

СПЕКТРАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА*)

Н. О. Белова

Впервые задача спектрального синтеза была неявно сформулирована С. Л. Соболевым в работе [1] как теорема единственности решения задачи Дирихле полигармонического уравнения. Исследование вопроса о существовании для данной функции последовательности финитных функций, сходящихся к ней в некоторой интегральной метрике, берет начало от работ С. Л. Соболева [2, 3]. Первые результаты в решении этой проблемы были получены Д. С. Полкингом [4] и В. И. Буренковым [5]. В серии известных работ [6–9] Л. И. Хедберг получил окончательное решение проблемы спектрального синтеза в пространствах Соболева. Обсуждаемый вопрос возникает также в задачах L_q -аппроксимации на компактных множествах решениями эллиптических уравнений (см. работы [10, 11]). Историю вопроса и подробную библиографию можно найти в обзорной статье Л. И. Хедберга [12]. Дальнейшие исследования в теории аппроксимации решениями систем дифференциальных уравнений см. в [13]. Близкая к проблеме спектрального синтеза задача о плотности финитных функций в весовом пространстве Соболева с весами степенного роста изучается в работе О. В. Бесова [14], где приведены ссылки на более ранние работы.

В настоящей работе методами весовой нелинейной теории потенциала в § 1–5 исследуется проблема спектрального синтеза в весовых пространствах Соболева с весами, принадлежащими A_p -классу Макенхаупта. В качестве приложения рассмотрены вопросы, связанные с граничным поведением функций из $W_p^m(G, w)$ (§ 6), приведены необходимые и достаточные условия стабильности компакта K (§ 7, 8) и установлена единственность слабого решения задачи Дирихле вырождающегося полигармонического уравнения.

§ 1. Предварительные сведения

Неотрицательная почти всюду конечная функция w , определенная на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^N$, удовлетворяет A_p -условию Макенхаупта (или просто $w \in A_p$), $1 < p < \infty$, если

$$\sup_{B \subset \mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{|B|} \int_B w \right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B w^{1/(1-p)} \right)^{p-1} < \infty,$$

где верхняя грань берется по всевозможным шарам $B \subset \mathbb{R}^N$. Будем рассматривать весовое пространство Соболева $W_p^m(\mathbb{R}^N, w)$ функций f , имеющих обобщенные производные до порядка m включительно и конечную норму

$$\|f\|_{W_p^m(\mathbb{R}^N, w)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |D^\alpha f|^p w \, dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 94-01-00378).

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ — мультииндекс порядка $|\alpha| = \sum_i \alpha_i$, и весовая функция w удовлетворяет A_p -условию Макенхаупта. Для некоторого открытого множества $G \subset \mathbb{R}^N$ определим подпространство $\dot{W}_p^m(G, w)$ пространства $W_p^m(\mathbb{R}^N, w)$ как замыкание $C_0^\infty(G)$ по норме $\|\cdot\|_{W_p^m(\mathbb{R}^N, w)}$.

Примем следующие соглашения относительно обозначений, используемых в работе. Для произвольного множества F внутренность, замыкание и дополнение обозначим соответственно через F° , $\bar{F}$, F^c , границу множества F — через ∂F . Символ $\nabla^m f = \{D^{|\alpha|} f; |\alpha| = m\}$ обозначает градиент порядка m , где α — мультииндекс, а $|\nabla^m f| = \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha f|$. Шар с центром в точке x радиуса r

обозначим символом $B_r(x)$ или B_r , если $r = 2^{-n}$, то вместо $B_r(x)$ пишем $B_n(x)$. Функция u удовлетворяет условию удвоения, если выполнено неравенство

$$\int_{B_{2r}(x)} u(y) dy \leq c \int_{B_r(x)} u(y) dy$$

с постоянной c , не зависящей от выбора шара $B_r(x)$. Среднее значение интеграла по множеству G обозначаем $\oint_G \dots = \frac{1}{|G|} \int_G \dots$.

Пусть теперь $K \subset \mathbb{R}^N$ — замкнутое множество, если f принадлежит пространству $\dot{W}_p^m(K^c, w)$, то в определяемом ниже смысле функция f и ее производные $D^\alpha f$, $0 < |\alpha| \leq m-1$, обращаются в нуль на множестве K .

Замкнутое множество $K \subset \mathbb{R}^N$ допускает (m, p, w) -спектральный синтез, если каждая функция f из $W_p^m(\mathbb{R}^N, w)$ такая, что $D^\alpha f|_K = 0$, $0 \leq |\alpha| \leq m-1$, принадлежит $\dot{W}_p^m(K^c, w)$. Другими словами, множество K допускает спектральный синтез, если сформулированное выше необходимое условие для того, чтобы функция f принадлежала $\dot{W}_p^m(K^c, w)$, является также и достаточным.

В настоящей работе установлено, что любое замкнутое множество допускает спектральный синтез в весовых пространствах Соболева.

Теорема 1.1. Пусть f принадлежит $W_p^m(\mathbb{R}^N, w)$, где $1 < p < \infty$ и $w \in A_p$. Пусть $K \subset \mathbb{R}^N$ — произвольное замкнутое множество и $D^\alpha f|_K = 0$ для всех α , $0 \leq |\alpha| \leq m-1$. Тогда функция f принадлежит пространству $\dot{W}_p^m(K^c, w)$.

В пространствах $W_p^m(\mathbb{R}^N, w)$ определим (m, p, w) -емкость, с помощью которой можно охарактеризовать поведение функций классов Соболева. Для компактного множества $K \subset \mathbb{R}^N$ это есть величина

$$\tilde{C}_{mp}^w(K) = \inf \{ \|\varphi\|_{W_p^m(\mathbb{R}^N, w)}^p : \varphi \in C_0^\infty, \varphi \geq 1 \text{ на } K \}.$$

С помощью стандартной процедуры (см., например, [15]) это определение распространяем на произвольные множества.

Будем говорить, что некоторое свойство, зависящее от точки x , выполняется (m, p, w) -квазивсюду, если множество точек, для которых это свойство не выполняется, имеет (m, p, w) -емкость нуль.

Отметим важное свойство функций из пространств $W_p^m(\mathbb{R}^N, w)$. Если для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество G емкости $\tilde{C}_{mp}^w(E) < \varepsilon$ и $f|_{G^c}$ непрерывна на G^c , то функцию f называют (m, p, w) -квазинепрерывной. Оказывается, что элемент f из $W_p^m(\mathbb{R}^N, w)$ имеет (m, p, w) -квазинепрерывный представитель, который единствен с точностью до множества нулевой (m, p, w) -емкости, и, следовательно, можно говорить, что функция $f \in W_p^m(\mathbb{R}^N, w)$ и ее

производные $D^\alpha f$ до порядка $m - 1$ включительно имеют следы $D^\alpha f|_F$, $0 \leq |\alpha| \leq m - 1$, на множестве F положительной $(m - |\alpha|, p, w)$ -емкости, определенные $(m - |\alpha|, p, w)$ -квазивсюду.

Задача стабильности, тесно связанная с проблемой спектрального синтеза, берет начало от фундаментальной работы М. В. Келдыша [16] по исследованию устойчивости задачи Дирихле. Эта задача обобщается на весовой случай следующим образом. Пусть $K \subset \mathbb{R}^N$ — произвольное замкнутое множество. Определим на K пространство Соболева

$$\mathring{W}_p^m(K, w) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{K \subset G} \mathring{W}_p^m(G, w) = \{f \in W_p^m(\mathbb{R}^N, w) : f(x) = 0 \text{ на } K^c\}.$$

Очевидно, что $\mathring{W}_p^m(K^\circ, w) \subset \mathring{W}_p^m(K, w)$. Множество $K \subset \mathbb{R}^N$ называется (m, p, w) -стабильным, если пространства $\mathring{W}_p^m(K, w)$ и $\mathring{W}_p^m(K^\circ, w)$ совпадают. Легко видеть, что K может быть (m, p, w) -стабильным только в том случае, когда $(K^\circ)^c$ допускает (m, p, w) -спектральный синтез.

Как обычно, через G_m и R_m обозначим ядра Бесселя и Рисса соответственно. Пусть $w \in A_p$. Тогда любая функция f из пространства $W_p^m(\mathbb{R}^N, w)$ может быть представлена в виде свертки $f = G_m * g$, где $g \in L_p(\mathbb{R}^N, w)$. В работе [17] установлено, что для некоторой постоянной c

$$c^{-1} \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^N, w)} \leq \|f\|_{W_p^m(\mathbb{R}^N, w)} \leq c \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^N, w)}.$$

По этой причине (m, p, w) -емкость произвольного множества E эквивалентна величине

$$C_{mp}^w(E) = \inf \{ \|g\|_{L_p(\mathbb{R}^N, w)}^p : g \geq 0, G_m * g \geq 1 \text{ на } E \}.$$

Из минимаксной теоремы [18] вытекает, что для компактного множества E

$$C_{mp}^w(E)^{1/p} = \sup \{ \|\mu\|_1 : \mu \in M^+(E), \|G_m * \mu\|_{L_q(\mathbb{R}^N, w^{1-q})} \leq 1 \},$$

где $M^+(E)$ обозначает множество положительных борелевских мер, сосредоточенных на E . Здесь и всюду далее $p + q = pq$. Более того, экстремальная функция для емкости $C_{mp}^w(E)$ имеет вид $g = (w^{-1} G_m * \mu)^{q-1}$, где $\text{supp } \mu \subset \bar{E}$, $\mu(\bar{E}) = C_{mp}^w(E)$ и $G_m * (w^{-1} G_m * \mu)^{q-1} \geq 1$ (m, p, w) -квазивсюду на E .

Как известно, при $0 < m < N$ и $|\alpha| \leq 1$ выполнена оценка

$$A^{-1} G_m \leq R_m \leq A G_m(x),$$

следовательно, для любого множества $E \subset \{|x| \leq 1\}$ весовые (m, p, w) -емкости Рисса и Бесселя при $mp < N$, $p > 1$, эквивалентны.

Пусть множество $K \subset \mathbb{R}^N$ замкнуто. Определим емкость конденсатора $c_{mp}^w(K \cap B_\delta(x), B_{2\delta}(x))$

$$= \inf \left\{ \int |\nabla^m \varphi|^p w \, dy : \varphi \in C_0^\infty(B_{2\delta}(x)), \varphi \geq 1 \text{ на } K \cap B_\delta(x) \right\}.$$

Его относительной емкостью называется величина

$$\tilde{c}_{mp}^w(K, B_\delta(x)) = \delta^{mp-N} \left(\int_{B_\delta(x)} w^{-\frac{1}{p-1}} \right)^{p-1} c_{mp}^w(K \cap B_\delta(x), B_{2\delta}(x)).$$

Если $mp < N$ и $\delta < 1$, то для некоторой постоянной A верна оценка [19]

$$C_{mp}^w(K \cap B_\delta(x)) \delta^{mp-N} \left(\int_{B_\delta(x)} w^{-\frac{1}{p-1}} \right)^{p-1} \leq A \tilde{c}_{mp}^w(K, B_\delta(x)).$$

В случае $mp \geq N$ вместо обычной весовой емкости Рисса будем использовать емкость конденсатора.

