УДК 512.552.3

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ИСЧИСЛЕНИЯМ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ*)

В. К. Харченко, А. Борович

Введение

Напомним, что дифференциальным исчислением, или дифференциалом, или 1-коциклом на ассоциативной унитарной алгебре R называется линейное отображение d из R в бимодуль M такое, что выполняется формула Лейбница

$$d(uv) = du \cdot v + u \cdot dv. \tag{1}$$

Если бимодуль M — свободный правый модуль с базисом $\mu^1, \mu^2, \dots, \mu^k, \dots$ (возможно, бесконечным, $k \in K$), то для каждого $v \in R$ имеем однозначное разложение

$$dv = \mu^k D_k(v), \tag{2}$$

где, как обычно, подразумевается суммирование по всем индексам, встречающимся и сверху, и снизу. В этом случае отображения $D_k : R \to R$ называются *правыми частными производными* (ПЧП), а само исчисление (дифференциал) — *исчислением с* ПЧП (*дифференциалом с* ПЧП).

Аналогично, если M — свободный левый модуль с базисом $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k, \dots$, то имеется однозначное разложение

$$dv = D^k(v)\mu_k; \tag{3}$$

при этом отображения $D^k : R \to R$ называются *левыми частными производными* (ЛЧП), а исчисление — *исчислением с* ЛЧП.

Если для исчисления с ПЧП фиксировано некоторое множество порождающих $x^1, x^2, \dots, x^i, \dots$ алгебры R и свободный базис M состоит из дифференциалов порождающих $\mu^i = dx^i$, то исчисление называется *координатным* (так как в этом случае, если R интерпретировать как кольцо функций, x^i будут играть роль координатных функций).

Координатные исчисления как основной объект исследования рассматривались в работе [1], где они, не совсем удачно, названы свободными (на том основании, что бимодуль 1-форм — свободный правый бимодуль с базисом dx^i). Фактически исследованиям координатных исчислений и исчислений с частными производными посвящено довольно много работ. Например, ковариантные справа дифференциальные исчисления на компактных матричных псевдогруппах, введенные в основополагающей работе С. Л. Вороновича [17], имеют правые частные производные (это вытекает из [17, теорема 2.1]). Такие исчисления могут не быть координатными (см. подробное описание ковариантного исчисления на $sl_q(2)$ [14]). Другая фундаментальная работа в этом направлении — работа

*) Исследования первого автора выполнены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-01-16171), исследования второго автора — при финансовой поддержке Польского комитета научных исследований (грант 2P 302 02307).

Веса и Зумино [16] — имеет дело с координатными исчислениями, хотя свобода модуля 1-форм нигде не оговаривается в явном виде. Это также относится к работе У. Пуза и С. Л. Вороновича [15], в которой ясно изложены основные идеи и направления исследований дифференциальных исчислений.

В настоящей работе мы с общих позиций рассматриваем проблему существования дифференциального исчисления с (правыми) частными производными для фиксированного правила коммутирования базисных дифференциалов μ^k и порождающих x^i,

$$x^i\mu^k = \mu^j A(x^i)_j^k. \tag{$*$}$$

Это правило может быть задано абстрактно вне связи с исследуемой алгеброй, если x^i и $A(x^i)_j^k$ рассматривать как элементы свободной алгебры с порождающими x^i. Если дополнительно известны частные производные порождающих

$$dx^i = \mu^k \sigma_k^i, \tag{$**$}$$

то на свободной алгебре существует и единственно дифференциальное исчисление, удовлетворяющее ($*$), ($**$). Мы называем это исчисление накрывающим.

С помощью накрывающего исчисления можно сформулировать условия существования дифференциального исчисления ($*$), ($**$) на алгебре R, заданной порождающими x^i и определяющими соотношениями $\{f_\alpha = 0\}$ (см. теорему 3.1 ниже).

Среди алгебр, имеющих дифференциальное исчисление ($*$), ($**$), особое место занимают дифференциально простые алгебры.

В случае, если правило коммутирования ($*$) однородно, т. е. $A(x^i)_j^k = x^s\alpha_{sj}^{ik}$, а условия ($**$) таковы, что $\sigma_k^i \in F$ (основное поле), оказывается, что существует единственная однородная дифференциально простая алгебра, которую мы называем *оптимальной алгеброй для исчисления* ($*$), ($**$). Процесс построения этой алгебры (см. теорему 4.2) показывает, что ее идеал соотношений в известном смысле минимален.

Мы также рассмотрели вопрос о дифференциальных исчислениях высшего порядка. Отметим здесь три подхода к построению так называемого некоммутативного комплекса де-Рама.

Первый подход исходит из дифференциала $d_0 : R \to M$, который затем дополняется до дифференциальной универсальной обертывающей. В общем случае возможность такого расширения доказана Г. Малтсимуатисом [13].

Второй подход связан с идеей Веса и Зумино [16], когда в качестве исходного материала берутся две квадратичные алгебры: алгебра функций и алгебра дифференциальных форм — и эта пара дополняется до дифференциальной алгебры Ω. В этом случае $d_0 : \Omega^{(0)} \to \Omega^{(1)}$ будет координатным исчислением, но Ω может не быть универсальной дифференциальной обертывающей исчисления $d_0 : \Omega^{(0)} \to \Omega^{(1)}$. Совсем недавно появилась работа Е. Е. Мухина [14], в которой делается очень интересная попытка аксиоматизировать этот подход. Предложенный Е. Е. Мухиным вариант аксиоматизации, к сожалению, не охватывает некоторые работы, также основанные на идеях Веса и Зумино. Это относится главным образом к работам Димакиса и Мюллер-Хаузена [3–6], где, во-первых, правило коммутирования ($*$) не однородно (но аффинно) и, во-вторых, рассматриваемая алгебра не однородна (соотношения второй степени имеют свободные члены).

Наконец, третий, совсем новый подход предложен А. П. Исаевым и П. Н. Пятовым [11]. Он заключается в том, что сразу рассматривается дифференциальная алгебра, удовлетворяющая довольно жестким условиям.

На наш взгляд, все три подхода представляют несомненный интерес, однако в настоящей работе мы предпочитаем точку зрения Г. Малтсимуатиса и даем замкнутое изложение с подробными доказательствами конструкции универсальной дифференциальной обертывающей для дифференциала $d_0 : R \to M$, имеющего правые частные производные.

В заключение отметим один пример исчисления, про которое нам не известно, имеет ли оно правые частные производные. Это пример 7 из работы [12].

Результаты данной статьи были получены авторами во время работы XXX Зимней школы по теоретической физике (Карпач, 1994). Мы благодарны организаторам Школы, сумевшим создать творческую атмосферу во время ее работы. Авторы благодарны профессору Ф. Мюллер-Хаузену и другим участникам Школы за интересные обсуждения результатов и открытых проблем. Мы также благодарны профессору З. Озиевичу, стимулировавшему эти исследования.

1. Формула Лейбница для частных производных

Структура бимодуля на свободном правом модуле однозначно задается с помощью правила коммутирования

$$v\mu^k = \mu^j A(v)_j^k \tag{4}$$

при этом отображение $v \to \|A(v)_j^k\|$ будет гомоморфизмом из алгебры R в алгебру «конечно-столбцевых» матриц над R (или, другими словами, гомоморфизмом из R в кольцо эндоморфизмов свободного правого модуля M):

$$(uv)\mu^k = u\mu^j A(v)_j^k = \mu^s A(u)_s^j A(v)_j^k,$$

т. е.

$$A(uv)_s^k = A(u)_s^j A(v)_j^k. \tag{5}$$

Здесь мы полагаем, что $\|A(u)_j^k\|$ — это матрица, у которой в k-м столбце на j-м месте стоит элемент $A(u)_j^k$, и поэтому (5) — это просто формула перемножения «конечно-столбцевых» $K \times K$-матриц, т. е. бесконечных матриц, каждый столбец которых содержит только конечное число ненулевых членов (это свойство вытекает из формулы (4), так как в ней для каждого фиксированного k лишь конечное число членов $A(v)_j^k$ отлично от нуля).

1.1. *Предложение.* *Если d — дифференциальное исчисление с* ПЧП, *то частные производные связаны с правилом коммутирования формулой*

$$D_k(uv) = D_k(u)v + A(u)_k^j D_j(v). \tag{6}$$

Доказательство. По формуле Лейбница (1)

$$\begin{aligned}\mu^k D_k(uv) = d(uv) &= du \cdot v + u \cdot dv = \mu^k D_k(u)v + u\mu^j D_j(v) \\ &= \mu^k D_k(u)v + \mu^k A(u)_k^j D_j(v) = \mu^k \left[D_k(u)v + A(u)_k^j D_j(v)\right],\end{aligned} \tag{7}$$

что и дает соотношение (6).

Справедливо и обратное утверждение.

1.2. *Предложение.* *Пусть R — унитарная алгебра и $A : R \to R_{K\times K}$ — гомоморфизм из R в алгебру конечно-столбцевых матриц над R порядка K. Пусть, далее, $D_k : R \to R$ — линейные отображения из R в R такие, что для каждого $v \in R$ лишь конечное число значений $D_k(v)$ отлично от нуля. Тогда если справедлива формула* (6), *то*

$$d : v \to \mu^k D_k(v)$$

будет дифференциальным исчислением с ПЧП.

Доказательство. Как было отмечено выше, A определяет структуру бимодуля на свободном правом модуле ранга K. Все, что нам требуется, — это проверить формулу Лейбница (1), которая вытекает из выкладок (7), если заметить, что по условию крайний левый член равен крайнему правому. Предложение доказано.

Теперь формулу Лейбница (6) для частных производных мы можем записать в векторной форме:

$$D(uv) = D(u)v + A(u)D(v), \tag{8}$$

$$A(uv) = A(u)A(v), \tag{9}$$

где D — это вектор-столбец частных производных, а A — матрица координатных отображений $A = \|A^j_k\|$ (заметим, что сама эта матрица может не быть конечно-столбцевой, но для любого v матрица $A(v)$ конечно-столбцевая).

2. Накрывающий дифференциал

Предположим теперь, что в алгебре R зафиксировано некоторое множество порождающих $x^1, x^2, \ldots, x^i, \ldots$, $i \in I$, и пусть заданы производные $D_k(x^i) = \sigma^i_k \in R$. В этом случае формула (8) позволяет определить частные производные произвольных элементов, т. е. существует не более одного дифференциального исчисления с правилом коммутирования (4) и заданным дифференциалом порождающих $\mu^k\sigma^i_k$. Поэтому на первый план выходит проблема существования.

