УДК 512.743.7

МИНИМАЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ ЭЛЕМЕНТОВ ПОРЯДКА p В НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ГРУПП ШЕВАЛЛЕ НАД ПОЛЯМИ ХАРАКТЕРИСТИКИ $p^{*)}$

И. Д. Супруненко

§ 1. Введение и формулировка основного результата

Пусть K — алгебраически замкнутое поле характеристики $p > 0$, G — односвязная полупростая алгебраическая группа над K. В работе найдены минимальные полиномы образов элементов порядка p группы G в ее неприводимых рациональных представлениях. Очевидно, что для любой алгебраической группы S, ее рационального представления ρ и унипотентного элемента $t \in S$ минимальный полином матрицы $\rho(t)$ имеет вид $(x-1)^k$ и поэтому полностью определяется своей степенью $k = k_\rho(t)$. Если C — класс сопряженных унипотентных элементов в S, то функция $k_\rho(t)$ постоянна на C; положим $k_\rho(C) = k_\rho(t)$, $t \in C$. Назовем число $k_\rho(t)$ ($k_\rho(C)$) показателем унипотентного элемента t (класса C) в представлении ρ. Ясно, что $k_\rho(t)$ равняется максимальной размерности блоков Жордана матрицы $\rho(t)$. Таким образом, информация о минимальных полиномах в некоторой степени показывает, какие унипотентные матрицы могут встретиться в тех или иных представлениях различных групп. Наша задача составляет часть более общей программы изучения свойств образов унипотентных элементов в представлениях алгебраических групп и разработки на этой основе методов распознавания представлений и линейных групп. Информация о свойствах унипотентных элементов в неприводимых представлениях групп Шевалле над K легко переносится на K-представления аналогичных групп над произвольными подполями поля K (в частности, конечных групп типа Ли). Дело в том, что рациональные неприводимые представления групп Шевалле над подполями поля K суть ограничения соответствующих представлений групп над K [9, § 12 и теорема 43].

Знаменитая теорема Холла — Хигмана [17, теорема B] свидетельствует о том, что при $p > 2$ степень минимального полинома элемента порядка p^m неприводимой p-разрешимой линейной группы над K не может быть меньше $(p-1)p^{m-1}$. Несомненно, это не так для представлений групп Шевалле над K. Поэтому здесь исследования в «духе Холла — Хигмана» связаны с явным вычислением таких полиномов. Обобщения результатов [17] для элементов порядка p в комплексных представлениях конечных групп Шевалле получены А. Е. Залесским [5, 6, 33].

Наш основной результат (теорема 1.1) позволяет сравнивать показатели $k_\rho(C)$ для определенных классов и представлений группы G и полупростой группы того же типа и ранга над полем комплексных чисел. Чтобы сформулировать его, нам понадобятся некоторые обозначения. Далее $\mathbb{C}$ — поле комплекс-

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда (грант RWX000).

ных чисел; $\operatorname{Irr} S$ и $\operatorname{Inf} S$ соответственно множества рациональных неприводимых и инфинитезимально неприводимых представлений полупростой алгебраической группы S; $\omega(\rho)$ — старший вес представления ρ, $\varphi(\omega)$ — представление из $\operatorname{Irr} S$ со старшим весом ω, ω_1 — фундаментальные веса, их число равно рангу группы S, а нумерация для простых S такая же, как в [2]; $\Omega(S)$ — множество старших весов представлений из $\operatorname{Inf} S$. Если S — группа Шевалле над K, то $S_{\mathbb{C}}$ — односвязная полупростая алгебраическая группа над $\mathbb{C}$ того же типа, что и S; если $\rho \in \operatorname{Irr} S$ — представление со старшим весом $\omega(\rho) = \sum_{i=0}^{m} p^i \lambda_i$, где $\lambda_i \in \Omega(S)$, то $\rho_{\mathbb{C}}$ — представление из $\operatorname{Irr} S_{\mathbb{C}}$ со старшим весом $\sum_{i=0}^{m} \lambda_i$. Положим $\operatorname{Irr} = \operatorname{Irr} G$, $\operatorname{Inf} = \operatorname{Inf} G$, $\operatorname{Irr}_{\mathbb{C}} = \operatorname{Irr} G_{\mathbb{C}}$. Ниже $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{U}_{\mathbb{C}}$ — множества классов сопряженных унипотентных элементов групп G и $G_{\mathbb{C}}$ соответственно, $\mathfrak{U}_p \subseteq \mathfrak{U}$ — множество классов, состоящих из элементов порядка не больше p. Предполагается, что $r > 1$ при $G = B_r(K)$ или $G = C_r(K)$ и $r > 3$ при $G = D_r(K)$, если не оговорено иное.

1.1. Теорема. *Пусть $p > 2$, если не все простые компоненты группы G есть группы типов A_r или E_6, и пусть $p > 3$, если среди этих компонент имеются группы типов G_2 или E_8. Тогда существует такая биекция $f : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}_{\mathbb{C}}$, что*

$$k_\varphi(C) = \min\{p, k_{\varphi_{\mathbb{C}}}(f(C))\} \tag{1}$$

для каждого класса $C \in \mathfrak{U}_p$ и любого представления $\varphi \in \operatorname{Irr} G$.

Очевидно, что $k_\varphi(C) \leqslant p$ при $C \in \mathfrak{U}_p$. Биекция f из теоремы 1.1 совершенно естественная. Она сохраняет помеченную диаграмму Дынкина класса C. Для классических групп она сохраняет также нормальную форму Жордана представителей класса C в естественной реализации группы G.

Ранее в [10] автором найдены минимальные полиномы корневых элементов простых алгебраических групп.

1.2. Замечание. Хотя для некоторых групп G при $p = 2$ или 3 не существует биекции из $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{U}_{\mathbb{C}}$, тем не менее в этой ситуации вычисление показателей классов $C \in \mathfrak{U}_p$ не представляет проблемы. Действительно, при $p = 2$ показатель $k_\varphi(C)$ равен 2, если $\varphi(C) \neq \{1\}$, и равен 1 в противном случае. Если же $p = 3$, то вопрос сводится к простым группам с помощью предложения 2.8. Затем можно применить результаты работы [24], где при $p > 2$ для простых групп G классифицированы представления $\varphi \in \operatorname{Irr} G$ и классы $C \in \mathfrak{U}$ с $k_\varphi(C) = 2$.

Задача вычисления показателя классов $C \in \mathfrak{U}_{\mathbb{C}}$ в представлениях $\pi \in \operatorname{Irr}_{\mathbb{C}}$ сводится к фундаментальным представлениям. Ниже $\rho_i \in \operatorname{Irr}$ и $\pi_i \in \operatorname{Irr}_{\mathbb{C}}$ — представления со старшим весом ω_i.

1.3. Предложение. *Пусть $C \in \mathfrak{U}_{\mathbb{C}}$, $\pi \in \operatorname{Irr}_{\mathbb{C}}$, $\omega(\pi) = \sum_i a_i\omega_i$. Тогда*

$$k_\pi(C) = 1 + \sum_i a_i(k_{\pi_i}(C) - 1).$$

Доказательство см. в 2.7.

Легко вычислить $k_{\pi_i}(C)$, если задана помеченная диаграмма Дынкина класса C. Здесь используются известные формулы, связывающие фундаментальные веса и простые корни (см., например, таблицы в [2]).

1.4. Алгоритмы для вычисления показателей $k_{\pi_i}(C)$ для классических групп. Пусть $i < r$ при $G_{\mathbb{C}} = B_r(\mathbb{C})$ и $i < r - 1$ при $G_{\mathbb{C}} = D_r(\mathbb{C})$. Предположим, что элементы класса C имеют блоки Жордана степеней $k_1, \ldots, k_m$ (с учетом кратностей) в естественном представлении группы $G_{\mathbb{C}}$. Пусть $N(C)$ — следующая последовательность:

$$k_1 - 1, k_1 - 3, \ldots, 1 - k_1, k_2 - 1, \ldots, 1 - k_2, \ldots, k_m - 1, \ldots, 1 - k_m.$$

Тогда $k_{\pi_i}(C) - 1$ равняется сумме i максимальных членов последовательности $N(C)$. Для представления π_r группы $B_r(\mathbb{C})$ следует взять половину такой суммы. Для спинорных представлений π_{r-1} и π_r группы $D_r(\mathbb{C})$ ситуация несколько сложнее. Если среди чисел $k_1, \ldots, k_m$ есть нечетное, действуем так же, как и в случае представления π_r группы $B_r(\mathbb{C})$. Однако если $k_1, \ldots, k_m$ все четные, то существует два различных класса $C_1, C_2 \in \mathfrak{U}_{\mathbb{C}}$ с $N(C_1) = N(C_2)$. При этом $k_{\pi_r}(C_1) - 1$ равняется полусумме r максимальных членов набора $N(C_1)$ и $k_{\pi_r}(C_2) = k_{\pi_r}(C_1) - 1$, $k_{\pi_{r-1}}(C_i) = k_{\pi_r}(C_j)$ при $\{i,j\} = \{1,2\}$.

Эти алгоритмы описаны в 2.13.

Чтобы найти показатели $k_{\pi_i}(C)$ для исключительных простых групп, можно использовать таблицы из работы Дынкина [4], хотя он ничего не писал о минимальных полиномах. Известно, что существует каноническая биекция τ из $\mathfrak{U}_{\mathbb{C}}$ в множество классов $G_{\mathbb{C}}$-сопряженных трехмерных простых подалгебр алгебры Ли $\mathfrak{L}(G_{\mathbb{C}})$ (см. [15, 1.15, теорема 5.5.11]). В табл. 16–20 [4] для каждого класса таких подалгебр указаны координаты так называемого определяющего вектора в некотором фиксированном базисе подалгебры Картана алгебры $\mathfrak{L}(G_{\mathbb{C}})$ (см. детали в [4, гл. 3]). Легко установить, что для групп типа E_r, $r = 6$–8, соответствующие координаты для класса $\tau(C)$ совпадают с числами $k_{\pi_i}(C) - 1$. Чтобы получить значения $k_{\pi_i}(C) - 1$ для групп типов F_4 и G_2, надо взять без изменений координаты, соответствующие длинным корням, а другие координаты разделить на 2 и 3 соответственно.

1.5. Основные идеи доказательства теоремы 1.1. Используя теорему Стейнберга о тензорном произведении [9, § 12, теорема 41] и формулы нормальной формы Жордана тензорного произведения унипотентных блоков Жордана [11, теорема 2.7], нетрудно свести задачу к случаю, когда G проста и $\varphi \in \mathrm{Inf}$ (предложение 2.8). Далее ключевую роль играют вложение элемента из класса C в замкнутую в топологии Зарисского подгруппу Γ типа A_1 и знание гомоморфизма системы весов $\mathfrak{X}(G)$ в $\mathfrak{X}(SL_2(K)) \cong \mathbb{Z}$ (аддитивная группа целых чисел), ассоциированного с ограничением веса максимального тора в G на максимальный тор в Γ. Это позволяет использовать для решения нашей задачи хорошо разработанную теорию представлений группы типа A_1. В частности, нетрудно выяснить, что $k_\varphi(C) = k_{\varphi_{\mathbb{C}}}(f(C))$, если $k_{\varphi_{\mathbb{C}}}(f(C)) \leqslant p$ (предложение 2.14). Для классических групп требуемые вложения и гомоморфизмы легко построить для всех $C \in \mathfrak{U}_p$. До недавнего времени в общем случае информация о таких вложениях имелась лишь при $p > 3(h-1)$, где h — число Кокстера группы G (см. [15, гл. 5]). Тестерман [32, теорема 0.1, предложение 2.4] доказала, что любой элемент порядка p содержится в группе типа A_1, если p — хорошее простое число для G, и явно построила искомые подгруппы для выделенных классов в исключительных группах. Это позволяет решить нашу задачу без ограничений на p.

Очень полезным оказалось погружение элементов порядка p в собственные полупростые подгруппы, «хорошо вложенные» в G. Для нахождения показателей классов, представители которых содержатся в полупростых подгруппах, ассоциированных с собственными подсистемами системы корней группы G, используется теорема редукции (теорема 3.3). Эта теорема дает возможность применить индукцию по рангу и размерности группы и свести задачу к рассмотрению небольшого числа классов унипотентных элементов для групп каждого типа. Для групп типа D_r используется также стандартное вложение $B_{r_1}(K) \cdot B_{r_2}(K) \subset D_r(K)$, где $r_1 + r_2 = r$.

Если $k_{\varphi_{\mathbb{C}}}(f(C)) > p$ и элементы класса C не содержатся в удобных подгруппах, наш подход основывается на рассуждениях следующих трех типов: 1) анализ показателей элементов замыкания класса C в топологии Зарисского (лемма 2.20); 2) ослабленный аналог предложения 1.3 (предложение 2.15 и следствие 2.17); 3) для группы типа A_1, содержащей представитель класса C, в рассматриваемом G-модуле строится модуль Вейля с двумя композиционными факторами (лемма 2.18).

При $G = G_2(K)$ используются некоторые специальные рассуждения, связанные с оценками кратностей весов в неприводимых G-модулях. В § 7 приведена информация об этих кратностях, представляющая независимый интерес.

Конечно, было бы интересно найти минимальные полиномы произвольных унипотентных элементов группы G. Данная задача значительно труднее. Очевидно, что унипотентный элемент порядка, большего p, нельзя вложить в подгруппу типа A_1. Однако у автора есть некоторые подходы к проблеме, и она надеется получить результаты в этом направлении в последующих статьях.

§ 2. Обозначения, пояснения, предварительные результаты

Далее $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел, $\mathbb{Z}^+$ — множество целых неотрицательных чисел, $\binom{k}{l} = k!/(l!(k-l)!)$; $|A|$ — мощность множества A или порядок элемента A, E_l — единичная матрица степени l, E_{ij} — матрица с единицей на позиции (i,j) и нулями на других позициях, J_l — блок Жордана степени l с единицей на диагонали; $F = K$ или $F = \mathbb{C}$, $G_F = G_\mathbb{C}$, $\varphi_F = \varphi_C$, $\mathfrak{U}_F = \mathfrak{U}_\mathbb{C}$ при $F = \mathbb{C}$ и $G_F = G$, $\varphi_F = \varphi$, $\mathfrak{U}_F = \mathfrak{U}$ при $F = K$ (здесь $\varphi \in \mathrm{Irr}$). Если введены подгруппы $H_F \subseteq G_F$ или $GL_n(F)$, полагаем $H = H_K$. Когда вместо представления φ приходится рассматривать представление из Irr, обозначаемое символом φ_i, мы пишем $\varphi_{i\mathbb{C}}$ вместо $\varphi_\mathbb{C}$. Обозначим через $\mathrm{cl}(x)$ класс сопряженных элементов группы G_F, содержащий элемент x. Ниже $J(y)$ — матрица вида $\mathrm{diag}(J_{k_1}, \ldots, J_{k_t})$ с $k_1 \geqslant \cdots \geqslant k_t$, являющаяся нормальной формой Жордана унипотентного элемента $y \in SL_n(F)$, при этом положим $k(y) = k_1$. Для классической группы G_F и $C \in \mathfrak{U}_F$ обозначим символом $J(C)$ нормальную форму Жордана представителей класса C в естественной реализации группы G; последовательность $N(C)$ определяется по $J(C)$, как в 1.4. Если S — группа Шевалле над F, то S^u — множество ее унипотентных элементов, $\mathfrak{U}(S)$ — множество классов G-сопряженных элементов из S^u, $\overline{C}$ — замыкание класса $C \in \mathfrak{U}(S)$ в топологии Зарисского; $N_S(A)$ — нормализатор подгруппы $A \subset S$; $\mathfrak{L}(S)$ — алгебра Ли группы S; $\mathfrak{X}(S)$, $R(S)$ и $r(S)$ соответственно системы весов и корней (относительно фиксированного максимального тора) и ранг группы S, $\Pi(S)$ — базис в $R(S)$; $R^+(S)$ и $\mathfrak{X}^+(S)$ — множества положительных корней и доминантных весов относительно $\Pi(S)$, $R^-(S)$ — множество отрицательных корней, $\sigma(S)$ — полусумма корней из $R^+(S)$; $x_\alpha(t)$ $(t \in K)$, X_α и $\mathcal{X}_\alpha$ соответственно корневые элементы группы S и алгебры $\mathfrak{L}(S)$ и корневая подгруппа в S, ассоциированные с корнем α; $W(S)$ — группа Вейля группы S, $w_0(S) \in W(S)$ — элемент максимальной длины (см. [20, ч. II, п. (1.5)]), $(\ ,\ )$ — ненулевая $W(S)$-инвариантная симметричная билинейная форма на $\mathfrak{X}(S)$, $\langle \mu, \alpha \rangle = 2(\mu,\alpha)/(\alpha,\alpha)$ при $\mu \in \mathfrak{X}(S)$, $\alpha \in R(S)$. При $X, Y \in \mathfrak{L}(S)$, $\alpha \in R(S)$ положим $[X,Y] = XY - YX$, $H_\alpha = [X_\alpha, X_{-\alpha}]$. При $\lambda \in \mathfrak{X}^+(S)$ обозначим $-w_0(S)\lambda$ символом λ'. Если S и S_1 — односвязные полупростые алгебраические группы одного и того же типа над K и $\mathbb{C}$ соответственно, то системы весов $\mathfrak{X}(S)$ и $\mathfrak{X}(S_1)$ отождествляются. Для замкнутой в топологии Зарисского подгруппы $\Gamma \subset S$ назовем гомоморфизм $\tau : \mathfrak{X}(S) \to \mathfrak{X}(\Gamma)$ *естественным*, если τ задается ограничением весов максимального тора группы S на максимальный тор в Γ. Если Γ — группа типа A_1, $R^+(\Gamma) = \{\alpha\}$ и τ такой, как выше, то t_τ — гомоморфизм из $\mathfrak{X}(S)$ в $\mathbb{Z}$, задаваемый формулой $t_\tau(\mu) = \langle \tau(\mu), \alpha \rangle$. Напомним, что $\mathrm{Irr}\, S = \mathrm{Inf}\, S$ при $F = \mathbb{C}$, при $F = K$ представление φ из $\mathrm{Irr}\, S$ содержится в $\mathrm{Inf}\, S$ тогда и только тогда, когда $\omega(\varphi) = \sum_{i=1}^{r(S)} a_i\omega_i$, $a_i < p$ [1, теоремы 6.4, 7.5]. Рассматриваются лишь конечномерные представления и модули. Ниже $V(\mu)$ и $M(\mu)$ соответственно модуль Вейля и неприводимый S-модуль со старшим весом $\mu \in \mathfrak{X}^+(S)$; $\mathfrak{X}(M)$ ($\mathfrak{X}(\psi)$) — система весов S-модуля M (представления ψ); $g|A$ ($H|A$) — ограничение преобразования g (подгруппы H) на подпространство A; $d\psi$ — дифференциал представления ψ. Если M — S-модуль, то M_μ — весовое подпространство в M, ассоциированное с весом μ, $\omega(v)$ — вес весового вектора $v \in M$. Известно, что при $m \in M$, $\alpha \in R(S)$, $t \in K$

$$x_\alpha(t)m = \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} t^i X_{\alpha,i}\right) m, \tag{2}$$

где $X_{\alpha,i}$ — линейные преобразования модуля M, $X_{\alpha,i} = 0$ при $i > i_0$, $i_0 = i_0(M) \in \mathbb{Z}^+$, $X_{\alpha,i} m_\mu \subset M_{\mu+i\alpha}$, $X_{\alpha,i} = X_\alpha^i / i!$ при $F = \mathbb{C}$ или $F = K$, $i < p$ [1, предложение 5.13]. При $F = \mathbb{C}$ или $i_0 < p$ запишем $x_\alpha(t) = \exp(tX_\alpha)$. Ниже $\langle u_1, \ldots, u_j \rangle$ — линейная оболочка векторов $u_1, \ldots, u_j \in M$; $\langle S_1, \ldots, S_i \rangle$ — подгруппа в S, порожденная подгруппами $S_1, \ldots, S_i \subset S$,

$$U^+(S) = \langle \mathscr{X}_\alpha \mid \alpha \in R^+(S) \rangle, \quad U^-(S) = \langle \mathscr{X}_\alpha \mid \alpha \in R^-(S) \rangle,$$
$$\mathfrak{L}^+(S) = \langle X_\alpha \mid \alpha \in R^+(S) \rangle, \quad \mathfrak{L}^-(S) = \langle X_\alpha \mid \alpha \in R^-(S) \rangle.$$

При $\beta_1, \ldots, \beta_l \in R^+(S)$ положим

$$H(\beta_1, \ldots, \beta_l) = \langle \mathscr{X}_{\pm\beta_1}, \ldots, \mathscr{X}_{\pm\beta_l} \rangle \in S_F.$$

Корневые подгруппы и элементы, ассоциированные с длинными или короткими корнями, будем называть *длинными* или *короткими* соответственно. При $\varphi \in \operatorname{Irr} S$, $a \in S^u$ или $\mathfrak{U}(S)$ положим $m_\varphi(a) = k_\varphi(a) - 1$. Если $S = G_F$, мы иногда опускаем указание группы во введенных выше обозначениях и пишем W, $\mathfrak{L}$, Π и т. д. Обозначим $\mathfrak{L}(G_F)$ символом $\mathfrak{L}_F$ и положим $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$, $H(i_1, \ldots, i_k) = H(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k})$, $X_{\pm i} = X_{\pm\alpha_i}$, $\mathscr{X}_{\pm i} = \mathscr{X}_{\pm\alpha_i}$, $x_{\pm i}(t) = x_{\pm\alpha_i}(t)$ при $t \in F$. Для простой группы G и $C \in U_\mathbb{C}$ ниже $l_i(C) = k_{\pi_i}(C) - 1$, $l(C) = (l_1(C), \ldots, l_r(C))$. Начало и конец доказательства отмечаются символами $\lhd$ и $\rhd$.

Для простых классических групп ε_i — веса, определенные в [3, гл. VIII, пп. 1–4]. Напомним, что

$$\omega_i = \sum_{j=1}^{i} \varepsilon_j, \quad \alpha_l = \varepsilon_l - \varepsilon_{l+1}$$

при $G = A_r(K)$; $G = B_r(K)$, $i, l < r$; $G = C_r(K)$, $l < r$; $G = D_r(K)$, $i < r - 1$, $l < r$;

$$\omega_r = \left(\sum_{j=1}^{r} \varepsilon_j\right) \Big/ 2, \quad \alpha_r = \varepsilon_r$$

при $G = B_r(K)$; $\alpha_r = 2\varepsilon_r$ при $G = C_r(K)$;

$$\omega_{r-1} = (\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{r-1} - \varepsilon_r)/2, \ \omega_r = (\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{r-1} + \varepsilon_r)/2, \ \alpha_r = \varepsilon_{r-1} + \varepsilon_r$$

при $G = D_r(K)$. Известно, что $SL_{r+1}(F)$ и $Sp_{2r}(F)$ — односвязные группы типов A_r и C_r соответственно; если характеристика поля F не равна 2, то группы $SO_{2r+1}(F)$ и $SO_{2r}(F)$ суть фактор-группы односвязных групп типов B_r и D_r (спинорных групп) по центральным подгруппам порядка 2;

$$B_1(F) \cong C_1(F) \cong D_1(F) \cong A_1(F),$$
$$B_2(F) \cong C_2(F), \quad D_2(F) \cong A_1(F) \times A_1(F), \quad D_3(F) \cong A_3(F).$$

Пусть G — классическая группа и $p > 2$ при $G = B_r(K)$ или $G = D_r(K)$. Далее $V_F = V_F(G)$ — естественный G_F-модуль, $n = n(r) = \dim V_F$. Ясно, что $n = r + 1$ при $G = A_r(K)$, $n = 2r + 1$ при $G = B_r(K)$, $n = 2r$ при $G = C_r(K)$ или $G = D_r(K)$. Пусть π — канонический эпиморфизм группы G_F на $SL_n(F)$, $Sp_n(F)$ и $SO_n(F)$ при G_F, равном $A_r(F)$, $C_r(F)$ и $B_r(F)$ или $D_r(F)$ соответственно ($\pi = \operatorname{Id}$ при $G_F = A_r(F)$ и $G_F = C_r(F)$). Положим $\mathfrak{L}_F = d\pi(\mathfrak{L}_F)$,

$\widetilde{H} = \pi(H)$, $\tilde{x} = \pi(x)$ (или $\tilde{x} = d\pi(x)$) для подгруппы $H \subset G_F$ и элемента $x \in G_F$ (или $x \in \mathfrak{L}_F$). Ниже $\widetilde{G}_F$ и $\mathfrak{L}_F$ отождествляются с классическими подгруппой в $SL_n(F)$ и подалгеброй алгебры Ли $\mathrm{sl}_n(F)$. Известно, что отображение $C \to \pi(C)$, $C \in \mathfrak{U}_F$, есть биекция из $\mathfrak{U}_F$ на аналогичное множество для $\widetilde{G}_F$. Поэтому можно использовать информацию о классах сопряженных унипотентных элементов в классических линейных группах при работе с классами из $\mathfrak{U}_F$.