Приведем формулировку известной леммы Хедберга, которая часто используется в настоящей работе.

Лемма 1.1 [9]. Пусть функция $f = R_m * g$ принадлежит пространству $W_p^m(\mathbb{R}^N, w)$, $0 < m < N$, и $j = 0, \dots, m$, тогда для почти всех x имеет место оценка

$$|\nabla^{m-j} f(x)| \leq |R_j * g(x)| \leq AM(f)(x)^{1-j/m} R_m * g(x)^{j/m},$$

где

$$M(f)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} f(y) dy —$$

максимальная функция.

Множество $E \subset \mathbb{R}^N$ называется (m, p, w) -разреженным в точке x из $\mathbb{R}^N$ относительно весового пространства Соболева, если одновременно выполнены условия

$$\int_0^1 t^{(mp-N)/(p-1)} \left(\int_{B_t(x)} w^{-\frac{1}{p-1}} \right) \frac{dt}{t} = +\infty, \quad (1.1)$$

$$\int_0^1 (t^{mp-N} C_{mp}^w(E \cap B_t(x)))^{\frac{1}{p-1}} \left(\int_{B_t(x)} w^{-\frac{1}{p-1}} \right) \frac{dt}{t} < \infty. \quad (1.2)$$

Если (1.2) не выполнено, то говорят, что множество E является (m, p, w) -плотным в точке x . Таким образом, если множество E (m, p, w) -плотно в точке x , то

$$\int_0^1 \tilde{c}_{mp}^w(E \cap B_t(x))^{\frac{1}{p-1}} \frac{dt}{t} = \infty. \quad (1.3)$$

Обозначим символом $e_{mp}^w(E)$ множество

$$\{x \in \mathbb{R}^N : E \text{ } (m, p, w)\text{-разрежено в точке } x\}.$$

Лемма 1.2 (весовое свойство Келлога [20]). Пусть множество $E \subset \mathbb{R}^N$ произвольно, $1 < p < \infty$, $w \in A_p$. Тогда $C_{mp}^w(E \cap e_{mp}^w(E)) = 0$.

Введем обозначение

$$B_n(f) = B_n(f)(x) = \left(\frac{1}{w(B_n(x))} \int_{B_n(x)} |f|^p w dy \right)^{1/p}.$$

В работе будет доказан более общий результат, чем теорема 1.1, а именно

Теорема 1.2. Пусть f принадлежит классу $W_p^m(\mathbb{R}^N, w)$, где $1 < p < \infty$ и $w \in A_p$. Пусть $K \subset \mathbb{R}^N$ — замкнутое множество и $D^\alpha f|_K = 0$ для всех α , $0 \leq |\alpha| \leq m-1$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует функция ω , $0 \leq \omega \leq 1$, такая, что $\omega(x) = 1$ в окрестности множества K и $\|\omega f\|_{W_p^m(\mathbb{R}^N, w)} < \varepsilon$. Более того, ω может быть выбрана либо из C^∞ , либо такой, что $(1-\omega)f \in L_\infty$.

Основным в этой теореме является случай ограниченного множества K и функции f с компактным носителем. Покажем, что из теоремы 1.2 вытекает теорема о спектральном синтезе. Очевидно, что $(1-\omega)f$ сосредоточена на K^c и аппроксимирует f , а подходящее усреднение дает функцию из C^∞ , следовательно, $f \in \overset{\circ}{W}_p^m(K^c, w)$.

Отметим, что в работах [21, 22] получены некоторые обобщения теоремы Хедберга в невесовом случае. В [21] доказана возможность спектрального синтеза для соболевских пространств $W_1^m(\mathbb{R}^N)$ и компактов нулевой $(m, 1)$ -емкости. В [22] спектральный синтез установлен для пространств Бесова и Лизоркина — Трибеля.

Теорема 1.2 в случае $w \equiv 1$ установлена в [9]. Наше доказательство теоремы 1.2 следует схеме Хедберга из [9], однако отметим, что реализация некоторых этапов доказательства основана на других соображениях, например, в основных результатах § 2 применяются методы работы В. Г. Мазы [23, § 10]. Для построения аппроксимирующей функции на компактах нулевой $(1, p, w)$ -емкости используется идея В. И. Буренкова [24] построения усредняющих функций с переменным радиусом усреднения. Применение этой идеи позволяет существенно упростить наиболее трудоемкую часть работы [9].

Приведем основные этапы доказательства.

Последовательно применяя свойство Келлога, представим множество K в виде $E_0 \cup E_1 \cup \dots \cup E_m$ таким образом, что

- 1) множество K $(1, p, w)$ -плотно в каждой точке $x \in E_0$;
- 2) $C_{kp}^w(E_k) = 0$ и множество K $(k+1, p, w)$ -плотно в каждой точке $x \in E_k$, $k = 1, \dots, m-1$;
- 3) $C_{mp}^w(E_m) = 0$.

Будем считать, что E_k — компакты (необходимая модификация приведена в § 5).

Сначала строим функцию $\omega_0 \in C_0^\infty(E_0^c)$ так, чтобы

$$\|f - \omega_0 f \mid W_p^m(\mathbb{R}^N, w)\| < \varepsilon,$$

и полагаем $f_0 = \omega_0 f$. Затем построим функцию $\omega_1 \in C_0^\infty(E_1^c)$ такую, что

$$\|f_0 - \omega_1 f_0 \mid W_p^m(\mathbb{R}^N, w)\| < \varepsilon/2,$$

и полагаем $f_1 = \omega_1 f_0$. Продолжая построение, по индукции получаем функцию $f_m = \omega_m f_{m-1}$, $\omega_m \in C_0^\infty(E_m^c)$ и

$$\|f_{m-1} - \omega_m f_{m-1} \mid W_p^m(\mathbb{R}^N, w)\| < \varepsilon/2^m.$$

Тогда $f_m = \omega f$, $\omega = \omega_0 \omega_1 \dots \omega_m \in C_0^\infty(K^c)$, и

$$\|f - \omega f \mid W_p^m(\mathbb{R}^N, w)\| < 2\varepsilon.$$

Для того чтобы построить ω_0 , оценим f и ее производные в окрестности E_0 по весовому неравенству Пуанкаре.

Лемма 1.3. Пусть функция f из $W_p^m(\mathbb{R}^N, w)$, где и $w \in A_p$. Если точка x принадлежит K и производные $D^\alpha f|_K = 0$, $0 \leq |\alpha| \leq m-1$, то

$$\|f \mid L_p(B_n(x), w)\|^p \leq \frac{c(2^{-n})^{mp} \|\nabla_m f \mid L_p(B_n(x), w)\|^p}{\tilde{c}_{1p}^w(K \cap B_n(x))}$$

для любого $n = 1, 2, \dots$

Объединяя это неравенство с оценкой (1.3) в точке $x \in E_0$, находим, что

$$\sum_1^\infty \left(\frac{2^{-nm} B_n(\nabla_m f)}{B_n(f)} \right)^q = \infty \text{ для всех } x \in E_0. \quad (1.4)$$

Таким образом, имеет место

Теорема 1.3. Пусть E_0 — компакт и функция f принадлежит пространству $W_p^m(\mathbb{R}^N, w)$, где $1 < p < \infty$, $w \in A_p$. Если для f выполнено условие (1.4) для каждой точки $x \in E_0$, то для любого $\varepsilon > 0$ и достаточно малой окрестности V компакта E_0 существует функция $\omega \in C_0^\infty(V)$ такая, что $0 \leq \omega \leq 1$, $\omega = 1$ в окрестности E_0 , и

$$\|f\omega \mid W_p^m(\mathbb{R}^N, w)\| \leq A \int_V |\nabla_m f|^p w dx < \varepsilon.$$

Для того чтобы построить функции $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{m-1}$, воспользуемся следующей оценкой.

Лемма 1.4. Пусть функция f принадлежит $W_p^m(\mathbb{R}^N, w)$, где $1 < p < \infty$, $w \in A_p$, производные $D^\alpha f|_K = 0$, $0 \leq |\alpha| \leq m - k - 1$ для некоторого k , $0 \leq k \leq m - 1$, и точка x принадлежит компакт K . Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} & \|f \mid L_p(B_n(x), w)\|^p \\ & \leq c \left((2^{-n})^{(m-k)p} \|\nabla_{m-k} f \mid L_p(B_n(x), w)\|^p + \frac{(2^{-n})^{mp} \|\nabla_m f \mid L_p(B_n(x), w)\|^p}{\tilde{c}_{k+1,p}^w(K \cap B_n(x))} \right). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Используя неравенство (1.5), разбиваем E_k на два множества. На первом выполнено (1.4), а на другом $B_n(f)$ ведет себя так же, как $2^{-n(m-k)} B_n(\nabla_{m-k} f)$. На первом множестве построение аналогично построению ω_0 , и можно предположить, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{B_n(f)}{2^{-n(m-k)} B_n(R_k * |g|)} \leq A < \infty \quad (1.6)$$

выполнено всюду на E_k . Тогда справедлива следующая

Теорема 1.4. Пусть K — компакт и $C_{k+1,p}^w(K) = 0$ для некоторого k , $0 \leq k < m - 1$. Предположим, что функция f принадлежит пространству $W_p^m(\mathbb{R}^N, w)$, $1 < p < \infty$, $w \in A_p$, и f удовлетворяет (1.6) всюду на K . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и подходящей окрестности V множества K найдется функция $\omega \in C_0^\infty(V)$ такая, что $0 \leq \omega \leq 1$, $\omega = 1$ в окрестности K , и

$$\|f\omega \mid W_p^m(\mathbb{R}^N, w)\| < \varepsilon.$$

Следующее утверждение относится к случаю компакта нулевой (m, p, w) -емкости.

Теорема 1.5. Пусть функция f принадлежит $W_p^m(\mathbb{R}^N, w)$, $1 < p < \infty$, $w \in A_p$, $mp \leq N$ и емкость $C_{mp}^w(K)$ равна нулю. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует функция ω из $W_p^m(\mathbb{R}^N, w)$ такая, что $0 \leq \omega \leq 1$, $\omega = 1$ в окрестности множества K , произведение $f(1 - \omega)$ принадлежит $L_\infty \cap W_p^m(\mathbb{R}^N, w)$, и

$$\|f\omega \mid W_p^m(\mathbb{R}^N, w)\| < \varepsilon.$$

В качестве непосредственного следствия теоремы 1.1 получаем теорему единственности слабого решения задачи Дирихле для весового аналога полигармонического уравнения следующего вида:

$$\sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha_1! \dots \alpha_N!} \frac{\partial^m}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}} \left(w(x) \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}} \right) = 0. \quad (1.7)$$

Функция $u \in W_2^m(\mathbb{R}^N, w)$ есть слабое решение уравнения (1.7) в области G , если

$$\sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha_1! \dots \alpha_N!} \int \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}} \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}} w(x) dx = 0$$

для любой $f \in \overset{\circ}{W}_2^m(G, w)$.

