеется в виду, что для не сравнимых $t_1, t_2 \in \mathfrak{D}_2$

$$\psi(t_1) \cap \psi(t_2) = \varnothing.$$

Так как построенное выше множество $\mathfrak{R} \subseteq B(\mathfrak{A}')^*$ континуально, то очевидным образом может быть выбрано подмножество $\mathfrak{T}$ множества $\mathfrak{R}$ такое, что $\mathfrak{T}$ состоит из попарно не эквивалентных относительно $\sim$ элементов, $\mathfrak{T}$ континуально и полное двоичное дерево $\mathfrak{D}_2$ разделяет множество $\mathfrak{T}$, а ψ — это разделяющее множество $\mathfrak{T}$ отображение дерева $\mathfrak{D}_2$ в булеву алгебру $B(\mathfrak{A}')$.

Покажем теперь существование ультрафильтров $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \in \mathfrak{T}$ таких, что алгебры $\mathfrak{A}'/\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{A}'/\mathfrak{F}_2$ не вложимы друг в друга. Любое изоморфное вложение η алгебры $\mathfrak{A}'/\mathfrak{F}_1$ в алгебру $\mathfrak{A}'/\mathfrak{F}_2$ однозначно определимо образами порождающих алгебру $\mathfrak{A}'/\mathfrak{F}_1$ элементов $f_0/\mathfrak{F}_1$, $f_1/\mathfrak{F}_1$ и $g/\mathfrak{F}_1$. При этом элементы $\eta(f_0/\mathfrak{F}_1)$, $\eta(f_1/\mathfrak{F}_1)$, $\eta(g/\mathfrak{F}_1)$ совпадают с элементами $p^0(f_0,f_1,g)/\mathfrak{F}_2$, $p^1(f_0,f_1,g)/\mathfrak{F}_2$, $p^2(f_0,f_1,g)/\mathfrak{F}_2$ для некоторых термов $p^0(y,z,x)$, $p^1(y,z,x)$, $p^2(y,z,x)$ сигнатуры многообразия $\mathfrak{M}$. Таким образом, для доказательства невозможности вложимости алгебры $\mathfrak{A}'/\mathfrak{F}_1$ в алгебру $\mathfrak{A}'/\mathfrak{F}_2$ (и наоборот) достаточно показать, что для любой тройки трехместных термов $p^0(y,z,x)$, $p^1(y,z,x)$, $p^2(y,z,x)$ сигнатуры многообразия $\mathfrak{M}$, отображение

$$\begin{aligned}\eta : {} & q(f_0/\mathfrak{F}_1, f_1/\mathfrak{F}_1, g/\mathfrak{F}_1)\\ & \to q(p^0(f_0/\mathfrak{F}_2, f_1/\mathfrak{F}_2, g/\mathfrak{F}_2), p^1(f_0/\mathfrak{F}_2, f_1/\mathfrak{F}_2, g/\mathfrak{F}_2), p^2(f_0/\mathfrak{F}_2, f_1/\mathfrak{F}_2, g/\mathfrak{F}_2)),\end{aligned}$$

где q — произвольный терм, не является изоморфным вложением алгебры $\mathfrak{A}'/\mathfrak{F}_1$ в алгебру $\mathfrak{A}'/\mathfrak{F}_2$.

Пусть

$$\begin{aligned}\langle x,y,z\rangle = \langle p_0^0(y,z,x), p_0^1(y,z,x), p_0^2(y,z,x)\rangle, \langle p_1^0(y,z,x), p_1^1(y,z,x), p_1^2(y,z,x)\rangle,\\ \dots, \langle p_n^0(y,z,x), p_n^1(y,z,x), p_n^2(y,z,x)\rangle, \dots\end{aligned}$$