Пусть $\widehat{R}$ — свободная алгебра, порожденная элементами x^i, которые в $\widehat{R}$ мы будем обозначать через $\hat{x}^i$, чтобы отличать их свободные произведения от произведений в R. Таким образом, отображение $\pi : \hat{x}^i \to x^i$ определяет гомоморфизм из $\widehat{R}$ на R. Ядро T этого гомоморфизма — это идеал всех соотношений алгебры R. Напомним, что в такой ситуации говорят, что алгебра R задается порождающими x^i и определяющими соотношениями $\{f_s, s \in S\}$, если множество $\{f_s, s \in S\}$ порождает T как двусторонний идеал алгебры $\widehat{R}$.

Зафиксируем некоторые прообразы $\widehat{A}^{ij}_k$ элементов $A(x^i)^j_k$ в $\widehat{R}$, т. е. $\pi(\widehat{A}^{ij}_k) = A(x^i)^j_k$, и пусть $\hat{\sigma}^i_k$ — прообраз элемента σ^i_k.

2.1. Теорема. *Алгебра $\widehat{R}$ имеет единственное дифференциальное исчисление с* ПЧП, *удовлетворяющее правилу коммутирования*

$$\hat{x}^i\mu^j = \mu^k\widehat{A}^{ij}_k \tag{10}$$

и «начальным условиям»

$$d\hat{x}^i = \mu^k\hat{\sigma}^i_k. \tag{11}$$

Доказательство. Отображение $\hat{x}^i \to \|\widehat{A}^{ij}_k\|$ имеет единственное продолжение до гомоморфизма алгебр $\widehat{A} : \widehat{R} \to \widehat{R}_{K\times K}$. Отображения D_k определим на мономах от $\hat{x}^i, \ldots, \hat{x}^i, \ldots$ индукцией по степени. Положим $D_k(\hat{x}^i) = \hat{\sigma}^i_k$ и

$$D_k(\hat{x}^iv) = \hat{\sigma}^i_kv + \widehat{A}^{ij}_kD_j(v). \tag{12}$$

В силу предложения 1.2 достаточно доказать формулу (6) для любых элементов u, v. В силу линейности можно считать u, v мономами и воспользоваться индукцией по степени монома u.

Если степень равна единице, то определение (12) дает требуемый результат.

Пусть $u = \hat{x}^iu_1$. Тогда $A(u) = \|\widehat{A}^{ij}_k\| \cdot \widehat{A}(u_1)$, и по индукции получаем

$$\begin{aligned} D_k(uv) &= D_k(\hat{x}^iu_1v) = \hat{\sigma}^i_ku_1v + \widehat{A}^{ij}_kD_j(u_1v) \\ &= [\hat{\sigma}^i_ku_1 + \widehat{A}^{ij}_kD_j(u_1)]v + \widehat{A}^{il}_k\widehat{A}(u_1)^j_lD_j(v) = D_k(u)v + \widehat{A}(u)^j_kD_j(v), \end{aligned}$$

что и требуется.

2.2. Определение. Дифференциальное исчисление, существование которого утверждается теоремой 2.1, мы будем называть *накрывающим* для правила коммутирования (4) и начальных условий $D_k(x^i) = \sigma^i_k$.

3. Условия существования дифференциальных исчислений с ПЧП для алгебр, заданных порождающими и определяющими соотношениями

Рассмотрим коммутативную диаграмму гомоморфизмов алгебр

$$\begin{tikzcd} \widehat{R} \arrow[r, "\widehat{A}"] \arrow[d, "\pi"'] & \widehat{R}_{K\times K} \arrow[d, "\hat{\pi}"] \\ R \arrow[r, "A"] & R_{K\times K} \end{tikzcd}, \tag{13}$$

в которой отображение $\hat{\pi}$ сопоставляет матрице $\|\hat{r}^j_k\|$ матрицу $\|\pi(\hat{r}^j_k)\|$. Понятно, что при таком определении

$$\ker\hat{\pi} = (\ker\pi)_{K\times K} = T_{K\times K}. \tag{14}$$

Так как для любого соотношения $f(\hat{x}_1, \dots) \in T$ имеем

$$\hat{\pi}(\widehat{A}(f(\hat{x}_1, \dots))) = A(\pi(f(\hat{x}_1, \dots))) = A(f(x_1, \dots)) = 0,$$

то справедливо соотношение инвариантности

$$\widehat{A}(T) \subseteq \ker\hat{\pi} = T_{K\times K}. \tag{15}$$

3.1. Теорема. *Алгебра R с порождающими $\{x^i\}$ и множеством определяющих соотношений $\{f_s, s \in S\}$ имеет дифференциал с* ПЧП *относительно гомоморфизма $A : R \to R_{K\times K}$ и с частными производными порождающих $D_k(x^i) = \sigma^i_k \in R$ тогда и только тогда, когда*

$$\widehat{D}_k(f_s) \in T,$$

где $\widehat{D}_k$ — частные производные накрывающего дифференциала, T — идеал соотношений алгебры R.

Доказательство. Допустим, что требуемый дифференциал существует. Покажем, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} \widehat{R} \arrow[r, "\widehat{D}"] \arrow[d, "\pi"] & \widehat{R}^K \arrow[d, "\pi^K"] \\ R \arrow[r, "D"] & R^K \end{tikzcd} \tag{16}$$

коммутативна (здесь R^K — пространство вектор-столбцов глубины K с конечным числом ненулевых членов в каждом).

Разность $\Delta = D\circ\pi - \pi^K \circ \widehat{D}$ действует тривиально на порождающие:

$$\Delta_k(\hat{x}^i) = D_k\pi(\hat{x}^i) - \pi(\widehat{D}_k(\hat{x}^i)) = \sigma^i_k - \pi(\hat{\sigma}^i_k) = 0.$$

Коммутативность диаграммы (13) дает $A(\pi(f)) = \hat{\pi}(\widehat{A}(f))$, и по формуле (8) получаем, что

$$\begin{aligned}\Delta(fh) &= D(\pi f\cdot\pi h) - \pi^K\widehat{D}(fh)\\ &= D(\pi f)\pi(h) + A(\pi f)D(\pi h) - \pi^K(\widehat{D}(f)h + \widehat{A}f\cdot\widehat{D}(h)) = \Delta(f)\pi h + A(\pi f)\Delta(h).\end{aligned}$$

Теперь в силу очевидной индукции $\Delta = 0$.

Наконец, для любого соотношения f_s имеем

$$\pi\widehat{D}(f_s(\hat{x}_1, \ldots)) = D(\pi(f_s(\hat{x}^1, \ldots))) = 0,$$

т. е. $\widehat{D}_k(f_s) \in \ker\pi = T$.

Обратно, если $\widehat{D}_k(f_s) \in T$ для всех $s \in S$, то

$$\widehat{D}(uf_sv) = \widehat{D}(u)f_sv + \widehat{A}(u)\widehat{D}(f_s)v \\ + \widehat{A}(u)\widehat{A}(f_s)\widehat{D}(v) \equiv \widehat{A}(u)\widehat{A}(f_s)\widehat{D}(v) \pmod T.$$

В силу (15) матрица $\widehat{A}(f_s)$ лежит в $T_{K\times K}$, и поэтому $\widehat{D}_k(T) \subseteq T$. Теперь отображение $\widehat{D}_k : \widehat{R} \to \widehat{R}$ индуцирует отображение $D_k : \widehat{R}/T \to \widehat{R}/T$ по формуле $D_k(f+T) = \widehat{D}_k(f) + T$, при этом $D \circ \pi = \pi^K \circ \widehat{D}$.

Наконец, для любого $u = \pi f \in R$ и $v = \pi h \in R$ имеем

$$D(uv) = D(\pi f \cdot \pi h) = \pi^K \widehat{D}(f)h + \pi^K \widehat{A}(f)\widehat{D}(h) \\ = D(\pi f)\pi h + A(\pi f)D(\pi h) = D(u)v + A(u)D(v),$$

и в силу предложения 1.2 теорема доказана.

3.2. Определение. Идеал T свободной алгебры $\widehat{R} = F\langle\hat{x}_i\rangle$ называется *согласованным* с гомоморфизмом $\widehat{A} : \widehat{R} \to \widehat{R}_{K\times K}$ и начальными условиями $\hat{\sigma}^i_k$, если фактор-алгебра $R = \widehat{R}/T$ имеет дифференциал с ПЧП, удовлетворяющий условиям коммутирования

$$x^i\mu^k = \mu^j A^{ik}_j \tag{17}$$

и начальным условиям

$$D_k(x^i) = \sigma^i_k, \tag{18}$$

где $x^i = \hat{x}^i + T$, $\sigma^i_k = \hat{\sigma}^i_k + T$, $A^{ik}_j = \widehat{A}(\hat{x}^i)^k_j + T$.

Формула (15) и теорема 3.1 показывают, что идеал T будет согласованным тогда и только тогда, когда он инвариантен относительно (10) и стабилен относительно (10), (11) в смысле следующих определений.

3.3. Определение. Пространство $U \subseteq \widehat{R}$ называется *инвариантным* относительно правила коммутирования (10), если $\widehat{A}(U) \subseteq U_{K\times K}$.

Если $U = T$ — идеал, заданный соотношениями $\{f_s, s \in S\}$, то, так как $\widehat{A}$ — гомоморфизм, это условие эквивалентно тому, что $\widehat{A}^k_j(f_s) \in T$, где $\widehat{A}^k_j$ — компоненты гомоморфизма $\widehat{A}$.

3.4. Определение. Пространство $U \subseteq \widehat{R}$ называется *стабильным* относительно (10), (11) если $\widehat{D}_k(U) \subseteq U$.

Если $U = T$ — $\widehat{A}$-инвариантный идеал, заданный соотношениями $\{f_s, s \in S\}$, то по теореме 3.1 условие стабильности эквивалентно тому, что $\widehat{D}_k(f_s) \in T$.

4. Однородные правила коммутирования. Оптимальные алгебры

Теперь, отвлекаясь от исходной алгебры R, мы можем рассмотреть абстрактное правило коммутирования (10) с начальными данными (11), которое задается набором полиномиальных матриц $\widehat{A}^{ij}_k$ и матрицей $\hat{\sigma}^i_k$. При этом естественно возникает вопрос об описании алгебр, имеющих дифференциалы с ПЧП, удовлетворяющие (10), (11). Как мы видели, это эквивалентно описанию согласованных идеалов. Среди этих идеалов особое место занимают максимальные согласованные идеалы, которые определяют дифференциально-простые алгебры, обладающие дифференциальным исчислением с ПЧП и удовлетворяющие (17), (18).