Теорема 1.6. Пусть $G \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область, $w \in A_2$. Пусть функция u из пространства $W_2^m(\mathbb{R}^N, w)$ есть слабое решение уравнения (1.7) в G , и $D^\alpha u|_{\partial G} = 0$, $0 \leq |\alpha| \leq m-1$. Тогда u равна нулю в области G .

Доказательство. Из разложения пространства

$$W_2^m(G, w) = \overset{\circ}{W}_2^m(G, w) \oplus H^m(G, w),$$

где $H^m(G, w)$ — подпространство $W_2^m(G, w)$, состоящее из слабых решений (1.7) в G , и из теоремы 1.1 следует, что функция u принадлежит $\overset{\circ}{W}_2^m(G, w)$, а по предположению теоремы 1.6 функция u принадлежит $H^m(G, w)$. Следовательно, u тождественно равна нулю в G .

§ 2. Весовое неравенство Пуанкаре

Ключевым моментом в доказательстве теоремы о спектральном синтезе является неравенство Пуанкаре. В настоящем параграфе доказывается весовое неравенство Пуанкаре для функций из весовых пространств Соболева и весовой аналог теоремы вложения.

Теорема 2.1 (обобщенное неравенство Пуанкаре). Пусть $G \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область, звездная относительно шара $B(x, \rho)$, $\overline{B(x, \rho)} \subset G$, $1 < p < \infty$, $w \in A_p$. Тогда для любой функции $f \in W_p^m(G, w)$ найдется полином

$$P(x) = \sum_{0 \leq |\beta| \leq m-1} (f, \varphi_\beta) x^\beta, \quad (2.1)$$

где $\varphi_\beta \in C_0^\infty(B(x, \rho))$, такой, что

$$\sum_{k=0}^{m-1} \|\nabla^k(f - P) \| L_p(G, w) \| \leq c \|\nabla^m f \| L_p(G, w) \|. \quad (2.2)$$

Здесь c — постоянная, не зависящая от f .

Для доказательства нам потребуется интегральное представление функций по Соболеву из [23, теорема 1.10/1].

Лемма 2.1. Пусть $G \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область, звездная относительно шара $B(x_0, \rho)$, $\overline{B(x_0, \rho)} \subset G$, $1 < p < \infty$, и функция f принадлежит пространству $C^\infty(G)$. Тогда для всех точек $x \in G$ выполнено равенство

$$f(x) = \rho^{-N} \sum_{0 \leq |\beta| < m} \left(\frac{x}{\rho}\right)^\beta \int_{B(x_0, \rho)} \varphi_\beta\left(\frac{y}{\rho}\right) f(y) dy + \sum_{|\alpha|=m} \int_G \frac{f_\alpha(x, r, \theta)}{r^{N-m}} D^\alpha f(y) dy, \quad (2.3)$$

где $r = |y - x|$, $\theta = (y - x)/r$, $\varphi_\beta \in C_0^\infty(B(x_0, 1))$, а бесконечно дифференцируемые функции f_α допускают оценку $|f_\alpha| \leq c(\text{diam } G/\rho)^{N-1}$, c — постоянная, не зависящая от G .

Лемма 2.1 позволяет получить весовой аналог теоремы вложения. Пусть $w \in A_p$. Тогда вес принадлежит A_{p_*} -классу Макенхаупта для любого $p_* \in (p_0, p]$, где p_0 для каждого веса w определяется однозначно (см. [25]).

Теорема 2.2. Пусть $p_0 < p_* < p < \frac{Np_*}{m}$ и $k = \frac{Np_*}{Np_* - pm} > 1$. Тогда существует постоянная $c = c(n, p, A_p, p_*) > 0$ такая, что для всех функций $f \in C^m(\overline{B})$ выполнена оценка

$$\left(\frac{1}{w(B)} \int_B |f|^{kp} w dx \right)^{\frac{1}{kp}} \leq c \left(\left(\frac{1}{w(B)} \int_B |f|^p w dx \right)^{1/p} + (\text{diam } B)^m \left(\frac{1}{w(B)} \int_B |\nabla^m f|^p w dx \right)^{1/p} \right). \quad (2.4)$$

Доказательство. Воспользуемся интегральным представлением функции из леммы 2.1. Достаточно доказать оценку (2.4) для интеграла типа потенциала Рисса и первого слагаемого из (2.3).

Пусть $u = |\nabla^m f|$ и $I_m u(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(y)}{|x-y|^{N-m}} dy$ — потенциал Рисса. Докажем неравенство

$$\left(\frac{1}{w(B)} \int_B |R_m * u|^{kp} w dx \right)^{1/kp} \leq c r^m \left(\frac{1}{w(B)} \int_B |u|^p w dx \right)^{1/p},$$

где u принадлежит $C(\overline{B})$ и $B = B(x, r)$ — шар. Положим $u(x) = 0$ вне B . Пусть $I_1 = \int_{B(x, \varepsilon)} \frac{u(y)}{|x-y|^{N-m}} dy$ и $I_2 = \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(x, \varepsilon)} \frac{u(y)}{|x-y|^{N-m}} dy$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

Для максимальной функции имеем оценку

$$\begin{aligned} Mu(x) &\geq \frac{1}{|B|} \int_{B(x, \lambda)} u(y) dy \geq c \lambda^{-N} \int_{\lambda/2 \leq |x-y| \leq \lambda} u(y) dy \\ &\geq c \lambda^{-m} \int_{\lambda/2 \leq |x-y| \leq \lambda} \frac{u(y)}{|x-y|^{N-m}} dy \end{aligned}$$

для всех $\lambda > 0$. Таким образом, мы находим, что

$$I_1 \leq c \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon}{2^j} \right)^m Mu(x) = c(N, m) \varepsilon^m Mu(x)$$

для произвольной точки x и $\varepsilon > 0$.

Пусть теперь $p_0 < p_* < p$ и $mp < Np_*$. Применяя неравенство Гёльдера, получаем оценку

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\{|x-y| \geq \varepsilon\}} \frac{u(y)}{|x-y|^{N-m}} dy \\ &\leq \|u\|_{L_p(B, w)} \left(\int_{\{|x-y| \geq \varepsilon\} \cap B} |x-y|^{\frac{(m-N)p}{p-1}} w(y)^{\frac{1}{1-p}} dy \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\leq \|u\|_{L_p(B, w)} \left(\int_{\{|x-y| \geq \varepsilon\}} |x-y|^{\frac{(m-N)p}{p-1} \frac{p-1}{p-p_*}} dy \right)^{\frac{p-p_*}{p}} \left(\int_B w(y)^{\frac{1}{1-p_*}} dy \right)^{\frac{p_*-1}{p}} \\ &\leq \|u\|_{L_p(B, w)} \varepsilon^{\frac{mp-Np_*}{p}} \left(\int_B w(y)^{\frac{1}{1-p_*}} dy \right)^{\frac{p_*-1}{p}}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$|I_m u(x)| = I_1 + I_2 \leq c\varepsilon^m |Mu(x)| + \varepsilon^{\frac{mp - Np_*}{p}} \left(\int_B w(y)^{\frac{1}{1-p_*}} dy \right)^{\frac{p_*-1}{p}} \|u\|_{L_p(B, w)}. \quad (2.5)$$

Положим

$$\varepsilon = \left(\frac{\|u\|_{L_p(B, w)} \left(\int_B w(y)^{\frac{1}{1-p_*}} dy \right)^{\frac{p_*-1}{p}}}{|Mu(x)|} \right)^{\frac{p}{Np_*}}.$$

Тогда из формулы (2.5) получаем

$$|I_m u(x)| \leq c \|u\|_{L_p(B, w)}^{\frac{mp}{Np_*}} \left(\int_B w(y)^{\frac{1}{1-p_*}} dy \right)^{\frac{(p_*-1)m}{Np_*}} |Mu(x)|^{\frac{Np_* - pm}{Np_*}}. \quad (2.6)$$

Воспользовавшись неравенством (2.6), оценим норму функции $I_m u(x)$ в $L_{kp}(B, w)$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{w(B)} \int_B |R_m * u|^{kp} w dx \right)^{\frac{1}{kp}} &\leq \|u\|_{L_p(B, w)}^{\frac{mp}{Np_*}} \left(\int_B w(y)^{\frac{1}{1-p_*}} dy \right)^{\frac{(p_*-1)m}{Np_*}} \\ &\quad \times \left(\int_B |Mu(y)|^p w(y) dy \right)^{\frac{Np_* - pm}{Np_*}} w(B)^{-\frac{1}{kp}} \\ &\leq \|u\|_{L_p(B, w)} \left(\int_B w(y)^{\frac{1}{1-p_*}} dy \right)^{\frac{(p_*-1)m}{Np_*}} w(B)^{-\frac{1}{kp}}, \end{aligned}$$

здесь $k = Np_*/(Np_* - pm)$. Так как $w \in A_{p_*}$, то

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{w(B)} \int_B |R_m * \nabla^m f|^{kp} w dx \right)^{\frac{1}{kp}} &\leq \left(\frac{1}{w(B)} \int_B |\nabla^m f(y)|^p w(y) dy \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad \times \left\{ \int_B w(y) dy \left(\int_B w(y)^{\frac{1}{1-p_*}} dy \right)^{p_*-1} \right\}^{\frac{m}{Np_*}} (\text{diam } B)^m \\ &\leq c(\text{diam } B)^m \left(\frac{1}{w(B)} \int_B |\nabla^m f(y)|^p w(y) dy \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.7) \end{aligned}$$

Кроме того, из оценки (2.5) получаем непрерывность оператора с ядром Рисса из $L_p(B, w)$ в $L_p(B, w)$. Положим $\varepsilon = \text{diam } B$ и $f \in L_p(B, w)$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_B |R_m * f|^p w dx &\leq c(\text{diam } B)^{mp} \int_B |Mf(y)|^p w(y) dy \\ &\quad + (\text{diam } B)^{mp - Np_*} \|f\|_{L_p(B, w)}^p \left(\int_B w(y)^{\frac{1}{1-p_*}} dy \right)^{p_*-1} w(B) \\ &\leq c(w)(\text{diam } B)^{mp} \|f\|_{L_p(B, w)}^p. \end{aligned}$$

Теперь получим оценку для первого слагаемого из (2.3). Пусть

$$u(x) = (\text{diam } B)^{-N} \sum_{0 \leq |\beta| < m} \left(\frac{x}{\text{diam } B} \right)^\beta \int_B \varphi_\beta \left(\frac{y}{\text{diam } B} \right) f(y) dy,$$

где $x \in B$. Тогда модуль функции u не превосходит величины

$$c(\text{diam } B)^{-N} \left(\int_B |f|^p w dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_B w^{\frac{1}{1-p}} \right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Таким образом,

$$\left(\int_B |u|^{kp} w dx \right)^{\frac{1}{kp}} \leq c(\text{diam } B)^{-N} \|f\|_{L_p(B, w)} \left(\int_B w(y)^{\frac{1}{1-p}} dy \right)^{\frac{p-1}{p}} w(B)^{\frac{1}{kp}},$$

следовательно,

$$\left(\frac{1}{w(B)} \int_B |u|^{kp} w dx \right)^{\frac{1}{kp}} \leq c(w) \left(\frac{1}{w(B)} \int_B |f|^p w dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

что вместе с неравенством (2.7) дает требуемую оценку (2.4).