— перечисление всех возможных троек термов от трех переменных сигнатуры многообразия $\mathfrak{M}$. Индукцией по n будем строить кортежи t_1^n, $t_2^n \in \mathfrak{D}_2$ такие, что $\psi(t_1^n) \cap \psi(t_2^n) = \varnothing$, $t_1^n \leqslant t_1^{n+1}$, $t_2^n \leqslant t_2^{n+1}$ и для любых $\mathfrak{F} \in \psi(t_1^{2n})$, $\mathfrak{G} \in \psi(t_2^{2n})$ отображения

$$\begin{aligned}\eta_m : f_0/\mathfrak{F} \to p_m^0(f_0/\mathfrak{G}, f_1/\mathfrak{G}, g/\mathfrak{G}), \quad f_1/\mathfrak{F} \to p_m^1(f_0/\mathfrak{G}, f_1/\mathfrak{G}, g/\mathfrak{G}),\\ g/\mathfrak{F} \to p_m^2(f_0/\mathfrak{G}, f_1/\mathfrak{G}, g/\mathfrak{G})\end{aligned}$$

для $m \leqslant n$ не продолжимы до изоморфных вложений алгебры $\mathfrak{A}'/\mathfrak{F}$ в алгебру $\mathfrak{A}'/\mathfrak{G}$ и для $\mathfrak{F} \in \psi(t_1^{2n+1})$, $\mathfrak{G} \in \psi(t_1^{2n+1})$ отображения

$$\begin{aligned}\mu_m : f_0/\mathfrak{G} \to p_m^0(f_0/\mathfrak{F}, f_1/\mathfrak{F}, g/\mathfrak{F}), \quad f_1/\mathfrak{G} \to p_m^1(f_0/\mathfrak{F}, f_1/\mathfrak{F}, g/\mathfrak{F}),\\ g/\mathfrak{G} \to p_m^2(f_0/\mathfrak{F}, f_1/\mathfrak{F}, g/\mathfrak{F})\end{aligned}$$

для $m \leqslant n$ не продолжимы до изоморфных вложений алгебры $\mathfrak{A}'/\mathfrak{G}$ в алгебру $\mathfrak{A}'/\mathfrak{F}$.

Для $n = 0$ положим $t_1^0 = \langle 0\rangle$, $t_2^0 = \langle 1\rangle$. Очевидно, что если $\psi(t_1^0) = [\![q_1^0(f_0,f_1,g) = q_2^0(f_0,f_1,g)]\!]$, то для любых $\mathfrak{F} \in \psi(t_1^0)$, $\mathfrak{G} \in \psi(t_2^0)$

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}'/\mathfrak{F} \models q_1^0(f_0/\mathfrak{F}, f_1/\mathfrak{F}, g/\mathfrak{F}) = q_2^0(f_0/\mathfrak{F}, f_1/\mathfrak{F}, g/\mathfrak{F}),\\ \mathfrak{A}'/\mathfrak{G} \models q_1^0(f_0/\mathfrak{G}, f_1/\mathfrak{G}, g/\mathfrak{G}) \neq q_2^0(f_0/\mathfrak{G}, f_1/\mathfrak{G}, g/\mathfrak{G}),\end{aligned}$$

а значит, действительно, отображение

$$\begin{aligned}\eta_0 : f_0/\mathfrak{F} \to p_0^0(f_0/\mathfrak{G}, f_1/\mathfrak{G}, g/\mathfrak{G}) = f_0/\mathfrak{G}, \quad f_1/\mathfrak{F} \to p_0^1(f_0/\mathfrak{G}, f_1/\mathfrak{G}, g/\mathfrak{G}) = f_1/\mathfrak{G},\\ g/\mathfrak{F} \to p_0^2(f_0/\mathfrak{G}, f_1/\mathfrak{G}, g/\mathfrak{G}) = g/\mathfrak{G}\end{aligned}$$

не продолжимо до изоморфного вложения алгебры $\mathfrak{A}'/\mathfrak{F}$ в алгебру $\mathfrak{A}'/\mathfrak{G}$.