В этом параграфе мы рассмотрим подробнее случай однородного правила коммутирования:

$$\hat{x}^i \mu^k = \mu^j \hat{x}^s \alpha^{ik}_{sj}, \quad \alpha^{ik}_{sj} \in F, \tag{19}$$

$$d\hat{x}^i = \mu^k \sigma^i_k, \quad \sigma^i_k \in F. \tag{20}$$

Ниже мы увидим, что в этом случае существует наибольший однородный согласованный идеал, который будет максимальным в множестве всех (не обязательно однородных) согласованных идеалов. Соответствующее фактор-кольцо мы называем оптимальной алгеброй для (19), (20). Определение оптимальной алгебры может быть сформулировано и в общей ситуации (10), (11).

4.1. Определение. Пусть W — сумма всех согласованных с (10), (11) идеалов, не имеющих многочленов с ненулевым свободным членом. Тогда, очевидно, W — допустимый идеал. Фактор-алгебра $\widehat{R}/W$ называется *оптимальной для* (10), (11).

4.2. Теорема. *Идеал W для* (19), (20) *может быть определен по индукции как однородное пространство $T = W_0 \dotplus W_1 \dotplus W_2 \dotplus \ldots$ следующим образом.*

1. $W_0 = 0$.

2. *Предположим, что W_{n-1} определено, и пусть U_n — пространство всех однородных полиномов f степени n таких, что $\widehat{D}_k(f) \in W_{n-1}$ для всех k. Тогда W_n — это наибольшее инвариантное подпространство пространства U_n.*

Доказательство. Пусть $\widehat{R} = F \dotplus \widehat{R}_1 \dotplus \widehat{R}_2 \dotplus \ldots$ — стандартная градуировка свободной алгебры по степеням одночленов. Покажем, прежде всего, что W — однородный идеал. Для этого достаточно показать, что любой согласованный идеал J, содержащийся в $\widehat{R}_1 \dotplus \widehat{R}_2 \dotplus \ldots$, содержится в некотором собственном согласованном однородном идеале.

Каждый элемент $u \in \widehat{R}$ имеет однозначное разложение в сумму однородных компонент $u = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$. Пусть $J_n = \{u_n \mid u \in J\}$. Для каждого $u \in J$

$$\widehat{A}^j_k(u) = \widehat{A}^j_k(u_1) + \widehat{A}^j_k(u_2) + \cdots \in \widehat{A}^j_k(J) \subseteq J, \quad \deg \widehat{A}^j_k(u_n) = \deg u_n = n.$$

Поэтому $\widehat{A}^j_k(J_n) \subseteq J_n$. Аналогично

$$\widehat{D}_k(u) = \widehat{D}_k(u_1) + \widehat{D}_k(u_2) + \cdots \in \widehat{D}_k(J) \subseteq J, \quad \deg(\widehat{D}_k(u_n)) = n - 1.$$

Поэтому $\widehat{D}_k(J_n) \subseteq J_{n-1}$ и сумма $J_1 + J_2 + \ldots$ — инвариантное и стабильное пространство. Аналогично $\widehat{R}_t J_n \widehat{R}_p \subseteq J_{n+t+p}$, и поэтому $J_1 + J_2 + \ldots$ — согласованный однородный собственный идеал, содержащий J.

Описанное в теореме множество T, очевидно, инвариантно и стабильно. Покажем, что это — идеал. Достаточно показать, что $W_{n-1}\hat{x}^i + \hat{x}^j W_{n-1} \subseteq W_n$ для всех i, j, n. Пусть $V = \widehat{R}_1$ — пространство, порожденное переменными $\hat{x}^i$. Покажем по индукции, что $W_{n-1}V + VW_{n-1} \subseteq W_n$. Имеем

$$\begin{aligned} D_k(W_{n-1}V + VW_{n-1}) &\subseteq D_k(W_{n-1})V + A^j_k(W_{n-1})D_j(V) + D_k(V)W_{n-1} \\ &+ A^j_k(V)D_j(W_{n-1}) \subseteq W_{n-2} \cdot V + W_{n-1} + W_{n-1} + V \cdot W_{n-2} \subseteq W_{n-1}. \end{aligned}$$

Это значит, что $W_{n-1}V + VW_{n-1} \subseteq U_n$. Далее, пространство $W_{n-1}V + VW_{n-1}$ инвариантно, так как инвариантны W_{n-1} и V. Итак, $W_{n-1}V + VW_{n-1} \subseteq W_n$, и T — идеал кольца $\widehat{R}$.

Пусть теперь $J = J_1 \dotplus J_2 \dotplus \ldots$ — произвольный градуированный согласованный идеал. Покажем по индукции, что $J_n \subseteq W_n$. При $n = 0$ включение очевидно. Пусть $J_{n-1} \subseteq W_{n-1}$. Имеем $D_k(J_n) \subseteq J_{n-1} \subseteq W_{n-1}$, и поэтому $J_n \subseteq U_n$. Так как J_n — инвариантные подпространства, то $J_n \subseteq W_n$. Теорема доказана.

4.3. Предложение. *Оптимальная алгебра для* (19), (20) *является дифференциально простой, т. е. W — максимальный согласованный идеал.*

Доказательство. По определению W — наибольший согласованный идеал, содержащийся в $\widehat{R}_1 \dotplus \widehat{R}_2 \dotplus \ldots$. В силу теоремы 4.2 он однороден $W = W_1 \dotplus W_2 \dotplus \ldots$. Наша задача — показать, что всякий (не обязательно однородный) согласованный идеал $J \neq \widehat{R}$, содержащий W, совпадает с W.

Пусть $u = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ — элемент наименьшей возможной степени $n > 0$ такой, что $u \in J$ и $u \notin W$. Тогда элемент $\widehat{D}_k(u)$ лежит в J и имеет меньшую степень, т. е. $\widehat{D}_k(u) \in W$ и в силу однородности $\widehat{D}_k(u_s) \in W_{s-1}$, $1 \leqslant s \leqslant n$. Это означает, что $u_s \in U_s$ при $1 \leqslant s \leqslant n$. Далее, $\widehat{A}^i_j(u) \in J$ и $\widehat{D}_k(\widehat{A}^i_j(u)) \in J$, т. е. аналогично $\widehat{D}_k(\widehat{A}^i_j(u_s)) \in W_{s-1}$. По определению W_s получим, что $u_s \in W_s$ при $s \geqslant 1$. Отсюда $u_0 = u - u_1 - \cdots - u_n \in J$, $u_0 \in W$, что возможно только в случае $J = R$. Предложение доказано.

Следующее утверждение дает очень удобное достаточное условие дифференциальной простоты алгебры с дифференциальным исчислением (19), (20).

4.4. Предложение. *Если алгебра R с дифференциальным исчислением, удовлетворяющим* (19), (20), *такова, что условие $dv = 0$ влечет $v \in F$, то R дифференциально проста. Если при этом R однородна, то она оптимальна для* (19), (20).

Доказательство. Пусть T — идеал соотношений алгебры R. По условию этот идеал согласован с (19), (20). Пусть J — согласованный идеал, содержащий T. Выберем в J элемент $\hat{v}$ наименьшей возможной степени, не лежащий в T. Тогда $\widehat{D}_k(\hat{v})$ имеет меньшую степень и лежит в J, т. е. $\widehat{D}_k(\hat{v}) \in T$ или $D_k(v) = 0$ в R. Отсюда $dv = \mu^k D_k(v) = 0$ и $v \in F$, причем $v \neq 0$, так как $\hat{v} \notin T$. Итак, $J = R$, что и требовалось доказать.

5. Дифференциальные исчисления с левыми частными производными

Разумеется, все утверждения, доказанные для исчислений с правыми частными производными, имеют свои аналоги для исчислений с левыми частными производными. Для исчислений с ЛЧП удобно заменить верхние индексы нижними и наоборот. При этом конечно-столбцевые матрицы превратятся в конечно-строчные (т. е. бесконечные матрицы, каждая строка которых содержит только конечное число ненулевых членов). Запишем здесь основные формулы для дифференциальных исчислений с ЛЧП:

$$dv = D^k(v)\mu_k, \tag{21}$$

$$\mu_k v = A(v)^j_k \mu_j, \tag{22}$$

$$A(uv)^s_k = A(u)^j_k A(v)^s_j, \tag{23}$$

$$D^k(uv) = uD^k(v) + D^j(u)A^k_j(v). \tag{24}$$

Перепишем формулы (23), (24) в векторной форме

$$A(uv) = A(u)A(v), \tag{25}$$

$$D(uv) = uD(v) + D(u)A(v). \tag{26}$$

Если алгебра R порождена элементами x_j, то, как и в теореме 2.1, получаем, что для любого правила коммутирования

$$\mu_i \hat{x}_j = \widehat{A}_{ij}^k \mu_k \tag{27}$$

и начальных условий

$$d\hat{x}_j = \hat{\sigma}_j^k \mu_k \tag{28}$$

существует накрывающее исчисление свободной алгебры.

По аналогии с теоремой 3.1 получаем, что условие существования дифференциального исчисления с ЛЧП на алгебре, заданной порождающими $\{x_j\}$ и определяющими соотношениями $\{f_s, s \in S\}$, задается условием $\widehat{D}^k(f_s) \in T$, где $\widehat{D}^k$ — частные производные накрывающего дифференциала (27), (28).

Если исходный бимодуль M одновременно свободный левый и свободный правый модуль, то исчисление будет иметь и правые и левые частные производные. Пусть $\mu^1, \mu^2, \ldots$ — базис M как свободного правого модуля, а $\mu_1, \mu_2, \ldots$ — как свободного левого модуля (количества элементов в этих множествах могут быть различны). Тогда эти базисы должны выражаться друг через друга:

$$\mu^k = r^{ki} \mu_i, \tag{29}$$

$$\mu_i = \mu^k s_{ik}. \tag{30}$$

Кроме того, правило коммутирования элементов из R с базисом μ^k определяется гомоморфизмом A из R в алгебру конечно-столбцевых матриц над R, а правило коммутирования с базисом μ_i — гомоморфизмом A' из R в алгебру конечно-строчных матриц над R:

$$v\mu^k = \mu^j A(v)_j^k, \tag{31}$$

$$\mu_i v = A'(v)_i^t \mu_t. \tag{32}$$

Эти правила вместе с соотношениями (29), (30) дают

$$v\mu_i = v\mu^k s_{ik} = \mu^j A(v)_j^k s_{ik} = r^{jl} \mu_l A(v)_j^k s_{ik} = r^{jl} A'\big(A(v)_j^k s_{ik}\big)_l^t \mu_t.$$

Отсюда

$$v\delta_i^t = r^{jl} A'\big(A(v)_j^k s_{ik}\big)_l^t, \tag{33}$$

и аналогично

$$v\delta_i^t = A\big(r^{tj} A'(v)_j^l\big)_i^k s_{lk}. \tag{34}$$

Эти формулы полностью определяют условия существования левых частных производных для исчисления с правыми частными производными.