Доказательство теоремы 2.1. Для того чтобы установить неравенство (2.2), воспользуемся интегральным представлением (2.3) и непрерывностью интегрального оператора с ядром $|x - y|^{m-k-N}$ в $L_p(G, w)$. Тогда для всех k , $0 \leq k < m$, мы получаем неравенство

$$\|\nabla^k f\|_{L_p(G, w)} \leq c(\|\nabla^m f\|_{L_p(G, w)} + \|f\|_{L_p(B(x_0, \rho), w)}). \quad (2.8)$$

Из интегрального представления (2.3) для функций в шаре $B(x_0, \rho)$ вытекает оценка

$$\|f - P\|_{L_p(B(x_0, \rho), w)} \leq c\|\nabla^m f\|_{L_p(G, w)},$$

где

$$P(x) = \sum_{0 \leq |\beta| < m} x^\beta \int_{B(x_0, \rho)} \varphi_\beta(y) f(y) dy, \quad \varphi_\beta \in C_0^\infty(B(x_0, \rho)).$$

Заменяя в (2.8) f на $f - P$, получаем требуемое неравенство (2.2) для гладких функций. Общий случай получается отсюда предельным переходом (см. замечание 2.2).

Как мы отмечали ранее, в решении проблемы спектрального синтеза важную роль играют оценки типа неравенства Пуанкаре в окрестности компакта $e \subset G$ для функций из пространств $W_p^m(\mathbb{R}^N, w)$, обращающихся в нуль на e вместе со своими производными порядка меньшего m . В невесовом случае указанные неравенства получены в [8, 23].

Теорема 2.3. Пусть e — замкнутое подмножество куба $\overline{Q_d}$, δ — число из интервала $(0, 1)$, $1 < p < \infty$, $w \in A_p$. Тогда для всех функций из множества

$$\left\{ f \in C^\infty(\overline{Q_d}) : \bar{f}_{Q_d} = \frac{1}{w(Q_d)} \int_{Q_d} f w dx \geq 0 \text{ удовлетворяет условию} \right.$$

$$\left. f(x) \leq \delta d^{-N} \left(\int_{Q_d} w^{-\frac{1}{p-1}} \right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_{L_p(Q_d, w)} \text{ при всех } x \in e \right\}$$

справедливо неравенство

$$\left(\frac{1}{w(Q_d)} \int_{Q_d} |f|^{kp} w dx \right)^{1/kp} \leq \frac{c}{\tilde{c}_{mp}^w(e, Q_{2d})^{1/p}} \sum_{j=1}^m d^j \left(\frac{1}{w(Q_d)} \int_{Q_d} |\nabla^j f|^p w dx \right)^{1/p}, \quad (2.9)$$

где $c^p \leq c(1 - \delta)^{-p}$ и k из теоремы 2.2.

Для доказательства теоремы нам потребуется

Лемма 2.2. Пусть e — компакт в $\overline{Q_d}$, $1 < p < \infty$, $w \in A_p$. Существует такая постоянная c , что

$$c^{-1} c_{mp}^w(e, Q_{2d}) \leq \inf \left\{ \sum_{j=0}^m d^{(j-m)p} \|\nabla^j(1-f) \mid L_p(Q_d, w)\|^p : \right. \\ \left. f \in C^\infty(\overline{Q_d}), f \leq 0 \text{ на } e \right\} \leq c c_{mp}^w(e, Q_{2d}).$$

Левая оценка получается при помощи следующего утверждения (см. [26, теорема 1.2]).

Лемма 2.3. Существует линейное непрерывное отображение класса Гёльдера

$$A: C^{k-1,1}(\overline{Q_d}) \rightarrow C^{k-1,1}(\overline{Q_{2d}}), \quad k = 1, \dots, m,$$

такое, что

- (1) $Av = v$ на $\overline{Q_d}$,
- (2) если $\text{dist}(\text{supp } v, e) > 0$, то $\text{dist}(\text{supp } Av, e) > 0$,
- (3) для любых $i = 0, 1, \dots, m$, $1 < p < \infty$ и $w \in A_p$ существует постоянная $c = c(i, p, w)$ такая, что верна оценка

$$\|\nabla^i Av \mid L_p(Q_{2d}, w)\| \leq c \|\nabla^i v \mid L_p(Q_d, w)\|.$$

Доказательство леммы 2.2. Пусть $\varphi = A(1-f)$. Обозначим через η функцию из $C_0^\infty(Q_{2d})$, равную единице в окрестности куба Q_d и $|\nabla^i \eta| \leq c d^{-i}$ на Q_{2d} . Тогда по определению емкости c_{mp}^w и условию 3 леммы 2.3 получаем неравенство

$$c_{mp}^w(e, Q_{2d}) \leq \int_{Q_{2d}} |\nabla^m(\eta\varphi)|^p w dx \leq c \sum_{j=0}^m d^{(j-m)p} \int_{Q_{2d}} |\nabla^j \varphi|^p w dx \\ \leq c \sum_{j=0}^m d^{(j-m)p} \int_{Q_d} |\nabla^j(1-f)|^p w dx.$$

Докажем оценку справа. Рассмотрим функцию ψ , допустимую для емкости $c_{mp}^w(e, Q_{2d})$. Тогда, используя весовое неравенство Пуанкаре для функций из пространства $C_0^\infty(Q_{2d})$ (см. [17, лемма 2.11]), получаем

$$\sum_{j=0}^m d^{(j-m)p} \|\nabla^j \psi \mid L_p(Q_d, w)\|^p \leq c \sum_{j=0}^m d^{(j-m)p} \|\nabla^j \psi \mid L_p(Q_{2d}, w)\|^p \\ \leq \tilde{c} \sum_{j=0}^m d^{(j-m)p} d^{(m-j)p} \|\nabla^m \psi \mid L_p(Q_{2d}, w)\|^p = c \|\nabla^m \psi \mid L_p(Q_{2d}, w)\|^p.$$

Теперь минимизируем левую часть этого неравенства на множестве функций $\{\psi \in C^\infty(\overline{Q_d}), \psi \geq 1 \text{ на } e\}$, а правую — на множестве допустимых функций для емкости $c_{mp}^w(e, Q_{2d})$ и тем самым завершаем доказательство леммы 2.2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.3. Пусть

$$\tilde{N} = d^{-N} \left(\int_{Q_d} w^{-\frac{1}{p-1}} \right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_{L_p(Q_d, w)}.$$

Рассмотрим функцию $\varphi = (1 - \tilde{N}^{-1}f)/(1 - \delta)$, $\varphi \geq 1$ на e . Используя результат леммы 2.2, получаем оценку

$$(1 - \delta)^p c_{mp}^w(e, Q_{2d}) \leq c \sum_{j=0}^m d^{(j-m)p} \|\nabla^j (1 - \tilde{N}^{-1}f)\|_{L_p(Q_d, w)}^p. \quad (2.10)$$

Перепишем (2.10) в более удобном виде:

$$(1 - \delta)^p \tilde{N}^p c_{mp}^w(e, Q_{2d}) \leq c \left(d^{-mp} \int_{Q_d} |\tilde{N} - f|^p w dx + \sum_{j=1}^m d^{(j-m)p} \int_{Q_d} |\nabla^j f|^p w dx \right).$$

Предположим, что $\bar{f}_{Q_d} \geq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \|\tilde{N} - \bar{f}_{Q_d}\|_{L_p(Q_d, w)} &= \|\tilde{N}\|_{L_p(Q_d, w)} - \|\bar{f}_{Q_d}\|_{L_p(Q_d, w)} \\ &= \|f\|_{L_p(Q_d, w)} - \|\bar{f}_{Q_d}\|_{L_p(Q_d, w)} \leq \|f - \bar{f}_{Q_d}\|_{L_p(Q_d, w)}. \end{aligned}$$

Из предыдущего неравенства и неравенства Пуанкаре для гладких функций (см., например, [26, теорема 3.3]) вытекает, что

$$\begin{aligned} \|\tilde{N} - f\|_{L_p(Q_d, w)} &\leq \|\tilde{N} - \bar{f}_{Q_d}\|_{L_p(Q_d, w)} + \|\bar{f}_{Q_d} - f\|_{L_p(Q_d, w)} \\ &\leq 2\|f - \bar{f}_{Q_d}\|_{L_p(Q_d, w)} \leq cd\|\nabla f\|_{L_p(Q_d, w)}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} (1 - \delta)^p d^{-Np} \left(\int_{Q_d} w^{-\frac{1}{p-1}} \right)^{p-1} c_{mp}^w(e, Q_{2d}) \|f\|_{L_p(Q_d, w)}^p \\ \leq c \sum_{j=1}^m d^{(j-m)p} \int_{Q_d} |\nabla^j f|^p w dx. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Так как $\tilde{c}_{mp}^w(e, Q_{2d}) = c_{mp}^w(e, Q_{2d}) d^{(m-N)p} \left(\int_{Q_d} w^{-\frac{1}{p-1}} \right)^{p-1}$, то из (2.11) и теоремы 2.2 получаем соотношение (2.9).