Пусть теперь уже построены кортежи $t_1^n, t_2^n \in \mathfrak{D}_2$, удовлетворяющие указанным выше индуктивным условиям, и допустим, что $n = 2k+1$ (случай четного n рассматривается аналогично). Пусть r — наименьшее натуральное число такое, что если

$$\psi(t_1^{n\wedge} \underbrace{\langle 0,\dots,0\rangle}_{r \text{ раз}}) = [\![q_1^{n+1}(f_0,f_1,g) = q_2^{n+1}(f_0,f_1,g)]\!],$$

то

$$\psi(t_2^n) \cap [\![q_1^{n+1}(p_{n+1}^0(f_0,f_1,g), p_{n+1}^1(f_0,f_1,g), p_{n+1}^2(f_0,f_1,g)),$$
$$\neq q_2^{n+1}(p_{n+1}^0(f_0,f_1,g), p_{n+1}^1(f_0,f_1,g), p_{n+1}^2(f_0,f_1,g))]\!] \neq \varnothing. \quad (*)$$

Прежде всего, заметим, что такое r найдется. Иначе для любого $r \in \omega$ для любых термов $q_1^{n,r}(y,z,x)$, $q_2^{n,r}(y,z,x)$ таких, что

$$\psi(t_1^{n\wedge} \underbrace{\langle 0,\dots,0\rangle}_{r \text{ раз}}) = [\![q_1^{n,r}(f_0,f_1,g) = q_2^{n,r}(f_0,f_1,g)]\!],$$

имеет место

$$\psi(t_2^n) \subseteq [\![q_1^{n,r}(p_{n+1}^0(f_0,f_1,g), p_{n+1}^1(f_0,f_1,g), p_{n+1}^2(f_0,f_1,g))$$
$$= q_2^{n,r}(p_{n+1}^0(f_0,f_1,g), p_{n+1}^1(f_0,f_1,g), p_{n+1}^2(f_0,f_1,g))]\!].$$

Но тогда если

$$\{\mathfrak{F}\} = \bigcap_{r\in\omega} \psi(t_1^{n\wedge} \underbrace{\langle 0,\dots,0\rangle}_{r \text{ раз}}),$$

то $\mathfrak{F} \in \mathfrak{T}$ и отображение

$$\eta : f_0/\mathfrak{F} \to p_{n+1}^0(f_0,f_1,g) \restriction \psi(t_2^n), \quad f_1/\mathfrak{F} \to p_{n+1}^1(f_0,f_1,g) \restriction \psi(t_2^n),$$
$$g/\mathfrak{F} \to p_{n+1}^2(f_0,f_1,g) \restriction \psi(t_2^n)$$

естественным образом продолжимо до изоморфного вложения алгебры $\mathfrak{A}'/\mathfrak{F}$ в декартову степень алгебры $\mathfrak{A}^{\psi(t_2^n)}$ алгебры $\mathfrak{A}$. Так как $\mathfrak{A}'/\mathfrak{F}$ — простая алгебра и $\mathfrak{M}$ имеет свойство продолжимости конгруэнций, то вложение η индуцирует вложение алгебры $\mathfrak{A}'/\mathfrak{F}$ в алгебру $\mathfrak{A}$ в противоречие с тем, что $\mathfrak{F}$ является элементом множества $\mathfrak{T}$. Тем самым, действительно, найдется такое наименьшее r, что имеет место неравенство $(*)$. Но тогда если $t_2^{n+1} \in \mathfrak{D}_2$ таково, что $t_2^n \leqslant t_2^{n+1}$ и

$$\psi(t_2^{n+1}) \subseteq \psi(t_2^n) \cap [\![q_1^{n+1}(p_{n+1}^0(f_0,f_1,g), p_{n+1}^1(f_0,f_1,g), p_{n+1}^2(f_0,f_1,g))$$
$$\neq q_2^{n+1}(p_{n+1}^0(f_0,f_1,g), p_{n+1}^1(f_0,f_1,g), p_{n+1}^2(f_0,f_1,g))]\!],$$

