УДК 512.543.14+515.127.2

ШИРОКИЕ КОНЦЫ КОНЕЧНО-ПОРОЖДЕННЫХ ГРУПП*)

В. А. Чуркин

Пусть G — группа с конечным множеством порождающих A. Тогда с ней можно связать правый граф Кэли $\Gamma(G, A)$ и словарную метрику d_A. Множество вершин графа — это группа G, ребро длины 1 с меткой $a \in A$ соединяет всякую вершину $x \in G$ с вершиной xa. Метрика d_A определяется по графу $\Gamma(G, A)$ как длина кратчайшего пути в графе, соединяющего вершины x, $y \in G$, или, алгебраически, как длина в порождающих из A для кратчайшего группового слова, представляющего элемент $x^{-1}y$.

Геометрия в целом графа Кэли $\Gamma(G, A)$ или дискретного метрического пространства (G, d_A), как стало особенно ясно в связи с работами М. Громова, очень тесно связана с алгебраическими свойствами группы G и мало зависит от выбора множества порождающих A. Для бесконечных групп важно асимптотическое поведение соответствующего метрического пространства, которое может иметь различные характеристики. Одна из первых важных подобных характеристик — число концов группы — была введена Столлингсом [1] в 1968 г. В современных терминах число концов группы можно определить как число глобально связных компонент на бесконечности для ее графа Кэли. При этом метрическое пространство (X, d) называется глобально *несвязным* на бесконечности, если для всякого $r > 0$ существуют такие подмножества X_1, X_2 из X, что

а) $d(X_1, X_2) \geqslant r$,

б) X_1 и X_2 не ограничены,

в) $U = X \setminus (X_1 \cup X_2)$ ограничено.

Более точно, пусть n такое натуральное число, что для всякого $r > 0$ после удаления из пространства подходящего ограниченного множества оставшаяся часть пространства представима в виде объединения n неограниченных подмножеств $X_1, \ldots, X_n$, попарные расстояния между которыми не меньше r. Верхняя граница таких n и называется числом концов $e(X)$ метрического пространства X.

Столлингс доказал, что для метрического пространства (G, d_A) или, равносильно, для графа $X = \Gamma(G, A)$ число концов не зависит от выбора множества порождающих A, и потому можно говорить о числе концов $e(G)$ самой группы G. Кроме того, число концов не меняется при переходе к подгруппе или надгруппе конечного индекса, при переходе к фактор-группе по конечной нормальной подгруппе. Наконец, самое существенное, число концов может быть равно только 0, 1, 2 или ∞, причем группы, для которых $e(G) = 0$, — это в точности конечные группы; группы с двумя концами, и только они, содержат бесконечную циклическую подгруппу конечного индекса; группы с бесконечным числом концов расщепляются в свободное произведение с объединением над конечной подгруппой, индекс которой хотя бы в одном сомножителе больше 2, или расщепляются в HNN-расширение над конечными сопрягаемыми подгруппами, одна из которых собственная в базе расширения. Последние результаты лежат в основе

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 94–01–00048).

описания конечных групп автоморфизмов свободных групп и решения для них проблемы сопряженности [2, 3].

Отметим, что число концов может быть определено по-разному — комбинаторно, топологически или с помощью когомологий, однако предложенный М. Громовым метрический подход несомненно упрощает многие доказательства из теории концов.

В настоящей работе предпринимается попытка изучить поведение на бесконечности графа Кэли $\Gamma(G, A)$ или пространства (G, d_A) при удалении подмножеств, квазиизометричных вещественной прямой. Результаты этого изучения опубликованы в виде тезисов [4].

Напомним, что метрические пространства (X, d) и (X', d') называются *квазиизометричными*, если существуют постоянные $k \geqslant 1$, $\varepsilon \geqslant 0$ и отношение $\mathscr{R}$ между X и X' со свойствами:

1) для всякого $x \in X$ существует $x' \in X'$ такой, что $x\mathscr{R}x'$,
2) для всякого $x' \in X'$ существует $x \in X$ такой, что $x\mathscr{R}x'$,
3) если $x\mathscr{R}x'$ и $y\mathscr{R}y'$, то $d'(x', y') \leqslant kd(x, y) + \varepsilon$ и $d(x, y) \leqslant kd(x', y') + \varepsilon$.

Соответствующее отношение $\mathscr{R}$ назовем квазиизометрией. Обычное отображение метрических пространств $f : X \to X'$ будем называть квазиизометрией, если для некоторого $\varepsilon > 0$ отношение f_ε, заданное правилом $xf_\varepsilon x' \Leftrightarrow d'(f(x), x') \leqslant \varepsilon$, является квазиизометрией.

Нетрудно видеть, что если A и A' — два конечных множества порождающих для группы G, то метрические пространства (G, d_A) и $(G, d_{A'})$ квазиизометричны относительно тождественного отображения, при этом постоянная k равна максимуму длин кратчайших слов в алфавите A, представляющих элементы из A', и длин слов в алфавите A', представляющих элементы из A, а постоянная ε нулевая. Квазиизометриями будут и гомоморфизмы групп с конечным ядром, и вложения группы в качестве подгруппы конечного индекса. Отметим еще, что квазиизометрии сохраняют ограниченность и неограниченность множеств, не могут неконтролируемо сократить расстояние между подмножествами, а потому почти очевидно, что квазиизометрия сохраняет несвязность на бесконечности, а квазиизометричные пространства имеют одинаковое число концов.