Следствие 2.1. Пусть e — замкнутое подмножество куба $\bar{Q}_d$, $1 < p < \infty$, $w \in A_p$ и k из теоремы 2.2. Тогда для всех функций $f \in C^\infty(\bar{Q}_d)$, обращающихся в нуль на e , имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{w(Q_d)} \int_{Q_d} |f|^{kp} w dx \right)^{1/kp} &\leq c \left\{ d \left(\frac{1}{w(Q_d)} \int_{Q_d} |\nabla f|^p w dx \right)^{1/p} \right. \\ &\quad \left. + \frac{d^m}{\tilde{c}_{mp}^w(e, Q_{2d})^{1/p}} \left(\frac{1}{w(Q_d)} \int_{Q_d} |\nabla^m f|^p w dx \right)^{1/p} \right\}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P(f) = d^{-N} \sum_{0 \leq |\beta| < m} \left(\frac{x}{d}\right)^\beta \int_{Q_d} \varphi_\beta(y) f(y) dy$ — многочлен (2.1) из обобщенного неравенства Пуанкаре для куба Q_d . Положим

$$S(f) = P(f) - d^{-N} \int_{Q_d} \varphi_0(y) f(y) dy.$$

Так как при $|\beta| > 0$ все функции φ_β ортогональны функции, тождественно равной единице (см. [23, теорема 1.1.10/1]), то

$$|S(f)| \leq cd^{1-N} \left(\int_{Q_d} w^{-\frac{1}{p-1}} \right)^{\frac{1}{q}} \|\nabla f\|_{L_p(Q_d, w)}. \quad (2.13)$$

Достаточно доказать (2.12) в предположении

$$d\|\nabla f\|_{L_p(Q_d, w)} \leq \delta \|f\|_{L_p(Q_d, w)},$$

где $\delta = \delta(N, p, m, w)$ — малая постоянная, так как в противном случае для функции f верно неравенство Пуанкаре. Рассмотрим функцию $v = f - S(f)$. На множестве e она удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} |v(x)| = |S(f)| &\leq cd^{1-N} \left(\int_{Q_d} w^{-\frac{1}{p-1}} \right)^{\frac{1}{q}} \|\nabla f\|_{L_p(Q_d, w)} \\ &\leq c\delta d^{-N} \left(\int_{Q_d} w^{-\frac{1}{p-1}} \right)^{\frac{1}{q}} \|v\|_{L_p(Q_d, w)}. \end{aligned}$$

Пусть для определенности $\bar{v}_{Q_d} \geq 0$. Применяя к функции v теорему 2.3, получаем

$$\|v\|_{L_p(Q_d, w)}^p \leq \frac{c}{\tilde{c}_{mp}^w(e, Q_{2d})} \sum_{j=1}^m d^{jp} \|\nabla^j v\|_{L_p(Q_d, w)}^p.$$

Из последней оценки, теоремы 2.1 и равенства (2.3) находим

$$\begin{aligned} &\|f - S(f)\|_{L_p(Q_d, w)}^p \\ &\leq \frac{c}{\tilde{c}_{mp}^w(e, Q_{2d})} \sum_{j=1}^m d^{jp} \|\nabla^j (f - P(f))\|_{L_p(Q_d, w)}^p \\ &\leq \frac{c}{\tilde{c}_{mp}^w(e, Q_{2d})} \left(\sum_{j=1}^{m-1} d^{jp} \left\{ d^{(m-j)p} \|M(\nabla^m f)\|_{L_p(Q_d, w)}^p \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + d^{(m-j)p-Np} \int_{Q_d} \left| \int_{Q_d} |\nabla^m f(y)| dy \right|^p w dx \right\} + d^{mp} \|\nabla^m f\|_{L_p(Q_d, w)}^p \right) \\ &\leq \frac{cd^{mp}}{\tilde{c}_{mp}^w(e, Q_{2d})} \left(\|\nabla^m f\|_{L_p(Q_d, w)}^p \right. \\ &\quad \left. + \|\nabla^m f\|_{L_p(Q_d, w)}^p d^{-Np} \left(\int_{Q_d} w \right) \left(\int_{Q_d} w^{\frac{1}{1-p}} \right)^{p-1} \right) \\ &\leq \frac{cd^{mp}}{\tilde{c}_{mp}^w(e, Q_{2d})} \|\nabla^m f\|_{L_p(Q_d, w)}^p, \end{aligned}$$

где M — максимальная функция. Теперь, чтобы завершить доказательство, достаточно к полученному соотношению применить оценку (2.13) и теорему 2.2.

Следствие 2.2. Пусть e — замкнутое подмножество куба $\bar{Q}_d$, $1 < p < \infty$, $w \in A_p$ и k из теоремы 2.2. Тогда для всех функций $f \in C^\infty(\bar{Q}_d)$, обращающихся в нуль на e вместе со своими производными до порядка $l-1$ включительно, $l \leq m$, имеет место неравенство

$$\left(\frac{1}{w(Q_d)} \int_{Q_d} |f|^{kp} w dx \right)^{1/kp} \leq c \left\{ d^l \left(\frac{1}{w(Q_d)} \int_{Q_d} |\nabla^l f|^p w dx \right)^{1/p} + \frac{d^m}{\tilde{c}_{m-l+1,p}^w(e, Q_{2d})^{1/p}} \left(\frac{1}{w(Q_d)} \int_{Q_d} |\nabla^m f|^p w dx \right)^{1/p} \right\}. \quad (2.14)$$

Доказательство. По следствию 2.1 имеем

$$\|\nabla^j f\|_{L_p(Q_d, w)}^p \leq c \left\{ d^p \|\nabla^{j+1} f\|_{L_p(Q_d, w)}^p + \frac{d^{Np} \left(\int_{Q_d} w^{\frac{1}{1-p}} \right)^{1-p}}{\tilde{c}_{m-j,p}^w(e, Q_{2d})} \|\nabla^m f\|_{L_p(Q_d, w)}^p \right\}, \quad (2.15)$$

где $j = 0, \dots, k-1$. Кроме того, из леммы 2.2 получаем для $j = 0, \dots, k-1$

$$\tilde{c}_{m-j,p}^w(e, Q_{2d}) \geq d^{p(j+1-k)} \tilde{c}_{m-k+1,p}^w(e, Q_{2d}).$$

Отсюда и из формул (2.12) и (2.15) вытекает оценка

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_p(Q_d, w)}^p &\leq c \left(d^{kp} \|\nabla^k f\|_{L_p(Q_d, w)}^p + \frac{\|\nabla^m f\|_{L_p(Q_d, w)}^p}{d^{-Np} \left(\int_{Q_d} w^{\frac{1}{1-p}} \right)^{p-1}} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{d^{jp} d^{-p(j+1-k)}}{\tilde{c}_{m-k+1,p}^w(e, Q_{2d})} \right) \\ &\leq c \left(d^{kp} \|\nabla^k f\|_{L_p(Q_d, w)}^p + \frac{d^{mp}}{\tilde{c}_{m-k+1,p}^w(e, Q_{2d})} \|\nabla^m f\|_{L_p(Q_d, w)}^p \right). \end{aligned}$$

Применяя теорему 2.2 к последнему неравенству, получаем оценку (2.14).

Замечание 2.1. Пусть в следствии 2.2 $l = m$. Тогда неравенство (2.14) преобразуется к виду

$$\left(\frac{1}{w(Q_d)} \int_{Q_d} |f|^{kp} w dx \right)^{1/kp} \leq \frac{cd^m}{\tilde{c}_{1p}^w(e, Q_{2d})^{1/p}} \left(\frac{1}{w(Q_d)} \int_{Q_d} |\nabla^m f|^p w dx \right)^{1/p}. \quad (2.16)$$

Замечание 2.2. Рассмотрим теперь функцию $f \in W_p^m(\mathbb{R}^N, w)$. В силу свойств пространств Соболева существует последовательность $\{f_n\}$ функций из C^∞ таких, что $\lim_{n \rightarrow \infty} D^\alpha f_n = D^\alpha f$ ($m - |\alpha|, p, w$)-квазиглобально, $0 \leq |\alpha| \leq k-1$, и равномерно вне множества произвольно малой $(m - |\alpha|, p, w)$ -емкости. Применяя результаты этого параграфа к функциям f_n и переходя к пределу, получаем, что теорема 2.1, лемма 2.1, теоремы 2.2 и 2.3, лемма 2.2, следствия 2.1 и 2.2, замечание 2.1 справедливы для функций из пространства $W_p^m(\mathbb{R}^N, w)$ с указанными в этих утверждениях свойствами.

§ 3. Аппроксимация на компактных всюду $(1, p, w)$ -плотных множествах

Теорема 3.1. Пусть $K \subset \mathbb{R}^N$ — компакт, $(1, p, w)$ -плотный в каждой своей точке, $f \in W_p^m(\mathbb{R}^N, w)$, где $1 < p < \infty$ и $w \in A_p$. Предположим, что $D^\alpha f|_K = 0$ для всех α , $0 \leq |\alpha| \leq m-1$. Для любого числа $\delta > 0$ и некоторой окрестности V компакта K найдется функция $\omega \in C_0^\infty(V)$ такая, что $0 \leq \omega \leq 1$, $\omega = 1$ в окрестности компакта K и $\|\omega f\|_{W_p^m(\mathbb{R}^N, w)} < \delta$.

Доказательство. В условиях теоремы для каждой точки $x \in K$ и шара $B_n = B_n(x)$ получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 2^{n(N-p)} C_{1p}^w(K \cap B_n(x)) \left(\int_{B_n(x)} w^{-\frac{1}{p-1}} \right)^{p-1} \right\}^{\frac{1}{p-1}} = \infty. \quad (3.1)$$

Построим функцию $\omega \in C^\infty$ таким образом, чтобы функция $\omega(x)$ равнялась единице в окрестности компакта K и норма $\|\omega f\|_{W_p^m(\mathbb{R}^N, w)}$ была мала. Тогда подходящее усреднение произведения $f(1-\omega)$ будет функцией из пространства C^∞ , которая обращается в нуль в окрестности компакта K и аппроксимирует функцию f .

Разложим пространство $\mathbb{R}^N$ стандартным образом на сетки M_n , состоящие из кубов $\{Q_{ni}\}$, $(n, i) \in \mathbb{N}$, где Q_{ni} — куб со стороной длины 2^{-n} для любого $i \in \mathbb{N}$. Для произвольного куба Q_{ni} положим

$$\lambda_{ni} = \left\{ 2^{n(N-p)} C_{1p}^w(E \cap \tilde{Q}_{ni}) \left(\int_{Q_{ni}} w^{-\frac{1}{p-1}} \right)^{p-1} \right\}^{\frac{1}{p-1}}, \quad (3.2)$$

где куб $\tilde{Q}_{ni} = A Q_{ni}$ — такое концентрическое увеличение куба Q_{ni} , что если Q_{n0} пересекает компакт K и куб Q_{ni} , соседний с Q_{n0} (т. е. $Q_{ni} \subset 3Q_{n0}$), то для некоторой точки $x_0 \in K \cap Q_{n0}$ имеем

$$B(x_0, 2^{-n}) \subset 3Q_{n0} \subset \tilde{Q}_{ni}.$$

Применяя замечание 2.1 и формулу (3.2) к функции $D^\alpha f$, $|\alpha| = m - k$, принадлежащей пространству $W_p^k(\mathbb{R}^N, w)$, для куба Q_{ni} получим неравенство

$$\int_{Q_{ni}} |\nabla^{m-k} f(y)|^p w(y) dy \leq A \lambda_{ni}^{1-p} 2^{-nkp} \int_{\tilde{Q}_{ni}} |\nabla^m f(y)|^p w(y) dy. \quad (3.3)$$

Используя оценки (3.1) и (3.2), построим функцию ω так, чтобы ее производные соответствовали множителю λ_{ni}^{1-p} в (3.3). Возможность построения такой функции дает следующая

Лемма 3.1. Пусть функция f и множество K такие же, как в теореме 3.1. Тогда существует функция $\omega \in C^\infty$, обладающая следующими свойствами:

- (а) $\omega(x) = 0$ вне некоторой малой окрестности V компакта K ;
- (б) $\omega(x) = 1$ в окрестности компакта K ;
- (с) $0 \leq \omega(x) \leq 1$;
- (д) для каждой точки x существует куб Q_{ni} , содержащий x и такой, что

$$|\nabla^k \omega(x)| \leq A \lambda_{ni} 2^{nk}, \quad k = 1, 2, \dots; \quad (3.4)$$

(е) существует постоянная A , зависящая только от N и такая, что для любой точки x

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_{ni} \chi(x, \tilde{Q}_{ni}) \leq A, \quad (3.5)$$

где сумма берется только по тем индексам i , для которых $\nabla \omega$ не равна тождественно нулю в Q_{ni} .