Известно также, что модуль V_F имеет базис

$$v_1, \ldots, v_n \tag{3}$$

такой, что $\omega(v_i) = \varepsilon_i$ при $G_F = A_r(F)$; если $G_F = C_r(F)$ или $G_F = D_r(F)$, то $\omega(v_i) = \varepsilon_i$ при $i \leqslant r$ и $\omega(v_i) = -\varepsilon_{n+1-i}$ при $i > r$; если же $G_F = B_r(F)$, то $\omega(v_i) = \varepsilon_i$ при $i \leqslant r$, $\omega(v_{r+1}) = 0$, $\omega(v_i) = -\varepsilon_{n+1-i}$ при $i > r+1$. При этом если $\widetilde{G}_F = SO_n(F)$ или $Sp_n(F)$ и Q — невырожденная $\widetilde{G}_F$-инвариантная билинейная форма, то $Q(v_i, v_j) = 0$ при $i + j \neq n + 1$,

$$Q(v_i, v_{n+1-i}) = \begin{cases} 1 & \text{при } i < n+1-i, \\ -2 & \text{при } i = n+1-i. \end{cases}$$

Можно считать, что элементы $X_{\pm\alpha}$, $\alpha \in \Pi$, имеют в базисе (3) следующие матрицы:

$$\begin{gathered}
X_i = E_{i,i+1},\ X_{-i} = E_{i+1,i} \text{ при } G_F = A_r(F), \\
X_i = E_{i,i+1} - E_{n-i,n-i+1},\ X_{-i} = E_{i+1,i} - E_{n-i+1,n-i} \\
\text{при } G_F = B_r(F), C_r(F), D_r(F),\ i < r, \\
X_r = 2E_{r,r+1} + E_{r+1,r+2},\ X_{-r} = E_{r+1,r} + 2E_{r+2,r+1} \text{ при } G_F = B_r(F), \\
X_r = E_{r,r+1},\ X_{-r} = E_{r+1,r} \text{ при } G_F = C_r(F), \\
X_r = E_{r-1,r+1} - E_{r,r+2},\ X_{-r} = E_{r+1,r-1} - E_{r+2,r} \text{ при } G_F = D_r(F).
\end{gathered} \tag{4}$$

Отметим, что формулы (4) отличаются от аналогичных формул в [3, гл. VIII, § 13] знаками при X_{-i}.

2.1. Классы сопряженных унипотентных элементов в простых алгебраических группах и выбор биекции f. Будем использовать символ f_G вместо f, когда надо явно указать группу. Пусть G проста и p — хорошее простое число для G. В силу результатов Бала — Картера [14], Картера [15, теорема 5.9.6] и Поммеренинга [23] существует биекция из $\mathfrak{U}_F$ на множество классов G_F-сопряженных пар (L_F, P_F), где L_F — подгруппа Леви в G_F, а P_F — выделенная параболическая подгруппа полупростой части группы L_F. Класс, соответствующий паре (L_F, P_F), содержит плотную орбиту группы P_F на ее унипотентном радикале. Любая пара (L_F, P_F) полностью определяется двумя подмножествами $I \subseteq J \subseteq \Pi$ такими, что коммутант группы L_F есть $\langle \mathscr{X}_{\pm\alpha} \rangle$, где α пробегает J, а P_F — параболическая подгруппа в L_F, канонически определяемая множеством I. Естественно, различные пары (I, J) могут приводить к одному и тому же классу сопряженных пар (L_F, P_F). Описание классов G_F-сопряженных пар (L_F, P_F) не зависит от характеристики поля F, и множество $\mathfrak{U}_F$ можно параметризовать подходящим набором пар (I, J). Пусть f' — биекция, переводящая класс $C \in \mathfrak{U}$, задаваемый парой (I, J), в класс из $\mathfrak{U}_{\mathbb{C}}$, задаваемый той же парой. Для класса $C \in \mathfrak{U}$ определим помеченную диаграмму Дынкина $\Delta(C)$, взяв в качестве $\Delta(C)$ такую диаграмму для $f'(C)$. Напомним, что $\Delta(C)$ — упорядоченная последовательность длины $r(G)$, состоящая из элементов множества $\{0, 1, 2\}$ [15, предложения 5.6.6–5.6.8]. Пусть $\Delta_i(C)$ — i-й член последовательности $\Delta(C)$. Положим $(2, \ldots, 2) = \Delta_r$ (здесь r двоек в скобках). Известно, что регулярные унипотентные элементы сопряжены в G [15, предложение 5.1.2] и что $\Delta(C) = \Delta_r$ для класса C таких элементов в группе ранга r. Назовем этот класс регулярным.

Для классических групп удобнее использовать описание классов из $\mathfrak{U}_F$ и биекции f, тесно связанное с нормальной формой Жордана элементов в естественной реализации группы G. Пусть $p \neq 2$ при $G \neq A_r(K)$. Известно, что при $G = A_r(K)$ унипотентные элементы x и y сопряжены в G_F в точности тогда, когда $J(x) = J(y)$. Если G — простая классическая группа, отличная от $A_r(K)$, то в силу [18, предложения 3.3, 3.5] (см. также [8, гл. IV, упражнения 2.15(ii), (iii)]) выполняется следующее.

(a) Унипотентный элемент $x \in SL_n(F)$ с $J(x) = \operatorname{diag}(J_{k_1}, \dots, J_{k_t})$ сопряжен с элементом из $\widetilde{G}_F$ тогда и только тогда, когда число $|\{k_l \mid 1 \leqslant l \leqslant t,\ k_l = a\}|$ четно для каждого нечетного a, если $\widetilde{G}_F = Sp_n(F)$, и четно для каждого четного a при $\widetilde{G}_F = SO_n(F)$.

(b) Если $x \in G_F^u$ и либо $G_F = C_r(F)$, либо у $J(x)$ есть блок нечетной степени, то $\operatorname{cl}(x) = \{y \in G_F^u \mid J(x) = J(y)\}$.

(c) Унипотентные элементы x_1 и $x_2 \in O_n(F)$ сопряжены в $O_n(F)$ тогда и только тогда, когда $J(x_1) = J(x_2)$.

Теперь пусть $G = D_r(K)$, $k_1 \geqslant \dots \geqslant k_s$, $k_1 + \dots + k_s = r$ и все числа $k_1, \dots, k_s$ четны. Положим

$$I = \{k_1, k_1 + k_2 \dots, k_1 + \dots + k_{s-1}, r\},\ I_1 = \{1, \dots, r\} \setminus I,\ I_2 = I_1 \setminus \{r-1\},$$

$$y_{1F} = y_{1F}(k_1, \dots, k_s) = \prod_{i \in I_1} x_i(1),$$

$$y_{2F} = y_{2F}(k_1, \dots, k_s) = x_r(1) \prod_{i \in I_2} x_i(1) \in G_F,$$

$$w = \operatorname{diag}\left(E_{r-1}, \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}, E_{r-1}\right) \in GL_n(F).$$

Используя формулы (2) и (4), легко установить, что

$$J(\tilde{y}_{1F}) = J(\tilde{y}_{2F}) = \operatorname{diag}(J_{k_1}, J_{k_1}, \dots, J_{k_s}, J_{k_s}),$$

элемент w принадлежит $O_n(F)$ и переставляет $\tilde{y}_{1F}$ и $\tilde{y}_{2F}$. В силу результата 2.27(ii) [8, гл. IV] $C_{O(n,F)}(\tilde{y}_{1F}) \subset SO_n(F)$, значит, y_{1F} и y_{2F} не сопряжены в G_F, так как $\det w = -1$. Поэтому G_F имеет два класса C с $J(C) = J(\tilde{y}_{1F})$. Положим $y_i = y_{iK}$, $i = 1, 2$.

Сейчас можно задать биекцию f для классических групп. Если $G = D_r(K)$ и $C = \operatorname{cl}(y_i)$, $i = 1, 2$, положим $f(C) = \operatorname{cl}(y_{i\mathbb{C}})$. В других случаях в качестве $f(C)$ возьмем класс $C' \in \mathfrak{U}_{\mathbb{C}}$ с $J(C) = J(C')$. Из приведенных выше сведений о множествах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{U}_{\mathbb{C}}$ следует, что f корректно определена.

Явное описание выделенных параболических подгрупп и помеченных диаграмм Дынкина унипотентных элементов классических групп можно найти в [15, § 5.9, 13.1], описание выделенных унипотентных элементов этих групп — в [32, предложения 3.2, 3.3]. Из этих результатов нетрудно вывести, что для классических групп $f = f'$.

Теперь пусть p удовлетворяет условиям теоремы 1.1, но необязательно является хорошим для G. Для исключительных групп унипотентные классы C описаны Штулером [30], Мизуно [21, 22] и Шоджи [27]. В работах [30, теорема 1; 21, предложение 6.1; 22, теоремы 2, 3; 27, следствие 2.3] приведены списки представителей классов из U, не зависящие от p. Если p — хорошее простое число для G, то леммы 2.1 и 2.5 [32], леммы 11–36 и 38–119 [22], следствие 2.3 и табл. 7 [27], доказательства предложения 6.1 [21], предложения 6.1 [32], теоремы 1 [22] и теоремы 1 [30], а также табл. 1–3 [22] позволяют для каждого представителя x в таком списке найти пару (L, P), ассоциированную с $\operatorname{cl}(x)$ (см. начало п. 2.1). Определим биекцию f для исключительных простых групп, взяв в качестве $f(\operatorname{cl}(x))$ класс в $U_{\mathbb{C}}$, задаваемый парой $(L_{\mathbb{C}}, P_{\mathbb{C}})$. Очевидно, что $f = f'$, если p — хорошее простое число для G.

Остается задать биекцию f для непростых полупростых групп. Пусть $G = G_1 \dots G_l$ — полупростая группа с простыми компонентами $G_1, \dots, G_l$. Каждый класс $C \in \mathfrak{U}$ есть произведение однозначно определяемых классов $C_j \in \mathfrak{U}(G_j)$. Положим $f_G(C) = f_{G_1}(C_1) \dots f_{G_l}(C_l)$. Поскольку $G_{\mathbb{C}} = G_{1\mathbb{C}} \dots G_{l\mathbb{C}}$, ясно, что отображение f_G биективно.

Всюду в дальнейшем $f = f_G$ — биекция, определенная выше; для простой группы G и класса $C \in \mathfrak{U}(G)$ положим $l_i(C) = l_i(f(C))$, $1 \leqslant i \leqslant r$, $l(C) = l(f(C))$.

Нужная нам информация о классах унипотентных элементов в исключительных группах содержится в табл. 1–5, основанных на табл. 16–20 [4], таблицах из § 13.4 [15], табл. 1–3 [22], табл. 7 [27] и теореме 1 [22]. Для каждого класса $C_F \in \mathfrak{U}_F$ приведены диаграмма $\Delta(C_F)$ и последовательность $l(C_F)$. Указано также, для каких p класс C принадлежит $\mathfrak{U}_p$ (последний столбец; он пуст, если $C \in \mathfrak{U}_p$ для любого p). Приведена одна из полупростых подгрупп $H_F \subseteq G_F$, порожденных корневыми подгруппами и содержащих представители класса C_F, при этом H_F не зависит от F. В некоторых случаях мы можем доказать эти вложения только для хороших p, но тогда $C \notin \mathfrak{U}_p$ для плохих p. Часто H_F является коммутантом группы Леви L_F, ассоциированной с C_F в начале параграфа. Ситуации, когда $H_F \neq G_F$ и $H_F \neq L'_F$, рассматриваются с помощью леммы 2.5 и предложения 2.6 [32], предложения 6.1 [21], следствия 2.3 [27] и § 12 [13]. Ниже $\mathrm{Tab}\, G$ — таблицы 1–5 при $G = E_6(K), E_7(K), E_8(K), F_4(K), G_2(K)$ соответственно. Иногда в $\mathrm{Tab}\, G$ группа $H(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}, \beta)$ с $\beta \in R$ обозначается символом $H(i_1, \dots, i_k, \beta)$. Заметим, что в табл. 20 [4] есть несколько опечаток. Подалгебры типов $3A_2$ и $D_4(a_1)$ должны быть в одной строке с $[A_3 + 2A_1]'$, а не с $[A_3 + 2A_1]''$; подалгебры типов $E_7 + A_1(a_{2,0})$ и $E_6 + A_2$ из строк 4 и 5 на с. 420 [4] должны быть в одной строке, 3-й и 4-й столбцы этой строки должны содержать значения из строки 4; координаты определяющих векторов в строках, соответствующих подалгебрам $D_8(a_1)$ и $E_7 + A_1(a_{2,0})$, и характеристика (помеченная диаграмма Дынкина) подалгебры D_5 указаны неверно. Имеется также опечатка в табл. 8 [22]: класс $D_5(a_1) + A_1$ не лежит в замыкании класса $A_3 + A_4$ в топологии Зарисского (см. таблицу в § 13.4 [15]).

2.2. Лемма. ([3, гл. VIII, § 9.4] при $F = \mathbb{C}$ и [11, гл. VIII, теорема 2.7] при $F = K$). *Пусть $l \leqslant m$, и пусть $m \leqslant p$, если $F = K$. Тогда $k(J_1 \otimes J_m) = l + m - 1$ при $F = \mathbb{C}$ и $\min\{p, l + m - 1\}$ при $F = K$.*

2.3. Лемма. *Пусть $\Gamma = SL_2(F)$, $T \subset \Gamma$ — максимальный тор и α — положительный корень относительно T, пусть $\varphi_r \in \mathrm{Irr}\,\Gamma$, $\omega(\varphi_r) = r\omega_1$, и пусть $r < p$, если $F = K$. Тогда $k_{\varphi_r}(x) = \dim \varphi_r = r + 1$ для любого неединичного $x \in \Gamma^u$. Кроме того, можно считать, что вектор v_j базиса (3) естественного $SL_{r+1}(F)$-модуля V_F имеет вес $(r - 2(j-1))\omega_1$ относительно T, а преобразования $d\varphi_r(X_\alpha)$ и $d\varphi_r(X_{-\alpha})$ записываются в этом базисе матрицами $\sum_{i=1}^{r} i(r+1-i)E_{i,i+1}$ и $\sum_{i=1}^{r} E_{i+1,i}$ соответственно.*

$\lhd$ Доказательство следует непосредственно из лемм 5.5.3 и 5.5.4 [15]. $\rhd$

Для $t \in F$ и r такого, как в 2.3, положим

$$a_r(t) = \exp\left(t \sum_{i=1}^{r} i(r+1-i)E_{i,i+1}\right), \quad b_r(t) = \exp\left(t \sum_{i=1}^{r} E_{i+1,i}\right).$$

2.4. Лемма. *Пусть Γ, x и α такие, как в 2.3, и M — $F\Gamma$-модуль. Предположим, что $X^j_{\pm\alpha} M \neq 0$ для некоторого $j \in \mathbb{Z}^+$ и $j < p$, если $F = K$. Тогда $(x-1)^j M \neq 0$.*

$\lhd$ Напомним, что все неединичные элементы из Γ^u сопряжены в Γ и операторы X_α, $X_{-\alpha} \in \mathrm{End}\, M$ сопряжены с помощью группы Γ. Очевидно, что $X^j_\alpha m \neq 0$ для некоторого весового вектора $m \in M$. Можно считать, что $x =$

$x_\alpha(1)$. Тогда ввиду формулы (2) $X_\alpha^j m$ — весовая компонента вектора $(x-1)^j m$, откуда вытекает утверждение леммы. $\triangleright$

2.5. Лемма. *Пусть S — полупростая алгебраическая группа над $\mathbb{C}$, $\Gamma \subseteq S$ — замкнутая в топологии Зарисского подгруппа типа A_1, $x \in \Gamma \cap S^u$, $x \neq 1$, $\tau : \mathfrak{X}(S) \to \mathfrak{X}(\Gamma)$ — естественный гомоморфизм, $t = t_\tau$, и пусть $\psi \in \operatorname{Irr} S$. Тогда $m_\psi(x) = \max\{t(\mu) \mid \mu \in \mathfrak{X}(\psi)\}$.*

$\triangleleft$ Известно, что ограничение $\psi|\Gamma$ — прямая сумма своих неприводимых компонент ψ_k. Очевидно, что $m_\psi(x) = \max\{m_{\psi_i}(x)\}$. Затем применим лемму 2.3. $\triangleright$

2.6. Предложение. *Пусть $x \in G_\mathbb{C}^u$, $\psi, \psi_1, \psi_2 \in \operatorname{Irr} G_\mathbb{C}$, $\omega(\psi) = \omega(\psi_1) + \omega(\psi_2)$. Тогда $m_\psi(x) = m_{\psi_1}(x) + m_{\psi_2}(x)$.*

$\triangleleft$ Известно, что x можно вложить в замкнутую в топологии Зарисского подгруппу типа A_1. По [3, гл. VIII, § 7, предложение 10] $\mathfrak{X}(\psi) = \mathfrak{X}(\psi_1) + \mathfrak{X}(\psi_2)$. Теперь наше утверждение следует из леммы 2.5. $\triangleright$

2.7. Доказательство предложения 1.3. $\triangleleft$ Используем предложение 2.6 и индукцию по $\sum a_i$. $\triangleright$

Сведем задачу к простым группам и инфинитезимально неприводимым представлениям.

2.8. Предложение. *Пусть $G = G_1 \dots G_l$, где подгруппы G_i — простые компоненты группы G (l может равняться 1), и пусть формула (1) справедлива для f_{G_i} и всех $\rho \in \operatorname{Inf} G_i$, $1 \leqslant i \leqslant l$. Тогда она верна для f_G и всех представлений $\varphi \in \operatorname{Irr} G$.*

$\triangleleft$ Достаточно показать, что формула (1) выполняется для всех $\varphi \in \operatorname{Irr} G$ в следующих ситуациях.

I. Группа G проста и формула (1) справедлива при $\varphi \in \operatorname{Inf} G$.

II. $G = G_1 \dots G_l$, где G_i — простые компоненты группы G, и формула (1) верна для f_{G_i} и всех $\rho \in \operatorname{Irr} G_i$.

Рассмотрим эти случаи одновременно, поскольку доказательства основаны на сходных рассуждениях. Используя известные факты теории представлений полупростых групп и теорему Стейнберга о тензорном произведении [9, теорема 41], можно записать $\varphi = \varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_l$, где в случае I $\varphi_i = \mathrm{Fr}^{i-1} \circ \psi_i$, Fr — морфизм Фробениуса группы G, $\psi_i \in \operatorname{Inf} G$ и $\omega(\varphi_\mathbb{C}) = \sum_{i=1}^{l} \omega(\varphi_{i\mathbb{C}})$; а в случае II $\varphi_i \in \operatorname{Irr} G_i$, $\varphi_\mathbb{C} = \varphi_{1\mathbb{C}} \otimes \dots \otimes \varphi_{l\mathbb{C}}$. Пусть $C \in \mathfrak{U}$. В случае I положим $C_i = C$ при $1 \leqslant i \leqslant l$, в случае II запишем $C = C_1 \dots C_l$, где $C_i \in \mathfrak{U}(G_i)$. Предположим, что $k_{\psi_i}(C) = \min\{p, k_{\psi_{i\mathbb{C}}}(f(C))\}$ в случае I и $k_{\varphi_i}(C_i) = \min\{p, k_{\varphi_{i\mathbb{C}}}(f_{G_i}(C_i))\}$ в случае II; $1 \leqslant i \leqslant l$. Несомненно, отсюда вытекает, что $k_{\varphi_i}(C) = \min\{p, k_{\varphi_{i\mathbb{C}}}(f(C))\}$ в случае I. Применив индукцию по l, лемму 2.2 и предложение 2.6, заключаем, что

$$m_{\varphi_\mathbb{C}}(f(C)) = \sum_{i=1}^{l} m_{\varphi_{i\mathbb{C}}}(f(C_i)), \quad k_\varphi(C) = \min\left\{p, 1 + \sum_{i=1}^{l} m_{\varphi_i}(C_i)\right\}$$

в обоих случаях. Отсюда следует формула (1) для случаев I и II, что и требовалось доказать. $\triangleright$

С этого момента полагаем, что G проста. Конечно, следующий факт хорошо известен, но нам не удалось найти явную ссылку.

2.9. Лемма. *Пусть*

$$G_F = E_6(F), \quad H_{\pm 1} = \mathscr{X}_{\pm 2}, \quad H_{\pm 2} = \mathscr{X}_{\pm 4}, \quad H_{\pm 3} = \langle x_{\pm 3}(t) x_{\pm 5}(t), t \in F \rangle,$$
$$H_{\pm 4} = \langle x_{\pm 1}(t) x_{\pm 6}(t), t \in F \rangle, \quad H = \langle H_{\pm i} \mid 1 \leqslant i \leqslant 4 \rangle.$$

Тогда $H \cong F_4(F)$ и можно отождествить группы $H_{\pm i}$ с корневыми подгруппами $\mathscr{X}_{\pm i}$ в $F_4(F)$.

$\lhd$ Обозначим одним и тем же символом ξ автоморфизм системы корней R, индуцированный симметрией схемы Дынкина, и ассоциированный с ним графовый автоморфизм группы G_F такой, что $\xi(x_\alpha(t)) = x_{\xi(\alpha)}(t)$ при $\alpha \in \Pi$. Пусть $N \subset G_F$ — группа неподвижных точек автоморфизма ξ. Легко видеть, что $H \subseteq N$. Используя информацию о действии ξ на Π и G_F и результаты [9, пример d в § 11, теорема 32], можно установить, что группа N имеет систему Титса с группой Вейля типа F_4 и порождается связными унипотентными группами, лежащими в подгруппах, сопряженных с нормальной подгруппой подгруппы Бореля. Из [12, следствие 7.5, теорема 29.5] и классификации полупростых алгебраических групп вытекает, что $N \cong F_4(F)$. Затем можно проверить, что X_1+X_6, $X_{-1}+X_{-6}$, X_3+X_5, $X_{-3}+X_{-5}$, $X_{\pm 2}$, $X_{\pm 4}$ — корневые элементы алгебры Ли $\mathfrak{L}(N)$, ассоциированные с корнями из $\Pi(N)$ и противоположными к ним. Для завершения доказательства используем [12, теорема 26.3]. $\rhd$

2.10. Лемма. *Пусть $C \in \mathfrak{U}_p$, и пусть $(G, \Delta(C))$ — одна из следующих пар:*

$$1)\ (S, \Delta_r),\ \text{где } S \in \{F_4(K), G_2(K), E_r(K) \mid 6 \leqslant r \leqslant 8\};$$
$$2)\ (E_6(K), (2,2,2,0,2,2)); \quad 3)\ (E_7(K), (2,2,2,0,2,2,2));$$
$$4)\ (E_7(K), (2,2,2,0,2,0,2)); \quad 5)\ (E_8(K), (2,2,2,0,2,2,2,2));$$
$$6)\ (E_8(K), (2,2,2,0,2,0,2,2)).$$

Если $\alpha_i + \alpha_j \in R$, положим $X_{i+j} = X_{\alpha_i+\alpha_j}$. Пусть $C_{\mathbb{C}} = f(C)$. Тогда существуют замкнутая в топологии Зарисского подгруппа $\Gamma_F \subset G_F$ типа A_1 и естественный гомоморфизм $\tau : \mathfrak{X}(G_F) \to \mathfrak{X}(\Gamma_F)$ такие, что Γ_F содержит представители класса C_F и $t_\tau(\alpha_i) = \Delta_i(C)$. Пусть $\alpha \in R^+(\Gamma)$, и пусть X_α — соответствующий корневой элемент в $\mathfrak{L}(\Gamma_F)$. Можно считать, что

$X_\alpha = \sum_{i=1}^{r} X_i$ *в случае* 1,
$X_\alpha = X_1 + X_2 - X_{3+4} - X_{4+5} + X_5 + X_6$ *в случае* 2,
$X_\alpha = X_1 + X_3 + X_{3+4} + X_{2+4} + X_5 + X_6 + X_7$ *в случае* 3,
$X_\alpha = X_1 + X_2 + X_3 + X_{2+4} + X_{4+5} + X_{5+6} + X_{6+7}$ *в случае* 4,
$X_\alpha = X_1 + X_2 + X_{2+4} + X_{3+4} + X_5 + X_6 + X_7 + X_8$ *в случае* 5,
$X_\alpha = X_1 + X_2 + X_3 + X_{2+4} + X_{4+5} + X_{5+6} + X_{6+7} + X_8$ *в случае* 6.

$\lhd$ Поясним, что в нашей ситуации p является хорошим для G в силу [32, предложение 2.2]. Предположим сначала, что $G \neq E_6(K)$ в случае 1. Тогда из [32, предложение 2.4] и [31, теорема 1] вытекают существование искомых подгрупп Γ_F и формулы для X_α во всех рассматриваемых случаях, а также утверждение о t_τ для случаев 1, 3, 5 и 6. В оставшихся случаях тоже можно применить рассуждения из [31, 32]. А именно, рассмотрим базисы Шевалле подалгебр, изоморфных $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$, построенных в [32, предложение 2.4] для случаев 2 и 4. Пусть h — элемент Картана одного из этих базисов. Используя те же структурные константы из [16], что были выбраны в [32], можно проверить, что $[h, X_i] = \Delta_i(C)X_i$ и $[h, X_{-i}] = -\Delta_i(C)X_{-i}$. Теперь применим рассуждения из доказательств лемм 1 и 2 [31], чтобы построить искомые гомоморфизмы.