5.1. Теорема. *Пусть правое $A : R \to R_{K \times K}$ и левое $A' : R \to R_{I \times I}$ правила коммутирования удовлетворяют тождествам*

$$v\delta_i^t = r^{jl} A'\big(A(v)_j^k s_{ik}\big)_l^t = A\big(r^{tj} A'(v)_j^l\big)_i^k s_{lk} \tag{35}$$

для некоторых фиксированных r^{ki}, $s_{ik} \in R$. Тогда любое дифференциальное исчисление с правыми частными производными, удовлетворяющее правилу коммутирования A, имеет левые частные производные, которые вычисляются по формуле

$$D^i(v) = r^{kj} A'(D_k(v))_j^i. \tag{36}$$

Аналогично любое дифференциальное исчисление с левыми частными производными, удовлетворяющее правилу коммутирования A', имеет правые частные производные, которые вычисляются по формуле

$$D_k(v) = A(D^i(v))_k^j s_{ij}. \tag{37}$$

Доказательство. Обозначим через M свободный правый модуль с базисом μ^k, $k \in K$, а через M' — свободный левый модуль с базисом μ_i, $i \in I$. С помощью гомоморфизма A определим по формуле (31) на M структуру левого модуля. Аналогично по формуле (32) M' превращается в правый модуль. Определим отображения $\varphi : M \to M'$ и $\psi : M' \to M$ по формулам

$$\varphi : \mu^k v_k \to r^{ki} A'(v_k)^t_i \mu_t = r^{ki} \mu_i v_k,$$
$$\psi : w^i \mu_i \to \mu^i A(w^i)^k_j s_{ik} = w^i \mu^k s_{ik}.$$

Тогда φ будет гомоморфизмом правых модулей, а ψ — гомоморфизмом левых модулей. При этом обе суперпозиции $\varphi\psi$ и $\psi\varphi$ будут тождественными отображениями:

$$\psi(\varphi(\mu^k v_k)) = \psi\big(r^{ki} A'(v_k)^t_i \mu_t\big) = \mu^j A\big(r^{ki} A'(v_k)^t_i\big)^k_j s_{tk} = \mu^j \delta^k_j v_k = \mu^k v_k,$$

и аналогично $\varphi(\psi(w^i \mu_i)) = w^i \mu_i$.

Таким образом, φ, ψ — взаимно обратные отображения, и, значит, оба они гомоморфизмы бимодулей, т. е. $M \simeq M'$ и мы можем отождествить μ^k с $r^{ki}\mu_i$ и μ_i с $\mu^k s_{ik}$.

Если теперь $d : R \to M$ — дифференциал, то в силу доказанного изоморфизма M свободен как слева, так и справа, т. е. d имеет и левые, и правые частные производные. Имеем

$$dv = D^i(v)\mu_i = \mu^k D_k(v) = r^{kj} \mu_j D_k(v) = r^{kj} A'(D_k(v))^i_j \mu_i,$$

откуда и следует формула (36). По аналогии получаем (37). Теорема доказана.

Пусть теперь унитарная алгебра R порождается элементами x^i, $i \in I$, а правило коммутирования A задается аффинными соотношениями

$$x^i \mu^k = \mu^j \left(\alpha^{ik}_{sj} x^s + \varepsilon^{ik}_{\ j}\right), \quad \alpha^{ik}_{sj}, \varepsilon^{ik}_{\ j} \in F. \tag{38}$$

Тогда тензор α^{ik}_{sj} можно рассматривать как конечно-столбцевую $(I \times K) \times (I \times K)$-матрицу: в формуле (38) для любой пары (i, k) существует только конечное число ненулевых α^{ik}_{sj} (и конечное число ненулевых $\varepsilon^{ik}_{\ j}$). В таком случае обратимость матрицы α^{ik}_{sj} означает существование $(2, 2)$-тензора β^{ik}_{sj} с описанным выше условием конечности, такого, что

$$\alpha^{ik}_{sj} \beta^{tl}_{ik} = \delta^t_s \delta^l_j; \quad \beta^{sj}_{tl} \alpha^{ik}_{sj} = \delta^i_t \delta^k_l. \tag{39}$$

Если множества I и K конечны, то эти два условия эквивалентны между собой. Для бесконечных матриц это не так (например, если $\alpha^{i0}_{s0} = \delta^i_{s+1}$; $\beta^{i0}_{s0} = \delta^{i+1}_s$, $I = \mathbb{N}$, $K = \{0\}$).

5.2. Предложение. *Накрывающий дифференциал для любого исчисления с правилом коммутирования (38) и обратимой (бесконечной) матрицей α^{ik}_{sj} имеет левые частные производные.*

Доказательство. Пусть β^{ik}_{sj} — обратная к α^{ik}_{sj} матрица. Рассмотрим левое правило коммутирования

$$\mu_k \hat{x}_i = \left(\tilde{\beta}^{js}_{ki} \hat{x}_s + \tilde{\varepsilon}^{\ j}_{ki}\right)\mu_j, \tag{40}$$

т. е.

$$A'(\hat{x}_i)^j_k = \tilde{\beta}^{js}_{ki} \hat{x}_s + \tilde{\varepsilon}^{\ j}_{ki},$$

в котором параметры заданы следующим образом:

$$\tilde{\beta}^{js}_{ki} = \beta^{ik}_{sj}, \quad \tilde{\varepsilon}^{j}_{ki} = -\beta^{ik}_{sl} \varepsilon^{sl}_{\ j}.$$

Если мы положим $\hat{x}_i = \hat{x}^i$, то таким образом на $\widehat{R}$ будет корректно определено левое правило коммутирования, и мы можем использовать теорему 5.1. Пусть $r^{ki} = \delta^{ki}$, $s_{ik} = \delta_{ik}$ — символы Кронекера, т. е. мы полагаем $\mu^i = \mu_i$. Нам достаточно проверить равенства (35). Так как A и A' — гомоморфизмы алгебр, их достаточно проверить только при $v = \hat{x}^i$ и при $v = 1$. Заменяя в этих равенствах i на q, получим

$$\begin{aligned} r^{jl}A'\big(A(\hat{x}^i)^k_j\delta_{qk}\big)^t_l &= \delta^{jl}A'\big(\alpha^{iq}_{sj}\hat{x}^s + \varepsilon^{iq}_{\ j}\big)^t_l \\ &= \sum_{j,s}\big[\alpha^{iq}_{sj}A'(\hat{x}_s)^t_j + \varepsilon^{iq}_{\ j}A'(1)^t_j\big] = \sum_{j,s}\alpha^{iq}_{sj}\big(\tilde{\beta}^{tw}_{js}\hat{x}_w + \tilde{\varepsilon}^t_{js}\big) + \tilde{\varepsilon}^{iq}_{\ t} \\ &= \alpha^{iq}_{sj}\beta^{sj}_{wt}\hat{x}^w - \alpha^{iq}_{sj}\beta^{sj}_{wl}\varepsilon^{wl}_{\ \ t} + \varepsilon^{iq}_{\ t} = \delta^i_w\delta^q_t\hat{x}^w - \delta^i_w\delta^q_l\varepsilon^{wl}_{\ \ t} - \varepsilon^{iq}_{\ t} = \delta^q_t\hat{x}^i. \end{aligned}$$

При $v = 1$ имеем

$$\delta^{jl}A'\big(A(1)^k_j\delta_{qk}\big)^t_l = \sum A'\big(\delta^k_j\delta_{qk}\big)^t_i = \sum_j \delta^k_j\delta_{qk}\delta^t_j = \delta^j_q\delta^t_i = \delta^t_q.$$

Совершенно аналогично проверяется формула (34). Предложение доказано.

Следующий пример показывает, что для бесконечного множества I, т. е. для бесконечно-порожденных алгебр, не всякое исчисление с правыми частными производными, удовлетворяющими правилу коммутирования (38) с обратимой матрицей α^{ik}_{sj}, имеет левые частные производные.

5.3. Пример. Пусть множество I совпадает с множеством всех целых чисел, а K состоит из одного элемента. Рассмотрим правило коммутирования

$$\hat{x}^i\mu = \mu\hat{x}^{i-1}, \tag{41}$$

т. е. $\widehat{A}$ — это гомоморфизм (и даже изоморфизм), переводящий $\hat{x}^i$ в $\hat{x}^{i-1}$. Пусть алгебра R определяется соотношениями $x^{i-1}x^i - x^ix^{i-2} = 0$, $i \leqslant 0$. Эти соотношения инвариантны относительно $\widehat{A}$, и поэтому правило (41) корректно определено на R. В данном случае $\alpha^i_s = \delta^{i-1}_s$ и $\beta^i_s = \delta^i_{s-1}$ будет обратной матрицей. Тем не менее свободный правый модуль μR не будет свободным левым модулем (никакого ранга). Действительно, пусть J — идеал алгебры R, порожденный элементом $x^0x^1 - x^1x^{-1}$. Так как $A(J) = 0$, то $JM = 0$ и, следовательно, никакой элемент $m \in M$ не порождает в M свободного левого подмодуля. Конечно, здесь существенно, что $x^0x^1 \neq x^1x^{-1}$ в алгебре R.

Определим теперь дифференциальное исчисление при помощи начальных условий $D(x^0) = 1$, $D(x^i) = 0$ при $i \neq 0$. Тогда $\widehat{D}(\hat{x}^{i-1}\hat{x}^i - \hat{x}^i\hat{x}^{i-2}) = 0$ при $i < 0$, а при $i = 0$ это выражение равно

$$\widehat{D}(\hat{x}^{-1})\hat{x}^0 + \widehat{A}(\hat{x}^{-1})\widehat{D}(\hat{x}^0) - \widehat{D}(\hat{x}_0)\hat{x}^{-2} - \widehat{A}(\hat{x}^0)\widehat{D}(\hat{x}^{-2}) = \hat{x}^{-2} - \hat{x}^{-2} = 0,$$

т. е. по теореме 3.1 эти условия корректно определяют исчисление на R с правыми частными производными, которое не имеет левых частных производных.

Если оба множества I и K конечны, то левые частные производные для аффинного правила коммутирования существуют всегда.

5.4. Теорема. *Пусть множества I и K конечны. Тогда если тензор α^{ik}_{sj} обратим как матрица порядка $I \times K$, то любое дифференциальное исчисление с правыми частными производными, удовлетворяющее правилу коммутирования (38), имеет левые частные производные.*

Доказательство. В силу теоремы 5.1 и предложения 5.2 достаточно показать, что идеал соотношений T алгебры R инвариантен относительно правила коммутирования (40).