Будем считать, что лемма установлена. Тогда доказательство теоремы 3.1 сводится к оценке нормы

$$\|\omega f\|_{W_p^m(\mathbb{R}^N, w)} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\omega f|^p w(y) dy \right)^{1/p} + \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla^m(\omega f)|^p w(y) dy \right)^{1/p}.$$

Первое слагаемое не превосходит $\int_V |f(y)|^p w(y) dy$ и, следовательно, произвольно мало.

Для оценки второго слагаемого требуется оценить интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla^k \omega|^p |\nabla^{m-k} f|^p w dy \quad \text{для } k = 0, \dots, m.$$

Разложим $\mathbb{R}^N$ на непересекающиеся множества $\bigcup_{(n,i) \in \mathbb{N}} Q'_{ni}$ так, что (3.4) выполнено для каждой точки x из куба Q'_{ni} . Тогда по неравенствам (3.3) и (3.4) для $k = 1, 2, \dots, m$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla^k \omega(y)|^p |\nabla^{m-k} f(y)|^p w(y) dy &= \sum_{(n,i) \in \mathbb{N}} \int_{Q'_{ni}} |\nabla^k \omega(y)|^p |\nabla^{m-k} f(y)|^p w(y) dy \\ &\leq A \sum'_{(n,i) \in \mathbb{N}} \lambda_{ni}^p 2^{nkp} \int_{Q_{ni}} |\nabla^{m-k} f(y)|^p w(y) dy \\ &\leq A \sum'_{(n,i) \in \mathbb{N}} \lambda_{ni} \int_{\tilde{Q}_{ni}} |\nabla^m f(y)|^p w(y) dy, \end{aligned}$$

здесь $\sum'$ означает суммирование только по тем Q_{ni} , для которых $\nabla \omega$ не равна нулю на кубе Q_{ni} . Следовательно, в силу оценки 3.5 сумма ограничена, хотя компакт K покрывается бесконечным числом кубов $\tilde{Q}_{ni}$, $(n, i) \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \sum'_{(n,i) \in \mathbb{N}} \lambda_{ni} \int_{\tilde{Q}_{ni}} |\nabla^m f(y)|^p w(y) dy \\ = \int_{V'} \left\{ \sum'_{(n,i) \in \mathbb{N}} \lambda_{ni} \chi(y, \tilde{Q}_{ni}) \right\} |\nabla^m f(y)|^p w(y) dy \leq A \int_{V'} |\nabla^m f(y)|^p w(y) dy, \end{aligned}$$

где окрестность $V' \supset V$ мала, если множество V мало.

При $k = 0$ получаем

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\omega \nabla^m f(y)|^p w(y) dy < \int_V |\nabla^m f(y)|^p w(y) dy.$$

Пусть $|\alpha| = m - 1$, а функция $D^\alpha f(x)$ равна нулю почти всюду на K . Так как функция $D^\alpha f$ абсолютно непрерывна на почти всех прямых, ее обобщенные производные почти всюду совпадают с обычными и по теореме Фубини $\nabla^m f(x) = 0$ на K (см. [27]).

Таким образом, интеграл $\int_{V'} |\nabla^m f(y)|^p w(y) dy$ не превосходит δ , если окрестность V достаточно мала. Теорема 3.1 доказана.

Доказательство леммы 3.1. Пусть $x_0 \in K$ и $\{Q_{n0}\}_{n=0}^\infty$, $Q_{n0} \in M_n$, — последовательность замкнутых кубов, содержащих точку x_0 , причем если $x_0 \in \partial Q_{n0}$ для некоторого n , то без переобозначений рассматриваем последовательность $\{3Q_{n0}\}_{n=0}^\infty$. Положим $\underline{\lambda}_n = \min\{\lambda_{ni}; Q_{ni} \subset 3Q_{n0}\}$. В силу (3.2) и (3.1) $\sum_{n=0}^\infty \underline{\lambda}_n = \infty$. Определим величину $\bar{\lambda}_n = \max\{\lambda_{ni}; Q_{ni} \subset 3Q_{n0}\}$. Если $Q_{ni} \subset 3Q_{n0}$ и $Q_{n+1,j} \subset 3Q_{n+1,0}$, то $\tilde{Q}_{n+1,j} \subset \tilde{Q}_{ni}$. Из неравенства (2.8) вытекает оценка

$$\int_{B(x_0, 2\rho)} |f(y)|^p w(y) dy \leq A \left(\int_{B(x_0, \rho)} |f(y)|^p w(y) dy + \int_{B(x_0, 2\rho)} |\nabla^m f(y)|^p w(y) dy \right),$$

где постоянная A зависит от константы из A_p -условия на вес w . Для определенных выше кубов справедливо неравенство

$$\lambda_{ni} \geq M^{-1} \lambda_{n+1,j} \quad \text{для некоторого } M = M(N, m, p, A_p) > 0. \quad (3.6)$$

Поскольку эта оценка справедлива для всех кубов $Q_{ni} \subset 3Q_{n0}$ и $Q_{n+1,j} \subset 3Q_{n+1,0}$, то имеет место неравенство $\underline{\lambda}_n \geq M^{-1} \bar{\lambda}_{n+1}$. Пусть

$$\lambda_{ni}^* 2^n = \max_{m \leq n} \{\lambda_{mj} 2^m : Q_{mj} \supset Q_{ni}\}.$$

Положим $\rho_n(x) = \min_i \{\lambda_{ni} 2^n; x \in 3/2 Q_{ni}\}$. Таким образом, $\rho_n(x) \leq \lambda_{ni} 2^n$ для каждого $x \in 3/2 Q_{ni}$. Следовательно, если $\varphi \geq 0$ имеет носитель в шаре $B(0, 2^{-n-2})$ и $\int \varphi(x) dx = 1$, то

$$(\rho_n * \varphi)(x) \leq \lambda_{ni} 2^n \quad \text{для } x \in 3/2 Q_{ni}. \quad (3.7)$$

Мы обозначим через G_n объединение кубов Q_{ni} таких, что

$$\lambda_{ni} > 1/2 M^{-1} \lambda_{n+1,j}^* \quad (\lambda_{0i} > 0 \quad \text{для } n = 0), \quad (3.8)$$

и положим

$$G'_n = \{x \in G_n : \text{dist}(x, \partial G_n) \geq 2^{-n-2}\}. \quad (3.9)$$

Определим функцию ω_0 , полагая

$$\omega_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \notin G'_0, \\ \min \left\{ 1, \inf_{\gamma(x)} \int \rho_0(t) |dt| \right\} & \text{для } x \in G'_0, \end{cases}$$

где инфимум берется по всем путям γ , соединяющим границу $\partial G'_0$ с точкой x . Легко видеть, что $|\nabla \omega_0(x)| \leq \rho_0(x)$.

Пусть носитель неотрицательной функции φ , $\varphi \in C^\infty$, содержится в единичном шаре и при этом $\int \varphi(x) dx = 1$. Положим $\varphi_n(x) = 2^{nN} \varphi(2^n x)$, тогда $\int \varphi_m(x) dx = \int_{\mathbb{R}^N} 2^{mN} \varphi(2^m x) dx = 1$ и свертка $\varphi_m * \varphi_{m+1} * \dots * \varphi_{m+l}(x)$ имеет носитель в шаре $B(0, 2^{-m+1})$ для любого l .

Положим $\tilde{\omega}_0(x) = \omega_0 * \varphi_3(x)$. Как следует из неравенства (3.7), модуль

$$|\nabla \tilde{\omega}_0 * \varphi_4 \dots * \varphi_l(x)| \leq \lambda_{0i} \quad \text{для } x \in Q_{0i}, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Кроме того, для каждого k

$$|\nabla^k (\tilde{\omega}_0 * \varphi_4 \dots * \varphi_l)(x)| \leq |\nabla \omega_0 * \nabla^{k-1} \varphi_3 * \varphi_4 \dots * \varphi_l(x)| \leq A \lambda_{0i}$$

для $x \in Q_{0i}$ и для любого l , причем постоянная A зависит только от k .

Предположим теперь, что ω_m и $\tilde{\omega}_m = \omega_m * \varphi_{m+3}$ определены для $m = 1, 2, \dots, n-1$. Определим ω_n следующим образом:

$$\omega_n(x) = \begin{cases} \tilde{\omega}_{n-1}(x) & \text{для } x \notin G'_n, \\ \min \left\{ 1, \inf \left\{ \tilde{\omega}_{n-1}(y) + \int_{\gamma(x,y)} \max_{k \leq n} \rho_k(t) |dt| \right\} \right\} & \text{для } x \in G'_n, \end{cases}$$

где инфимум берется по всем $y \in \partial G'_n$ и для всех $\gamma(x, y)$, соединяющих точки x и y . Положим $\tilde{\omega}_n = \omega_n * \varphi_{n+3}$. Кроме того, предположим для $\tilde{\omega}_{n-1}$ выполнение следующих свойств:

пусть $m \leq n-1$ и $Q_{mi} \subset G_m$, тогда для любого $x \in Q_{mi} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{n-1} G_j \right)$,

$$|\nabla \tilde{\omega}_{n-1} * \varphi_{n+3} \cdots * \varphi_{n+l}(x)| \leq \lambda_{mi}^* 2^m \quad \text{для всех } l, \quad (3.10)$$

$$|\nabla^k \tilde{\omega}_{n-1} * \varphi_{n+3} \cdots * \varphi_{n+l}(x)| \leq \lambda_{mi}^* 2^{mk} \quad \text{для всех } l, \quad (3.11)$$

где A зависит только от k .

Проверим, имеет ли те же свойства $\tilde{\omega}_n$. Пусть $Q_{ni} \subset G_n$. На G'_n имеем $\nabla \omega_n(x) \leq \max_{m \leq n} \rho_m(x)$, и вне G'_n справедливо равенство $\nabla \omega_n(x) = \nabla \tilde{\omega}_{n-1}(x)$.