то для любых $\mathfrak{F} \in \psi(t_1^{n+1})$, $\mathfrak{G} \in \psi(t_2^{n+1})$ отображение

$$\eta : f_0/\mathfrak{F} \to p_{n+1}^0(f_0/\mathfrak{G}, f_1/\mathfrak{G}, g/\mathfrak{G}), \quad f_1/\mathfrak{F} \to p_{n+1}^1(f_0/\mathfrak{G}, f_1/\mathfrak{G}, g/\mathfrak{G}),$$
$$g/\mathfrak{F} \to p_{n+1}^2(f_0/\mathfrak{G}, f_1/\mathfrak{G}, g/\mathfrak{G})$$

не может быть продолжено до изоморфного вложения алгебры $\mathfrak{A}'/\mathfrak{F}$ в алгебру $\mathfrak{A}'/\mathfrak{G}$, так как

$$\mathfrak{A}'/\mathfrak{F} \models q_1^{n,r}(f_0/\mathfrak{F}, f_1/\mathfrak{F}, g/\mathfrak{F}) = q_2^{n,r}(f_0/\mathfrak{F}, f_1/\mathfrak{F}, g/\mathfrak{F}),$$

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{A}'/\mathfrak{G} \models q_1^{n+1}&\\
\times \big(p_{n+1}^0(f_0/\mathfrak{F}, f_1/\mathfrak{F}, g/\mathfrak{F}), p_{n+1}^1(f_0/\mathfrak{G}, f_1/\mathfrak{G}, g/\mathfrak{G}), p_{n+1}^2(f_0/\mathfrak{G}, f_1/\mathfrak{G}, g/\mathfrak{G})\big)&\\
\neq q_2^{n+1}\big(p_{n+1}^0(f_0/\mathfrak{G}, f_1/\mathfrak{G}, g/\mathfrak{G}), p_{n+1}^1(f_0/\mathfrak{G}, f_1/\mathfrak{G}, g/\mathfrak{G}), p_{n+1}^2(f_0/\mathfrak{G}, f_1/\mathfrak{G}, g/\mathfrak{G})\big).&
\end{aligned}
$$

Тем самым возможность индукционного шага доказана.

Итак, пусть построена последовательность пар $\langle t_1^n, t_2^n\rangle$ элементов $\mathfrak{D}_2$, удовлетворяющих указанным выше условиям, и пусть

$$\bigcap_{n\in\omega} \psi(t_1^n) \cap \mathfrak{T} = \{\mathfrak{F}\}, \qquad \bigcap_{n\in\omega} \psi(t_2^n) \cap \mathfrak{T} = \{\mathfrak{G}\}$$

для некоторых ультрафильтров $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ булевой алгебры $B(\mathfrak{A}')$. Из индукционных условий видно, что простые алгебры $\mathfrak{A}'/\mathfrak{F}$, $\mathfrak{A}'/\mathfrak{G}$ не имеют изоморфных вложений друг в друга. Тем самым в силу леммы для доказательства утверждения теоремы достаточно построить простую $\mathfrak{M}$-алгебру, в которую будут вложимы алгебры $\mathfrak{A}'/\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{A}'/\mathfrak{G}$. В свою очередь, так как класс простых алгебр в дискриминаторном многообразии является аксиоматизируемым, достаточно доказать совместность теории $T \cup D(\mathfrak{A}'/\mathfrak{F}) \cup D(\mathfrak{A}'/\mathfrak{G})$, где T — аксиомы класса простых $\mathfrak{M}$-алгебр, а $D(\mathfrak{C})$ — диаграмма алгебры $\mathfrak{C}$. Кроме того, как уже отмечалось выше, любое конечное подмножество S из диаграммы некоторой простой $\mathfrak{M}$-алгебры эквивалентно некоторому одному равенству. Тем самым любое конечное $S \subseteq D(\mathfrak{A}'/\mathfrak{G})$ эквивалентно некоторому равенству $p'_S(f_0/\mathfrak{G}, f_1/\mathfrak{G}, g/\mathfrak{G}) = p''_S(f_0/\mathfrak{G}, f_1/\mathfrak{G}, g/\mathfrak{G})$, где p'_S, p''_S — какие-то $\mathfrak{M}$-термы. Таким образом, для доказательства совместности теории $T \cup D(\mathfrak{A}'/\mathfrak{F}) \cup D(\mathfrak{A}'/\mathfrak{G})$ достаточно доказать совместность теорий вида

$$T \cup D(\mathfrak{A}'/\mathfrak{F}) \cup \{p'_S(f_0/\mathfrak{G}, f_1/\mathfrak{G}, g/\mathfrak{G}) = p''_S(f_0/\mathfrak{G}, f_1/\mathfrak{G}, g/\mathfrak{G})\}.$$