Пусть M_0 — линейное пространство, порожденное множеством μ^k, V_0 — пространство, порожденное $\hat{x}^i$. Определим линейное преобразование $\alpha_1 : (V_0 \dot{+} F) \otimes M_0 \to M_0 \otimes (V_0 \dot{+} F)$ по формуле

$$\alpha_1 : \hat{x}^i \otimes \mu^k \to \mu^j \otimes \left(\alpha^{ik}_{sj} \hat{x}^s + \varepsilon^{ik}_{j}\right),$$
$$\alpha_1 : 1 \otimes \mu^k \to \mu^k \otimes 1.$$

Если отождествим символы μ_k и μ^k, $\hat{x}_i$ и $\hat{x}^i$, то отображение

$$\beta_1 : \mu_k \otimes \hat{x}_i \to \left(\tilde{\beta}^{js}_{ki} \hat{x}_s + \tilde{\varepsilon}^{\,j}_{ki} \otimes \mu_j\right),$$
$$\beta_1 : 1 \otimes \mu_k \to \mu_k \otimes 1$$

будет обратным к α_1, где $\tilde{\beta}^{js}_{ki} = \beta^{ik}_{sj}$, $\tilde{\varepsilon}^{\,j}_{ki} = -\beta^{ik}_{sl} \varepsilon^{sl}_{j}$.

Пусть $\widehat{R}_n$ — множество всех многочленов от $\hat{x}^i$ степени не выше n. Тогда $\widehat{R}_1 = V_0 \dot{+} F$ и $\widehat{R}_n = \widehat{R}_1 \otimes \dots \otimes \widehat{R}_1$. Поэтому мы можем определить отображение $\alpha_n : \widehat{R}_n \otimes M_0 \to M_0 \otimes \widehat{R}_n$, задаваемое правилом коммутирования $\alpha_n(v \otimes \mu^k) = \mu^j \otimes A(v)^k_j$, как суперпозицию

$$\widehat{R}_1 \otimes \widehat{R}_1 \otimes \dots \otimes \widehat{R}_1 \otimes M_0 \to \widehat{R}_1 \otimes \dots \otimes M_0 \otimes \widehat{R}_1 \to \dots \to M_0 \otimes \widehat{R}_1 \otimes \dots \otimes \widehat{R}_1.$$

При таком взгляде очевидно, что суперпозиция β_n, определённая отображениями

$$M_0 \otimes \widehat{R}_1 \otimes \dots \widehat{R}_1 \overset{\beta_1 \otimes 1 \otimes \dots}{\longrightarrow} \widehat{R}_1 \otimes M_0 \otimes \widehat{R}_1 \otimes \dots \to \dots \to \widehat{R}_1 \otimes \dots \otimes \widehat{R}_1 \otimes M_0,$$

будет обратным к α_n отображением и будет определяться левым правилом коммутирования $\beta_n(\mu_k \otimes v) = A'(v)^j_k \otimes \mu_j$.

Пусть, наконец, $T_n = T \cap \widehat{R}_n$. Тогда по условию правило (38) корректно определено на R, и поэтому $\alpha_n(T_n \otimes M_0) \subseteq M_0 \otimes T_n$. Так как α_n обратимо, то его ядро равно нулю, и, значит, размерности пространств $T_n \otimes M_0$ и $\alpha_n(T_n \otimes M_0)$ совпадают. Но первая из них равна размерности $T_n \otimes M_0$. Таким образом, $\alpha_n(T_n \otimes M_0) = M_0 \otimes T_n$. Применяя к обеим частям последнего равенства β_n, получим $\beta_n(T_n \otimes M_0) = M_0 \otimes T_n$ и, в частности, $A'(T_n)^j_k \subseteq T_n$, что и требовалось доказать.

6. Исчисления высших порядков

Обычно под построением дифференциального исчисления высших порядков подразумевается описание универсальной дифференциальной градуированной алгебры, связанной с дифференциалом $d : R \to M$. Следуя [13], напомним соответствующие определения.

6.1. Определение. *Дифференциальной градуированной* алгеброй или просто *дифференциальной* алгеброй называется градуированная алгебра

$$\Omega = \bigoplus_{n \geqslant 0} \Omega^{(n)},$$

имеющая линейное однородное степени 1 отображение d (дифференциал)

$$d : \Omega \to \Omega, \quad d = \bigoplus_{n \geqslant 0} d_n, \quad d_n : \Omega^{(n)} \to \Omega^{(n+1)}$$

такое, что 1) $d^2 = 0$, 2) $d(ab) = da \cdot b + (-1)^n a \cdot db$, $a \in \Omega^{(n)}$, $b \in \Omega$.

Морфизмом градуированных дифференциальных алгебр называется однородный степени 0 гомоморфизм, сохраняющий дифференциал, т. е. гомоморфизм алгебр $\varphi : \Omega \to \Omega_1$ такой, что

$$\varphi(\Omega^{(n)}) \subseteq \Omega_1^{(n)}, \quad \varphi(da) = d\varphi(a).$$

В силу определения нулевая компонента $\Omega^{(0)} = R$ дифференциальной алгебры будет алгеброй (кольцом), а первая компонента $\Omega^{(1)} = M$ (как и все остальные) — бимодулем над R. При этом $d_0 : \Omega^{(0)} \to \Omega^{(1)}$ — дифференциальное исчисление на R со значениями в M. С точки зрения этого исчисления интерес представляет только дифференциальная подалгебра, порожденная нулевой и первой компонентами. Заметим, что если бимодуль M не содержит «лишних» элементов, т. е. $M = Rd(R)R = d(R)R$ (последнее равенство вытекает из условия Лейбница), то алгебра, порожденная нулевой и первой компонентами, будет дифференциальной, т. е. $d(M^n) \subseteq M^{n+1}$, а как дифференциальная алгебра она будет порождаться даже нулевой компонентой.

Любой дифференциал $d_0 : R \to M$ можно тривиальным способом дополнить до градуированной алгебры, полагая $\Omega^{(0)} = R$, $\Omega^{(1)} = M$, $\Omega^{(n)} = 0$, $n \geqslant 2$. Более важным является то, что существует универсальная дифференциальная алгебра, дополняющая d_0, если $M = d_0(R)R$ (она называется универсальной дифференциальной обертывающей).

6.2. Теорема [13]. *Пусть $d_0 : R \to M$ — произвольный дифференциал и $M = d_0(R)R$. Тогда существует дифференциальная градуированная алгебра Ω, дополняющая d_0 и порожденная нулевой компонентой, такая, что для любой другой дифференциальной градуированной алгебры Ω_1, дополняющей d_0 и порожденной нулевой компонентой, существует морфизм $\varphi : \Omega \to \Omega_1$, тождественный на R и M.*

Пусть теперь алгебра R задана порождающими $\{x^i, i \in I\}$ и определяющими соотношениями $\{f_s, s \in S\}$, а d_0 — дифференциальное исчисление с правыми частными производными, заданное правилом коммутирования

$$x^i \mu^k = \mu^j A^{ik}_j \tag{42}$$

и начальными условиями

$$d_0 x^i = \mu^k \sigma^i_k. \tag{43}$$

Если это координатное исчисление, т. е. $d_0 x^i = \mu^i$, то мы можем применить теорему 6.2. В общем случае модуль M может не порождаться дифференциалами элементов из R. Условие $\mu^k \in d_0(R)R$ в силу формулы Лейбница и правила коммутирования (42) эквивалентно тому, что $\mu^k \in \sum d_0 x^i R$, т. е. $\mu^k = \mu^s \sigma^i_s r^k_i$ для подходящих $r^k_i \in R$, что эквивалентно обратимости справа матрицы начальных условий $\left\|\sigma^i_k\right\|$. Любопытно отметить, что если в этой ситуации $\sigma^i_k, r^k_i \in F$ и матрицы $\left\|\sigma^i_k\right\|$, $\left\|r^k_i\right\|$ взаимно обратны, то можно просто заменить порождающие $y^k = x^i r^k_i$, и тогда $d_0 y^k = \mu^k$, т. е. исчисление будет координатным.

Чтобы охватить не только координатные исчисления, мы будем рассматривать дифференциальные алгебры, порожденные нулевой и первой компонентами R, M и такие, что $d\mu^k = 0$, т. е. будем предполагать, что базисные элементы модуля являются формальными дифференциалами (что вполне естественно).

Сам факт существования универсальной дифференциальной обертывающей в такой ситуации не составляет проблемы и может быть легко получен из общекатегорных соображений. Для нас представляет интерес детальное описание этой алгебры, нахождение ее базиса (в тех случаях, когда это возможно).

Пусть $\overline{\Omega}$ — произвольная дифференциальная алгебра, порожденная нулевой и первой компонентами и такая, что $\overline{\Omega}^{(0)} = R$, $\overline{\Omega}^{(1)} = M$, $d\mu^k = 0$, а дифференциал совпадает с d_0 на R.

Прежде всего, заметим, что $\overline{\Omega}$ как алгебра порождается R и M. Для этого достаточно показать, что подалгебра, порожденная R и M, будет дифференциальной, т. е. $d(M^n) \subseteq M^{n+1}$. Имеем $d(M) \subseteq d(\sum \mu^k R) \subseteq \sum \mu^k d(R) \subseteq M^2$, и работает очевидная индукция.

Таким образом, $\overline{\Omega}$ как алгебра порождается элементами $\{x^i, \mu^k, i \in I, k \in K\}$. Эти элементы связаны соотношениями $\{f_s = 0\}$, зависящими только от x^i, а также соотношениями (42).

Дифференцируя (42) и (43), мы найдем соотношения второй степени по μ^k:

$$\mu^j \mu^t \left[A(\sigma^i_j)^k_t + D_t(A(x^i)^k_j)\right] = 0, \tag{44}$$

$$\mu^j \mu^t D_t(\sigma^i_j) = 0. \tag{45}$$

Обозначим теперь через $\Omega = \Omega(r, M, d_0)$ алгебру, заданную порождающими x^i, μ^k и определяющими соотношениями $f_s = 0$, $s \in S$, (42), (44), (45). Так как эти соотношения выполняются в алгебре $\overline{\Omega}$, то существует гомоморфизм алгебр $\varphi : \Omega \to \overline{\Omega}$, тождественный на R и M. Более того, все соотношения однородны по μ^k, поэтому на Ω имеется естественная градуировка по степеням μ^k,

$$\Omega = \Omega^{(0)} \oplus \Omega^{(1)} \oplus \dots \oplus \Omega^{(n)} \oplus \dots,$$

где $\Omega^{(n)} = M^n$. При этом φ — гомоморфизм градуированных алгебр $\varphi(M^n) \subseteq \overline{\Omega}^{(n)}$.