Наконец, пусть $G = E_6(K)$, $\Delta(C) = \Delta_6$, и пусть подгруппа $H_F \subset G_F$ такая же, как в 2.9. Тогда $C_F \cap H_F$ — регулярный класс в H_F и существует естественный гомоморфизм из $\mathfrak{X}(G_F)$ в $\mathfrak{X}(H_F)$, отображающий простые корни в простые. Теперь лемма следует из леммы 2.9 и результата для $F_4(K)$. $\rhd$

2.11. Лемма. *Пусть $\widetilde{G}_F = Sp_n(F)$, $n = 2r$, или $\widetilde{G}_F = SO_n(F)$, $n = 2r+1$, $D = \mathrm{diag}(d_{11}, \ldots, d_{nn}) \in GL_n(F)$. Пусть в обоих случаях $d_{ii} = 1$ при $1 \leqslant i \leqslant r+1$; при $j \geqslant 2$ пусть $d_{r+j,r+j} = (-1)^{j-1}$, если $\widetilde{G}_F = Sp_n(F)$, и $d_{r+j,r+j} = (-1)^j 2$, если*

$\widetilde{G}_F = SO_n(F)$. *Положим* $H = \langle a_{n-1}(t), b_{n-1}(t) \mid t \in F\rangle$. *Тогда*

$$DHD^{-1} \in \widetilde{G}_F \text{ и } Db_{n-1}(t)D^{-1} = \exp\left(\sum_{i=1}^{r} tX_{-i}\right)$$

при $F = \mathbb{C}$ *или* $F = K$ *и* $p \geqslant n$.

$\lhd$ Это проверяется непосредственно с использованием формул (4), так как форма Q известна. $\rhd$

2.12. Предложение. *Пусть* $C \in \mathfrak{U}_p$ *и* $1 \notin C$. *Тогда существуют замкнутые в топологии Зарисского подгруппы* $\Gamma_F \subset G_F$ *типа* A_1 *и гомоморфизм* $\tau : \mathfrak{X}(G) \to \mathfrak{X}(A_1)$ *со следующими свойствами*:

(a) *подгруппы* Γ_K *и* $\Gamma_{\mathbb{C}}$ *содержат представители классов* C *и* $f(C)$ *соответственно*;
(b) τ *— естественный гомоморфизм для обоих вложений* $\Gamma_K \subset G_K$ *и* $\Gamma_{\mathbb{C}} \subset G_{\mathbb{C}}$;
(c) $t_\tau(\alpha_i) = \Delta_i(C)$ *при* $1 \leqslant i \leqslant r(G)$;
(d) *для классических групп* $N(C)$ *совпадает с совокупностью чисел* $\{t_\tau(\omega(v_j)) \mid 1 \leqslant j \leqslant n\}$ *(с учетом кратностей)*.

$\lhd$ Положим $C_F = C$ при $F = K$ и $C_F = f(C)$ при $F = \mathbb{C}$. Из результатов 5.6.6–5.6.7 [15] следует, что если существуют подгруппы Γ_F и гомоморфизм τ, удовлетворяющие условиям (a), (b) (и (d) для классических групп), то можно так выбрать τ, чтобы и (c) выполнялось. Поэтому достаточно найти Γ_F и τ со свойствами (a), (b) и (d) для нашего C. Можно было бы также ограничиться свойствами (a)–(c), а затем вывести (d), используя рассуждения из [15, § 13.1], но легче доказывать (d) одновременно с построением групп Γ_F для классических групп. Мы будем неоднократно использовать следующее довольно очевидное утверждение.

(A) *Пусть* $\Gamma_F \subset H_F \subset G_F$, $H_{\mathbb{C}}$ *и* H_K *— полупростые подгруппы одного и того же типа,* Γ_F *— подгруппы типа* A_1, H_F *и* Γ_F *замкнуты в топологии Зарисского. Пусть гомоморфизм* $\rho : \mathfrak{X}(G) \to \mathfrak{X}(H)$ *является естественным для обоих вложений* $H \subset G$ *и* $H_{\mathbb{C}} \subset G_{\mathbb{C}}$ *и гомоморфизм* $\psi : \mathfrak{X}(H) \to \mathfrak{X}(A_1)$ *естествен для обоих вложений* $\Gamma \subset H$ *и* $\Gamma_{\mathbb{C}} \subset H_{\mathbb{C}}$. *Тогда* $\psi\rho$ *естествен для обоих вложений* $\Gamma \subset G$ *и* $\Gamma_{\mathbb{C}} \subset G_{\mathbb{C}}$.

Утверждение (A) позволяет применить индукцию по $r(G)$.

Пусть G — классическая группа. Предположим, что $J(C)) = J_n$. Тогда предложение следует из лемм 2.3 и 2.11.

Пусть $G = C_r(K)$ или $G = D_r(K)$, и пусть $J(C) = \mathrm{diag}(J_r, J_r)$. Положим $H_F = \langle \mathscr{X}_{\pm i} \mid 1 \leqslant i < r\rangle$ при $G = C_r(K)$ и $H_F^1 = \langle \mathscr{X}_{\pm i} \mid 1 \leqslant i < r\rangle$, $H_F^2 = \langle \mathscr{X}_{\pm r}, \mathscr{X}_{\pm i} \mid 1 \leqslant i < r-1\rangle$ при $G = D_r(K)$. Тогда $H_F \cong H_F^j \cong A_{r-1}(F)$. Используя описание классов сопряженных унипотентных элементов в 2.1, можно заметить, что при $G = C_r(K)$ регулярные унипотентные элементы группы H_F содержатся в классе C_F; если $G = D_r(K)$, то для некоторого $j \in \{1, 2\}$ регулярные унипотентные элементы группы H_F^j лежат в C_F. При $G = D_r(K)$ пусть H_F — та из групп H_F^j, которая содержит представители класса C_F. Применив лемму 2.3, построим подгруппы $\Gamma_F \subset H_F \subset G_F$ такие, что Γ_F удовлетворяет условию (a), а также гомоморфизм $\psi : \mathfrak{X}(H) \to \mathfrak{X}(A_1)$, естественный для обоих вложений $\Gamma \subset H$ и $\Gamma_{\mathbb{C}} \subset H_{\mathbb{C}}$ и такой, что наборы $\{\psi(\mu_j) \mid \mu_j$ — ограничение на H_K веса $\omega(v_j)$, $1 \leqslant j \leqslant n\}$ и $N(C)$ совпадают (с учетом кратностей их членов). Затем используем утверждение (A), чтобы построить гомоморфизм τ, удовлетворяющий условиям (b) и (d).

Пусть $G = D_r(K)$, $J(C) = \mathrm{diag}(J_k, J_l)$ и $k > l$. Тогда $k = 2k_1 + 1$, $l = 2l_1 + 1$ и $k_1 + l_1 = r - 1$. Пусть H_F — коммутант группы $\pi^{-1}(SO_k(F) \times SO_l(F))$, где произведение $SO_k(F) \times SO_l(F)$ естественно вложено в $SO_{2r}(F) = \pi(G_F)$. Тогда H_F — полупростая группа типа $B_{k_1} \times B_{l_1}$, если $l_1 \neq 0$, и типа B_{k_1} при $l_1 = 0$. В первом случае будем записывать веса μ группы H_F в виде (μ_1, μ_2), где μ_1 и μ_2 — ограничения веса μ на простые компоненты типов B_{k_1} и B_{l_1} соответственно. Существует гомоморфизм $\rho : \mathfrak{X}(G) \to \mathfrak{X}(H)$ со следующими свойствами: a) если $l_1 > 0$, то ρ отображает ε_i в $(\varepsilon_i, 0)$, $1 \leqslant i \leqslant k_1$, ε_{k_1+1} и ε_r в 0 и ε_{k_1+s}, $1 < s \leqslant l_1 + 1$, в $(0, \varepsilon_{s-1})$; b) если же $l_1 = 0$, то ρ переводит ε_i в $\varepsilon_i \in \mathfrak{X}(H)$, $1 \leqslant i < r$, и ε_r в 0. Можно считать, что ρ естествен для обоих вложений $H \subset G$ и $H_{\mathbb{C}} \subset G_{\mathbb{C}}$. Заметим, что регулярные унипотентные элементы группы H_F лежат в C_F. Затем применим лемму 2.3 и утверждение (A), чтобы получить подгруппы $\Gamma_F \subset G_F$ и гомоморфизм τ, удовлетворяющие условиям (a), (b) и (d). Может оказаться, что $k_1 = 2$ или $l_1 \in \{1, 2\}$, но это не влияет на наши рассуждения.

Теперь пусть C — класс, который еще не рассматривался. Тогда выполняется одно из следующих условий:

1) $G = A_r(K)$, $J(C)$ имеет блок Жордана степени m, где $1 < m < r + 1$;
2) $G = B_r(K)$, $J(C)$ имеет блок степени $2l + 1 < 2r + 1$;
3) $G = C_r(K)$, $J(C)$ имеет блок степени $2l < 2r$;
4) $G = C_r(K)$ или $G = D_r(K)$, $J(C)$ имеет два блока Жордана степени m, где $1 < m < r$;
5) $G = D_r(K)$, $J(C)$ имеет блоки степеней $2k_1 + 1$ и $2k_2 + 1$, где $k_1 > 0$ и $k_1 + k_2 < r - 1$.

Предположим сначала, что в случае 2 $l \neq 0$. Положим $u = m$ в случаях 1 и 4, $u = l$ в случаях 2 и 3, $u = k_1 + k_2 + 1$ в случае 5. Каждый корень в R однозначно представляется в виде $\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$, $\pm 2\varepsilon_i$ или $\pm\varepsilon_i$. Пусть $R_1 \subset R$ — множество всех корней, для которых эти выражения содержат только ε_f с $f \leqslant u$, и $R_2 \subset R$ — множество всех корней, для которых они содержат лишь ε_f с $f > u$. Положим $S_F^1 = \langle \mathfrak{X}_\alpha \mid \alpha \in R_1 \rangle \subset G_F$. В случае 2 пусть $S_F^2 \subset G_F$ — подгруппа, порожденная корневыми подгруппами, соответствующими всем длинным корням из R_2, а в других случаях положим $S_F^2 = \langle \mathfrak{X}_\alpha \mid \alpha \in R_2 \rangle \subset G_F$. Тогда подгруппы S_F^1 и S_F^2 коммутируют. В случае 1 $S_F^1 \cong A_{u-1}(F)$, $S_F^2 \cong A_{r-u}(F)$. В случае 2 $S_F^1 \cong B_u(F)$, $S_F^2 \cong D_{r-u}(F)$, если $u < r-1$, и $S_F^2 = \langle 1 \rangle$ при $u = r-1$. В случаях 3–5 $S_F^1 \cong C_u(F)$, $S_F^2 \cong C_{r-u}(F)$, если $G = C_r(K)$; $S_F^1 \cong D_u(F)$, $S_F^2 \cong D_{r-u}(F)$, если $G = D_r(K)$, $u < r - 1$, и $S_F^1 \cong D_{r-1}(F)$, $S_F^2 = \langle 1 \rangle$ при $G = D_r(K)$, $u = r - 1$. В любой ситуации $C_F = C_F^1 C_F^2$, где $C_F^i \in \mathfrak{U}(S^i)$, $i = 1, 2$, и классы C_K^2 и $C_{\mathbb{C}}^2$ одновременно равны или не равны $\mathrm{cl}(1)$. Заметим также, что совокупность $N(C)$ получается, если выписать все числа из $N(C_1)$, а потом из $N(C_2)$ (конечно, порядок членов набора $N(C)$ может измениться, но это не важно). Положим $H_F = S_F^1 \times S_F^2$, если $C_2 \neq \mathrm{cl}(1)$, и $H_F = S_F^1$ в противном случае.

Пусть $C_2 \neq \mathrm{cl}(1)$. Тогда $V_F(G)$ — прямая сумма двух неприводимых H_F-модулей V_F^1 и V_F^2; если $\{i, j\} = \{1, 2\}$, то V_F^i изоморфен $V_F(S_F^i)$ как S_F^i-модуль и S_F^j действует тривиально на V_F^i. Используя индукцию по r, можно отыскать замкнутые в топологии Зарисского подгруппы $\Gamma_F^i \subset S_F^i$ типа A_1 и гомоморфизмы $\psi_i : \mathfrak{X}(S^i) \to \mathfrak{X}(A_1)$, которые удовлетворяют условиям (a), (b) и (d) предложения, если заменить C на C_i, G_F на S_F^i, τ на ψ_i и V на $V(S^i)$. Может оказаться, что $S_F^i = B_1(F)$, $C_1(F)$, $D_2(F)$ или $D_3(F)$, но это не вызывает затруднений, поскольку все рассуждения, использовавшиеся выше для получения искомых подгрупп Γ_F, справедливы и в этих случаях. Можно записать $\Gamma_F^i = \{\nu_F^i(x) \mid x \in SL_2(F)\}$, где ν_F^i — некоторый рациональный гомоморфизм группы $SL_2(F)$ в S_F^i. Как и выше, представим вес $\mu \in \mathfrak{X}(H)$ в виде пары (μ_1, μ_2), где μ_i — ограничение веса μ на S_F^i. Положим $\Gamma_F = \{\nu_F^1(x)\nu_F^2(x) \mid x \in SL_2(F)\}$. Очевидно, что Γ_F — замкнутая в топологии Зарисского подгруппа типа A_1 в H_F, содержащая представители класса C_F. Зададим гомоморфизм $\psi : \mathfrak{X}(H) \to \mathfrak{X}(A_1)$ следующим образом: $\psi(\mu) = \psi(\mu_1) + \psi(\mu_2)$ при $\mu \in \mathfrak{X}(H)$. Тогда ψ является естественным для обоих вложений $\Gamma \subset H$ и $\Gamma_{\mathbb{C}} \subset H_{\mathbb{C}}$ и набор $N(C)$ совпадает с совокупностью чисел $\{t_\psi(\mu_j) \mid \mu_j$ — ограничение на H веса $\omega(v_j)$, $1 \leqslant j \leqslant n\}$ (с учетом кратностей). Теперь применим утверждение (A), чтобы найти гомоморфизм τ со свойствами (a)–(d).

Пусть $C_2 = \mathrm{cl}(1)$. Тогда $N(C_2)$ состоит из нулей и H_F-модуль $V_F(G)$ — прямая сумма неприводимого подмодуля, изоморфного $V_F(S_F^1)$, и тривиальных подмодулей, число которых равно длине последовательности $N(C)$. Зададим Γ_F^1 и ψ_1, как и в предыдущем абзаце, положим $\Gamma_F = \Gamma_F^1$ и применим утверждение (A), чтобы получить искомый гомоморфизм τ.

Наконец, рассмотрим случай 2 при $l = 0$. Пусть $H_F \subset G_F$ — подгруппа, порожденная всеми длинными корневыми элементами. Тогда $H_F \cong D_r(F)$, H_F содержит представители класса C_F, $\dim(V_F)_0 = 1$ и последний член последовательности $N(C)$ равен нулю. Пусть N' — последовательность, получаемая из $N(C)$ удалением этого члена. Используя приведенное выше доказательство предложения для $G = D_r(K)$, можно построить замкнутые в топологии Зарисского подгруппы $\Gamma_F \subset H_F$ и гомоморфизм $\psi : \mathfrak{X}(H) \to \mathfrak{X}(A_1)$, которые удовлетворяют условиям (a), (b) и (d) предложения, если заменить G_F на H_F, τ на ψ и V на $V(H)$. Для завершения доказательства предложения для классических групп применим утверждение (A).

Пусть теперь G — исключительная группа. Утверждение (A) сводит задачу к случаю выделенных элементов. Подчеркнем, что если p не является хорошим для G, но удовлетворяет условиям теоремы 1.1, то, анализируя списки представителей классов из $\mathfrak{U}$ в [21, 22, 27], нетрудно убедиться, что представитель каждого класса из $\mathfrak{U}_p$ лежит в некоторой собственной полупростой подгруппе. Лемма 2.10 доказывает предложение 2.12 в следующих случаях: $G = E_6(K)$, C — класс из строк 1, 2 в Tab$G$; $G = E_7(K)$ или $G = E_8(K)$, C — класс из строк 1–3 в Tab$G$; $G = F_4(K)$ или $G = G_2(K)$, C — класс регулярных унипотентных элементов; для регулярного класса группы $G_2(K)$ можно также использовать результаты Ашбахера [13, § 12]. В силу лемм 2.1 и 2.5 [32], таблиц из доказательства предложения 2.6 [32] и наших таблиц 1–5 для любого другого класса C существуют корни $\beta_1, \ldots, \beta_l \in R^+(G)$ такие, что $H_F = \langle \mathscr{X}_{\beta_j} \mid 1 \leqslant j \leqslant l \rangle \subset G_F$ — собственная полупростая подгруппа в G_F, содержащая представители класса C_F. Кроме того, $C_F \cap H_F$ есть произведение классов C_F^i сопряженных элементов простых компонент S_F^i группы H_F, классы C_K^i и $C_{\mathbb{C}}^i$ имеют одну и ту же помеченную диаграмму Дынкина; если $r(H_F) = r(G)$, то группа H_F либо классическая, либо непростая. Используя индукцию по r и доказательство предложения для классических групп, можно найти замкнутые в топологии Зарисского подгруппы $\Gamma_F^i \subset S_F^i$ типа A_1, содержащие представители класса C_F^i, а также гомоморфизмы $\psi_i : \mathfrak{X}(S^i) \to \mathfrak{X}(A_1)$, являющиеся естественными для обоих вложений $\Gamma^i \subset S^i$ и $\Gamma_{\mathbb{C}}^i \subset S_{\mathbb{C}}^i$. Затем, рассуждая так же, как в случае классических групп, отыскиваем подгруппы $\Gamma_F \subset H_F$ и гомоморфизм $\psi : \mathfrak{X}(H) \to \mathfrak{X}(A_1)$, которые удовлетворяют условиям (a) и (b), если заменить G_F на H_F, а τ на ψ. Теперь используем утверждение (A), чтобы получить искомый гомоморфизм $\tau : \mathfrak{X}(G) \to \mathfrak{X}(A_1)$ и завершить доказательство предложения. ▷

Назовем пары (Γ_K, τ) и $(\Gamma_{\mathbb{C}}, \tau)$ из 2.12 каноническими парами для классов C и $f(C)$ соответственно.

2.13. *Следствие.* *Пусть G — классическая группа, $C \in \mathfrak{U}_{\mathbb{C}}$. Пусть $i < r$, если $G = B_r(K)$, и $i < r - 1$ при $G = D_r(K)$. Тогда $l_i(C)$ равняется сумме i наибольших членов последовательности $N(C)$. При $G = B_r(K)$ или $G = D_r(K)$ пусть $h(C)$ — полусумма r наибольших членов в $N(C)$. Тогда $l_r(C) = h(C)$ при $G = B_r(K)$ и $l_{r-1}(C) = l_r(C) = h(C)$, если $G = D_r(K)$ и $J(C)$ имеет блок нечетной степени. Пусть $G = D_r(K)$, $k_1 \geqslant \cdots \geqslant k_m$, числа k_j четны, $r = k_1 + \cdots + k_m$, $C_1 = \mathrm{cl}(y_{1\mathbb{C}}(k_1, \ldots, k_m))$, $C_2 = \mathrm{cl}(y_{2\mathbb{C}}(k_1, \ldots, k_m))$. Тогда*

$$l_r(C_1) = l_{r-1}(C_2) = l_{r-1}(C_1) + 1 = l_r(C_2) + 1 = h(C),$$

если $r \equiv 0 \pmod 4$, и

$$l_{r-1}(C_1) = l_r(C_2) = l_r(C_1) + 1 = l_{r-1}(C_2) + 1 = h(C)$$

при $r \equiv 2 \pmod 4$. *Если* C *— класс регулярных элементов, то* $l_i(C) = i(n-i)$ *при* $G \in \{A_r(K), B_r(K), C_r(K)\}$ *и* $i < r$ *для* $G = B_r(K)$; $l_i(C) = i(n-1-i)$ *при* $G = D_r(K)$, $i < r-1$; $l_r(C) = r(r+1)/2$ *при* $G = B_r(K)$ *и* $l_{r-1}(C) = l_r(C) = r(r-1)/2$ *при* $G = D_r(K)$.

$\lhd$ Рассмотрим каноническую пару $(\Gamma_{\mathbb{C}}, \tau)$ для класса C. Набор $N(C)$ совпадает с совокупностью чисел $\{t_\tau(\omega(v_i)) \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$ (вспомним, что векторы v_i образуют базис (3) естественного $G_{\mathbb{C}}$-модуля $V_{\mathbb{C}}$). Согласно предложению 1.3 $l_i(C) = \max\{t_\tau(\mu) \mid \mu \in \mathfrak{X}(\pi_i)\}$. В силу результатов [3, гл. VIII, § 13] $\mathfrak{X}(\pi_i)$ состоит из всевозможных сумм i различных весов модуля $V_{\mathbb{C}}$, если $i < r$ при $G = B_r(K)$ и $i < r-1$ при $G = D_r(K)$; $\mathfrak{X}(\pi_r) = \left\{\sum_{j=1}^{r} a_j\varepsilon_j/2 \mid a_j = \pm 1\right\}$ при $G = B_r(K)$; при $G = D_r(K)$ множества $\mathfrak{X}(\pi_{r-1})$ и $\mathfrak{X}(\pi_r)$ состоят из всех таких сумм, для которых число $|\{j \mid a_j = -1\}|$ нечетно для π_{r-1} и четно для π_r. Отсюда сразу же вытекает доказываемое следствие для $l_i(C)$, если $i < r$ при $G = B_r(K)$ и $i < r-1$ при $G = D_r(K)$. Так как $t_\tau(\varepsilon_j) = -t_\tau(-\varepsilon_j)$, легко заметить, что $h(C) = \max\{t_\tau(\mu) \mid \mu \in \mathfrak{X}(\pi_r)\}$ при $G = B_r(K)$ и $h(C) = \max\{t_\tau(\mu) \mid \mu \in \mathfrak{X}(\pi_{r-1}) \cup \mathfrak{X}(\pi_r)\}$ при $G = D_r(K)$. Если $G = D_r(K)$ и $J(C)$ имеет блок нечетной степени, то $t_\tau(\varepsilon_j) = 0$ для некоторого j, и поэтому наборы $t_\tau(\mathfrak{X}(\pi_{r-1}))$ и $t_\tau(\mathfrak{X}(\pi_r))$ совпадают (с учетом кратностей их членов). Это завершает доказательство для $G = B_r(K)$ и всех классов $C \in \mathfrak{U}(D_r(\mathbb{C}))$, у которых $J(C)$ имеет блок нечетной степени.

Теперь пусть $k_1 \geqslant \cdots \geqslant k_m$ — четные числа, $k_1 + \cdots + k_m = r$, и пусть $C_j = \mathrm{cl}(y_{j\mathbb{C}}(k_1, \ldots, k_m)) \in \mathfrak{U}(D_r(\mathbb{C}))$, $j = 1, 2$. Здесь требуется более детальный анализ значений $t_\tau(\varepsilon_j)$. Пусть $H_1 = H(i \mid 1 \leqslant i < r)$, $H_2 = H(i \mid i \neq r-1) \subset D_r(\mathbb{C})$, и пусть $C' \in \mathfrak{U}(SL_r(\mathbb{C}))$ — класс с $J(C') = \mathrm{diag}(J_{k_1}, \ldots, J_{k_m})$. Заметим, что $y_{j\mathbb{C}} \in H_j$ и $y_{j\mathbb{C}}$ лежит в C', если рассматривать его как элемент группы $SL_r(\mathbb{C})$; число $2h(C_j)$ равно сумме r наибольших членов последовательности $N(C')$ ($j = 1, 2$). Пусть (Γ_j, τ_j) — каноническая пара для класса C_j. Положим $t_j = t_{\tau_j}$. Рассуждая так же, как в доказательстве предложения 2.12 с H_j в роли $H_{\mathbb{C}}$, можно подобрать такие Γ_j и τ_j, что последовательность $N(C')$ будет составлять наборы $\{t_1(\varepsilon_l) \mid 1 \leqslant l \leqslant r\}$ и $\{t_2(-\varepsilon_r), t_2(\varepsilon_l) \mid 1 \leqslant l \leqslant r-1\}$ (с учетом кратностей их членов). Заметим, что $N(C')$ не содержит нулей, содержит числа a и $-a$ с одной и той же кратностью и содержит 1. В нашем случае r четен. Пусть $\{x, y\} = \{r-1, r\}$ и у представления π_x есть вес $(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{r/2} - \varepsilon_{r/2+1} - \cdots - \varepsilon_r)/2$. В силу леммы 2.5 и приведенных выше рассуждений

$$l_x(C_1) = l_y(C_2) = l_x(C_2) + 1 = l_y(C_1) + 1 = h(C).$$

Отсюда вытекает следствие для классов C_1 и C_2.

Если класс C регулярен, известно (и легко вывести из формул (4)), что $J(C) = J_n$ при $G \in \{A_r(K), B_r(K), C_r(K)\}$ и $J(C) = \mathrm{diag}(J_{n-1}, 1)$, если $G = D_r(K)$. Пусть $m = n$ в первом и $m = n-1$ во втором случае. Из доказанного выше следует, что $l_i(C) = \sum_{j=0}^{i-1}(m-1-2j)$, если $i < r$ при $G = B_r(K)$ и $i < r-1$ при $G = D_r(K)$; $l_i(C) = (2 + \cdots + m - 3 + m - 1)/2$ при $G = B_r(K)$, $i = r$, и при $G = D_r(K)$, $i = r-1$ или $i = r$. Вычислив эти суммы, получаем искомые формулы для $l_i(C)$. $\rhd$

Далее $\varphi \in \mathrm{Inf}\,G$, $\omega = \omega(\varphi) = \sum_{i=1}^{r} a_i\omega_i$, $M = M(\omega)$, γ — максимальный короткий корень в $R^+(G)$, если G имеет корни различной длины, и максимальный корень в иных случаях, $s = s(\varphi) = \langle \omega + \sigma, \gamma \rangle$, $C \in \mathfrak{U}_p$.

2.14. Предложение. *Пусть* $k_{\varphi_{\mathbb{C}}}(f(C)) \leqslant p$. *Тогда* $k_\varphi(C) = k_{\varphi_{\mathbb{C}}}(f(C))$.