Следовательно, если $Q_{mi} \subset G_m$ и $x \in Q_{mi} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{n-1} G_j \right)$ для всех $m \leq n$, то оценки (3.10) и (3.11) выполняются и для $\tilde{\omega}_n$. Таким образом, из (3.7) и (3.10) для $x \in Q_{ni}$ нетрудно получить неравенства

$$\begin{aligned} |\nabla \tilde{\omega}_n * \varphi_{n+4} \cdots * \varphi_{n+l}(x)| &\leq \lambda_{ni}^* 2^n, \\ |\nabla^k \tilde{\omega}_n * \varphi_{n+4} \cdots * \varphi_{n+l}(x)| &\leq |\nabla \omega_n * \nabla^{k-1} \varphi_{n+3} * \varphi_{n+4} \cdots * \varphi_{n+l}(x)| \\ &\leq \lambda_{ni}^* 2^n |\nabla^{k-1} \varphi_{n+3} * \varphi_{n+4} \cdots * \varphi_{n+l}(x)| \leq A \lambda_{ni}^* 2^{nk}. \end{aligned}$$

Установим неравенство (3.4). Действительно, если $x \notin G_n$, то $x \notin G'_n$, и в силу (3.9) $\text{dist}(x, \partial G'_n) \geq 2^{-n-2}$. Следовательно,

$$\tilde{\omega}_n(x) = \tilde{\omega}_{n-1} * \varphi_{n+3}(x), \quad \nabla^k \tilde{\omega}_n(x) = \nabla^k \tilde{\omega}_{n-1} * \varphi_{n+3}(x),$$

и соответствующие свойства функции $\tilde{\omega}_n$ вытекают из (3.10) и (3.11).

Теперь $Q_{mi} \subset G_m$, $x \in Q_{mi} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} G_j \right)$. Согласно (3.8) имеем соотношение $|\nabla^k \tilde{\omega}_n(x)| \leq A M \lambda_{mi}^* 2^{mk}$ для всех $n \geq m$. Тем самым неравенство (3.4) установлено.

Покажем, что $\tilde{\omega}_n(x) = 1$ в окрестности компакта K , если n достаточно велико. Рассмотрим последовательность кубов $\{Q_{n0}\}_{n=0}^{\infty}$, содержащих точку $x_0 \in K$. Пусть $\{\bar{\lambda}_{n\nu} 2^{n\nu}\}_{\nu=0}^{\infty}$ — возрастающая последовательность максимумов из $\{\bar{\lambda}_n 2^n\}_{n=0}^{\infty}$, т. е.

$$\begin{cases} \bar{\lambda}_n 2^n < \bar{\lambda}_{n\nu} 2^{n\nu}, & n < n_\nu, \\ \bar{\lambda}_n 2^n < \bar{\lambda}_{n\nu} 2^{n\nu}, & n_\nu \leq n < n_{\nu+1}, \\ \bar{\lambda}_{n\nu} 2^{n\nu} < \bar{\lambda}_{n\nu+1} 2^{n\nu+1}. \end{cases}$$

Тогда

$$\sum_{n_\nu+1}^{n_{\nu+1}-1} \bar{\lambda}_n \leq \bar{\lambda}_{n\nu} 2^{n\nu} \sum_{n_\nu+1}^{\infty} 2^{n\nu} 2^{-n} = \bar{\lambda}_{n\nu}.$$

Таким образом, имеем неравенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} \bar{\lambda}_n \leq 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{\lambda}_{n_\nu}.$$

Отсюда вытекает расходимость ряда, стоящего справа. Поэтому из (3.6) получаем, что $\sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_{n_\nu-1} = \infty$. Более того, из (3.6) следует, что $3Q_{n_\nu-1,0} \subset G_{n_\nu-1}$. Действительно, $\lambda_{n_\nu-1} \geq M^{-1} \bar{\lambda}_{n_\nu}$ ввиду (3.6) и

$$\bar{\lambda}_{n_\nu} 2^{n_\nu} > \lambda_{n_\nu-1}^* 2^{n_\nu-1}$$

для всех i таких, что $Q_{n_\nu-1,i} \subset 3Q_{n_\nu-1,0}$. Таким образом, справедлива оценка $\lambda_{n_\nu-1,i} > 1/2 M^{-1} \lambda_{n_\nu-1,i}^*$ для индексов i из условия (3.8) (в том числе для $i = 0$).

Итак, $1/2 \tilde{Q}_{n_\nu-1,0} \subset G'_{n_\nu-1}$. Так как $3Q_{n_0} \subset 2Q_{n-1,0}$, то расстояние от $3Q_{n_\nu,0}$ до $\partial G'_{n_\nu-1}$ не меньше $2^{-n_\nu-1}$. Тогда для $x \in 3Q_{n_\nu,0}$ и $y \in \partial G'_{n_\nu-1}$

$$\int_{\gamma(x,y)} \max_{k \leq n_\nu} \rho_k(t) |dt| \geq 2^{-n_\nu-1} \lambda_{n_\nu} 2^{n_\nu} = \lambda_{n_\nu-1};$$

если точка x принадлежит $3Q_{n_\nu,0}$, то значение интеграла не меньше величины $3/4 \lambda_{n_\nu-1}$. Поэтому если $\tilde{\omega}_{n_\nu-2}(x) \geq L$ в $3Q_{n_\nu,0}$, то $\omega_{n_\nu-1}(x) \geq L + 1/4 \lambda_{n_\nu-1}$ в $3Q_{n_\nu,0}$ и свертка $\omega_{n_\nu-1} * \varphi_{n_\nu+3} * \dots * \varphi_{n_\nu+l}$ удовлетворяет такому же неравенству, если только $L + 1/4 \lambda_{n_\nu-1} \leq 1$. Проводя аналогичные построения для больших номеров $n_\nu+1, n_\nu+2, \dots$, получаем, что $\omega_{n_\nu+1-1} \leq L + 1/4 \lambda_{n_\nu-1} + 1/4 \lambda_{n_\nu+1-1}$, и так далее. Очевидно, что расходимость ряда $\sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_{n_\nu-1}$ обеспечивает нера-

венство $L + \sum_{\nu=j}^l \lambda_{n_\nu-1} \geq 1$ для некоторых j и l , тем самым установлено, что

$\tilde{\omega}_M(x) = 1$ в окрестности точки $x_0 \in K$ для достаточно большого числа M . Ввиду компактности K имеем $\tilde{\omega}_M(x) = 1$ и в окрестности множества K .

Итак, положим $\omega = \tilde{\omega}_n$ для достаточно большого n . Понятно, что, начиная построение с сетки M_{n_0} вместо M_0 , можно получить ω с носителем в произвольно малой окрестности компакта K .

Докажем свойство (е) леммы 3.1. Пусть x — произвольная точка из $\mathbb{R}^N$ и x_0 — точка из K , ближайшая к x , и пусть $x_0 \in Q_{n_0}, n = 0, 1, \dots$. Точка x принадлежит конечному набору G_n , т. е. существует число $\tilde{N}(x) = \tilde{N}$ — наибольший из индексов n , возникающих в сумме (3.5).

Предположим, что $x \in \tilde{Q}_{ni}$. Для каждого n существует только A_N таких кубов, где A_N зависит только от размерности пространства $\mathbb{R}^N$, так что $\sum_i \chi(x, \tilde{Q}_{ni}) \leq A_N$. Более того, если $\lambda_{ni} > 0$, то $\tilde{Q}_{ni} \cap K \neq \emptyset$, так что $\tilde{Q}_{ni} \subset A Q_{n_0}$ для некоторого A . Следовательно, $\lambda_{ni} \leq A \bar{\lambda}_{n-n_0}$ для некоторого n_0 , так как $\bar{\lambda}_{n-n_0} = \max_i \{\lambda_{n-n_0,i}, Q_{n-n_0,i} \subset 3Q_{n-n_0,0}\}$, что означает $\sum_i \lambda_{ni} \chi(x, \tilde{Q}_{ni}) \leq$

$$A \bar{\lambda}_{n-n_0} A_N \leq \tilde{A} \bar{\lambda}_{n-n_0}.$$

С другой стороны,

$$\sum_{n=0}^{\tilde{N}} \bar{\lambda}_n \leq \sum_{\nu=0}^{n_*} \bar{\lambda}_{n_\nu} \leq A M^{-1} \sum_{\nu=0}^{n_*} \lambda_{n_\nu-1} \leq A \omega(x_0) = A.$$

Итак, независимо от точки x сумма (3.5) ограничена. Лемма 3.1 доказана.

§ 4. Аппроксимация на компактах с нулевой емкостью

В этом параграфе будем предполагать, как и прежде, что вес w принадлежит A_p -классу Макенхаупта.

Теорема 4.1. Пусть $f \in W_p^m(\mathbb{R}^N, w)$, $1 < p < \infty$, и $D^\alpha f|_K = 0$ для всех α , $0 \leq |\alpha| \leq k$, где k , $1 \leq k \leq m-1$, — некоторое число. Предположим, что компакт $K \subset \mathbb{R}^N$ имеет нулевую $(1, p, w)$ -емкость и K является $(m-k+1, p, w)$ -плотным в точке x . Тогда для шара $B_n = B(x, 2^{-n})$ справедливо или

$$\sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{2^{-nm} B_n(\nabla^m f)}{B_n(f)} \right)^q = \infty, \quad (4.1)$$

или

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{B_n(f)}{2^{-nk} B_n(R_{m-k} * |\nabla^m f|)} \leq A < \infty, \quad (4.2)$$

где постоянная A не зависит от f , компакта K и точки x .

Доказательство. Так как $(1, p, w)$ -емкость компакта K равна нулю, то оценка (2.16) не может быть использована, и мы рассмотрим неравенство Пуанкаре (2.14)

$$B_n(f) \leq A \left(2^{-nk} B_n(\nabla^k f) + \frac{2^{-nm} B_n(\nabla^m f)}{\tilde{c}_{m-k+1,p}^w(B_n \cap K, B_{n-1})^{1/p}} \right).$$

Тогда или

$$B_n(f) \leq A 2^{-nm} \tilde{c}_{m-k+1,p}^w(B_n \cap K, B_{n-1})^{-1/p} B_n(\nabla^m f) \quad (4.3)$$

для всех достаточно больших n , или

$$B_{n_i}(f) \leq A 2^{-n_i k} B_{n_i}(\nabla^k f) \quad (4.4)$$

для некоторой бесконечной подпоследовательности $n_i \rightarrow \infty$.

Действительно, если имеет место (4.3), то (4.1) следует непосредственно из определения $(m-k+1, p, w)$ -плотности множества K в точке x .

Предположим теперь, что (4.1) не выполняется, но тогда не выполняется и оценка (4.3), так как это противоречит $(m-k+1, p, w)$ -плотности компакта K в точке x . Следовательно, справедливо соотношение (4.4). Так как (4.1) не выполнено, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-nm} B_n(\nabla^m f) / B_n(f) = 0,$$

что в силу интегрального представления (2.3) влечет

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-nm} B_n(\nabla^m f) / B_{n+r}(f) = 0$$

для любого фиксированного положительного целого r .