Правило коммутирования (42) позволяет произвольный элемент $\omega \in \Omega^{(n)} = M^n$ представить в виде

$$\omega = \mu^{i_1}\mu^{i_2}\dots\mu^{i_n} r_{i_1 i_2 \dots i_n}, \quad r_{i_1 i_2 \dots i_n} \in R.$$

6.3. Теорема. *Отображения* $d_n : \Omega^{(n)} \to \Omega^{(n+1)}$,

$$d_n(\mu^{i_1}\mu^{i_2}\dots\mu^{i_n} r_{i_1\dots i_n}) = (-1)^n \mu^{i_1}\dots\mu^{i_n}\mu^k D_k(r_{i_1\dots i_n}), \tag{46}$$

корректно определены на Ω *и превращают ее в дифференциальную градуированную алгебру, которая является универсальной дифференциальной обертывающей для* $d_0 : R \to M$.

Доказательство мы разобьем на несколько лемм, позволяющих точно установить, за что отвечает каждое из определяющих соотношений алгебры Ω.

Рассмотрим тензорную алгебру $T(M)$ бимодуля M:

$$T(M) = R \dotplus M \otimes_R M \dotplus \dots \dotplus M \otimes_R \dots \otimes_R M \dotplus \dots,$$

где тензорные произведения берутся над кольцом R. Эта алгебра может быть задана порождающими x^i, μ^k, $i \in I$, $k \in K$, и определяющими соотношениями (42) и $f_s = 0$. В силу соотношений (42) каждый элемент $\omega \in T^{(n)}$ можно представить в виде

$$\omega = \mu^{i_1}\mu^{i_2}\dots\mu^{i_n} r_{i_1 i_2 \dots i_n}, \quad r_{i_1\dots i_n} \in R.$$

Наше первое замечание состоит в том, что такое представление в $T(M)$ единственно, т. е. правый модуль $M^{\otimes n}$ свободен с базисом $\mu^{i_1}\dots\mu^{i_n}$. Это вытекает из того, что любой свободный правый модуль изоморфен прямой сумме копий регулярного модуля $M \simeq \sum \oplus R^k$, и из того, что $R \otimes_R R \simeq R$. Имеем

$$M \otimes_R M = \sum \oplus R^i \otimes R^j \simeq \sum \oplus R^{ij},$$

где $R^{ij} \simeq R^i \otimes R^j \simeq R \otimes R \simeq R$, т. е. M^2 свободен и т. д.

В силу этого замечания отображения $d_n : T^{(n)} \to T^{(n+1)}$, определенные формулой (46), корректны.

Обозначим через J идеал алгебры $T(M)$, порожденный левыми частями соотношений (44).

6.4. Лемма. *Для любого $v \in R$ и любого $k \in K$ в алгебре $T(M)$ справедливо соотношение*

$$d_0(v)\mu^k \equiv -\mu^j d_0\big(A(v)_j^k\big) \pmod J. \tag{47}$$

Доказательство. Если $v = x^i$, это в точности соотношение (44) после применения правила коммутирования. Пусть $v = x^i v_i$ и для v_i соотношение (47) выполняется. Тогда

$$\begin{aligned}
d_0(v)\mu^k = d_0(x^i v_i)\mu^k &= d_0(x^i)v_i\mu^k + x^i d_0(v_i)\mu^k \\
&\equiv d_0(x^i)\mu^s A(v_i)_s^k - x^i\mu^s d_0\big(A(v_i)_s^k\big) \\
\equiv \mu^j d_0\big(A(x^i)_j^s\big)A(v_i)_s^k &- \mu^j A(x^i)_j^s d_0\big(A(v_i)_s^k\big) = -\mu^j d_0\big(A(x^i v_i)_j^k\big).
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

6.5. Лемма. *Для любых $u \in T^{(m)}$ и $v \in T^{(s)}$ в алгебре $T(K)$ имеет место соотношение*

$$d_{m+s}(uv) \equiv d_m(u)v + (-1)^m u d_s(v) \pmod J.$$

Доказательство. Проведем индукцию по степени v.

Пусть $v = r \in T^{(0)} = R$, $u = \mu^{i_1}\dots\mu^{i_m} r_{i_1\dots i_m}$. Тогда по определению в алгебре $T(R)$ имеем равенства

$$\begin{aligned}
d_m(uv) &= (-1)^m\mu^{i_1}\dots\mu^{i_m}d_0(r_{i_1\dots i_m}) \\
&= (-1)^m\mu^{i_1}\dots\mu^{i_m}d_0(r_{i_1\dots i_m})r + (-1)^m\mu^{i_1}\dots\mu^{i_m}r_{i_1\dots i_m}d_0 r \\
&= d_m(u)r + (-1)^m u d_0 r,
\end{aligned}$$

что и требуется.

Если $v = \mu^k r_k \in T^{(1)}$, то

$$\begin{aligned}
d_{m+1}(uv) &= d_{m+1}\big(\mu^{i_1}\dots\mu^{i_m}\mu^j A(r_{i_1\dots i_m})_j^k r_k\big) \\
&= (-1)^{m+1}\mu^{i_1}\dots\mu^{i_m}\mu^j\big(d_0\big(A(r_{i_1\dots i_m})_j^k\big)r_k + A(r_{i_1\dots i_m})_j^k d_0 r_k\big).
\end{aligned}$$

Раскроем скобки в последнем выражении и применим к первому слагаемому сравнение (47), а ко второму — правило коммутирования. Получим

$$\begin{aligned}
d_{m+1}(uv) &\equiv (-1)^{m+1}\mu^{i_1}\dots\mu^{i_m}(-d_0(r_{i_1\dots i_m})\mu^k r_k) \\
&+ (-1)^{m+1}\mu^{i_1}\dots\mu^{i_m}r_{i_1\dots i_m}\mu^k d_0 r_k = d_m(u)v + (-1)^m u\cdot d_1(v).
\end{aligned}$$

Наконец, рассмотрим общий случай, полагая $v = v_1\cdot\mu^k r_k$. Тогда, учитывая индуктивное предположение и случай $s = 1$, будем иметь

$$\begin{aligned}
d(uv) = d(uv_1\cdot\mu^k r_k) &\equiv d(uv_1)\cdot\mu^k r_k + (-1)^{m+s-1}uv_1 d(\mu^k r_k) \\
&\equiv (d(u)v_1 + (-1)^m u dv_1)\mu^k r_k + (-1)^{m+s-1}uv_1 d(\mu^k r_k) \\
= d(u)v_1\mu^k r_k + (-1)^m u[d(v_1)\mu^k r_k &+ (-1)^{s-1}v_1 d(\mu^k r_k)] \equiv d(u)v + (-1)^m u dv.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Обозначим теперь через W идеал алгебры $T(M)$, порожденный левой частью соотношений (45).

6.6. Лемма. $d_1(d_0(R)) \subseteq J + W$.

Доказательство. Так как левая часть (45) равна в точности $d_1(d_0(x^i))$, то мы можем провести индукцию.

Пусть $v = x^i v_i$ и $d_1(d_0(v_i)) \in J + W$. Тогда

$$d_1(d_0(v)) = d_1(d_0(x^i)v_i + x^i d_0(v_i)) = d_1(d_0(x^i)v_i) + d_1(x^i d_0(v_i)).$$

По лемме 6.5 последнее выражение по модулю J равно

$$\begin{aligned} &d_1(d_0(x^i))v_i - d_0(x^i)d_0(v_i) + d_0(x^i)d_0(v_1) + x^i d_1(d_0(v_i)) \\ &\qquad = d_1(d_0(x^i))v_i + x^i d_1(d_0(v_i)) \in Wv_i + x^i(J+W) \subseteq J+W. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

6.7. *Лемма.* $dJ \subseteq J + W$.

Доказательство. Запишем левую часть (44) в виде

$$w^{ik} = d_0(x^i)\mu^k + \mu^i d_0(A^{ik}_j)$$

и покажем, что дифференциал как первого, так и второго слагаемого лежит в $J+W$.

По лемме 6.5 имеем

$$d_2(d_0(x^i))\mu^k \in d_1(d_0(x^i))\mu^k + J \subseteq W\mu^k + J.$$

Точно так же

$$d_2(\mu^j d_0(A^{ik}_j)) \in -\mu^j d_1(d_0(A^{ik}_j)) + J \subseteq \mu^j(J+W) + J,$$

где последнее включение вытекает из леммы 6.6.

Итак, $dw^{ik} \in J + W$. Так как идеал J, порожденный w^{ik}, имеет вид $J = \sum T(M)w^{ik}T(M)$, то по лемме 6.5

$$dJ \subseteq \sum d(T(M))w^{ik}T(M) + T(M)dw^{ik}T(M) + T(M)w^{ik}d(T(M)) + J \subseteq J + W.$$

Лемма доказана.

6.8. *Лемма.* $dW \subseteq J + W$.

Доказательство. Представим левую часть (45) в виде $w^i = \mu^j d_0(\psi\sigma^i_j)$. Тогда по лемме 6.5 $dw^i \in -\mu^j d_1(d_0(\sigma^i_j)) + J$ и в силу леммы 6.6 $dw^i \in J + W$. Теперь, учитывая лемму 6.5, получаем

$$dW \subseteq \sum T(M)dw^iT(M) + W + J \subseteq J + W.$$

Лемма доказана.

6.9. *Лемма.* $d(d(T(M))) \subseteq J + W$.

Доказательство. Мы должны показать, что $d_{n+1}(d_n(T^{(n)})) \subseteq J + W$. Воспользуемся индукцией по n. При $n = 0$ требуемый результат дает лемма 6.6. Пусть $v = \mu^k v_k$, $v_k \in T^{(n-1)}$. Тогда, используя лемму 6.5, получаем

$$d_n(\mu^k v_k) \in -\mu^k d_{n-1}(v_k) + J.$$

Отсюда, учитывая лемму 6.5 и, главное, лемму 6.7 и индуктивное предположение, имеем

$$\begin{aligned} &d_{n+1}(d_n(v)) \in d(-\mu^k d_{n-1}(v_k) + J) \\ &\qquad \subseteq \mu^k d_n(d_{n-1}(v_k)) + J + dJ \subseteq \mu^k(J+W) + J + (J+W). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Теперь для доказательства теоремы 6.3 достаточно заметить, что $\Omega = T(M)/(J+W)$, а леммы 6.8, 6.9 показывают, что d корректно определено на Ω, в то время как леммы 6.9 и 6.5 показывают, что $d^2 = 0$ и выполняется градуированное условие Лейбница.