$\lhd$ Рассмотрим каноническую пару (Γ, τ) для класса C. Пусть $x \in \Gamma$ — неединичный корневой элемент, ассоциированный с положительным корнем.

Тогда $x \in C$. Положим $t = t_\tau$. Поскольку $t(\alpha_i) \geqslant 0$ при $1 \leqslant i \leqslant r$, то $t(\omega) = \max\{t(\mu) \mid \mu \in \mathfrak{X}(\varphi_\mathbb{C})\}$. Ввиду леммы 2.5 $t(\omega) = m_{\varphi_\mathbb{C}}(f(C))$. Пусть $v \in M(\varphi)$ — ненулевой вектор веса ω. Легко установить, что $xv = v$. Поэтому $\varphi|\Gamma$ имеет композиционный фактор ρ со старшим весом $\tau(\omega)$. Так как $t(\omega) < p$, из леммы 2.3 следует, что $k_\varphi(C) \geqslant k_\rho(x) = k_{\varphi_\mathbb{C}}(f(C))$. Положим $m_\varphi(C) = m$. Используя формулы (2), нетрудно выяснить, что существуют веса $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathfrak{X}(\varphi)$ с $t(\lambda_2) - t(\lambda_1) \geqslant 2m$. Если $t(\lambda_2) < m$, то $t(\lambda_1) < -m$. Поскольку множество $\tau(\mathfrak{X}(\varphi))$ инвариантно относительно действия группы $W(\Gamma)$, в любом случае найдется вес $\mu \in \mathfrak{X}(\varphi)$ с $t(\mu) \geqslant m$. Значит, $m = t(\omega)$ и $k_\varphi(C) = k_{\varphi_\mathbb{C}}(f(C))$. $\triangleright$

По предложению 2.14 теперь достаточно доказать, что $k_\varphi(C) = p$, если $k_{\varphi_\mathbb{C}}(f(C)) > p$. Следующее предложение является частичным аналогом предложения 1.3 для положительной характеристики. Заметим, что здесь рассматриваются произвольные унипотентные элементы, а не элементы порядка p.

2.15. Предложение. *Пусть $\omega = \lambda_1 + \lambda_2$, $\lambda_j \in \mathfrak{X}^+$, $x \in U^-$. Положим $M^j = M(\lambda_j)$ и для $l \in \mathbb{Z}^+$ введем*

$$\mathfrak{X}_l = \left\{ \mu \in X(M) \mid \omega - \mu = \sum_{i=1}^r c_i\alpha_i,\ \sum_{i=1}^r c_i \geqslant l \right\}.$$

Пусть $v^j \in M^j_{\lambda_j}$, $v \in M_\omega$ — ненулевые векторы, и пусть $(x-1)^{m_j}v^j \neq 0$ для некоторого $m_j \in \mathbb{Z}^+$, $j = 1, 2$. Предположим, что $m = m_1 + m_2$, $\binom{m}{m_1} \not\equiv 0 \pmod p$ и $\dim V(\omega)_\mu = \dim M_\mu$ для всех $\mu \in \mathfrak{X}$. Тогда $(x-1)^m v \neq 0$. В частности, это верно, если модуль $V(\omega)$ неприводим, $|x| = p$ и $m < p$.

$\triangleleft$ Пусть $T = M^1 \otimes M^2$, $T_l = \langle T_\mu \mid \mu \in \mathfrak{X}_l\rangle$, $v' = v^1 \otimes v^2 \in T$, $M' = KGv'$, и пусть S — единственный максимальный собственный G-подмодуль в M'. Можно считать, что $M = M'/S$, и отождествить v с образом вектора v' при естественном отображении $\zeta : M' \to M$. Заметим, что

$$(x-1)(t_1 \otimes t_2) = (x-1)t_1 \otimes (x-1)t_2 + (x-1)t_1 \otimes t_2 + t_1 \otimes (x-1)t_2$$

при $t_1 \otimes t_2 \in T$. Используя индукцию по l и равенство $\binom{l}{f} = \binom{l-1}{f} + \binom{l-1}{f-1}$, несложно установить, что для любого целого $l \geqslant 1$

$$(x-1)^l v' = A + \sum_{f=0}^{l} \binom{l}{f} (x-1)^f v^1 \otimes (x-1)^{l-f} v^2, \tag{5}$$

где A — сумма элементов вида $(x-1)^a v^1 \otimes (x-1)^b v^2$ с $a + b > l$. Поскольку $x \in U^-$, из формул (2) и (5) следует, что $(x-1)^m v' \in T_m$. Из свойства универсальности модулей Вейля [20, часть II, предложение 2.13] вытекает инъективность отображения ξ на пространстве $M' \cap T_m$. Поэтому достаточно доказать, что $(x-1)^m v' \neq 0$. Мы утверждаем, что векторы $u_1 = (x-1)^f v^j$ и $u_2 = (x-1)^g v^j$, $j = 1, 2$, линейно независимы, если $0 \leqslant f < g$ и $u_2 \neq 0$. Действительно, $u_1 \neq 0$. Пусть λ — максимальный вес такой, что вектор u_1 имеет ненулевую компоненту веса λ. Тогда $u_2 \in \sum_{\nu \neq \lambda} (M_j)_\nu$, что влечет независимость векторов u_1 и u_2. Отсюда вытекает, что ненулевые векторы $(x-1)^c v^1 \otimes (x-1)^d v^2$ и $(x-1)^f v^1 \otimes (x-1)^h v^2$ линейно независимы, если $c \neq f$ или $d \neq h$. Поскольку $\binom{m}{m_1} \not\equiv 0 \pmod p$, при $l = m$ в правой части равенства (5) есть ненулевое слагаемое $\binom{m}{m_1}(x-1)^{m_1} v^1 \otimes (x-1)^{m_2} v^2$. Отсюда следует предложение. $\triangleright$

2.16. Лемма. *Пусть $s(\varphi) \leqslant p$. Тогда модуль Вейля $V(\omega)$ неприводим.*

$\triangleleft$ Известно, что $\langle\lambda,\gamma\rangle \geqslant \langle\lambda,\beta\rangle$ для любых $\lambda\in\mathfrak{X}^+$ и $\beta\in R^+$ (см., например, рассуждения в [20, ч. II, п. 6.3]). Значит, $\langle\omega+\sigma,\beta\rangle\leqslant p$ для всех $\beta\in R^+$. Теперь лемма вытекает из [20, ч. II, следствие 5.6]. $\triangleright$

2.17. Следствие. *Пусть $x\in U^-$, $M_i = M(\omega_i)$, $I=\{i\mid a_i\neq 0\}$, и пусть $v^i\in M_i$ и $v\in M$ — ненулевые векторы старшего веса. При $i\in I$ пусть $(x-1)^{k_i}v^i\neq 0$, где $k_i\in\mathbb{Z}^+$. Положим $k=\min\{p-1,\sum\limits_{i\in I}a_ik_i\}$. Пусть $s(\varphi)\leqslant p$. Тогда $(x-1)^kv\neq 0$.*

$\triangleleft$ Введем $a=\sum\limits_{i\in I}a_i$ и применим индукцию по a. При $a=1$ следствие верно в силу своих условий. Пусть $a>1$. Выберем j с $a_j\neq 0$ и положим

$$\mu=(a_j-1)\omega_j+\sum_{i\neq j}a_i\omega_i,\qquad \varphi'=\varphi(\mu),\qquad M'=M(\mu),$$

$$k'=\min\Big\{p-1,(a_j-1)k_j+\sum_{i\in I\setminus\{j\}}a_ik_i\Big\}.$$

Тогда $k=\min\{p-1,k'+k_j\}$. Легко видеть, что $s(\varphi')<s(\varphi)\leqslant p$. Пусть $v'\in M'$ — ненулевой вектор. В силу предположения индукции $(x-1)^{k'}v'\neq 0$. Согласно лемме 2.16 модуль $V(\omega)$ неприводим. Для завершения доказательства применим предложение 2.14 с $\lambda_1=\mu$, $m_1=k'$, $\lambda_2=\omega_j$, $m_2=p-1-k'$. $\triangleright$

2.18. Лемма. *Пусть $S=A_1(K)$, и пусть U — неразложимый S-модуль, порожденный вектором старшего веса $\lambda=a\omega_1$, $a=p+c$, $0\leqslant c\leqslant p-2$. Предположим, что $X_\alpha^{c+1}u\neq 0$ для корня $\alpha\in R^-(S)$. Тогда $X_\alpha^{p-1}u\neq 0$.*

$\triangleleft$ Положим $U'=V(\lambda)$. По [20, ч. II, лемма 2.13 b)] U является фактор-модулем модуля U'. Из теоремы Стейнберга о тензорном произведении [9, теорема 41] и леммы 2.3 следует, что каждый вес модуля $M(\lambda)$ равен $(\pm p+d)\omega_1$, где $d\in\mathbb{Z}$, $-c\leqslant d\leqslant c$. Следовательно,

$$\omega\big(X_\alpha^{c+1}u\big)=\lambda+(c+1)\alpha=(p-c-2)\omega_1\notin\mathfrak{X}(M(\lambda)),$$

и поэтому $U\not\cong M(\lambda)$. Так как все весовые подпространства в U' одномерны, зная систему $\mathfrak{X}(U')$, можно заключить, что модуль U' имеет два композиционных фактора со старшими весами λ и $(p-c-2)\omega_1$. Значит, $U=U'$. Тогда $U=\langle X_{\alpha,i}u\mid i\in\mathbb{Z}^+\rangle$, где $X_{\alpha,i}$ — операторы из формулы (2), $X_{\alpha,p-1}=X_\alpha^{p-1}/(p-1)!$. Отсюда следует, что $X_\alpha^{p-1}u\neq 0$. $\triangleright$

2.19. Замечание. Утверждения пп. 2.15, 2.17 и 2.18 остаются в силе, если заменить векторы старшего веса векторами младшего веса и отрицательные корни положительными. Действительно, при перестановке R^+ и R^- вектор младшего веса становится вектором старшего веса. Только 2.15 требует дополнительных пояснений. Если взять R^- в качестве системы положительных корней, то M_j и M становятся неприводимыми модулями со старшими весами λ_j' и ω' соответственно. Условие о $\mathfrak{X}_m$ в 2.15 эквивалентно выполнению формулы

$$\mathfrak{X}(\psi)\cap\mathfrak{X}_m=\varnothing \tag{6}$$

для каждого композиционного фактора ψ модуля $V(\omega)$ с $\omega(\psi)\neq\omega$. Известно, что композиционные факторы модуля $V(\omega')$ получаются из факторов модуля $V(\omega)$, если применить преобразование $-w_0$ системы весов $\mathfrak{X}$ (см., например, [20, ч. II, п. (2.13), формулы (1), (2)]. Поскольку $-w_0\Pi=\Pi$, отсюда следует, что формула (6) для модуля $V(\omega)$ эквивалентна аналогичной формуле для $V(\omega')$ и выполнены все условия предложения 2.15.

2.20. Лемма. *Пусть $x\in\overline{C}$. Тогда $k_\varphi(x)\leqslant k_\varphi(C)$. В частности, $k_\varphi(x)\leqslant k_\varphi(C)$ для любого $x\in G^u$ и регулярного класса C.*

◁ Очевидно, что уравнение $(g-1)^l = 0$, где $g \in \operatorname{End} M$, задает замкнутое в топологии Зарисского подмножество в $\operatorname{End} M$. Поэтому $(x-1)^{k_\varphi(C)}M = 0$ для любого $x \in \overline{C}$. В силу [15, предложение 5.1.2] каждый элемент $x \in G^u$ лежит в $\overline{C}$ для регулярного класса C. ▷

Для множества $I \subset \{1,\ldots,r\}$ пусть $\mathfrak{X}(I)$ — $\mathbb{Z}$-подмодуль в $\mathfrak{X}(G)$, порожденный всеми корнями α_i с $i \in I$, $R(I) = \mathfrak{X}(I) \cap R(G)$, $R^{\pm}(I) = R(I) \cap R^{\pm}(G)$, $U^{\pm}(I) = \langle \mathscr{X}_\alpha \mid \alpha \in R^{\pm}(I)\rangle$, $G_I = \langle \mathscr{X}_{\pm i} \mid i \in I\rangle$. Тогда G_I — полупростая группа. Пусть $\omega_I \in \mathfrak{X}(G_I)$, $\langle \omega_I, \alpha_i\rangle = \langle \omega, \alpha_i\rangle$ при $i \in I$. Положим $M_I = M(\omega_I)$, $\varphi_I = \varphi(\omega_I)$. В силу [9, § 3, следствие 5] элемент $x \in U^{\pm}$ однозначно представляется в виде $x = x_I z$, где $x_I \in U^{\pm}(I)$, $z \in \langle \mathscr{X}_\beta \mid \beta \in R^{\pm} \setminus R^{\pm}(I)\rangle$. Для элемента $X = \sum_{\beta \in R^{\pm}} c_\beta X_\beta \in L^{\pm}$ с $c_\beta \in K$ определим $X_I = \sum_{\beta \in R^{\pm}(I)} c_\beta X_\beta$. Естественно, все знаки + или − в каждой из формул одинаковы. Обозначения G_I, M_I, x_I, X_I, φ_I и ω_I используются на протяжении всей работы.

2.21. Лемма. *Пусть $I \subset \{1,\ldots,r\}$, $x \in U^{\pm}$ или $x \in L^{\pm}$, и пусть $m \in M$ — весовой вектор. Положим $y = x-1$, $y_I = x_I - 1$ при $x \in U^{\pm}$ и $y = x$, $y_I = x_I$ при $x \in L^{\pm}$. Пусть $y_I^a m \neq 0$ для некоторого $a \in \mathbb{Z}^+$. Тогда $y^a m \neq 0$. В частности, $k_\varphi(x_I) \leqslant k_\varphi(x)$ при $x \in U^{\pm}$.*

◁ Запишем $y^a m = w$, $y_I^a m = u$. Пусть $m \in M_\lambda$. Используя формулу (2), получаем, что $u \in \langle M_\mu \mid \mu - \lambda \in \mathfrak{X}(I)\rangle$, $w = u + u'$, где $u' \in \langle M_\nu \mid \nu - \lambda \notin \mathfrak{X}(I)\rangle$. Тогда $w \neq 0$, ибо $u \neq 0$. Очевидно, что $y_I^{k_\varphi(x_I)-1} M_\lambda \neq 0$ для некоторого $\lambda \in \mathfrak{X}(\varphi)$, если $x \in U^{\pm}$. ▷

2.22. Следствие. *Пусть I, x, y и y_I такие же, как в лемме 2.21. Предположим, что $v \in M$ и $v_I \in M_I$ — ненулевые векторы старшего веса, если $x \in U^-$ или $x \in L^-$, и ненулевые векторы младшего веса, если $x \in U^+$ или $x \in L^+$. Пусть $y_I^a v_I \neq 0$, $a \in \mathbb{Z}^+$. Тогда $y^a v \neq 0$; при $x \in U^{\pm}$ имеем $k_{\varphi_I}(x_I) \leqslant k_\varphi(x)$.*

◁ Можно рассматривать вектор младшего веса как вектор старшего веса относительно R^-. Тогда из теоремы Смита [28] следует, что G_I-модуль $KG_I v \cong M_I$. Теперь следствие вытекает из леммы 2.21, так как $k_{\varphi_I}(x_I) \leqslant k_\varphi(x_I)$ при $x \in U^{\pm}$. ▷

2.23. Лемма. (i) *Операторы $X_{\alpha,i}$ в формуле* (2) *удовлетворяют следующему равенству:*

$$X_{-\alpha}X_{\alpha,i} = X_{\alpha,i}X_{-\alpha} - H_\alpha X_{\alpha,i-1} + (i-1)X_{\alpha,i-1}.$$

(ii) *Пусть N — G-модуль, $\mu \in X$, $u \in N_\mu \setminus \{0\}$, $\alpha \in R$, $X_\alpha u = 0$ и $\langle \mu, \alpha\rangle = c < p$. Тогда $X_\alpha X_{-\alpha}^b u = b(a-b+1)X_{-\alpha}^{b-1}u$ при $b \in \mathbb{Z}^+$. В частности, $X_{-\alpha}^c u \neq 0$.*

◁ (i) — это п. (2) леммы 5.14 [1]; (ii) непосредственно следует из (i). ▷

§ 3. Теорема редукции. Общая схема доказательства теоремы 1.1

Основной результат этого параграфа — теорема 3.3, которая позволяет использовать индукцию по размерности группы G в доказательстве теоремы 1.1 и сводить задачу к некоторым специальным классам для групп каждого типа. Кое-где в этом параграфе удобно считать корни групп типов A_r, D_r и E_r длинными. В § 3–7 мы предполагаем, что p удовлетворяет условиям теоремы 1.1. Вероятно, приведенные ниже леммы 3.1 и 3.2 известны, но я не смогла найти явные ссылки.

3.1. Лемма. *Пусть $C \neq \mathrm{cl}(1) \in \mathfrak{U}$. Тогда $\overline{C}$ содержит длинные корневые элементы.*

◁ Для классических групп это легко вывести из описания отношений включения между замыканиями классов из $\mathfrak{U}$ в топологии Зарисского (см. [29, I.2.4] при $G = A_r(K)$ и [18, 12.3] и [29, теорема II.8.2] в других случаях). Затем используем теоремы 1, 2, 5 [22] для групп типов E_r, таблицу из § IV.2 [29] при $G = F_4(K)$ и предложение II.10.4 [29] при $G = G_2(K)$. $\rhd$

3.2. Лемма. *Пусть $G \in \{B_r(K), C_r(K), F_4(K), G_2(K)\}$, C_1 и C_2 соответственно классы длинных и коротких корневых элементов в G. Предположим, что $C \notin \{\mathrm{cl}(1), C_1\}$ и $J(C)$ имеет блок размера не менее 3, если $G = B_r(K)$. Тогда $C_2 \subset \overline{C}$.*

$\lhd$ Доказательство основано на тех же источниках, что и в 3.1. $\rhd$

3.3. Теорема (теорема редукции). *Пусть $C \in \mathfrak{U}_p$, $\beta_1, \dots, \beta_l \in R^+$, и пусть $H_F = H(\beta_1, \dots, \beta_l) \subset G_F$ — собственная полупростая подгруппа. Положим $C_K = C$ и $C_\mathbb{C} = f(C)$. Пусть $\Gamma_F \subseteq H_F$ — подгруппы типа A_1, содержащие представители классов C_F, и пусть гомоморфизм $\psi : \mathfrak{X}(H) \to \mathfrak{X}(A_1)$ является естественным для обоих вложений $\Gamma \subset H$ и $\Gamma_\mathbb{C} \subset H_\mathbb{C}$. Пусть $C_F \cap H_F$ составляет один класс C_F^1 в $\mathfrak{U}(H_F)$ и $f_H(C_K^1) = C_\mathbb{C}^1$. Если в R имеются корни разной длины и H_F содержит короткие корневые подгруппы, предположим также, что C содержит короткие корневые элементы. Пусть формула (1) справедлива для C^1, f_H и любого $\rho \in \operatorname{Inf} H$. Тогда она выполняется для C, f_G и $\varphi \in \operatorname{Inf} G$.*

$\lhd$ Можно считать, что $C \neq \mathrm{cl}(1)$. Согласно утверждению (A) из доказательства предложения 2.12, если гомоморфизм $\nu : \mathfrak{X}(G) \to \mathfrak{X}(H)$ естествен для обоих вложений $H \subset G$ и $H_\mathbb{C} \subset G_\mathbb{C}$, то $\tau = \psi\nu$ естествен для обоих вложений $\Gamma \subset G$ и $\Gamma_\mathbb{C} \subset G_\mathbb{C}$. В силу предложения 2.14 $k_\varphi(C) = k_{\varphi_\mathbb{C}}(f(C))$, если $k_{\varphi_\mathbb{C}}(f(C)) \leqslant p$.

Пусть $k_{\varphi_\mathbb{C}}(f(C)) > p$. Положим $t = t_\tau$, $t_1 = t_\psi$. Ввиду леммы 2.5 $m_{\varphi_\mathbb{C}}(f(C)) = \max\{t(\mu) \mid \mu \in \mathfrak{X}(\varphi_\mathbb{C})\}$. Следовательно, $t(\mu) \geqslant p$ для некоторого $\mu \in \mathfrak{X}(\varphi_\mathbb{C})$. По теореме Премета [7] $\mu \in \mathfrak{X}(\varphi)$ для наших значений p. Положим $\mu_1 = \nu(\mu)$. Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_j$ — всевозможные композиционные факторы ограничения $\varphi|H$. Тогда $\mu_1 \in \mathfrak{X}(\varphi_l)$ для некоторого l и $t_1(\mu_1) \geqslant p$. Запишем $\xi = \varphi_l$.

Предположим сначала, что $\xi \in \operatorname{Inf} H$. Из леммы 2.5 следует, что $k_{\xi_\mathbb{C}}(C_\mathbb{C}^1) > p$, так как $\max\{t_1(\lambda) \mid \lambda \in \mathfrak{X}(\xi)\} \geqslant p$. Тогда $k_\xi(C^1) = p$ по условию теоремы и $k_\varphi(C) = p$, ибо $k_\varphi(C) \geqslant k_\xi(C^1)$.

Теперь пусть $\xi \notin \operatorname{Inf} H$. Тогда $\langle \omega(\xi), \alpha \rangle \geqslant p$ для некоторого $\alpha \in R(H)$. Заметим, что существует $\beta \in R(G)$ с $\alpha = \nu(\beta)$. Поскольку $\omega(\xi) \in \nu(\mathfrak{X}(\varphi))$, то $\max\{\langle \eta, \beta \rangle \mid \eta \in \mathfrak{X}(\varphi)\} \geqslant p$. Из теоремы о минимальных полиномах корневых элементов [10] и замечания 2 в [10] вытекает, что $k_\varphi(x_\beta(1)) = p$. Используя 2.20 и 3.1 для длинного β и 2.20 и условия теоремы для короткого β, получаем, что $k_\varphi(C) \geqslant k_\varphi(x_\beta(1))$. Таким образом, $k_\varphi(C) \geqslant p$, что и требовалось доказать. $\rhd$

Пусть $P(G)$ — множество всех собственных полупростых подгрупп группы G с компонентами типа A_i при $G = A_r(K)$, типов A_i и C_i при $G = C_r(K)$, типов A_i, B_i и D_i при $G = B_r(K)$ или $G = D_r(K)$, с классическими компонентами при $G = F_4(K)$ или $G = G_2(K)$ и с классическими компонентами и компонентами типа E_i при $G = E_r(K)$.

3.4. Следствие. *Пусть класс C не является регулярным. Предположим, что при $G = D_r(K)$ матрица $J(C)$ имеет либо не менее трех блоков Жордана, либо два блока степени r. Предположим также, что класс C не лежит в строке 2 в $\operatorname{Tab} G$, если $G = E_6(K)$, и не лежит в строке 2 или 3 в $\operatorname{Tab} G$, если $G = E_7(K)$ или $G = E_8(K)$. Пусть равенство (1) выполняется для f_H и всех $N \in \mathfrak{U}_p(H)$, если $H \in P(G)$. Тогда (1) верно для f_G и C.*

$\lhd$ Используя рассуждения из доказательства предложения 2.12 для классических групп и $\operatorname{Tab} G$ для исключительных групп, можно найти для класса C подгруппы H_F и Γ_F, удовлетворяющие условиям теоремы 3.3. При этом если $G = B_n(K)$ и $J(C)$ имеет лишь блоки степеней, меньших 3, то можно подобрать группу H_F типа D, не содержащую коротких корневых подгрупп. Если C — класс длинных корневых элементов, возьмем в качестве H_F длинную корневую подгруппу. В других случаях из леммы 3.2 следует, что $\overline{C}$ содержит короткие корневые элементы, если их содержит H_F. Это позволяет применить теорему 3.3. $\triangleright$

3.5. Общая схема доказательства теоремы 1.1. В силу 2.3 теорема справедлива при $G = A_1(K)$. Используя индукцию по размерности группы G и результаты 3.3, 3.4, сводим задачу к классам C специального вида. Ввиду 2.14 можно предположить, что $k_{\varphi_{\mathbb{C}}}(f(C)) > p$. Для каждого класса C выберем подгруппы Γ_F, как в 2.12. Если $G = D_r(K)$ и $J(C)$ имеет ровно два блока различных нечетных степеней, погружаем Γ_F в подгруппу типа $B_{r_1} \cdot B_{r_2}$ и рассуждаем так же, как в доказательстве теоремы 3.3. Для других групп рассмотрим сначала фундаментальные представления, применяя индукцию по r и результаты 2.18–2.23. В общем случае существенно используются утверждения 2.15, 2.17 и 2.19. Довольно трудно применять предложение 2.15, если модуль Вейля $V(\omega)$ приводим, но обычно в этой ситуации существует класс $C' \subset \overline{C}$, для которого уже известно, что $k_\varphi(C') = p$. Тогда в силу леммы 2.20 $k_\varphi(C) = p$. При $G = G_2(K)$ подобные рассуждения не всегда приводят к цели и приходится использовать некоторые специальные приемы.