Очевидно, что можно считать как само множество $[\![p'_S(f_0, f_1, g) = p''_S(f_0, f_1, g)]\!]$, так и его дополнение бесконечными, и тем самым для некоторого $A \in \mathfrak{F}$ пусть γ — взаимно однозначное отображение ω на ω такое, что $\gamma([\![p'_S(f_0, f_1, g) = p''_S(f_0, f_1, g)]\!]) = A$. Положим $g^1(n) = g(\gamma^{-1}(n))$. Тогда очевидно $[\![p'_S(f_0, f_1, g) = p''_S(f_0, f_1, g)]\!] \supseteq A$ и, значит, $[\![p'_S(f_0, f_1, g) = p''_S(f_0, f_1, g)]\!] \in \mathfrak{F}$. Тем самым если $\mathfrak{A}''$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{A}^\omega$, порожденная элементами f_0, f_1, g и g', то

$$\mathfrak{A}''/\mathfrak{F} \models T \cup D(\mathfrak{A}'/\mathfrak{F}) \cup \{p'_S(f_0/\mathfrak{F}, f_1/\mathfrak{F}, g'/\mathfrak{F}) = p''_S(f_0/\mathfrak{F}, f_1/\mathfrak{F}, g'/\mathfrak{F})\}.$$

Доказанная конечная совместность теории $T \cup D(\mathfrak{A}'/\mathfrak{F}) \cup D(\mathfrak{A}'/\mathfrak{G})$ влечет совместность этой теории, т. е. существование простой $\mathfrak{M}$-алгебры, в которую вложимы простые, не вложимые друг в друга алгебры $\mathfrak{A}'/\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{A}'/\mathfrak{G}$. Как уже отмечалось выше, ввиду леммы этого достаточно для доказательства теоремы.

Из доказательства теоремы 1 вытекает также следующее утверждение.

Теорема 2. *Если $\mathfrak{M}$ не локально конечное дискриминаторное многообразие конечной сигнатуры, все алгебры которого имеют одноэлементные подалгебры, то счетный скелет вложимости $\mathfrak{M}$ не является ни нижней, ни верхней полурешеткой.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пинус А. Г.* Многообразия с простым счетным скелетом вложимости // Сиб. мат. журн. 1990. Т. 31, № 1. С. 127–134.
2. *Пинус А. Г.* О счетных скелетах вложимости дискриминаторных многообразий // Алгебра и логика. 1989. Т. 28, № 5. С. 597–607.
3. *Пинус А. Г.* Счетные скелеты конечно-порожденных дискриминаторных многообразий // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, № 2. С. 190–195.
4. *Пинус А. Г.* О многообразиях, скелеты которых являются решетками // Алгебра и логика. 1992. Т. 31, № 1. С. 74–82.

5. *Пинус А. Г.* Булевы конструкции в универсальной алгебре // Успехи мат. наук. 1992. Т. 47, № 4. С. 145–180.
6. *Pinus A. G.* Boolean constructions in universal algebra. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academ. Publ., 1993.
7. *Пинус А. Г.* О скелетах вложимости не локально конечных дискриминаторных многообразий с бедной алгеброй // Алгебра и логика. 1994. Т. 33, № 1. С. 90–103.
8. *Мордвинов Я. Л.* О многообразиях с полурешеточными счетными скелетами вложимости // Алгебра и логика. 1993. Т. 32, № 3. С. 288–307.
9. *Werner H.* Discriminator algebras. Berlin: Akademic-Verlag, 1978.

г. Новосибирск *Статья поступила 7 декабря 1993 г.*