7. Исчисления высших порядков с аффинным правилом коммутирования

Теперь мы рассмотрим более подробно строение универсальной дифференциальной обертывающей для исчисления, заданного правилом коммутирования

$$x^i\mu^k = \mu^j\left(\alpha^{ik}_{sj}x^s + \varepsilon^{ik}_j\right), \quad \alpha^{ik}_{sj}, \varepsilon^{ik}_j \in F, \tag{48}$$

и начальными условиями

$$d_0x^i = \mu^k\sigma^i_k, \quad \sigma^i_k \in F. \tag{49}$$

В силу теоремы 6.3 алгебра Ω изоморфна фактор-алгебре тензорной алгебры бимодуля M по соотношениям (44), (45). При этом соотношения (45) в данном случае исчезают, а соотношения (44) значительно упрощаются:

$$\mu^j\mu^k\sigma^i_j + \mu^j\mu^t\alpha^{ik}_{sj}\sigma^s_t = 0. \tag{50}$$

Обратим внимание на то, что это $|I \times K|$ квадратичных соотношений с коэффициентами из основного поля, связывающих базисные дифференциалы. Это значит, что мы можем определить внешнее произведение, связанное с этой системой соотношений.

Именно, пусть M_0 — линейное пространство, натянутое на базисные дифференциалы μ^k. Рассмотрим фактор-алгебру $\wedge M_0$ тензорной алгебры (над полем F) $F\langle M_0\rangle$ по квадратичным соотношениям (50). Тогда n-я однородная компонента $T^{(n)}$ этой фактор-алгебры называется *внешней* n-й степенью пространства M_0,

$$\wedge^{(n)}M_0 = T^{(n)}\langle M_0\rangle. \tag{51}$$

Заметим, прежде всего, что подалгебра, порожденная μ^k в Ω, будет гомоморфным образом алгебры $\wedge M_0$, так как отображение $\xi : \mu^k \to \mu^k$ продолжается до гомоморфизма свободной алгебры $F\langle M_0\rangle$ в Ω, причем его ядро содержит все левые части соотношений (50), и поэтому ξ индуцирует однородный гомоморфизм алгебры $\wedge M_0$:

$$\pi : \wedge M_0 \to \Omega, \quad \pi_n : \wedge^{(n)}M_0 \to \Omega^{(n)}. \tag{52}$$

Учитывая правило коммутирования, получаем

7.1. Предложение. *Если дифференциальное исчисление с* ПЧП *задается правилом коммутирования* (48) *и начальными условиями* (49), *то*

$$\Omega^{(n)} = \pi(\wedge^{(n)}M_0)R. \tag{53}$$

Мы не можем утверждать ни того, что в этой формуле π_n — мономорфизм, ни того, что образы π_n порождают соответствующие правые модули свободно (т. е. $\Omega^{(n)} = \pi_n(\wedge^{(n)}M_0) \otimes_F R$).

Достаточным условием для того, чтобы π был мономорфизмом, является наличие проекции

$$\eta : \Omega \to \wedge M_0, \tag{54}$$

переводящей μ^k из Ω в μ^k из M_0. Однородность η означает, что ее ограничение на R — это коединица $\eta : R \to F$, согласованная с правилом коммутирования (48)

$$\delta^k_j\eta(x^i) = \alpha^{ik}_{sj}\eta(x^s) + \varepsilon^{ik}_j. \tag{55}$$

Справедливо и обратное

7.2. Предложение. *Если алгебра R имеет коединицу, удовлетворяющую соотношениям* (55), *то*

$$\Omega^{(n)} = \wedge^{(n)}M_0 \cdot R$$

для любого дифференциала с ПЧП, *удовлетворяющего правилу коммутирования* (48) *и начальным условиям* (49).

Доказательство. Условие согласования (55) достаточно для существования проекции $\eta : \Omega \to \wedge M_0$, так как Ω задается порождающими x^i, μ^k и определяющими соотношениями $f_s = 0$, (48), (50), которые инвариантны относительно замен $x^i \to \eta(x^i)$, $\mu^k \to \mu^k$. Предложение доказано.

Заметим еще, что если существует коединица с условиями согласования (55), то с помощью замены переменных $y^i = x^i - \eta(x^i)$ правило коммутирования приводится к однородному виду

$$y^i\mu^k = \mu^j\alpha_{sj}^{ik}y^s,$$

при этом согласованная коединица переводит все порождающие y^i в нуль.

Рассмотрим в тензорной алгебре $T(M)$ левые части соотношений (50):

$$w^{ik} = \mu^j\mu^k\sigma_j^i + \mu^j\mu^t\alpha_{sj}^{ik}\sigma_t^s.$$

Пусть J — идеал $T(M)$, порожденный w^{ik}. Тогда J — однородный по μ^k идеал $J = J_2 \dotplus J_3 \dotplus \dots$, причем по теореме 6.3

$$\Omega \simeq T(M)/J, \quad \Omega^{(n)} \simeq T^{(n)}(M)/J_n.$$

Обозначим, как и выше, через $F\langle M_0\rangle$ тензорную алгебру пространства $M_0 = \sum \mu^k F$, т. е.

$$F\langle M_0\rangle = F \dotplus M_0 \dotplus M_0 \otimes M_0 \dotplus \dots \dotplus M_0^{\otimes n} \dotplus \dots.$$

Тогда, как мы отмечали, $T^{(n)}(M)$ — это свободный правый модуль с базисом $\mu^{i_1}\dots\mu^{i_n}$, т. е. $F\langle M_0\rangle$ содержится в $T\langle M\rangle$ и

$$T^{(n)}(M) = F\langle M_0\rangle^{(n)} \otimes_F R. \tag{56}$$

Обозначим через W идеал алгебры $F\langle M_0\rangle$, порожденный w^{ik}. Тогда по определению

$$\wedge M_0 = F\langle M_0\rangle/W, \quad \wedge^{(n)}M_0 = M_0^{\otimes n}/W^{(n)}. \tag{57}$$

Понятно, что $W \subseteq J$ и ядро гомоморфизма π равно идеалу $J \cap F\langle M_0\rangle/W$ алгебры $\wedge M_0$, т. е. π — мономорфизм тогда и только тогда, когда $J \cap f\langle M_0\rangle = W$.

7.3. Лемма. *$\Omega^{(n)} \simeq \wedge^{(n)}M_0 \otimes R$ тогда и только тогда, когда $x^jw^{ik} \in W^{(2)}R$ (здесь имеется в виду изоморфизм над R, сохраняющий μ^k).*

Доказательство. Рассмотрим правый R-модуль $\overline{W}$, порожденный W. Тогда $W \subseteq \overline{W} \subseteq J$, причем $R\overline{W} = J$. Покажем сначала, что требуемый в лемме изоморфизм имеет место тогда и только тогда, когда $\overline{W} = J$.

Для этого достаточно заметить, что правый фактор-модуль $T^{(n)}(M)/\overline{W}^{(n)}$ изоморфен

$$\wedge^{(n)}M_0 \otimes R = \left(M_0^{\otimes n}/W^{(n)}\right) \otimes R. \tag{58}$$

Рассмотрим $W^{(n)}$ как линейное подпространство в $M_0^{\otimes n}$. Дополним это пространство прямым слагаемым до $M_0^{\otimes n}$:

$$W^{(n)} \dotplus U^{(n)} = M_0^{\otimes n}.$$

В силу (56) имеем

$$T^{(n)}(M) = (W^{(n)} \dotplus U^{(n)}) \otimes_F R = W^{(n)} \otimes_F R \dotplus U^{(n)} \otimes_F R,$$

и поэтому

$$(M_0^{\otimes n}/W^{(n)}) \otimes R \simeq U^{(n)} \otimes R \simeq T^{(n)}(M)/(W^{(n)} \otimes R) = T^{(n)}(M)/\overline{W}^{(n)},$$

что и доказывает (58).

Далее, равенство $R\overline{W} = \overline{W}$ означает, что $RW^{(n)} \subseteq W^{(n)}R$, а условие $x^j w^{ik} \in W^{(2)}R$ — это в точности $RW^{(2)} \subseteq W^{(2)}R$. Поэтому нам осталось показать, что условие $RW^{(2)} \subseteq W^{(2)}R$ влечет $RW^{(n)} \subseteq W^{(n)}R$ при любом n. Воспользуемся индукцией.

Мы знаем, что $W^{(n+1)} \subseteq M_0 W^{(n)} + W^{(n)} M_0$. Отсюда

$$\begin{aligned} RW^{(n+1)} &= RM_0 W^{(n)} + RW^{(n)} M_0 \\ &\subseteq M_0 RW^{(n)} + W^{(n)} RM_0 \subseteq M_0 W^{(n)} R + W^{(n)} M_0 R, \end{aligned}$$

так как в силу индуктивного предположения $RW^{(n)} \subseteq W^{(n)}R$, а $RM_0 \subseteq M_0 R$ в силу правила коммутирования. Лемма доказана.

Предположим теперь, что элементы x^i и 1 линейно независимы над F в R. Этого легко добиться, исключая лишние порождающие (но не единицу). В этом случае условие $x^j w^{ik} \in W^{(2)}R$ может быть записано в операторном виде. Чтобы это сделать, представим в таком виде все ингредиенты исчисления.

Пусть V_0 — подпространство, натянутое в R на порождающие x^i, а $V = V_0 \dot{+} F \cdot 1$. Тогда правило коммутирования (48) может быть записано в виде линейного оператора $\mathfrak{A} : V \otimes M_0 \to M_0 \otimes V$:

$$\mathfrak{A}(x^i \otimes \mu^k) = \mu^j \otimes \left(\alpha^{ik}_{sj} x^s + \varepsilon^{ik}_j\right). \tag{59}$$

Этот оператор мы можем разложить в сумму однородных по x^i операторов степеней 0 и -1:

$$A(x^i \otimes \mu^k) = \mu^j \otimes x^s \alpha^{ik}_{sj}, \tag{60}$$

$$\varepsilon(x^i \otimes \mu^k) = \mu^j \varepsilon^{ik}_j, \tag{61}$$

где $A : V_0 \otimes M_0 \to M_0 \otimes V$, $\varepsilon : V_0 \otimes M_0 \to M_0 \otimes F \simeq M_0$. Начальные условия задают линейное преобразование $\Sigma V_0 \to M_0$:

$$\Sigma(x^i) = x^j \sigma^i_j, \tag{62}$$

которое определено на V так: $\Sigma(1) = 0$.

Таким образом, исчисление задается операторами A, ε, Σ.