§ 4. Доказательство теоремы 1.1 для групп $G \in \{A_r(K), B_r(K), C_r(K)\}$

В этом параграфе $G \in \{A_r(K), B_r(K), C_r(K)\}$. Предположим, что для всех $H \in P(G)$ биекция f_H удовлетворяет равенству (1). Тогда в силу следствия 3.4 равенство (1) справедливо для f_G и всех нерегулярных классов из $\mathfrak{U}_p$. Таким образом, достаточно доказать (1) для регулярного класса C. Поэтому до конца параграфа считаем C регулярным классом. Строго говоря, наше доказательство теоремы 1.1 для группы $B_r(K)$ опирается на доказательство для $D_i(K)$ при $i < r$, но это не вызывает затруднений. Вспомним, что n обозначает размерность естественного G-модуля и в нашем случае $n \leqslant p$; в § 4 характеристика p больше 2 при $G \neq A_r(K)$. Положим $l_j = l_j(C)$, $1 \leqslant j \leqslant r$; $S'_F = \langle a_{n-1}(u), b_{n-1}(u) \mid u \in F\rangle$, $X = \sum_{j=1}^{r} X_{-j} \in L$; $S_F = S'_F$, $\tilde{x} = b_{n-1}(1) \in SL_n(K)$ при $G = A_r(K)$ и $S_F = DS'_F D^{-1}$; $\tilde{x} = Db_{n-1}(1)D^{-1} \in SL_n(K)$ при $G = B_r(K)$ или $G = C_r(K)$, где D — соответствующая матрица из 2.11. Пусть Γ_F — связная компонента единицы в $\pi^{-1}(S_F)$ и $x = x(G)$ — единственный унипотентный элемент с $\pi(x) = \tilde{x}$. В силу лемм 2.3 и 2.11 $S_F \subset \widetilde{G}_F$, $\tilde{x} = \exp(\widetilde{X})$, Γ_F — группа типа A_1 и $X \in \mathfrak{L}(\Gamma)$ — корневой элемент, ассоциированный с отрицательным корнем. Из формул (2) и (4) следует, что x — регулярный элемент и $x \in U^-(G)$, так как $\tilde{x}$ задается нижней унитреугольной матрицей в базисе (3). Как легко видеть, существует гомоморфизм $\tau : \mathfrak{X}(G) \to \mathfrak{X}(A_1)$ такой, что Γ_F и τ образуют каноническую пару для C. Можно считать, что $r > 1$ (см. 3.5).

4.1. **Лемма.** *Пусть $r > 1$, $I = \{2, \dots, r\}$. Тогда $\tilde{x}_I = \exp(\widetilde{X}_I)$.*

$\triangleleft$ При $g \in \widetilde{G}$ пусть g_{ij} — коэффициент на позиции (i, j) матрицы элемента g в базисе (3). Положим $J = \{2, \dots, n\}$, если $G = A_r(K)$, и $J = \{2, \dots, n-1\}$ в других случаях. Зная веса базисных векторов, легко установить, что $\tilde{x}_{ij} = (\tilde{x}_I)_{ij}$ при $i, j \in J$ и $(\tilde{x}_I)_{ij} = 0$, если $i \notin J$ или $j \notin J$. Затем проверяем непосредственно формулу для $\tilde{x}_I$, используя формулы (4). $\triangleright$

4.2. **Лемма.** *Пусть $\varphi = \rho_j$, $1 \leqslant j \leqslant r$, $m = \min\{l_j, p-1\}$, и пусть $v \in M$ — ненулевой вектор старшего веса. Тогда $(x-1)^m v \neq 0$.*

$\triangleleft$ Выбор групп G и Γ и элемента x показывает, что v порождает неразложимый Γ-модуль M_1 со старшим весом $l_j\omega_1$. Следовательно, у модуля M_1 есть фактор-модуль $M(l_j\omega_1)$. Если $l_j < p$, то $m = 1$, и лемма вытекает из леммы 2.3.

Теперь пусть $l_j \geqslant p$. Тогда $j > 1$. В силу леммы 2.4 достаточно показать, что $X^{p-1}v \neq 0$. Рассмотрим сначала случай $G = A_r(K)$. Очевидно, что $r > 1$. Используем индукцию по r, предполагая, что лемма верна при $G = A_{r-1}(K)$. Положим $I = \{2, \ldots, r\}$. Тогда $G_I = A_{r-1}(K)$, $\varphi_I = \rho_{j-1}$. Пусть $d = l_{j-1}(f_{G_I}(\mathrm{cl}(x_I)))$ и $v_I \in M_I$ — ненулевой вектор старшего веса. Если $d \geqslant p-1$, то из предположения индукции и леммы 4.1 следует, что $(x_I - 1)^{p-1} v_I \neq 0$. Тогда лемма вытекает из следствия 2.22.

Пусть $d < p - 1$. Ввиду следствия 2.13 $l_j = j(n-j)$, $d = (j-1)(n-j)$. Запишем $l_j = p + c$. Имеем $p + c = d + n - j \leqslant p - 2 + n - j$, $c \leqslant n - j - 2$. Ясно, что $c < p - 2$. Пусть $u = X_{-(n-1)} \ldots X_{-j} v$. По лемме 2.23 $u \neq 0$. Так как ω — микровес, то при $j_1, \ldots, j_t \geqslant j$ веса $\omega - \alpha_{j_1} - \cdots - \alpha_{j_t}$ принадлежат $\mathfrak{X}(\varphi)$ в точности тогда, когда $\alpha_{j_1} + \cdots + \alpha_{j_t} = \alpha_j + \cdots + \alpha_{j+t-1}$. Теперь понятно, что u — весовая компонента вектора $w = X^{n-j} v$. Поэтому $w \neq 0$. Для завершения доказательства при $G = A_r(K)$ применим лемму 2.18.

Пусть $G = C_r(K)$, $r > 1$. Положим $S = A_{n-1}(K)$. Поскольку $p \geqslant n > r$, следствие 1 и предложение 1 [25] позволяют предположить, что v — вектор старшего веса в неприводимом S-модуле со старшим весом ω_j, $M = KGv$. Так как $\tilde{x}$ и $b_{n-1}(1)$ сопряжены в $GL_n(K)$ с помощью диагональной матрицы, то элементы $x(S)$ и $x(G)$ сопряжены в S с помощью элемента из $N_S(U^+(S)) \cap N_S(U^-(S))$. Теперь лемма следует из доказанного выше аналогичного факта для $A_r(K)$.

Пусть $G = B_r(K)$, $r > 1$. Если $j < r$, то $r > 2$ и φ есть ограничение на G представления $\rho_j \in \mathrm{Irr}(A_{n-1}(K))$ (см., например, [26, (8.1)]; в этом случае доказательство завершается так же, как и для $C_r(K)$.

Пусть $j = r$. Схема доказательства такая же, как и при $G = A_r(K)$. Положим $I = \{2, \ldots, r\}$ и определим d так же, как при $G = A_r(K)$. Имеем $G_I = B_{r-1}(K)$. В силу следствия 2.13 $l_j = r(r+1)/2$, $d = r(r-1)/2$. Используя индукцию по r и результаты 4.1, 2.22, как при $G = A_r(K)$, сводим задачу к случаю, когда $l_j \geqslant p$, но $d \leqslant p - 2$. Запишем $l_j = p + a$. Тогда $a \leqslant r - 2$. Положим $f = X_{-1} \ldots X_{-r} v$. По лемме 2.23(ii) $f \neq 0$. Рассуждая так же, как в случае $G = A_r(K)$, устанавливаем, что f — весовая компонента вектора $z = X^r v$. Значит, $z \neq 0$. Для завершения доказательства применим лемму 2.18. Заметим, что здесь нельзя предположить, что $r > 2$, ибо используется индукция по r, но все наши рассуждения проходят при $r = 2$. $\rhd$

4.3. Замечание. При рассмотрении показателей $k_{\rho_j}(C)$ нельзя ограничиться случаем $l_j \geqslant p$, ибо необходимо создать основу для применения следствия 2.17.

Согласно табл. I–III [3] $\gamma = \alpha_1 + \cdots + \alpha_r$ при $G = A_r(K)$ и $G = B_r(K)$ и $\gamma = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + 2\alpha_{r-1} + \alpha_r$ при $G = C_r(K)$. Следовательно,

$$s = \sum_{i=1}^{r} (a_i + 1) \text{ при } G = A_r(K), \tag{7}$$

$$s = (a_r + 1) + \sum_{i=1}^{r-1} 2(a_i + 1) \text{ при } G = B_r(K), \tag{8}$$

$$s = (a_1 + 1) + \sum_{i=2}^{r} 2(a_i + 1) \text{ при } G = C_r(K). \tag{9}$$

4.4. ***Лемма.*** *Пусть $r > 1$ и $r > 2$ при $G = B_r(K)$ или $G = C_r(K)$. Предположим, что $s(\varphi) > p$ и $\varphi \neq \rho_i$. Тогда существует класс $C_1 \in \mathfrak{U}_p \setminus \{C\}$ с $k_{\varphi_{\mathbb{C}}}(f(C_1)) \geqslant p$.*

$\lhd$ Пусть C_1 — класс с $J(C) = \mathrm{diag}(J_{n-1}, 1)$ при $G = A_r(K)$ и класс с $J(C_1) = \mathrm{diag}(J_{n-2}, E_2)$ при $G = B_r(K)$ или $G = C_r(K)$. Из описания унипотентных элементов группы G в 2.1 следует, что в $\mathfrak{U}$ имеются такие классы. Положим $a = \sum_{i=1}^{r} a_i$ при $G = A_r(K)$ или $G = C_r(K)$ и $a = \sum_{i=1}^{r-1} a_i$ при $G = B_r(K)$;

$k = k_{\varphi_{\mathbb{C}}}(f(C_1))$. Очевидно, что лемма справедлива, если $k \geqslant s-1$. Покажем, что в большинстве случаев выполняется последнее неравенство. Заметим, что сумма i наибольших членов последовательности $N(C_1)$ не меньше $n-2$ при $G = A_r(K)$ и не меньше $n-3$ для других групп. Из результатов 1.3 и 2.13 вытекает, что $k \geqslant a(r-1)+1$ при $G = A_r(K)$, $k \geqslant 1 + a(2r-2) + a_r r(r-1)/2$ при $G = B_r(K)$ и $k \geqslant a(2r-3)+1$ при $G = C_r(K)$.

Пусть сначала $G = A_r(K)$. Так как по условию $a \geqslant 2$ и $a \in \mathbb{Z}$, то в силу формулы (7) $k \geqslant (a-1)(r-1)+r \geqslant a+r = s$, если $r > 2$, и $k = a+1 = s-1$ при $r = 2$.

Пусть $G = B_r(K)$. Предположим, что $a > 1$. Тогда
$$k \geqslant (a-1)(2r-2)+a_r+2r-1 \geqslant 4(a-1)+a_r+2r-1 \geqslant 2a+a_r+2r-1 = s$$
ввиду (8), ибо $r > 2$.

Пусть $a = 1$. Тогда $a_r \neq 0$, поскольку φ не является фундаментальным, $k > a_r+2r-1 = s-2$, так как $r > 2$.

Наконец, пусть $a = 0$. Тогда $a_r \geqslant 2$, ибо $\varphi \neq \rho_\Gamma$. По формуле (8) и следствию 2.13 $s = a_r+2r-1$, $k = 1+a_r r(r-1)/2$. При $r \geqslant 4$ отсюда вытекает, что
$$r(r-1)/2 \geqslant 2r-2, \quad k \geqslant (a_r-1)(2r-2)+2r-1 > a_r+2r-1 = s.$$
Если $r = 3$, то $k = 3a_3+1 \geqslant a_3+5 = s$, поскольку $a_3 \geqslant 2$.

Теперь пусть $G = C_r(K)$. Положим $b = (a-1)(2r-3)$. При $b \geqslant 2a$ получаем $k \geqslant b+2r-2 \geqslant 2a+2r-2 \geqslant s-1$ в силу (9). Так как $a \geqslant 2$, устанавливаем, что $b \geqslant 5(a-1) > 2a$ при $r \geqslant 4$. Если $r = 3$ и $a \geqslant 3$, то $b \geqslant 3(a-1) \geqslant 2a$. Таким образом, достаточно рассмотреть случай $r = 3$, $a = 2$. Тогда $k \geqslant 7$ и из (9) следует, что $s \leqslant 9$. Значит, $p \leqslant 7 \leqslant k$, что и требовалось доказать. $\triangleright$

4.5. Лемма. *Пусть $G = C_2(K)$, $\varphi \neq \rho_i$ и $s(\varphi) > p$. Тогда $k_\varphi(C) = p$.*

$\triangleleft$ Ввиду (9) $s = a_1+2a_2+3$. Положим $C_1 = \mathrm{cl}(x_1(1))$. Если $k_\varphi(C_1) = p$, то $k_\varphi(C) = p$ по лемме 2.20. В силу [10] $k_\varphi(C_1) = \min\{p, k_{\varphi_{\mathbb{C}}}(f(C_1))\}$ и $k_{\varphi_{\mathbb{C}}}(f(C_1)) = a_1+2a_2+1$. Поэтому можно считать, что $a_1+2a_2+1 < p$. Тогда $a_1+2a_2 = p-2$, ибо $s > p$. Если $a_2 = 0$, то из [20, ч. II, п. 2.17] и [26, утверждение (8.13)] следует, что модуль $V(\mu)$ неприводим при $\mu = c\omega_1$, $c \leqslant a_1$. Очевидно, что $(x-1)^3 v_1 \neq 0$ для вектора v_1 из базиса (3). Рассуждая так же, как при доказательстве следствия 2.17, получаем утверждение леммы в этом случае.

Пусть $a_2 > 0$. Рассмотрим элементы $y = Da_3(1)D^{-1} \in \widetilde{G}$ и $A = 3X_1+4X_2 \in \mathfrak{L}$ (здесь D — соответствующая матрица из 2.11). Заметим, что $p > 3$, ибо $n = 4$. Используя формулы (4), легко установить, что $\tilde{y} = \exp(\widetilde{A})$. Отсюда следует, что $A = X_\alpha \in \mathfrak{L}(\Gamma)$, где $\alpha \in R^+(\Gamma)$. В силу леммы 2.4 достаточно проверить, что $A^{p-1}M \neq 0$. Пусть $v \in M$ — ненулевой вектор старшего веса, $u = X_{-1}^{p-2}X_{-2}^{a_2}v$ и u_1 — весовая компонента веса $\omega(u)+(p-2)\alpha_1+\alpha_2$ вектора $A^{p-1}u$. Мы утверждаем, что $u_1 \neq 0$. Несложно показать, что $u_1 = 3^{p-2}4\sum\limits_{j=0}^{p-2} X_1^j X_2 X_1^{p-2-j}u$.

Докажем следующую формулу для универсальной обертывающей алгебры алгебры $\mathfrak{L}$:
$$X_1^jX_2 = \binom{j}{2}X_1^2X_2X_1^{j-2} - j(j-2)X_1X_2X_1^{j-1} + \binom{j-1}{2}X_2X_1^j \text{ при } j \geqslant 3. \quad (10)$$
Вспомним несколько соотношений коммутации в $\mathfrak{L}$:
$$[X_1, X_2] = \varepsilon X_{\alpha_1+\alpha_2}, \quad [X_1, X_{\alpha_1+\alpha_2}] = \delta X_{2\alpha_1+\alpha_2}, \quad [X_1, X_{2\alpha_1+\alpha_2}] = 0,$$
где $\varepsilon = \pm 1$, $\delta = \pm 2$. Используя эти формулы, получим
$$X_1^3X_2 = X_1^2X_2X_1 + X_1^2[X_1,X_2] = X_1^2X_2X_1 + \varepsilon X_1^2X_{\alpha_1+\alpha_2}$$
$$= X_1^2X_2X_1 + \varepsilon X_1X_{\alpha_1+\alpha_2}X_1 + \varepsilon\delta X_1X_{2\alpha_1+\alpha_2}$$
$$= 2X_1^2X_2X_1 + \varepsilon(2X_1X_{\alpha_1+\alpha_2}X_1 - X_{\alpha_1+\alpha_2}X_1^2) = 3X_1^2X_2X_1 - 3X_1X_2X_1^2 + X_2X_1^3.$$

Затем применим индукцию по j. Пусть (10) выполняется при $j = m \geqslant 3$. Тогда

$$X_1^{m+1}X_2 = \binom{m}{2}X_1^3X_2X_1^{m-2} - m(m-2)X_1^2X_2X_1^{m-1} + \binom{m-1}{2}X_1X_2X_1^m$$
$$= \left(3\binom{m}{2} - m(m-2)\right)X_1^2X_2X_1^{m-1} - \left(3\binom{m}{2} - \binom{m-1}{2}\right)X_1X_2X_1^m$$
$$+\binom{m}{2}X_2X_1^{m+1} = \binom{m+1}{2}X_1^2X_2X_1^{m-1} - (m+1)(m-1)X_1X_2X_1^m + \binom{m}{2}X_2X_1^{m+1}.$$

Отсюда следует (10) при $j = m+1$. Используя равенства $\sum\limits_{j=1}^{m} j^2 = m(m+1)(2m+1)/6$ и $\sum\limits_{j=1}^{m} j = m(m+1)/2$, нетрудно выяснить, что

$$\sum_{j=3}^{p-2}\binom{j}{2} \equiv -2 \pmod p, \ \sum_{j=3}^{p-2} j(j-2) \equiv -2 \pmod p, \ \sum_{j=3}^{p-3}\binom{j}{2} \equiv -4 \pmod p.$$

Тогда из (10) вытекает, что $u_1 = a\big(X_1^2X_2X_1^{p-4} - 3X_1X_2X_1^{p-3} + 3X_2X_1^{p-2}\big)u$, где $a \in K^*$. Положим $\bar{u} = X_{-2}^{a_2}v$, $u' = X_{-1}^2\bar{u}$. Заметим, что $\langle\omega(\bar{u}), \alpha_1\rangle = a_1 + 2a_2 = p - 2 < p$, $X_1\bar{u} = 0$. В силу леммы 2.23 $X_1^{p-4}u = X_1^{p-4}X_{-1}^{p-2}\bar{u} = bu'$, где $b \in K^*$. Теперь достаточно показать, что $u_2' = \big(X_1^2X_2 - 3X_1X_2X_1 + 3X_2X_1^2\big)u' \neq 0$. Используя соотношения коммутации в $\mathfrak{L}$ и лемму 2.23, можно проверить непосредственно, что

$$u_2' = \big(a_2X_1^2X_{-1}^2X_{-2}^{a_2-1} + 6(p-3)\big(-X_1X_2X_{-1}X_{-2}^{a_2} + X_2X_1X_{-1}X_{-2}^{a_2}\big)\big)v$$
$$= \big((2a_2(p-5) - 6a_2(p-3))X_1X_{-1}X_{-2}^{a_2-1} + 6(p-3)(p-2)X_2X_{-2}^{a_2}\big)v$$
$$= a_2(2(p-5)(p-4) - 6(p-3)(p-4) + 6(p-3)(p-2))X_{-2}^{a_2-1}v = 4a_2X_{-2}^{a_2-1}v.$$

Теперь из леммы 2.23 следует, что $u_2' \neq 0$. Поэтому $u_1 \neq 0$, что и требовалось доказать. $\rhd$

4.6. Лемма. *Для класса C выполняется формула* (1).

$\lhd$ В силу результатов 2.14 и 4.2 можно предположить, что $\varphi \neq \rho_i$. Пусть сначала $s(\varphi) \leqslant p$. Ввиду предложения 1.3 $k_{\varphi_{\mathfrak{C}}}(f(C)) = 1 + \sum\limits_{i=1}^{r} a_il_i$. Теперь лемма вытекает из 2.14, 4.2 и 2.17.

Пусть $s(\varphi) > p$. Так как для всех классов $C_1 \in \mathfrak{U} \setminus \{C\}$ справедлива формула (1), то из результатов 4.4, 4.5 и 2.20 следует, что в этом случае $k_\varphi(C) = p$. По предложению 2.14 $k_{\varphi_{\mathfrak{C}}}(f(C)) \geqslant p$, что и завершает доказательство. $\rhd$

§ 5. Доказательство теоремы 1.1 для $G = D_r(K)$

В этом параграфе $G = D_r(K)$, $p > 2$. Как и в § 4, предполагается, что теорема 1.1 верна для всех групп из $P(G)$. До конца параграфа C — класс с $J(C) = \mathrm{diag}(J_k, J_m)$, $k = 2k_1+1$, $m = 2m_1+1$, $k > m$. В силу 3.3 и 3.4 формула (1) выполняется для всех классов $C \in \mathfrak{U}_p$ с другими $J(C)$. Поэтому можно ограничиться анализом выбранных выше классов. Очевидно, что $\widetilde{G}_F = SO_n(F)$, $n = 2r$. Пусть $V_0 = \langle v_r, v_{-r}\rangle \in V_F$, $u_1, u_2 \in V_0$ — взаимно ортогональные неизотропные векторы, $g = k_1 - m_1$. Заметим, что $g + 1 \equiv r \pmod 2$. Если $m > 1$, положим $I_1 = \{1, \dots, g, g+1, g+3, \dots, r-2\}$, $I_2 = \{g+2, \dots, r-1\}$, $V_j = \langle (V_F)_\mu \mid \mu = \pm\varepsilon_i, i \in I_j\rangle \oplus \langle u_j\rangle$, $j = 1, 2$. При $m = 1$ возьмем $V_1 = \langle (V_F)_\mu \mid \mu \neq \pm\varepsilon_r\rangle \oplus \langle u_1\rangle$, $V_2 = \langle u_2\rangle$. Пусть $\widetilde{H}_F \subset \widetilde{G}_F$ — коммутант стабилизатора подпространств V_j в $\widetilde{G}_F$, а H_F — связная компонента единицы группы $\pi^{-1}(\widetilde{H}_F)$.

Тогда H_F — группа типа $B_{k_1} \times B_{m_1}$ при $m > 1$ и $H_F \cong B_{k_1}(F)$, если $m = 1$. Пусть $T \subset G$ — максимальный тор такой, что $\pi(T)$ состоит из диагональных матриц (в базисе (3)), $T_1 = T \cap H_F$. Учитывая ранг группы H_F, легко понять, что $\widetilde{T}_1$ — стабилизатор векторов v_r и v_{r+1} в $\widetilde{T}$. Пусть $\rho : \mathfrak{X}(G) \to \mathfrak{X}(H)$ — естественный гомоморфизм, ассоциированный с ограничением весов с T на T_1. Если $m > 1$, запишем вес $\mu \in \mathfrak{X}(H)$ в виде (μ_1, μ_2), где μ_j — ограничения веса μ на простые компоненты группы H. Положим $C_F = C$ при $F = K$ и $C_F = f(C)$ при $F = \mathbb{C}$. Тогда $N_F = C_F \cap H_F$ — класс регулярных унипотентных элементов в H_F. Пусть $\lambda = \rho(\omega)$, $\psi_F \in \operatorname{Irr} H_F$ — неприводимое представление со старшим весом λ.

5.1. Лемма. *При $m > 1$ имеем $\rho(\omega_i) = (\omega_{i_1}, \omega_{i_2})$, где $i_1 = i$, $i_2 = 0$, если $i \leqslant \min\{g+1, r-2\}$, и $i_1 + i_2 = i$, $i_1 - i_2 \in \{g, g+1\}$, $i_1 - i_2 \equiv i \pmod 2$, если $g + 1 < i < r - 2$; $\rho(\omega_{r-2}) = (2\omega_{k_1}, \omega_{m_1 - 1})$, $\rho(\omega_{r-1}) = \rho(\omega_r) = (\omega_{k_1}, \omega_{m_1})$. Если же $m = 1$, то $\rho(\omega_i) = \omega_i$ при $i \leqslant r-2$; $\rho(\omega_{r-1}) = \rho(\omega_r) = \omega_{r-1}$. (Здесь $\omega_0 = 0$.)*

$\lhd$ Зная действие группы H_F на V_F, легко найти $\rho(\varepsilon_j)$. Затем учитываем, что ρ — гомоморфизм. $\rhd$

5.2. Следствие. *Если $\psi \in \operatorname{Inf} H$, то $k_{\psi_\mathbb{C}}(N_\mathbb{C}) = k_{\varphi_\mathbb{C}}(f(C))$.*

$\lhd$ Очевидно, что $\lambda = \omega(\psi_\mathbb{C}) = \sum\limits_{i=1}^{r} a_i \rho(\omega_i)$, ибо $\psi \in \operatorname{Inf} H$. Используя предложение 1.3, сводим задачу к случаю, когда $\varphi = \rho_i$. Для завершения доказательства применим 5.1, 2.13 и 2.2. $\rhd$

5.3. Предложение. *Для класса C верна формула* (1).

$\lhd$ Легко видеть, что ограничение $\varphi_F | H_F$ имеет композиционный фактор ψ_F. Предположим сначала, что $\psi \in \operatorname{Inf} H$. Как отмечалось в начале параграфа, формула (1) справедлива для класса $N_K \in \mathfrak{U}(H)$ и биекции f_H. Из 5.2 и 2.14 следует, что она также верна для C и f_G.

Теперь пусть $\psi \notin \operatorname{Inf} H$ и $a = a(\omega)$ — максимальный коэффициент в записи веса λ в виде линейной комбинации фундаментальных весов группы H. Тогда $a \geqslant p$. Заметим, что $J(C) \neq \operatorname{diag}(J_3, 1)$, так как $r \geqslant 4$. Используя 5.1, можно получить, что $a \leqslant a_1 + \cdots + a_{r-3} + 2a_{r-2} + a_{r-1} + a_r \leqslant \langle \omega, \gamma \rangle$. Значит, $k_\varphi(x_\gamma(1)) = p$ в силу основного результата работы [10]. Из 3.1 и 2.20 вытекает, что $k_\varphi(C) = p$. Ввиду предложения 2.14 в нашей ситуации $k_{\varphi_\mathbb{C}}(f(C)) \geqslant p$. Отсюда следует предложение. $\rhd$

В силу предложения 5.3 и сказанного в начале параграфа, для $G = D_r(K)$ справедлива теорема 1.1. Итак, эта теорема доказана для всех классических групп.