Подмножества метрического пространства будем наделять метрикой, индуцированной из пространства, если не оговорено противное. Назовем *узкими* метрические пространства, квазиизометричные подмножеству вещественной прямой с обычной евклидовой метрикой. Остальные пространства будем называть *широкими*. Следующее определение отражает асимптотическое поведение метрического пространства (X, d) при удалении подпространства, близкого к вещественной прямой. Пусть n такое натуральное число, что для всякого $r > 0$ после удаления из пространства подходящего множества, квазиизометричного вещественной прямой, оставшаяся часть пространства представима в виде объединения n широких подмножеств $X_1, \ldots, X_n$, попарные расстояния между которыми не меньше r. Верхнюю границу таких n назовем числом широких концов метрического пространства X.

Теорема. *Число широких концов для квазиизометричных пространств одинаково.*

Следствие 1. *Число широких концов графа Кэли конечно-порожденной группы не зависит от выбора конечного множества порождающих элементов группы, необходимых для построения графа Кэли.*

Таким образом, можно говорить о числе широких концов самой группы.

Следствие 2. *Число широких концов группы не изменяется при переходе к подгруппе конечного индекса или к фактор-группе по конечной нормальной подгруппе.*

Доказательство теоремы. Пусть метрические пространства (X, d) и (X', d') квазиизометричны относительно (k, ε)-квазиизометрии $\mathscr{R}$. Зададим число $r' \geqslant 0$, и пусть $r \geqslant kr' + \varepsilon$. Допустим, что в пространстве X нашлось подмножество L, квазиизометричное вещественной прямой, и такое, что $X \setminus L = X_1 \cup \dots \cup X_n$, $d(X_i, X_j) \geqslant r$, каждое подмножество X_i широкое. Надо найти соответствующее разложение с постоянной r' для пространства X'.

Положим $L' = \{x' \mid \exists x \in X : x\mathscr{R}x'\}$. Тогда сужение квазиизометрии $\mathscr{R}$ на пару L, L' дает квазиизометрию между L и L', поэтому L' квазиизометрично вещественной прямой. Обозначим через L_ε хаусдорфову ε-окрестность подмножества L в пространстве X. Тогда L_ε тоже квазиизометрично вещественной прямой.

Пусть $X_i' = \{x' \in X' \mid \exists x \in X_i \setminus L_\varepsilon : x\mathscr{R}x'\}$. Тогда X_i' широкое. Оценим расстояние между множествами X_i' и X_j' при $i \neq j$, оценив расстояние между точками x_i' и x_j' из этих множеств. Если $x_i\mathscr{R}x_i'$, $x_j\mathscr{R}x_j'$, $x_i \in X_i$, $x_j \in X_j$, то

$$d'(x_i', x_j') \geqslant \frac{1}{k} d(x_i, x_j) - \frac{\varepsilon}{k} \geqslant \frac{r - \varepsilon}{k} \geqslant r'.$$

Дополнение в X' к объединению всех множеств X_i' содержит L'. Действительно, в противном случае некоторая точка $x' \in L'$ попадает в некоторое X_i'. Тогда найдутся точка $x \in L$ такая, что $x\mathscr{R}x'$, и точка $y \in X_i \setminus L_\varepsilon$ такая, что $y\mathscr{R}x'$. Отсюда $d(x, y) \leqslant kd'(x', x') + \varepsilon = \varepsilon$ и $y \in L_\varepsilon$, что противоречит выбору y.

Теперь покажем, что хаусдорфова окрестность $L'_{k\varepsilon+\varepsilon}$ множества L' содержит $X' \setminus (X_1' \cup \dots \cup X_n')$. В самом деле, всякая точка x' из последней разности находится в отношении $\mathscr{R}$ с некоторой точкой x из L_ε. Поэтому найдется точка z из L такая, что $d(x, z) \leqslant \varepsilon$, а для z существует $\mathscr{R}$-соответствующая точка z' из L'. Тогда

$$d(x', z') \leqslant kd(x, z) + \varepsilon \leqslant k\varepsilon + \varepsilon.$$

Следовательно, множество $X' \setminus (X_1' \cup \dots \cup X_n')$ квазиизометрично вещественной прямой, поскольку оно, с одной стороны, содержит квазиизометричное прямой множество L', а с другой стороны, само содержится в некоторой хаусдорфовой окрестности L'.

Отсюда вытекает, что число широких концов X' не меньше, чем число широких концов для X, и ввиду симметричности условий для них можно получить и противоположное неравенство. Теорема доказана.

Остается неясной возможность получить какие-либо аналоги теорем для обычных концов, касающиеся числа широких концов и описания групп с двумя концами и с бесконечным числом широких концов. Это связано с довольно сложной геометрией расположения прямых в графе Кэли. Интересно было бы описать группы с глобально плоскими графами Кэли, т. е. имеющими ровно два широких конца. Гипотеза: такие группы квазиизометричны евклидовой плоскости или плоскости Лобачевского.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Stallings J. R.* On torsion-free groups with infinitely many ends // Ann. of Math. 1968. V. 88. P. 312–334.
2. *Храмцов Д. Г.* Конечные группы автоморфизмов свободных групп // Мат. заметки. 1985. Т. 38, № 3. С. 385–392.
3. *Храмцов Д. Г.* Разрешимость проблемы сопряженности конечных подгрупп групп автоморфизмов свободных конечно порожденных групп // Алгебра и логика. 1995. Т. 34, № 5. С. 558–606.
4. *Чуркин В. А.* Плоские концы для конечно порожденной группы // Третья международ. конф. по алгебре, Красноярск, 1993: Тез. докладов. С. 359–360.

г. Новосибирск *Статья поступила 25 декабря 1993 г.*