Подпространство $W^{(2)}$ по определению содержится в $M_0 \otimes M_0$ и порождается элементами

$$\mu^j \otimes \mu^k \sigma^i_j + \mu^j \otimes \mu^t \alpha^{ik}_{sj} \sigma^s_t, \tag{63}$$

т. е. $W^{(2)}$ равно образу оператора $P : V_0 \otimes M_0 \to M_0 \otimes M_0$, который в силу (63) выражается через ингредиенты исчисления

$$P = \Sigma_1 E_2 + A\Sigma_2, \tag{64}$$

где индексы у операторов, как обычно, показывают те компоненты, на которых этот оператор действует активно:

$$\Sigma_1 : V_0 \otimes M_0 \xrightarrow{\Sigma \otimes \mathrm{id}} M_0 \otimes M_0, \tag{65}$$

$$\Sigma_2 : M_0 \otimes V_0 \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \Sigma} M_0 \otimes M_0. \tag{66}$$

Условие $x^j w^{ik} \in W^{(2)}R$ означает, что найдутся элементы λ^{jik}_{stl}, ν^{jik}_{st} такие, что

$$x^j w^{ik} = w^{st} x^l \lambda^{jik}_{stl} + w^{st} \nu^{jik}_{st}, \tag{67}$$

при этом λ_{stl}^{jik}, ν_{st}^{jik} однозначно задают и однозначно определяются операторами

$$Y : V_0 \otimes V_0 \otimes M_0 \to V_0 \otimes M_0 \otimes V_0, \tag{68}$$

$$Y(x^j \otimes x^i \otimes \mu^k) = x^s \otimes \mu^t \otimes x^l \cdot \lambda_{stl}^{jik}, \tag{69}$$

$$Y_0 : V_0 \otimes V_0 \otimes M_0 \to V_0 \otimes M_0, \tag{70}$$

$$Y_0(x^j \otimes x^i \otimes \mu^k) = x^s \otimes \mu^t \nu_{st}^{jik}. \tag{71}$$

Равенство (67) означает, что если мы к тензору $x^j \otimes w^{ik}$ дважды применим оператор коммутирования (59), сначала к первой и второй компонентам, а потом ко второй и третьей, то получим элемент, лежащий в образе оператора

$$P_{12} : V_0 \otimes M_0 \otimes V_0 \to M_0 \otimes M_0 \otimes V_0. \tag{72}$$

Так как линейное пространство, натянутое на $x^j \otimes w^{ik}$, равно образу оператора

$$P_{23} : V_0 \otimes V_0 \otimes M_0 \to V_0 \otimes M_0 \otimes M_0, \tag{73}$$

то эти условия можно записать в виде равенства

$$P_{23}\mathfrak{A}_{12}\mathfrak{A}_{23} = YP_{12} + Y_0P; \tag{74}$$

учитывая, что $\mathfrak{A} = A + \varepsilon$, а также линейную независимость единицы от остальных порождающих, это равенство можно расписать подробнее в виде системы

$$P_{23}A_{12}A_{23} = YP_{12}, \tag{75}$$

$$P_{23}\varepsilon_{12} + P_{23}A_{12}\varepsilon_{23} = Y_0P. \tag{76}$$

Учитывая разложение (64), мы получаем равенства

$$(\Sigma_2E_3 + A_{23}\Sigma_3)A_{12}A_{23} = Y(\Sigma_1E_2 + A_{12}\Sigma_2), \tag{77}$$

$$(\Sigma_2E_3 + A_{23}\Sigma_3)(\varepsilon_{12} + A_{12}\varepsilon_{23}) = Y_0(\Sigma_1E_2 + A\Sigma_2). \tag{78}$$

Итак, мы доказали следующую теорему.

7.4. Теорема. *Пусть дифференциал с правыми частными производными задается правилом коммутирования (48) и начальными условиями (49), где $\{x^i, 1\}$ — линейно независимые порождающие алгебры R. В универсальной дифференциальной обертывающей Ω для этого исчисления имеется разложение*

$$\Omega^{(n)} = \Lambda^{(n)}M_0 \otimes R$$

тогда и только тогда, когда существуют операторы $Y : V_0 \otimes V_0 \otimes M_0 \to V_0 \otimes M_0 \otimes V_0$ и $Y_0 : V_0 \otimes V_0 \otimes M_0 \to V_0 \otimes M_0$, для которых выполняются равенства (77), (78).

В случае, если данное исчисление координатно $\mu^k = dx^k$, т. е. $M_0 = dV_0$ и $\Sigma = \mathrm{id}$, соотношения (77), (78) упрощаются:

$$(E_{23} + A_{23})A_{12}A_{23} = Y(E_{12} + A_{12}), \tag{79}$$

$$(E_{23} + A_{23})(\varepsilon_{12} + A_{12}\varepsilon_{23}) = Y_0(E + A). \tag{80}$$

Левая часть соотношения (79) может быть преобразована в левую часть уравнения Янга — Бакстера:

$$A_{23}A_{12}A_{23} - A_{12}A_{23}A_{12} = Y'(E_{12} + A_{12}), \tag{81}$$

где $Y' = Y - A_{12}A_{23}$.

Объединяя теоремы 6.3, 7.4 в случае координатных исчислений, получаем следующее утверждение.

7.5. Теорема. *Пусть $d_0 : R \to M$ — координатное исчисление конечно-порожденной алгебры с правилом коммутирования, заданным гомоморфизмом $\mathfrak{A} : R \to R_{n\times n}$. Тогда:*

а) универсальная обертывающая этого исчисления Ω задается соотношениями в тензорной алгебре бимодуля M:

$$dx^i dx^k = -dx^j dx^s D_s\big(\mathfrak{A}(x^i)^k_j\big); \tag{82}$$

б) если $\mathfrak{A}(x^i)^k_j = \alpha^{ik}_{sj} x^s + \varepsilon^{ik}_j$, $\alpha^{ik}_{sj}, \varepsilon^{ik}_j \in F$, то

$$\Omega^{(n)} = \pi_n(\wedge^{(n)} M_0) \cdot R, \tag{83}$$

где M_0 — пространство дифференциалов порождающих, $\wedge^{(n)}$ — внешнее произведение, отвечающее соотношениям

$$dx^i dx^k + dx^j dx^s \alpha^{ik}_{sj} = 0, \tag{84}$$

π_n — естественный гомоморфизм. Если R имеет согласованную коединицу $\eta : R \to F$,

$$\delta^k_j \eta(x^i) = \alpha^{ik}_{sj} \eta(x^s) + \varepsilon^{ik}_j$$

то π_n — мономорфизм;

в) равенство (83) принимает вид

$$\Omega^{(n)} = \wedge^{(n)} M_0 \otimes R \tag{85}$$

тогда и только тогда, когда существуют $(3,3)$-тензор Y и $(3,2)$-тензор Y_0 такие, что

$$A_{23}A_{12}A_{23} - A_{12}A_{23}A_{12} = Y(E_{12} + A_{12}), \tag{86}$$

$$(E_{23} + A_{23})(\varepsilon_{12} + A_{12}\varepsilon_{23}) = Y_0(E + A), \tag{87}$$

где A — это $(2,2)$-тензор α^{ik}_{sj}, ε — $(2,1)$-тензор ε^{ik}_j.

В связи с соотношениями (86), (87), отметим, что если оператор $E + A$ невырожденный, то Y, Y_0 легко находятся умножением на обратную матрицу. Однако в этом случае (84) — это n^2 линейно независимых соотношений в n^2-мерном пространстве, так что дифференциальная обертывающая будет иметь только нулевую и первую компоненты. Этого, тем не менее, недостаточно, чтобы считать само исчисление тривиальным. Например, хорошо известное исчисление Фокса [7–10] и классическое исчисление Ньютона — Лейбница в случае одной переменной таковы, что $E + A$ обратима.

Допустимо, конечно, и нулевое решение для Y Y_0. В этом случае равенство (86) превращается в уравнение Янга — Бакстера для линейной части правила коммутирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Borowiec A, Kharchenko V. K., Oziewicz Z.* On free differentials on associative algebras, preprint // Non-assaciative Algebra and its Applications / Ed. S. Gonzales. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1994. P. 46–53.
2. *Coquereaux R., Kasler D.* Remarks on the differential envelopes of associative algebras // Pacific J. Math. 1989. V. 137, N 2. P. 245–263.
3. *Dimakis A., Müller-Hoissen F.* Differentials calculus and gauge theory on fifite sets // J. Phys. A. 1994. V. 27. P. 3159–3178.
4. *Dimakis A., Müller-Hoissen F.* Quantum mechanics as non-commutative symplectic geometry // J. Phys. A. 1992. V. 25. P. 5625–5648.
5. *Dimakis A., Müller-Hoissen F., Striker T.* Non-commutative differential calculus and lattice theory // J. Phys. A. 1993. V. 26. P. 1927–1949.

6. *Dimakis A., Müller-Hoissen F.* Non-commutative differential calculus: Quantum groups, stochastic processes, and the antibracet // Adv. Appl. Cliford Algebras (Proc. Suppl.) 1994. V. 4 (S1). P. 113–124.
7. *Fox R.* Free differential calculus. I // Ann. of Math. 1953. V. 57, N 3. P. 547–560.
8. *Fox R.* Free differential calculus. II // Ann. of Math. 1954. V. 59, N 2. P. 196–210.
9. *Fox R.* Free differential calculus. III: Subgroups // Ann. of Math. 1956. V. 64, N 3. P. 407–446.
10. *Fox R.* Free differential calculus. V // Ann. of Math. 1960. V. 71, N 3. P. 408–416.
11. *Isaev A. P., Pyatov N. P.* Covariant differential complexes on quantum linear group. JINR. Preprint E2–93–416.
12. *Maltsimotes G.* Groupes quantiques et structures differentielles // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. 1990.T. 311. P. 831–834.
13. *Maltsimotes G.* Le langage des espases et des groupes quantiques // Comm. Math. Phys. 1993. V. 151. P. 275–302.
14. *Мухин Е. Е.* Операторы Янга — Бакстера и некоммутативные комплексы де-Рама // Изв. РАН. Сер. мат. 1994. Т. 58, № 2. С. 108–131.
15. *Pusz W., Woronowicz S. L.* Twisted second quantization // Rep. Math. Phys. 1989. V. 27, N 2. P. 231–257.
16. *Wess J., Zumino B.* Covariant calculus on the quantum hyperplain // Nuclear Phys. B. Proc. Suppl. 1990. V. 18. P. 302.
17. *Woronowicz S. L.* Differential calculus on compact matrix pseudogroups (quantum groups) // Comm. Math. Phys. 1989. V. 122. P. 125–170.

г. Новосибирск, г. Вроцлав (Польша) *Статья поступила 3 октября 1994 г.*