§ 6. Доказательство теоремы 1.1 для $G = E_r(K)$ и $G = F_4(K)$

Здесь $G = E_r(K)$, $6 \leqslant r \leqslant 8$, или $G = F_4(K)$. Во всех этих случаях доказательства аналогичны. Напомним, что p такое, как в теореме 1.1, и теорема 1.1 справедлива для групп с классическими компонентами. Зададим множество $\mathfrak{U}^1 \subset \mathfrak{U}$ следующим образом: $\mathfrak{U}^1$ состоит из класса регулярных элементов при $G = F_4(K)$, $\mathfrak{U}^1$ состоит из классов из строк 1 и 2 в $\operatorname{Tab} G$ при $G = E_6(K)$ и классов из строк 1–3 в $\operatorname{Tab} G$ при $G = E_7(K)$ или $G = E_8(K)$. Как и ранее, предполагаем, что теорема 1.1 верна для всех групп $H \in P(G)$. Тогда ввиду 3.3 и 3.4 для всех классов из $\mathfrak{U}_p \setminus \mathfrak{U}^1$ имеет место формула (1).

6.1. Лемма. *Пусть $\mathfrak{U}^1 \cap \mathfrak{U}_p \neq \varnothing$. Тогда существует класс $N \in \mathfrak{U}_p \setminus \mathfrak{U}^1$ такой, что $k_\varphi(N) = p$ для всех φ с $s(\varphi) > p$.*

$\lhd$ Возьмем $H = H(\alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 + \alpha_4)$ при $G = F_4(K)$, $H = H(1, \ldots, 5)$ при $G = E_6(K)$, $H = H(1, \ldots, 6)$ при $G = E_7(K)$ и $H = H(\alpha_1, \ldots, \alpha_7, \gamma)$ при $G = E_8(K)$. Тогда H — группа типов B_4, D_5, E_6 и $E_7 + A_1$ соответственно. Пусть

N — класс в $\mathfrak{U}$, содержащий регулярные унипотентные элементы группы H. Заглянув в Tab G, замечаем, что $N \notin \mathfrak{U}^1$ и

$l_1(N) = 14,\ l_2(N) = 26,\ l_3(N) = 18,\ l_4(N) = 10$ при $G = F_4(K)$;

$l_1(N) = l_6(N) = 10,\ l_2(N) = 14,\ l_3(N) = l_5(N) = 18,\ l_4(N) = 26$ при $G = E_6(K)$;

$l_1(N) = 22,\ l_2(N) = 30,\ l_3(N) = 42,\ l_4(N) = 60,\ l_5(N) = 46,\ l_6(N) = 32,$
$l_7(N) = 16$ при $G = E_7(K)$;

$l_1(N) = 52,\ l_2(N) = 76,\ l_3(N) = 102,\ l_4(N) = 152,\ l_5(N) = 124,\ l_6(N) = 96,$
$l_7(N) = 66,\ l_8(N) = 34$ при $G = E_8(K)$.

В силу [22, теоремы 1, 2, 5] $N \subset \overline{C}$ для любого $C \in \mathfrak{U}^1$. Тогда согласно лемме 2.20 $N \in U_p$, ибо $\mathfrak{U}^1 \cap \mathfrak{U}_p \neq \varnothing$. Положим $m = m(\varphi) = m_{\varphi_{\mathbb{C}}}(f(N))$. Из сказанного в начале параграфа следует, что $k_\varphi(N) = \min\{p, m+1\}$. По предложению 1.3 $m = \sum_{i=1}^{r} a_i l_i(N)$. Ввиду табл. V–VIII [2]

$$\gamma = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 \text{ при } G = F_4(K),$$

$$\gamma = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6 \text{ при } G = E_6(K),$$

$$\gamma = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7 \text{ при } G = E_7(K),$$

$$\gamma = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6 + 3\alpha_7 + 2\alpha_8 \text{ при } G = E_8(K).$$

Следовательно,

$$s(\varphi) = 2a_1 + 4a_2 + 3a_3 + 2a_4 + 11 \text{ при } G = F_4(K),$$

$$s(\varphi) = a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 3a_4 + 2a_5 + a_6 + 11 \text{ при } G = E_6(K),$$

$$s(\varphi) = 2a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 3a_5 + 2a_6 + a_7 + 17 \text{ при } G = E_7(K),$$

$$s(\varphi) = 2a_1 + 3a_2 + 4a_3 + 6a_4 + 5a_5 + 4a_6 + 3a_7 + 2a_8 + 29 \text{ при } G = E_8(K).$$

Так как $\mathfrak{U}^1 \cap \mathfrak{U}_p \neq \varnothing$, то в силу [32, предложение (2.2)] $p > 11$ при $G = F_4(K)$ и $G = E_7(K)$, $p > 7$ при $G = E_6(K)$ и $p > 19$ при $G = E_8(K)$. Теперь легко установить, что для любого нетривиального φ либо $m(\varphi) > s(\varphi)$, либо

$$(G, \omega) \in \{(F_4(K), \omega_4), (E_6(K), \omega_1), (E_6(K), \omega_6), (E_7(K), \omega_7)\}.$$

Из наших условий вытекает, что в последнем случае $s(\varphi) > p$ лишь при $G = E_6(K)$, $p = 11$, $\omega = \omega_1$ или $\omega = \omega_6$ и при $G = E_7(K)$, $p = 13$ или $p = 17$, $\omega = \omega_7$. Но $m(\varphi) \geqslant p - 1$ для этих троек (G, p, ω). Значит, $m(\varphi) + 1 \geqslant p$ и $k_\varphi(N) = p$, если $s(\varphi) > p$, что и требовалось доказать. $\rhd$

6.2. Предложение. *Пусть $C \in \mathfrak{U}^1 \cap \mathfrak{U}_p$. Пусть также $a_j \neq 0$ и $l_j(C) \geqslant p - 1$ для некоторого j, $1 \leqslant j \leqslant r$. Предположим, что для всех унипотентных классов $C' \subset \overline{C}$, отличных от C, справедлива формула* (1). *Тогда $k_\varphi(C) = p$.*

$\lhd$ Положим $M^t = M(\omega_t)$, $1 \leqslant t \leqslant r$. Если $I \subset \{1, \ldots, r\}$, обозначим символом M_I^t G_I-модуль $M(\omega_I)$, построенный по весу $\omega = \omega_t$. Пусть $v \in M(\omega)$ и $v_I \in M_I$ — ненулевые векторы младшего веса. Выберем N, как в 6.1. Из [15, предложение 5.1.2] и [22, теоремы 1, 2, 5] следует, что $N \subset \overline{C}$. Тогда по условию для N верна формула (1). Ввиду леммы 2:20 $k_\varphi(C) = p$, если $k_{\varphi_{\mathbb{C}}}(f(C')) \geqslant p$ для произвольного унипотентного класса C', лежащего в $\overline{C}$; в частности, в силу 1.3 это выполняется, если $l_j(C') \geqslant p - 1$ для какого-либо из таких классов C'. Поэтому можно предположить, что $l_j(C') < p - 1$ для всех этих C', в том числе для N. Чтобы найти $l_j(C')$ и $l_j(C)$, используем Tab G. В большинстве случаев из предложения 1.3 и Tab G вытекает, что $k_{\varphi_{\mathbb{C}}}(f(C')) \geqslant p$ для нефундаментального φ. Доказательство проводится по следующей схеме. Пусть (Γ, τ) — каноническая пара для класса C, описанная в 2.12, и $\alpha \in R^+(\Gamma)$. Предположим, что корневой элемент $X_a \in \mathfrak{L}(\Gamma)$ такой, как в 2.10, и обозначим X_α через X. В силу 2.4 достаточно показать, что $X^{p-1}v \neq 0$. Если C — класс регулярных унипотентных элементов, то из лемм 2.10, 2.3, 2.11, формул (4) и доказательства предложения 2.12 для классических групп следует, что существует каноническая пара (Γ_I, τ_I) для класса регулярных унипотентных элементов группы G_I, такая, что X_I можно отождествить с корневым элементом $X_\delta \in \mathfrak{L}(\Gamma_I)$, где $\delta \in R^+(\Gamma_I)$, и $t_\tau(\beta) = t_{\tau_I}(\beta)$ для всех $\beta \in R_I$. Здесь для классической группы G_I можно взять каноническую пару, построенную в 2.3, 2.11, 2.12, и подействовать элементом из нормализатора подгрупп $U^\pm(G_I)$, чтобы получить нужный вид оператора X_I. Положим $m_I = t_{\tau_I}(\omega_I)$. Для произвольного класса C пусть $m = m_{\varphi_\mathfrak{C}}(f(C))$, $a = m - p$. Ввиду леммы 2.5 и выбора группы Γ и гомоморфизма τ имеем $m = t_\tau(\omega)$. При этом всегда $0 \leqslant a \leqslant p-2$. Покажем, что $X^{a+1}v \neq 0$. Если $a+1 \leqslant m_I < p$ для какого-нибудь I, то в силу леммы 2.3 $X^{a+1}v_I \neq 0$, и наше утверждение следует из леммы 2.21. Теперь из 2.18 и 2.19 вытекает, что $X^{p-1}v \neq 0$, что и требовалось доказать. Для некоторых C и p нужны более сложные рассуждения. Значения m_I вычисляются с помощью предложения 1.3 и формул, связывающих фундаментальные веса и простые корни группы G (см. таблицы в [2]). Если G_I — исключительная группа и $\varphi = \varphi_j$, эти значения можно извлечь из табл. 1 и 2; для классических групп используем следствие 2.13.

Пусть сначала $G = F_4(K)$. Тогда C — класс регулярных унипотентных элементов, $X = \sum_{t=1}^{4} X_t$; в силу [32, предложение (2.2)] $p \geqslant 13$. Из сказанного в начале доказательства следует, что надо рассмотреть лишь одно нефундаментальное представление, а именно $\varphi(\omega_2 + \omega_4)$ при $j = 2$, $p = 41$.

Пусть $j = 1$. Так как $l_1(N) = 14$ и $l_1(C) = 22$, можно считать, что $p = 17$ или $p = 19$. Тогда $m = p + 5$ или $m = p + 3$. Для завершения доказательства в этом случае достаточно показать, что вектор $u = X^6 v \neq 0$. Имеем $\omega(v) = -\omega_1$. Пусть u_1 — весовая компонента вектора u веса $-\omega_1 + 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3$. Применив теорему Смита [28] к подгруппе $H(1,2,3) \cong B_3(K)$, легко установить, что $-\omega_1 + a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3 \in \mathfrak{X}(\varphi)$ в точности тогда, когда такая сумма есть вес естественного $B_3(K)$-модуля. Из леммы 2.23 и соотношений коммутации в $\mathfrak{L}$ следует, что $u_1 = X_1 X_2 X_3^2 X_2 X_1 v \neq 0$. Поэтому $u \neq 0$.

Пусть $\omega = \omega_3$ или $\omega = \omega_4$. Можно считать, что $p = 23$ или $p = 29$ при $j = 3$ и $p = 13$ при $j = 4$. Положим $I = \{2,3,4\}$. Тогда $G_I \cong C_3(K)$; $\omega_I = \omega_2$, $m_I = 8$ при $j = 3$ и $\omega_I = \omega_1$, $m_I = 5$ при $j = 4$. Теперь используем описанную выше схему, чтобы установить, что $X^{p-1}v \neq 0$, и получим искомое утверждение.

Остается рассмотреть случаи $\omega = \omega_2$, $29 \leqslant p \leqslant 41$ и $\omega = \omega_2 + \omega_4$, $j = 2$, $p = 41$. В силу леммы 2.16 модуль $V(\omega)$ неприводим при этих значениях ω и p.

Пусть $\omega = \omega_2$, и пусть $w_1 \in M^4$ — ненулевой вектор младшего веса, $w_2 = X_4 w_1$, $w_3 = X_3 w_2$. Заметим, что $w_2 = X w_1$, $w_3 = X^2 w_1$. Положим $S = \Lambda^3 M_4$ (третья внешняя степень), $f = w_1 \wedge w_2 \wedge w_3 \in S$ и обозначим KG-модуль, порожденный f, символом F. Тогда $\omega(F) = \omega_2$. Из неприводимости и свойства универсальности модуля Вейля [20, ч. II, лемма 2.13 b)] вытекает, что можно отождествить F с M^2, а f с v. Поэтому достаточно выяснить, что $X^{p-1}f \neq 0$. Пусть Z — Γ-подмодуль, порожденный w_1. Поскольку $l_4(C) = 16$, из теории представлений группы $SL_2(K)$ следует, что Z неприводим, $\dim Z = 17$ и $Z = \langle X^t w_1 \mid 0 \leqslant t \leqslant 16 \rangle$. Легко видеть, что унипотентные элементы группы Γ действуют на Z как регулярные унипотентные элементы из $SL_{17}(K)$ и Γ-модуль $K\Gamma f$ можно отождествить с подмодулем в $\Lambda^3 Z$. Теперь применим лемму 4.2 и получим наше утверждение.

Если $\omega = \omega_2 + \omega_4$, используем предложение 2.15 с $\lambda_1 = \omega_2$, $m_1 = 40$, $\lambda_2 = \omega_4$, $m_2 = 0$. Здесь требуется неравенство $(x-1)^{40} v \neq 0$ в модуле M^2, которое фактически уже проверено. Это завершает доказательство для $G = F_4(K)$.

Теперь пусть $G = E_6(K)$. Предположим сначала, что $\Delta(C) = (2,2,2,0,2,2)$. Ввиду сказанного в начале доказательства в анализе нуждается лишь случай $\omega = \omega_4$, $p = 29$. Тогда $m = p+1$. Положим $g = X^2 v$. Пусть g_1 — весовая компонента вектора g веса $-\omega + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5$. Применив лемму 2.23(ii) несколько раз, легко выяснить, что $g_1 = X_5 X_{\alpha_3+\alpha_4} v \neq 0$. Поэтому $g \neq 0$, и наше утверждение следует из 2.18 и 2.19.

Теперь пусть C — класс регулярных унипотентных элементов. Предполагается, что формула (1) выполняется для классов, рассмотренных в предыдущем абзаце. Ввиду рассуждений в начале доказательства необходимо разобрать только случаи $\omega = \omega_2$, $p = 19$; $\omega = \omega_3$ или ω_5, $p = 29$ и $\omega = \omega_4$, $p \geqslant 37$. Здесь $m = p+3, p+1, p+a$, где $a \leqslant 5$, соответственно. Возьмем $I = \{1,2,3,4,5\}$ при $j = 2$ и $I = \{1,3,4,5,6\}$ для иных j. Тогда $G_I \cong D_5(K)$ или $G_I \cong A_5(K)$; $\omega_I = \omega_4$, $m_I = 10$ при $j = 2$, $\omega_I = \omega_2$ или ω_4, $m_I = 8$ при $j = 3$ или 5 соответственно; и $\omega_I = \omega_3$, $m_I = 9$ при $j = 4$. Так как во всех случаях $m_I > m - p + 1$, получаем, что $X^{p-1}v \neq 0$, и завершаем работу с $E_6(K)$.

Пусть $G = E_7(K)$. Если $\Delta(C) = (2,2,2,0,2,0,2)$, то не существует простых чисел p с $l_j(N) < p-1$ и $l_j(C) \geqslant p$. Пусть $\Delta(C) = (2,2,2,0,2,2,2)$. Из [22, теорема 2] и условий предложения 6.2 следует, что для класса из строки 3 в Tab G справедлива формула (1). В силу рассуждений в начале доказательства необходимо исследовать лишь случаи $\omega = \omega_2$ или ω_6, $p = 37$; $\omega = \omega_4$, $p = 67$ или $p = 71$; $\omega = \omega_5$, $p = 53$ и $\omega = \omega_7$, $p = 19$. Пусть $2 \leqslant j \leqslant 6$. Возьмем $I = \{1,2,3,4,5,6\}$. Рассмотрим класс $C' \in \mathfrak{U}(G_I)$ с $\Delta(C') = (2,2,2,0,2,2)$ и его каноническую пару (Γ_1, τ_1). Пусть $\delta \in R^+(\Gamma_1)$, $Y = X_\delta \in \mathfrak{L}(\Gamma_1)$ — корневой элемент, выбранный, как в 2.10. Положим $t_2 = 16$, $t_3 = t_5 = 22$, $t_4 = 30$, $t_6 = 12$; $V_j = \langle v_I \rangle \subset M_I^j$ при $j \neq 4$ и $V_4 = \langle v_I, X_4 v_I \rangle \subset M_I^4$. Используя лемму 2.3 и табл. 1, можно установить, что $Y^{t_j}u \neq 0$ для любого ненулевого $u \in V_j$. По поводу V_4 поясним, что $X_4 v_I$ — собственный вектор для $U^-(\Gamma_1)$ веса $-\tau_1(\omega_4)$ относительно Γ_1. Положим $T = N_G(U^+) \cap N_G(U^-)$, $T_I = T \cap G_I$, $S = \langle \mathscr{X}_{\pm 4}, T_I \rangle$. Можно показать, что Y лежит в одной S-орбите с X_I. (Сначала подействуем на Y элементом из $\mathscr{X}_4$, чтобы исключить слагаемое $X_{\alpha_4+\alpha_5}$ и получить $X_{\alpha_2+\alpha_4}$ с ненулевым коэффициентом. Затем используем элемент группы $\mathscr{X}_{-4}$, чтобы ликвидировать X_2 и получить X_3. Наконец, подействуем тором T_I.) Заметим, что S стабилизирует V_j. Отсюда следует, что $X_I^{t_j} v_I \in M_I^j \setminus \{0\}$. Поэтому $X^{a+1} v_I \neq 0$. Теперь рассуждаем в рамках нашей общей схемы.

Пусть $j = 7$, $p = 19$. Здесь $a = 2$. Заметим, что $X^3 v$ имеет весовую компоненту $X_5 X_6 X_7 v$. В силу леммы 2.23(ii) $X^3 v \neq 0$. Применим 2.18 и 2.19, чтобы завершить анализ для данного C.

Пусть C — регулярный класс. Ввиду условий предложения 6.2 и леммы 2.20 формула (1) выполняется для всех других классов из $\mathfrak{U}$. Рассуждения в начале доказательства показывают, что необходимо рассмотреть только следующие случаи: $\omega = \omega_1$, $p = 29$ или $p = 31$; $\omega = \omega_2$, $41 \leqslant p \leqslant 47$; $\omega = \omega_3$, $53 \leqslant p \leqslant 61$; $\omega = \omega_4$, $79 \leqslant p \leqslant 91$; $\omega = \omega_5$, $59 \leqslant p \leqslant 73$; $\omega = \omega_6$, $p = 43$ или $p = 47$; $\omega = \omega_7$, $p = 23$. Тогда $a \leqslant 5$ при $j = 1$, $a \leqslant 8$ при $j = 2$, $a \leqslant 13$ при $j = 3$, $a \leqslant 17$ при $j = 4$, $a \leqslant 16$ при $j = 5$, $a \leqslant 9$ при $j = 6$ и $a = 4$ при $j = 7$. Положим $I = \{1,2,3,4,5,6\}$ при $j < 7$ и $I = \{2,3,4,5,6,7\}$ при $j = 7$. Таким образом, $G_I \cong E_6(K)$ при $j < 7$. Из табл. 1 легко видеть, что $m_I > a+1$, если $j < 7$. При $j = 7$ группа G_I изоморфна $D_6(K)$, а φ_I — ее естественное представление. Поэтому $m_I = 10 > a+1$. Теперь используем нашу общую схему для окончания доказательства при $G = E_7(K)$.

Наконец, пусть $G = E_8(K)$. Положим сначала $\Delta(C) = (2,2,2,0,2,0,2,2)$. Вспомним, что для класса N верна формула (1). Ввиду сказанного в начале доказательства достаточно разобрать следующие случаи: $\omega = \omega_1$, $p = 59$; $\omega = \omega_2$, $p = 79$ или $p = 83$; $\omega = \omega_3$, $107 \leqslant p \leqslant 113$; $\omega = \omega_4$, $157 \leqslant p \leqslant 173$; $\omega = \omega_5$, $127 \leqslant p \leqslant 139$; $\omega = \omega_6$, $101 \leqslant p \leqslant 107$; $\omega = \omega_7$, $p = 71$ или $p = 73$; $\omega = \omega_8$, $p = 37$. Пусть $j < 8$. Возьмем $I = \{1,2,3,4,5,6,7\}$. Тогда $G_I \cong E_7(K)$. Рассмотрим класс $C' \in \mathfrak{U}(G_I)$ с $\Delta(C') = (2,2,2,0,2,0,2)$ и его каноническую пару (Γ_1, τ_1). Выберем корневой элемент $Y \in \mathfrak{L}^+(\Gamma_1)$, как в 2.10. Тогда можно отождествить Y с X_I. Положим $t_1 = 22$, $t_2 = 31$, $t_3 = 42$, $t_4 = 60$, $t_5 = 47$, $t_6 = 32$, $t_7 = 17$. Из табл. 2 и леммы 2.3 следует, что $Y^{t_j} v_I \in M_I^j \setminus \{0\}$. При этом $t_j > a+1$ для всех $j < 8$. Теперь пусть $j = 8$. Тогда $a = 1$. Используя леммы 2.10 и 2.23(ii), легко проверить, что $X^2 v$ имеет ненулевую весовую компоненту $X_{\alpha_6+\alpha_7} X_8 v$.

Итак, во всех случаях $X^{a+1}v \neq 0$. Применим 2.18 и 2.19, чтобы завершить доказательство для данного C.

Пусть $\Delta(C) = (2,2,2,0,2,2,2,2)$. Тогда по [22, теорема 5] для класса из строки 3 в $\mathrm{Tab}\,G$ выполняется формула (1). Из рассуждений в начале доказательства вытекает, что необходимо изучить лишь следующие случаи: $\omega = \omega_1$, $p = 67$ или $p = 71$; $\omega = \omega_2$, $97 \leqslant p \leqslant 103$; $\omega = \omega_3$, $127 \leqslant p \leqslant 139$; $\omega = \omega_4$, $179 \leqslant p \leqslant 199$; $\omega = \omega_5$, $149 \leqslant p \leqslant 167$; $\omega = \omega_6$, $113 \leqslant p \leqslant 131$; $\omega = \omega_7$, $79 \leqslant p \leqslant 89$; $\omega = \omega_8$, $p = 41$ или $p = 43$. Если $j < 8$, действуем, как при работе с классом из строки 3 в $\mathrm{Tab}\,G$, выбрав класс $C' \in \mathfrak{U}(G_I)$ с $\Delta(C') = (2,2,2,0,2,2,2)$. Сохраним обозначение Y и положим $t_1 = 26$, $t_2 = 37$, $t_3 = 50$, $t_4 = 72$, $t_5 = 57$, $t_6 = 40$, $t_7 = 21$. Из леммы 2.3 и табл. 2 следует, что $Y^{t_j}v_I \in M_I^j \setminus \{0\}$ для каждого $j < 8$. Во всех этих случаях $t_j > a + 1$. При $j = 8$ легко установить, что X^6v имеет ненулевую весовую компоненту $X_2X_{\alpha_3+\alpha_4}X_5X_6X_7X_8v$. Поэтому в силу леммы 2.21 $X^{a+1}v \neq 0$ для любого $j \leqslant 8$. Из 2.18 и 2.19 следует искомое утверждение для нашего C.

Пусть класс C регулярен. Тогда ввиду леммы 2.20 для всех $C' \in U \setminus \{C\}$ справедлива формула (1). В силу рассуждений в начале доказательства достаточно рассмотреть следующие случаи: $\omega = \omega_1$, $79 \leqslant p \leqslant 89$; $\omega = \omega_2$, $109 \leqslant p \leqslant 131$; $\omega = \omega_3$, $149 \leqslant p \leqslant 181$; $\omega = \omega_4$, $223 \leqslant p \leqslant 269$; $\omega = \omega_4+\omega_8$, $j = 4$, $p = 263$ или $p = 269$; $\omega = \omega_5$, $179 \leqslant p \leqslant 211$; $\omega = \omega_6$, $137 \leqslant p \leqslant 167$; $\omega = \omega_7$, $97 \leqslant p \leqslant 113$; $\omega = \omega_8$, $p = 53$. Пусть сначала $\omega = \omega_j$. Если $j = 8$, то $a = 5$ и из леммы 2.23(ii) вытекает, что X^6v имеет ненулевую весовую компоненту $X_3 \dots X_8v$. При $j < 8$ возьмем $I = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ и заметим, что $m_I > a+1$. Значит, $X^{a+1}v \neq 0$ при $j \leqslant 8$. Используя 2.18 и 2.19, получаем наше утверждение при $\omega = \omega_i$.

Пусть $\omega = \omega_4 + \omega_8$ и $v' \in M^4$ — ненулевой вектор младшего веса. Выше фактически установлено, что $X^{p-1}v' \neq 0$. Тогда по лемме 2.3 $(x-1)^{p-1}v' \neq 0$ для неединичного корневого элемента $x \in U^+(\Gamma)$. Имеем $s(\varphi) = 37 < p$. Следовательно, модуль $V(\omega)$ неприводим ввиду леммы 2.16. Применив следствие 2.17 с $k_4 = p - 1$ и $k_8 = 0$ и лемму 2.18, покажем, что $(x-1)^{p-1}v \leqslant 0$. Предложение доказано. $\rhd$

6.3. *Предложение.* *Формула* (1) *верна для классов из* $\mathfrak{U}^1$.

$\lhd$ Напомним, что предполагается справедливость формулы (1) для всех классов в $\mathfrak{U}_p \setminus \mathfrak{U}^1$. Пусть $C \in \mathfrak{U}^1$, N — класс из 6.1. Из описания замыканий классов из $\mathfrak{U}^1$ в [15, предложение 5.1.2] и [22, теоремы 1, 2, 5] следует, что $N \subset \overline{C}$ и что достаточно доказать наше предложение при дополнительном условии: для любого класса $C' \subset \overline{C}$, отличного от C, выполняется формула (1). Леммы 2.20 и 6.1 позволяют свести задачу к случаю, когда $s(\varphi) \leqslant p$. Тогда модуль $V(\omega)$ неприводим по лемме 2.16. В силу предложения 6.2 $k_\varphi(C) = p$, если $l_i(C) \geqslant p$ для некоторого $i \leqslant r$ с $a_i \neq 0$. Предположим, что $l_i(C) < p$ для всех таких i. Пусть $v^i \in M(\omega_i)$ — ненулевой вектор старшего веса. Выберем каноническую пару (Γ, τ) для C, как в 2.10. Пусть $x \in U^-(\Gamma)$ — неединичный корневой элемент. Согласно лемме 2.3 $(x-1)^{l_i}v^i \neq 0$. Теперь искомое утверждение вытекает из следствия 2.17. $\rhd$

Это завершает доказательство теоремы 1.1 при $G = F_4(K)$ и $G = E_i(K)$.

§ 7. Доказательство теоремы 1.1 для $G = G_2(K)$

В этом параграфе $G = G_2(K)$ $p > 3$. Ввиду доказанного ранее и результатов 3.3 и 3.4 для доказательства теоремы 1.1 достаточно рассмотреть класс регулярных унипотентных элементов, предполагая, что для других классов выполняется формула (1). Пусть класс $C \in \mathfrak{U}_p$ регулярен, $N \in \mathfrak{U}$ и $\Delta(N) = (0,2)$. По [32, предложение 2.2] $p \geqslant 7$. Положим $m = m_{\varphi_{\mathbb{C}}}(C)$ и $m_1 = m_{\varphi_{\mathbb{C}}}(N)$. В силу табл. 5 и предложения 1.3 $m = 6a_1 + 10a_2$, $m_1 = 2a_1 + 4a_2$. Согласно [2, табл. IX] можно заключить, что $\gamma = 2\alpha_1 + \alpha_2$, $s(\varphi) = 2a_1 + 3a_2 + 5$. Пусть (Γ, τ) — каническая пара для класса C, $\alpha \in R^+(\Gamma)$, $x = x_\alpha(1) \in \Gamma$. Предположим, что корневой элемент $X_\alpha \in \mathfrak{L}(\Gamma)$ такой, как в 2.10. Ясно что $x \in C$.

7.1. Лемма. *Пусть $M_i = M(\omega_i)$ и $v^i \in M_i$ — ненулевые векторы младшего веса, $i = 1, 2$. Тогда $(x-1)^{10}v^2 \neq 0$ при $p > 7$ и в любом случае $(x-1)^6 v^1 \neq 0$. Если $p = 7$ и $a_2 \neq 0$, то $k_\varphi(C) = 7$.*

$\lhd$ Для v^1 и для v^2 при $p > 7$ утверждения леммы следуют из леммы 2.3 и выбора элемента x. (Для ρ_1 это хорошо известно.) Пусть $p = 7$ и $a_2 \neq 0$. При $\omega = \omega_2$ легко выяснить, что $m_1 \geqslant 6$. Тогда $k_\varphi(N) = p$ ввиду наших предположений и из леммы 2.20 вытекает искомое равенство. Пусть $\omega = \omega_2$. Тогда $t_\tau(\omega) = p+3$. Значит, v^2 порождает неразложимый Γ-модуль со старшим весом $(p+3)\omega_1$. Пусть w — весовая компонента вектора $X_\alpha^4 v^2$ веса $-\omega_2 + \alpha_2 + 3\alpha_1$. Так как $-\omega_2 + \alpha_1 \notin \mathfrak{X}(\rho_2)$, легко понять, что $w = X_1^3 X_2 v^2$. Согласно лемме 2.23(ii) $w \neq 0$. В силу 2.18 и 2.19 $X_\alpha^{p-1} v^2 \neq 0$. Из 2.4 следует лемма. $\rhd$

7.2. Лемма. *Теорема 1.1 верна, если $s(\varphi) \leqslant p$ или $m_1 \geqslant p - 1$.*

$\lhd$ При $s(\varphi) \leqslant p$ лемма вытекает из 7.1, 2.17 и 2.19. Если $m_1 \geqslant p-1$, то $k_\varphi(N) = p$ ввиду сказанного в начале этого параграфа и $k_\varphi(C) = p$ в силу леммы 2.20. $\rhd$

Пусть теперь $m_1 < p - 1$ и $s(\varphi) > p$. Следовательно, $2a_1 + 3a_2 \geqslant p - 4$ и $2a_1 + 4a_2 \leqslant p - 2$. Поскольку p нечетно, получаем $2a_1 + 4a_2 \leqslant p - 3$. Поэтому $a_2 \leqslant 1$. Нетрудно выяснить, что имеются лишь две возможности для веса ω: $\frac{p-3}{2}\omega_1$ и $\frac{p-7}{2}\omega_1 + \omega_2$.

7.3. Лемма. *При $\omega = \frac{p-3}{2}\omega_1$ справедлива теорема 1.1.*

$\lhd$ Согласно [26, утверждение (8.14)] в нашем случае $\varphi \cong \psi|G$, где $\psi \in \operatorname{Irr} B_3(K)$, $\omega(\psi) = \frac{p-3}{2}\omega_1$. Из леммы 7.1 следует (и хорошо известно), что C лежит в классе регулярных унипотентных элементов группы $B_3(K)$. Теперь применим предложение 1.3 и теорему 1.1 для $B_3(K)$. $\rhd$

Далее пусть $\omega = \frac{p-7}{2}\omega_1 + \omega_2$, $p > 7$. Мы приступаем к изучению самого сложного случая для группы $G_2(K)$. Покажем, что $\varphi|\Gamma$ имеет композиционный фактор $\xi = \varphi((2p-2)\omega_1)$ с $k_\xi(x) = p$. Для этого понадобятся некоторые факты о модуле $V(\omega)$ и размерностях весовых подпространств в M.

7.4. Лемма. *Модуль $V(\omega)$ имеет два композиционных фактора: M и $M(\omega - \omega_1)$, а модуль $V(\omega - \omega_1)$ неприводим.*

$\lhd$ Второе утверждение непосредственно следует из леммы 2.16. Затем применяя формулу суммы Андерсена — Янцена [20, предложение 8.19 части II], получаем первое утверждение. $\rhd$

7.5. Лемма. *Пусть $c_1, c_2 \in \mathbb{Z}^+$ и либо $c_1 \leqslant a_1$, $c_2 \leqslant c_1 + 1$, либо $c_2 \leqslant 1$, $c_1 \leqslant 3c_2 + a_1$. Тогда $\lambda = \omega - c_1\alpha_1 - c_2\alpha_2 \in \mathfrak{X}(\varphi)$.*

$\lhd$ Из [3, гл. VIII, § 7, предложение 3] вытекает, что $\lambda \in \mathfrak{X}(\varphi_{\mathbb{C}})$. Тогда $\lambda \in \mathfrak{X}(\varphi)$ по теореме Премета [7]. $\rhd$

При $\nu \in \mathfrak{X}$, $\mu \in \mathfrak{X}^+$ положим $d_\mu(\nu) = \dim V(\mu)_\nu$, $d(\nu) = \dim M_\nu$; при $\lambda = \omega - b_1\alpha_1 - b_2\alpha_2 \in \mathfrak{X}(\varphi)$ пусть $b_i(\lambda) = b_i$, $i = 1, 2$.

7.6. Лемма. *При $\nu \in X(\varphi) \setminus \{\omega\}$*

$$\begin{aligned} d_\mu(\nu) &= d_\mu(\nu + \alpha_1) + d_\mu(\nu + \alpha_2) - d_\mu(\nu + 4\alpha_1 + \alpha_2) + d_\mu(\nu + 4\alpha_1 + 4\alpha_2) \\ &- d_\mu(\nu + 9\alpha_1 + 4\alpha_2) + d_\mu(\nu + 9\alpha_1 + 6\alpha_2) - d_\mu(\nu + 10\alpha_1 + 6\alpha_2) + d_\mu(\nu + 10\alpha_1 + 5\alpha_2) \\ &- d_\mu(\nu + 6\alpha_1 + 5\alpha_2) + d_\mu(\nu + 6\alpha_1 + 2\alpha_2) - d_\mu(\nu + \alpha_1 + 2\alpha_2). \end{aligned}$$

$\lhd$ Используем формулу Вейля для кратностей [3, гл. VIII, § 9.3, следствие] и выпишем явно 11 неединичных элементов группы W. $\rhd$

7.7. Следствие. *При $b \in \mathbb{Z}^+$, $1 \leqslant b \leqslant a_1$, положим $D(b) = d_\omega(\omega - b\alpha_1 - \alpha_2)$. Тогда $D(1) = 2$, $D(2) = 3$ и $D(b) = 4$ при $b \geqslant 3$.*

$\lhd$ Известно (и легко следует из 2.23 и 7.6), что $d_\omega(\omega - k\alpha_i) = 1$ при $k \in \mathbb{Z}^+$, $0 \leqslant k \leqslant a_i$, $i = 1, 2$. Теперь используем лемму 7.6, чтобы вычислить $D(1)$, $D(2)$ и $D(3)$ и получить формулу $D(b) = D(b-1)$ при $b \geqslant 4$. $\rhd$

При $B \in \mathbb{Z}^+$ положим $\mathfrak{X}_B = \{\mu \in \mathfrak{X}(\varphi) \mid b_1(\mu) + b_2(\mu) = B\}$, $M_B = \langle M_\mu \mid \mu \in \mathfrak{X}_B\rangle$, $d_B = \dim M_B$. Если $\mathfrak{X}_B \neq \varnothing$, обозначим символом λ_B вес $\lambda \in \mathfrak{X}_B$ с минимальным $b_1(\lambda)$. Ниже в пп. 7.8–7.14 $\lambda \in \mathfrak{X}(\varphi)$, $\lambda^- = \lambda - \alpha_1$, $\delta = \omega - \omega_1$, $b_i = b_i(\lambda)$, $i = 1, 2$.

7.8. Следствие. *Пусть $b_2 = b_1 + 1$. Тогда $d(\lambda) = 1$; $d(\lambda^-) = 2$ при $b_1 \leqslant 1$ и $d(\lambda^-) = 3$, если $b_1 > 1$.*

$\lhd$ Легко установить, что λ лежит в одной W-орбите с весом $\omega - b_1\alpha_1$, а λ^- — в одной W-орбите с $\mu = \omega - (b_1+1)\alpha_1 - \alpha_2$. Поэтому $d(\lambda) = 1$ и $d(\lambda^-) = d(\mu)$. Ввиду следствия 7.7 $d_\omega(\mu) = 2, 3, 4$ при $b_1 = 0, 1$ и $b_1 \geqslant 2$ соответственно. Поскольку $\omega_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2$, используя лемму 2.23(ii), получаем, что $d_\delta(\mu) = 0$, если $b_1 = 0$, и $d_\delta(\mu) = 1$ в противном случае. В силу леммы 7.4 $d(\mu) = 2$ при $b_1 \leqslant 1$ и $d(\mu) = 3$, если $b_1 \geqslant 1$. $\rhd$

7.9. Лемма. *Пусть $\langle\lambda, \alpha_i\rangle > 0$ при $i = 1$ или $i = 2$. Тогда $d(\lambda) \leqslant d(\lambda - \alpha_i)$.*

$\lhd$ Достаточно доказать, что $X_{-i}w \neq 0$ при $w \in M_\lambda \setminus \{0\}$. Пусть это не так. Положим $Y_j = X_{-\alpha_i, j}$, где $X_{-\alpha_i, j}$ — операторы из формулы (2). Тогда $Y_j w = 0$ при $0 < j < p$. Вспомним, что $\langle\omega, \beta\rangle \leqslant \langle\omega, \gamma\rangle$ для всех $\beta \in R^+$ (см. рассуждения в доказательстве леммы 2.16). В силу [10, замечание 2] $\langle\mu, \alpha_m\rangle \leqslant \langle\omega, \alpha_m\rangle$, если $\mu \in \mathfrak{X}(\varphi)$ и корень $\alpha_m \in R^+$ максимален среди корней одной с ним длины. Поскольку $WX(\varphi) = X(\varphi)$, можно установить, что $|\langle\mu, \alpha_i\rangle| \leqslant \langle\omega, \gamma\rangle = p - 4$ для всех $\mu \in \mathfrak{X}(\varphi)$. Пусть $t \geqslant p$, $w_1 = Y_t w$. Тогда $\langle\omega(w_1), \alpha_i\rangle < -p$. При $w_1 \neq 0$ приходим к противоречию. Следовательно, $Y_j w = 0$ для всех $j > 0$. По формуле (2) группа $\mathscr{X}_{-i}$ стабилизирует w. Значит, ненулевой $\langle\mathscr{X}_{\pm i}\rangle$-модуль, порожденный вектором w, содержится в подпространстве $\langle M_\mu \mid \langle\mu, \alpha_i\rangle > 0\rangle$, что, конечно, невозможно. Поэтому $X_{-i}w \neq 0$. $\rhd$

7.10. Лемма. *Пусть $3b_2 \leqslant b_1 < a_1$. Тогда $d(\lambda) = d(\lambda^-)$.*

$\lhd$ Покажем сначала, что $d_\omega(\lambda) = d_\omega(\lambda^-)$. Используем индукцию по b_2. При $b_2 = 0$ см. рассуждения в 7.7. Положим $d_{i,j} = d_\omega(\lambda^- + i\alpha_1 + j\alpha_2)$. Ясно, что $d_{i,j} = 0$ при $j > b_2$. Предположим, что утверждение леммы выполняется для весов μ с $b_2(\mu) < b_2$. Легко видеть, что $b_1 - 3 \geqslant 3(b_2 - 1)$, $b_1 - 8 > 3(b_2 - 4)$, $b_1 - 9 > 3(b_2 - 5) > 3(b_2 - 6)$, $b_1 - 5 > 3(b_2 - 2)$. Поэтому, применив несколько раз предположение индукции, получаем, что $d_{0,1} = d_{4,1}$, $d_{4,4} = d_{9,4}$, $d_{9,6} = d_{10,6}$, $d_{10,5} = d_{6,5}$, $d_{6,2} = d_{1,2}$. Теперь из леммы 7.6 следует, что $d_\omega(\lambda) = d_\omega(\lambda^-)$. Напомним, что $\omega_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2$. Так как $b_1 - 2 > 3(b_2 - 1)$, совершенно аналогично можно доказать, что $d_\delta(\lambda) = d_\delta(\lambda^-)$. (При этом $d_\delta(\lambda) = d_\delta(\lambda^-) = 0$, если $b_2 = 0$.) Следовательно, $d(\lambda) = d_\omega(\lambda) - d_\delta(\lambda) = d_\omega(\lambda^-) - d_\delta(\lambda^-) = d(\lambda^-)$. $\rhd$

7.11. Следствие. *Пусть $b_1 < a_1$. Тогда $d(\lambda) \leqslant d(\lambda^-)$.*

$\lhd$ При $\langle\lambda, \alpha_1\rangle > 0$ наше утверждение вытекает из леммы 7.9. Пусть $\langle\lambda, \alpha_1\rangle \leqslant 0$. Из $\langle\lambda, \alpha_1\rangle = a_1 + 3b_2 - 2b_1$ и $b_1 < a_1$ следует, что $b_1 > 3b_2$. Тогда $d(\lambda) = d(\lambda^-)$ в силу следствия 7.8. $\rhd$

7.12. Лемма. *Число b_2 не больше, чем число $b_1 + 1$. Если $\lambda = \lambda_B$ и $b_1 \leqslant a_1$, то $b_2 \geqslant b_1$.*

$\lhd$ Если $b_2 > b_1 + 1$, то $\langle\lambda, \alpha_2\rangle = -i < -b_2$. Так как множество $\mathfrak{X}(\varphi)$ инвариантно относительно действия группы W, то вес $\lambda + i\alpha_2$ содержится в $\mathfrak{X}(\varphi)$, что приводит к противоречию. Поэтому $b_2 \leqslant b_1 + 1$.

Пусть $\lambda = \lambda_B$. При $b_1 = 0$ наше утверждение тривиально. Пусть $b_1 > 0$ и $b_2 < b_1$. Тогда вес $\omega - (b_1 - 1)\alpha_1 - (b_2 + 1)\alpha_2$ содержится в $\mathfrak{X}_B$ согласно лемме 7.5, что невозможно ввиду выбора веса λ_B. Значит, $b_2 \geqslant b_1$. $\rhd$

7.13. Лемма. *Пусть $\lambda = \lambda_B$ и $b_2 = b_1 \leqslant a_1$. Тогда $\nu = \lambda - \alpha_2 \in \mathfrak{X}_{B+1}$ и $\nu \neq \mu - \alpha_1$ ни для какого $\mu \in \mathfrak{X}_B$.*

◁ В силу леммы 7.5 $\mu \in \mathfrak{X}_{B+1}$. Второе утверждение следует из определения веса λ_B. ▷

7.14. Предложение. *Пусть $B = (p-11)/2$. Тогда $d_B < d_{B+1}$.*

◁ Поскольку $B < a_1$, при $\mu \in \mathfrak{X}_B$ вес $\mu^- = \mu - \alpha_1$ содержится в $\mathfrak{X}_{B+1}$ по 7.12 и 7.5. Согласно 7.11 $d(\mu^-) \geqslant d(\mu)$ для всех этих μ, ибо $b_1(\mu) \leqslant B < a_1$. Положим $\lambda = \lambda_B$. Ввиду 7.12 $b_2 = b_1$ или $b_2 = b_1 + 1$. В силу 7.13 в первом случае $\mathfrak{X}_{B+1}$ содержит вес, не представимый в виде $\mu - \alpha_1$ с $\mu \in \mathfrak{X}_B$. Во втором $d(\lambda) < d(\lambda - \alpha_1)$ по 7.8. В любой ситуации отсюда вытекает утверждение предложения. ▷

7.15. Предложение. *Показатель $k_\varphi(C)$ равен p.*

◁ Пусть $B = (p-11)/2$. Из выбора гомоморфизма τ следует, что $m = t_\tau(\omega)$. Поэтому $t_\tau(\omega) = 3p-11$ и $t_\tau(\mu) = 2p-2$ при $\mu \in \mathfrak{X}_{B+1}$, поскольку $t_\tau(\alpha_i) = 2$ при $i = 1, 2$. Понятно, что $X_\alpha M_{B+1} \subseteq M_B$. Так как $d_B < d_{B+1}$ согласно предложению 7.14, существует ненулевой вектор $w \in M_{B+1}$ с $X_\alpha w = 0$. Пусть $X_{\alpha,i}$ — операторы из формулы (2), ассоциированные с корнем α. Предположим, что $X_{\alpha,i} w \neq 0$ для некоторого $i > 0$. Тогда $i \geqslant p$ и вес вектора $X_{\alpha,i} w$ относительно группы Γ равен $j\omega_1$, где $j \geqslant 4p-2$. Это невозможно, ибо $\max\limits_{\mu \in \mathfrak{X}(\varphi)} t_\tau(\mu) = t_\tau(\omega) = 3p-11$. Значит, $X_{\alpha,i} w = 0$ при $i > 0$ и корневая подгруппа $\mathscr{X}_\alpha \subset \Gamma$ фиксирует вектор w. Поэтому w порождает неразложимый Γ-модуль со старшим весом $(2p-2)\omega_1$ и ограничение $\varphi|\Gamma$ имеет композиционный фактор $\xi = \varphi((2p-2)\omega_1) \cong \varphi((p-2)\omega_1) \otimes Fr \cdot \varphi(\omega_1)$. Используя лемму 2.2, получаем, что $k_\psi(x) = p$. Тогда $k_\varphi(C) = p$. ▷

Из результатов 7.2, 7.3 и 7.15 следует теорема 1.1 для группы $G_2(K)$. Итак, ее доказательство завершено.

Таблица 1

Классы сопряженных неединичных унипотентных элементов в $E_6(F)$

Номер по порядку	Тип	H_F	$\Delta(C_F)$ / $l(C_F)$	p
1	E_6	G_F	$(2,2,2,2,2,2)$ $(16,22,30,42,30,16)$	$p > 11$
2	$E_6(a_1)$	G_F	$(2,2,2,0,2,2)$ $(12,16,22,30,22,12)$	$p > 7$
3	$E_6(a_3) = A_5 + A_1$	$H(1,3,4,5,6,\gamma)$	$(2,0,0,2,0,2)$ $(8,10,14,20,14,8)$	$p > 5$
4	D_5	$H(1,\ldots,5)$	$(2,2,0,2,0,2)$ $(10,14,18,26,18,10)$	$p > 7$
5	$D_5(a_1)$	$H(1,\ldots,5)$	$(1,2,1,0,1,1)$ $(7,10,13,18,13,7)$	$p > 5$
6	A_5	$H(1,3,4,5,6)$	$(2,1,1,0,1,2)$ $(8,10,14,19,14,8)$	$p > 5$
7	$A_4 + A_1$	$H(1,2,4,5,6)$	$(1,1,1,0,1,1)$ $(6,8,11,15,11,6)$	$p > 3$
8	$2A_2 + A_1$	$H(1,2,3,5,6)$	$(1,0,0,1,0,1)$ $(4,5,7,10,7,4)$	$p > 2$
9	D_4	$H(2,3,4,5)$	$(0,2,0,2,0,0)$ $(6,10,12,18,12,6)$	$p > 5$

Продолжение

10	$D_4(a_1)$	$H(2,3,4,5)$	$(0,0,0,2,0,0)$	$(4,6,8,12,8,4)$	$p>3$
11	A_4	$H(1,3,4,5)$	$(2,2,0,0,0,2)$	$(6,8,10,14,10,6)$	$p>3$
12	A_3+A_1	$H(1,3,4,6)$	$(0,1,1,0,1,0)$	$(4,6,8,11,8,4)$	$p>3$
13	$2A_2$	$H(1,3,5,6)$	$(2,0,0,0,0,2)$	$(4,4,6,8,6,4)$	$p>2$
14	A_2+2A_1	$H(1,2,3,5)$	$(0,0,1,0,1,0)$	$(3,4,6,8,6,3)$	$p>2$
15	A_3	$H(1,3,4)$	$(1,2,0,0,0,1)$	$(4,6,7,10,7,4)$	$p>3$
16	A_2+A_1	$H(1,2,3)$	$(1,1,0,0,0,1)$	$(3,4,5,7,5,3)$	$p>2$
17	$3A_1$	$H(1,2,5)$	$(0,0,0,1,0,0)$	$(2,3,4,6,4,2)$	
18	A_2	$H(1,3)$	$(0,2,0,0,0,0)$	$(2,4,4,6,4,2)$	$p>2$
19	$2A_1$	$H(1,2)$	$(1,0,0,0,0,1)$	$(2,2,3,4,3,2)$	
20	A_1	$H(1)$	$(0,1,0,0,0,0)$	$(1,2,2,3,2,1)$	

Таблица 2

Классы сопряженных неединичных унипотентных элементов в $E_7(F)$

Номер по порядку	Тип	H_F	$\Delta(C_F)$	$l(C_F)$	p
1	E_7	G_F	$(2,2,2,2,2,2,2)$	$(34,49,66,96,75,52,27)$	$p>17$
2	$E_7(a_1)$	G_F	$(2,2,2,0,2,2,2)$	$(26,37,50,72,57,40,21)$	$p>13$
3	$E_7(a_2)$	G_F	$(2,2,2,0,2,0,2)$	$(22,31,42,60,47,32,17)$	$p>11$
4	$E_7(a_3)=D_6+A_1$	$H(2,\ldots,7,\gamma)$	$(2,0,0,2,0,2,2)$	$(18,25,34,50,39,28,15)$	$p>7$
5	$E_7(a_4)=D_6(a_1)+A_1$	$H(2,\ldots,7,\gamma)$	$(2,0,0,2,0,0,2)$	$(14,19,26,38,29,20,11)$	$p>7$
6	$E_7(a_5)=D_6(a_2)+A_1$	$H(2,\ldots,7,\gamma)$	$(0,0,0,2,0,0,2)$	$(10,15,20,30,23,16,9)$	$p>5$
7	E_6	$H(1,\ldots,6)$	$(2,0,2,2,0,2,0)$	$(22,30,42,60,46,32,16)$	$p>11$
8	$E_6(a_1)$	$H(1,\ldots,6)$	$(2,0,0,2,0,2,0)$	$(16,22,30,44,34,24,12)$	$p>7$
9	$E_6(a_3)=(A_5+A_1)'$	$H(1,\ldots,6)$	$(0,0,2,0,0,2,0)$	$(10,14,20,28,22,16,8)$	$p>5$

Продолжение

10	D_6	$H(2,\ldots,7)$	$(2,1,1,0,1,2,2)$ $(18,25,34,49,39,28,15)$	$p>7$
11	$D_6(a_1)$	$H(2,\ldots,7)$	$(2,1,1,0,1,0,2)$ $(14,19,26,37,29,20,11)$	$p>7$
12	$D_6(a_2)$	$H(2,\ldots,7)$	$(0,1,1,0,1,0,2)$ $(10,15,20,29,23,16,9)$	$p>5$
13	A_6	$H(1,3,\ldots,7)$	$(0,0,0,2,0,2,0)$ $(12,18,24,36,28,20,10)$	$p>5$
14	D_5+A_1	$H(1,\ldots,5,7)$	$(2,1,1,0,1,1,0)$ $(14,19,26,37,29,20,10)$	$p>7$
15	$D_5(a_1)+A_1$	$H(1,\ldots,5,7)$	$(2,0,0,0,2,0,0)$ $(10,13,18,26,21,14,7)$	$p>5$
16	$(A_5+A_1)''$	$H(1,2,4,5,6,7)$	$(1,0,0,1,0,1,2)$ $(10,14,19,28,22,16,9)$	$p>5$
17	A_4+A_2	$H(1,2,3,4,6,7)$	$(0,0,0,2,0,0,0)$ $(8,12,16,24,18,12,6)$	$p>3$
18	$A_3+A_2+A_1$	$H(1,2,3,5,6,7)$	$(0,0,0,0,2,0,0)$ $(6,9,12,18,15,10,5)$	$p>3$
19	D_5	$H(1,\ldots,5)$	$(2,0,2,0,0,2,0)$ $(14,18,26,36,28,20,10)$	$p>7$
20	$D_5(a_1)$	$H(1,\ldots,5)$	$(2,0,0,1,0,1,0)$ $(10,13,18,26,20,14,7)$	$p>5$
21	A_5'	$H(1,3,4,5,6)$	$(1,0,0,1,0,2,0)$ $(10,14,19,28,22,16,8)$	$p>5$
22	A_5''	$H(2,4,5,6,7)$	$(2,0,0,0,0,2,2)$ $(10,13,18,26,21,16,9)$	$p>5$
23	D_4+A_1	$H(2,3,4,5,7)$	$(2,1,1,0,0,0,1)$ $(10,13,18,25,19,13,7)$	$p>5$
24	$D_4(a_1)+A_1$	$H(2,3,4,5,7)$	$(0,1,1,0,0,0,1)$ $(6,9,12,17,13,9,5)$	$p>3$
25	A_4+A_1	$H(1,4,5,6,7)$	$(1,0,0,1,0,1,0)$ $(8,11,15,22,17,12,6)$	$p>3$
26	A_3+A_2	$H(1,3,4,6,7)$	$(0,0,0,1,0,1,0)$ $(6,9,12,18,14,10,5)$	$p>3$
27	A_3+2A_1	$H(2,3,5,6,7)$	$(1,0,0,0,1,0,1)$ $(6,8,11,16,13,9,5)$	$p>3$
28	$2A_2+A_1$	$H(1,2,3,5,6)$	$(0,0,1,0,0,1,0)$ $(5,7,10,14,11,8,4)$	$p>2$
29	A_2+3A_1	$H(1,2,3,5,7)$	$(0,2,0,0,0,0,0)$ $(4,7,8,12,9,6,3)$	$p>2$
30	D_4	$H(2,3,4,5)$	$(2,0,2,0,0,0,0)$ $(10,12,18,24,18,12,6)$	$p>5$
31	$D_4(a_1)$	$H(2,3,4,5)$	$(0,0,2,0,0,0,0)$ $(6,8,12,16,12,8,4)$	$p>3$
32	A_4	$H(4,5,6,7)$	$(2,0,0,0,0,2,0)$ $(8,10,14,20,16,12,6)$	$p>3$

Продолжение

33	$(A_3+A_1)'$	$H(3,5,6,7)$	$(1,0,0,1,0,0,0)$ $(6,8,11,16,12,8,4)$	$p>3$
34	$(A_3+A_1)''$	$H(2,5,6,7)$	$(2,0,0,0,0,0,2)$ $(6,7,10,14,11,8,5)$	$p>3$
35	$2A_2$	$H(1,3,5,6)$	$(0,0,0,0,0,2,0)$ $(4,6,8,12,10,8,4)$	$p>2$
36	A_2+2A_1	$H(1,3,5,7)$	$(0,0,0,1,0,0,0)$ $(4,6,8,12,9,6,3)$	$p>2$
37	$4A_1$	$H(1,2,5,7)$	$(0,1,0,0,0,0,1)$ $(3,5,6,9,7,5,3)$	
38	A_3	$H(1,3,4)$	$(2,0,0,0,0,1,0)$ $(6,7,10,14,11,8,4)$	$p>3$
39	A_2+A_1	$H(1,3,5)$	$(1,0,0,0,0,1,0)$ $(4,5,7,10,8,6,3)$	$p>2$
40	$(3A_1)'$	$H(1,2,5)$	$(0,0,1,0,0,0,0)$ $(3,4,6,8,6,4,2)$	
41	$(3A_1)''$	$H(2,5,7)$	$(0,0,0,0,0,0,2)$ $(2,3,4,6,5,4,3)$	
42	A_2	$H(1,3)$	$(2,0,0,0,0,0,0)$ $(4,4,6,8,6,4,2)$	$p>2$
43	$2A_1$	$H(1,2)$	$(0,0,0,0,0,1,0)$ $(2,3,4,6,5,4,2)$	
44	A_1	$H(1)$	$(1,0,0,0,0,0,0)$ $(2,2,3,4,3,2,1)$	

Таблица 3

Классы сопряженных нееединичных унипотентных элементов в $E_8(F)$

Номер по порядку	Тип	H_F	$\Delta(C_F)$ $l(C_F)$	p
1	E_8	G_F	$(2,2,2,2,2,2,2,2)$ $(92,136,182,270,220,168,114,58)$	$p>29$
2	$E_8(a_1)$	G_F	$(2,2,2,0,2,2,2,2)$ $(72,106,142,210,172,132,90,46)$	$p>23$
3	$E_8(a_2)$	G_F	$(2,2,2,0,2,0,2,2)$ $(60,88,118,174,142,108,74,38)$	$p>19$
4	$E_8(a_3)=$ E_7+A_1	$H(1,\ldots,7,\gamma)$	$(2,0,0,2,0,2,2,2)$ $(52,76,102,152,124,96,66,34)$	$p>17$
5	$E_8(b_4)=$ $E_7(a_1)+A_1$	$H(1,\ldots,7,\gamma)$	$(2,0,0,2,0,0,2,2)$ $(40,58,78,116,94,72,50,26)$	$p>13$
6	$E_8(b_5)=$ $E_7(a_2)+A_1$	$H(1,\ldots,7,\gamma)$	$(0,0,0,2,0,0,2,2)$ $(32,48,64,96,78,60,42,22)$	$p>11$
7	$E_8(a_4)=D_8$	$H(2,\ldots,8,-\gamma)$	$(2,0,0,2,0,2,0,2)$ $(44,64,86,128,104,80,54,28)$	$p>13$
8	$E_8(a_5)=D_8(a_1)$	$H(2,\ldots,8,-\gamma)$	$(2,0,0,2,0,0,2,0)$ $(36,52,70,104,84,64,44,22)$	$p>11$

Продолжение

9	$E_8(b_6)=D_8(a_3)$	$H(2,\ldots,8,-\gamma)$	$(0,0,0,2,0,0,0,2)$ $(24,36,48,72,58,44,30,16)$	$p>7$
10	$E_8(a_6)=A_8$	$H(1,3,\ldots,8,-\gamma)$	$(0,0,0,2,0,0,2,0)$ $(28,42,56,84,68,52,36,18)$	$p>7$
11	$E_8(a_7)=2A_4$	$H(1,2,3,4,6,7,8,-\gamma)$	$(0,0,0,0,2,0,0,0)$ $(16,24,32,48,40,30,20,10)$	$p>3$
12	E_7	$H(1,\ldots,7)$	$(2,1,1,0,1,2,2,2)$ $(52,76,102,151,124,96,66,34)$	$p>17$
13	$E_7(a_1)$	$H(1,\ldots,7)$	$(2,1,1,0,1,0,2,2)$ $(40,58,78,115,94,72,50,26)$	$p>13$
14	$E_7(a_2)$	$H(1,\ldots,7)$	$(0,1,1,0,1,0,2,2)$ $(32,48,64,95,78,60,42,22)$	$p>11$
15	$E_7(a_3)=D_6+A_1$	$H(1,\ldots,7)$	$(2,0,0,1,0,1,0,2)$ $(28,40,54,80,65,50,34,18)$	$p>7$
16	$E_7(a_4)=D_6(a_1)+A_1$	$H(1,\ldots,7)$	$(0,0,0,1,0,1,0,2)$ $(20,30,40,60,49,38,26,14)$	$p>7$
17	$E_7(a_5)=D_6(a_2)+A_1$	$H(1,\ldots,7)$	$(0,0,0,1,0,1,0,0)$ $(16,24,32,48,39,30,20,10)$	$p>5$
18	D_7	$H(2,\ldots,8)$	$(2,1,1,0,1,1,0,1)$ $(36,52,70,103,84,64,43,22)$	$p>11$
19	$D_7(a_1)$	$H(2,\ldots,8)$	$(2,0,0,0,2,0,0,2)$ $(28,40,54,80,66,50,34,18)$	$p>7$
20	$D_7(a_2)$	$H(2,\ldots,8)$	$(1,0,0,1,0,1,0,1)$ $(22,32,43,64,52,40,27,14)$	$p>7$
21	A_7	$H(1,3,\ldots,8)$	$(1,0,0,1,0,1,1,0)$ $(24,35,47,70,57,44,30,16)$	$p>7$
22	E_6+A_1	$H(1,2,3,4,5,6,8)$	$(1,0,0,1,0,1,2,2)$ $(32,47,63,94,77,60,42,22)$	$p>11$
23	$E_6(a_1)+A_1$	$H(1,2,3,4,5,6,8)$	$(1,0,0,1,0,1,0,2)$ $(24,35,47,70,57,44,30,16)$	$p>7$
24	$E_6(a_3)+A_1=A_5+2A_1$	$H(1,2,3,4,5,6,8)$	$(1,0,0,0,1,0,1,0)$ $(16,23,31,46,38,29,20,10)$	$p>5$
25	A_6+A_1	$H(1,2,4,5,6,7,8)$	$(1,0,0,1,0,1,0,0)$ $(20,29,39,58,47,36,24,12)$	$p>5$
26	D_5+A_2	$H(1,2,3,4,5,7,8)$	$(0,0,0,0,2,0,0,2)$ $(20,30,40,60,50,38,26,14)$	$p>7$
27	$D_5(a_1)+A_2$	$H(1,2,3,4,5,7,8)$	$(0,0,1,0,0,1,0,1)$ $(15,22,30,44,36,28,19,10)$	$p>5$
28	A_4+A_3	$H(1,2,3,4,6,7,8)$	$(0,0,0,1,0,0,1,0)$ $(14,21,28,42,34,26,18,9)$	$p>11$
29	$A_4+A_2+A_1$	$H(1,2,3,5,6,7,8)$	$(0,0,1,0,0,1,0,0)$ $(13,19,26,38,31,24,18,8)$	$p>3$
30	E_6	$H(1,\ldots,6)$	$(2,0,0,0,0,2,2,2)$ $(32,46,62,92,76,60,42,22)$	$p>11$
31	$E_6(a_1)$	$H(1,\ldots,6)$	$(2,0,0,0,0,2,0,2)$ $(24,34,46,68,56,44,30,16)$	$p>7$

Продолжение

32	$E_6(a_3) = (A_5 + A_1)''$	$H(1,\ldots,6)$	$(2,0,0,0,0,0,2,0)$ $(16,22,30,44,36,28,20,10)$	$p>5$
33	D_6	$H(2,\ldots,7)$	$(2,1,1,0,0,0,1,2)$ $(28,40,54,79,64,49,34,18)$	$p>7$
34	$D_6(a_1)$	$H(2,\ldots,7)$	$(0,1,1,0,0,0,1,2)$ $(20,30,40,59,48,37,26,14)$	$p>7$
35	$D_6(a_2)$	$H(2,\ldots,7)$	$(0,1,1,0,0,0,1,0)$ $(16,24,32,47,38,29,20,10)$	$p>5$
36	A_6	$H(1,3,4,5,6,7)$	$(2,0,0,0,0,2,0,0)$ $(20,28,38,56,46,36,24,12)$	$p>5$
37	D_5+A_1	$H(1,2,3,4,5,7)$	$(1,0,0,0,1,0,1,2)$ $(20,29,39,58,48,37,26,14)$	$p>7$
38	$D_5(a_1)+A_1$	$H(1,2,3,4,5,7)$	$(0,0,0,1,0,0,0,2)$ $(14,21,28,42,34,26,18,10)$	$p>5$
39	$(A_5+A_1)'$	$H(1,3,4,5,6,8)$	$(1,0,0,1,0,0,0,1)$ $(16,23,31,46,37,28,19,10)$	$p>5$
40	D_4+A_2	$H(2,3,4,5,7,8)$	$(0,2,0,0,0,0,0,2)$ $(14,22,28,42,34,26,18,10)$	$p>5$
41	$D_4(a_1)+A_2$	$H(2,3,4,5,7,8)$	$(0,2,0,0,0,0,0,0)$ $(10,16,20,30,24,18,12,6)$	$p>3$
42	A_4+A_2	$H(1,2,3,4,6,7)$	$(0,0,0,0,0,2,0,0)$ $(12,18,24,36,30,24,16,8)$	$p>3$
43	A_4+2A_1	$H(1,2,3,4,6,8)$	$(0,0,0,1,0,0,0,1)$ $(12,18,24,36,29,22,15,8)$	$p>3$
44	$2A_3$	$H(1,3,4,6,7,8)$	$(1,0,0,0,1,0,0,0)$ $(12,17,23,34,28,21,14,7)$	$p>3$
45	$A_3+A_2+A_1$	$H(1,2,3,6,7,8)$	$(0,0,0,1,0,0,0,0)$ $(10,15,20,30,24,18,12,6)$	$p>3$
46	$2A_2+2A_1$	$H(1,2,3,5,6,8)$	$(0,0,0,0,1,0,0,0)$ $(8,12,16,24,20,15,10,5)$	$p>2$
47	D_5	$H(1,\ldots,5)$	$(2,0,0,0,0,0,2,2)$ $(20,28,38,56,46,36,26,14)$	$p>7$
48	$D_5(a_1)$	$H(1,\ldots,5)$	$(1,0,0,0,0,1,0,2)$ $(14,20,27,40,33,26,18,10)$	$p>5$
49	A_5	$H(1,3,4,5,6)$	$(2,0,0,0,0,1,0,1)$ $(16,22,30,44,36,28,19,10)$	$p>5$
50	D_4+A_2	$H(2,3,4,5,7)$	$(0,1,0,0,0,0,1,2)$ $(13,20,26,39,32,25,18,10)$	$p>5$
51	$D_4(a_1)+A_1$	$H(2,3,4,5,7)$	$(0,1,0,0,0,0,1,0)$ $(9,14,18,27,22,17,12,6)$	$p>3$
52	A_4+A_1	$H(1,2,3,4,6)$	$(1,0,0,0,0,1,0,1)$ $(12,17,23,34,28,22,15,8)$	$p>3$
53	A_3+A_2	$H(1,3,4,6,7)$	$(1,0,0,0,0,1,0,0)$ $(10,14,19,28,23,18,12,6)$	$p>3$
54	A_3+2A_1	$H(1,3,4,6,8)$	$(0,0,1,0,0,0,0,1)$ $(9,13,18,26,21,16,11,6)$	$p>3$

Продолжение

55	$2A_2+A_1$	$H(1,2,3,5,6)$	$(1,0,0,0,0,0,1,0)$ $(8,11,15,22,18,14,10,5)$	$p>2$
56	A_2+3A_1	$H(1,2,3,5,7)$	$(0,0,1,0,0,0,0,0)$ $(7,10,14,20,16,12,8,4)$	$p>2$
57	D_4	$H(2,3,4,5)$	$(0,0,0,0,0,0,2,2)$ $(12,18,24,26,30,24,18,10)$	$p>5$
58	$D_4(a_1)$	$H(2,3,4,5)$	$(0,0,0,0,0,0,2,0)$ $(8,12,16,24,20,16,12,6)$	$p>3$
59	A_4	$H(1,2,3,4)$	$(2,0,0,0,0,0,0,2)$ $(12,16,22,32,26,20,14,8)$	$p>3$
60	A_3+A_1	$H(1,3,4,6)$	$(0,0,0,0,0,1,0,1)$ $(8,12,16,24,20,16,11,6)$	$p>3$
61	$2A_2$	$H(1,3,5,6)$	$(2,0,0,0,0,0,0,0)$ $(8,10,14,20,16,12,8,4)$	$p>2$
62	A_2+2A_1	$H(1,3,5,7)$	$(0,0,0,0,0,1,0,0)$ $(6,9,12,18,15,12,8,4)$	$p>2$
63	$4A_1$	$H(1,2,5,7)$	$(0,1,0,0,0,0,0,0)$ $(5,8,10,15,12,9,6,3)$	
64	A_3	$H(1,3,4)$	$(1,0,0,0,0,0,0,2)$ $(8,11,15,22,18,14,10,6)$	$p>3$
65	A_2+A_1	$H(1,2,3)$	$(1,0,0,0,0,0,0,1)$ $(6,8,11,16,13,10,7,4)$	$p>2$
66	$3A_1$	$H(1,2,5)$	$(0,0,0,0,0,0,1,0)$ $(4,6,8,12,10,8,6,3)$	
67	A_2	$H(1,3)$	$(0,0,0,0,0,0,0,2)$ $(4,6,8,12,10,8,6,4)$	$p>2$
68	$2A_1$	$H(1,2)$	$(1,0,0,0,0,0,0,0)$ $(4,5,7,10,8,6,4,2)$	
69	A_1	$H(1)$	$(0,0,0,0,0,0,0,1)$ $(2,3,4,6,5,4,3,2)$	

Таблица 4

Классы сопряженных неединичных унипотентных элементов в $F_4(F)$

Номер по порядку	Тип	H_F	$\Delta(C_F)$ $l(C_F)$	p
1	F_4	G_F	$(2,2,2,2)$ $(22,42,30,16)$	$p>11$
2	$F_4(a_1)$ $=B_4$	$H(1,2,3,\beta)$	$(2,2,0,2)$ $(14,26,18,10)$	$p>7$
3	$F_4(a_2)$ $=C_3+A_1$	$H(\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_1+\alpha_2,\delta)$	$(0,2,0,2)$ $(10,20,14,8)$	$p>5$
4	$F_4(a_3)$ $=B_2+2A_1$	$H(\alpha_1+\alpha_2,\varepsilon,\delta,\alpha_1+\beta)$	$(0,2,0,0)$ $(6,12,8,4)$	$p>3$
5	B_3	$H(1,2,3)$	$(2,2,0,0)$ $(10,18,12,6)$	$p>5$

Продолжение

6	C_3	$H(2,3,4)$	$(1,0,1,2)$ $(10,19,14,8)$	$p>5$
7	$C_3(a_1)$	$H(2,3,4)$	$(1,0,1,0)$ $(6,11,8,4)$	$p>3$
8	$A_2+\widetilde{A}_1$	$H(1,2,4)$	$(0,0,1,0)$ $(4,8,6,3)$	$p>2$
9	$\widetilde{A}_2+A_1$	$H(1,3,4)$	$(0,1,0,1)$ $(5,10,7,4)$	$p>2$
10	B_2	$H(2,3)$	$(2,0,0,1)$ $(6,10,7,4)$	$p>3$
11	$\widetilde{A}_2$	$H(3,4)$	$(0,0,0,2)$ $(4,8,6,4)$	$p>2$
12	A_2	$H(1,2)$	$(2,0,0,0)$ $(4,6,4,2)$	$p>2$
13	$\widetilde{A}_1+A_1$	$H(1,3)$	$(0,1,0,0)$ $(3,6,4,2)$	
14	$\widetilde{A}_1$	$H(3)$	$(0,0,0,1)$ $(2,4,3,2)$	
15	A_1	$H(1)$	$(1,0,0,0)$ $(2,3,2,1)$	

Примечание. Здесь $\beta=\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4$, $\delta=\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3$, $\varepsilon=\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4$.

Таблица 5

Классы сопряженных неединичных унипотентных элементов в $G_2(F)$

Номер по порядку	Тип	H_F	$\Delta(C_F)$ $l(C_F)$	p
1	G_2	G_F	$(2,2)$ $(6,10)$	$p>5$
2	$G_2(a_1)=A_2$	$H(\alpha_2, 3\alpha_1+\alpha_2)$	$(0,2)$ $(2,4)$	$p>2$
3	$\widetilde{A}_1$	$H(1)$	$(1,0)$ $(2,3)$	
4	A_1	$H(2)$	$(0,1)$ $(1,2)$	

ЛИТЕРАТУРА

1. *Борель А.* Свойства и линейные представления групп Шевалле // Семинар по алгебраическим группам. М.: Мир, 1973. С. 9–59.
2. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. М.: Мир, 1972. Гл. IV–VI.
3. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. М.: Мир, 1978. Гл. VII–VIII.
4. *Дынкин Е. Б.* Полупростые подалгебры полупростых алгебр Ли // Мат. сб. 1952. Т. 30. С. 349–402.
5. *Залесский А. Е.* Спектры элементов порядка p в представлениях групп Шевалле в характеристике p // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1986. № 6. С. 20–25.
6. *Залесский А. Е.* Спектры элементов порядка p в представлениях группы $SL_n(p^\alpha)$ // Успехи мат. наук. 1990. Т. 45, № 1. С. 155–156.
7. *Премет А. А.* Веса инфинитезимально неприводимых представлений над полем простой характеристики // Мат. сб. 1987. Т. 133, № 2. С. 167–183.
8. *Спрингер Т. А., Стейнберг Р.* Классы сопряженных элементов // Семинар по алгебраическим группам. М.: Мир, 1973. С. 162–262.
9. *Стейнберг Р.* Лекции о группах Шевалле. М.: Мир, 1975.
10. *Супруненко И. Д.* Минимальные полиномы корневых элементов в неприводимых представлениях групп Шевалле // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1987. № 2. С. 18–22.
11. *Фейт У.* Теория представлений конечных групп. М.: Наука, 1990.
12. *Хамфри Дж. Е.* Линейные алгебраические группы. М.: Наука, 1980.
13. *Aschbacher M.* Chevalley groups of type G_2 as the group of a trilinear form // J. Algebra. 1987. V. 109, N 1. P. 193–259.
14. *Bala P, Carter R. W.* Classes of unipotent elements in simple algebraic groups. I, II // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1976. V. 79. P. 401–425; 1976. V. 80. P. 1-17.
15. *Carter R. W.* Finite Groups of Lie Type: Conjugacy Classes and Complex Characters. Chichester: John Whiley and Sons, 1985.
16. *Gilkey P., Seitz G. M.* Some representations of exceptional Lie algebras // Geom. Dedicata. 1988. V. 25 P. 407–416.
17. *Hall P., Higman G.* On the p-length of p-solvable groups and reduction theorem for Burnside's problem // Proc. London Math. Soc. 1956. V. 7. P. 1–42.
18. *Hesselink W.* Singularities in the nilpotent scheme of a classical group // Trans. Amer. Math. Soc. 1976. V. 222. P. 1–32.
19. *Hesselink W.* Nilpotency in classical groups over a field of characteristic 2 // Math. Z. 1979. Bd 166. S. 165–181.
20. *Jantzen J. C.* Representations of algebraic groups. Orlando: Academic Press, 1987.
21. *Mizuno K.* The conjugate classes of Chevalley groups of type E_6 // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. IA Math. 1977. V. 24. P. 525–563.
22. *Mizuno K.* The conjugate classes of Chevalley groups of type E_7 and E_8 // Tokyo J. Math. 1980. V. 3. P. 391–461.
23. *Pommerening K.* Uber die unipotenten Klassen reduktiver Gruppen. I, II // J. Algebra. 1977. V. 49. P. 525–536; 1980. V. 65. P. 373–398.
24. *Premet A. A., Suprunenko I. D.* Quadratic modules for Chevalley groups over fields of odd characteristics // Math. Nachr. 1983. Bd 110. S. 65–96.
25. *Premet A. A., Suprunenko I. D.* The Weyl modules and the irreducible representations of the symplectic group with the fundamental highest weights // Comm. Algebra. 1983. V. 11, N 12. P. 1309–1342.
26. *Seitz G. M.* The maximal subgroups of classical algebraic groups // Mem. Amer. Math. Soc. 1987. V. 365. P. 1–286.
27. *Shoji T.* The conjugacy classes of Chevalley groups of type (F_4) over finite fields of characteristic $p \neq 2$ // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. IA Math. 1974. V. 21. P. 1–17.
28. *Smith S.* Irreducible modules and parabolic subgroups // J. Algebra. 1982. V. 75. P. 286–289.
29. *Spaltenstein N.* Classes Unipotentes et Sous-groupes de Borel. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1982. (Lecture Notes in Math.; 946).
30. *Stuhler U.* Unipotente und nilpotente Klassen in einfachen Gruppen und Liealgebren vom type G_2 // Indag. Math. 1971. V. 33. P. 365–378.
31. *Testerman D. M.* The construction of the maximal A_1's in the exceptional algebraic groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1992. V. 116, N 3. P. 635–644.
32. *Testerman D. M.* A_1-type overgroups of elements of order p in semisimple algebraic groups and the associated finite groups. Preprint. Middletown: Wesleyan Univ., 1991.
33. *Zalesski A. E.* Eigenvalues of matrices of complex representations of finite groups of Lie type. Berlin: Sprnger, 1988. P. 206–218. (Lecture Notes in Math.; 1352).

г. Минск *Статья поступила 30 сентября 1994 г.*