Пусть n_0 выбрано настолько большим, что

$$2^{-(n-r)m} B_{n-r}(\nabla^m f) \leq \varepsilon B_n(f) \quad (4.5)$$

для всех $n \geq n_0$, r и ε будут выбраны позднее.

Пусть $n_1 > n_0$ такое, что выполнено неравенство (4.4). Тогда по лемме 2.1

$$B_{n_1}(f) \leq A 2^{-(n_1)k} B_{n_1}(R_{m-k} * |\nabla^m f|). \quad (4.6)$$

Теорема будет доказана, если мы установим, что (4.6) справедливо для всех ν , $n_0 \leq \nu \leq n_1$.

Мы будем доказывать (4.6) индукцией по ν . Итак, соотношение (4.6) верно для $\nu = n_1$. Предположим, что (4.6) доказано для $n_0 < n \leq \nu \leq n_1$, нужно получить (4.6) для $\nu = n - 1$.

Обозначим $|\nabla^m f| = g$. Заметим, что оценка (4.5) включает

$$B_\nu(R_{m-k} * g) \leq 3^{1/2} B_{\nu-1}(R_{m-k} * g), \quad (4.7)$$

если ε и r подобраны должным образом.

Предположим, что неравенство (4.7) доказано. Используя интегральное представление (2.3), получаем

$$\begin{aligned} \int_{B_\nu} |\nabla^{k-j} f|^p w(x) dx &\leq A 2^{-\nu j p} \int_{B_\nu} (R_{m-k} * |g|)^p w(x) dx \\ &\quad + A 2^{\nu(k-j)p} \int_{B_{\nu+1}} |f(x)|^p w(x) dx. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$B_\nu(\nabla^{k-j} f) \leq A(2^{\nu(k-j)} B_{\nu+1}(f) + 2^{-\nu j} B_\nu(R_{m-k} * g)).$$

Тогда, применяя неравенство (4.6) для $\nu + 1$, $n \leq \nu + 1 \leq n_1$, получаем оценку

$$B_\nu(\nabla^{k-j} f) \leq A 2^{-\nu j} B_\nu(R_{m-k} * g) \quad (4.8)$$

для всех ν , $n - 1 \leq \nu \leq n_1$.

Докажем соотношение (4.6) для $\nu = n - 1$. Рассмотрим тождество

$$B_{n-1}(\nabla^{k-1} f) = B_{n_1}(\nabla^{k-1} f) + \sum_{\nu=n-1}^{n_1-1} B_\nu(\nabla^{k-1} f) - B_{\nu+1}(\nabla^{k-1} f). \quad (4.9)$$

По теореме 2.2 для функций h из пространства $W_p^1(\mathbb{R}^N, w)$ и $k = 1$ нетрудно установить неравенство

$$B_\nu(h) - B_{\nu+1}(h) \leq A 2^{-\nu} B_\nu(\nabla h).$$

Используя эту оценку и неравенство (4.8), для суммы из тождества (4.9) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=n-1}^{n_1-1} B_\nu(\nabla^{k-1} f) - B_{\nu+1}(\nabla^{k-1} f) &\leq \sum_{\nu=n-1}^{n_1-1} 2^{-\nu} B_\nu(\nabla^k f) \\ &\leq A \sum_{\nu=n-1}^{n_1-1} 2^{-\nu} B_\nu(R_{m-k} * g). \end{aligned}$$

Таким образом, в силу (4.7)

$$\begin{aligned} B_{n-1}(\nabla^{k-1} f) &\leq A 2^{-\nu} B_{n_1}(R_{m-k} * g) + \sum_{\nu=n-1}^{n_1-1} 2^{-\nu} B_\nu(R_{m-k} * g) \\ &\leq A \sum_{\nu=n-1}^{n_1} 2^{-\nu} B_\nu(R_{m-k} * g) \leq A B_{n-1}(R_{m-k} * g) \sum_{\nu=n-1}^{n_1} 2^{-\nu} \left(\frac{3}{2}\right)^{\nu-(n-1)} \\ &\leq A 2^{-(n-1)} B_{n-1}(R_{m-k} * g) \sum_{k=1}^{n_1-n+1} \left(\frac{3}{4}\right)^k \leq A 2^{-(n-1)} B_{n-1}(R_{m-k} * g). \end{aligned}$$

Аналогично предыдущим неравенствам устанавливается оценка

$$\begin{aligned}
 B_{n-1}(\nabla^{k-2} f) &\leq B_{n_1}(\nabla^{k-2} f) + \sum_{\nu=n-1}^{n_1-1} B_{\nu}(\nabla^{k-2} f) - B_{\nu+1}(\nabla^{k-2} f) \\
 &\leq B_{n_1}(\nabla^{k-2} f) + A \sum_{\nu=n-1}^{n_1-1} 2^{-\nu} B_{\nu}(\nabla^{k-1} f) \\
 &\leq A \sum_{\nu=n-1}^{n_1} 2^{-2\nu} B_{\nu}(R_{m-k} * g) \leq AB_{n-1}(R_{m-k} * g) \sum_{\nu=n-1}^{n_1} 2^{-2\nu} \left(\frac{3}{2}\right)^{\nu-(n-1)} \\
 &\leq A 2^{-2(n-1)} B_{n-1}(R_{m-k} * g)
 \end{aligned}$$

и т. д. Таким образом,

$$B_{n-1}(f) \leq A 2^{-k(n-1)} B_{n-1}(R_{m-k} * g),$$

что и доказывает (4.6). Осталось установить неравенство (4.7).

Для некоторого положительного целого r

$$\begin{aligned}
 B_{\nu}(R_{m-k} * g) &= \left\{ \frac{1}{w(B_{\nu})} \int_{B_{\nu}} |R_{m-k} * g|^p w(x) dx \right\}^{1/p} \\
 &\leq \left\{ \frac{1}{w(B_{\nu})} \int_{B_{\nu}} \left| \int_{B_{\nu-r}} R_{m-k}(x-y) g(y) dy \right|^p w(x) dx \right\}^{1/p} \\
 &\quad + \left\{ \frac{1}{w(B_{\nu})} \int_{B_{\nu}} \left| \int_{B_{\nu-r}^c} R_{m-k}(x-y) g(y) dy \right|^p w(x) dx \right\}^{1/p}.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned}
 \int_{B_{\nu-r}} R_{m-k}(x-y) g(y) dy &\leq \int_0^{2^{-(\nu-2)}} t^{m-k-N-1} \int_{B(x,t)} g(y) dy dt \\
 &\leq 2^{-(\nu-r-1)(m-k)} \left(\frac{1}{w(B_{\nu-r-1})} \int_{B_{\nu-r-1}} |g|^p w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &\quad \times \left(\int_B w(y) dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_B w(y)^{\frac{1}{1-p}} dy \right)^{\frac{p-1}{p}} \leq A 2^{-(\nu-r-1)(m-k)} B_{\nu-r-1}(g).
 \end{aligned}$$

В силу оценки (4.5) $2^{-(\nu-r-1)(m-k)} B_{\nu-r-1}(g) \leq \varepsilon 2^{(\nu-r-1)k} B_{\nu}(f) \leq A \varepsilon 2^{\nu k} B_{\nu}(f)$, а так как имеет место неравенство $B_{\nu}(f) \leq A 2^{-\nu k} B_{\nu}(R_{m-k} * g)$ для всех ν , $n \leq \nu \leq n_1$, то

$$\left(\frac{1}{w(B_{\nu})} \int_{B_{\nu}} \left| \int_{B_{\nu-r}} R_{m-k}(x-y) g(y) dy \right|^p w(x) dx \right)^{1/p} \leq A \varepsilon B_{\nu}(R_{m-k} * g).$$

Выбирая r достаточно большим, получаем, что

$$1 - \varepsilon \leq R_{m-k}(y)/R_{m-k}(y-x) \leq 1 + \varepsilon$$

для $x \in B_n$, $y \in B_{n-r}^c$ независимо от $n \geq r$, тогда

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{w(B_\nu)} \int_{B_\nu} \left| \int_{B_{\nu-r}^c} R_{m-k}(x-y)g(y) dy \right|^p w(x) dx \right)^{1/p} \\ & \leq \frac{1}{1-\varepsilon} \int_{B_{\nu-r}^c} R_{m-k}(y)g(y) dy \\ & \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \left(\frac{1}{w(B_{\nu-1})} \int_{B_{\nu-1}} \left| \int_{B_{\nu-r}^c} R_{m-k}(x-y)g(y) dy \right|^p w(x) dx \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} & B_{\nu-1}(R_{m-k} * g) + A 2^{-(\nu-r-1)} B_{\nu-r-1}(g) \\ & \geq \left(\frac{1}{w(B_{\nu-1})} \int_{B_{\nu-1}} \left| \int_{B_{\nu-r}^c} R_{m-k}(x-y)g(y) dy \right|^p w(x) dx \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

то мы получаем следующую оценку:

$$B_\nu(R_{m-k} * g) \leq A\varepsilon B_\nu(R_{m-k} * g) + \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} (B_{\nu-1}(R_{m-k} * g) + A\varepsilon B_\nu(R_{m-k} * g)),$$

и тем самым

$$B_\nu(R_{m-k} * g) \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon(1-2A)} B_{\nu-1}(R_{m-k} * g) \leq 3/2 B_{\nu-1}(R_{m-k} * g),$$

если $\varepsilon \leq 1/(5+6A)$. Таким образом, теорема 4.1 доказана.

Теорема 4.2. Пусть K — компакт и $C_{m-k,p}^w(K) = 0$, где k , $1 \leq k \leq m-1$, — некоторое число. Пусть $f \in W_p^m(\mathbb{R}^N, w)$, $D^\alpha f|_K = 0$ для всех α , $0 \leq |\alpha| \leq k$, и функция f удовлетворяет (4.2) всюду на K . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и некоторой окрестности V компакта K существует функция $\omega \in C_0^\infty(V)$ такая, что $0 \leq \omega \leq 1$, ω равна единице в окрестности компакта K и $\|\omega f\|_{W_p^m(\mathbb{R}^N, w)} < \varepsilon$.

Доказательство. Пусть K — компакт из $\mathbb{R}^N$. По лемме Уитни дополнение K^c является объединением кубов Q с непересекающимися внутренностями таких, что каждый куб Q принадлежит некоторой сетке M_n и для этого куба выполнена оценка

$$\text{diam } Q \leq \text{dist}(Q, K) \leq 4 \text{diam } Q.$$

Кубы такого покрытия множества K^c будем называть кубами Уитни относительно K .

Построим множества G_m , связанные с разбиением Уитни относительно K , следующим образом. Пусть $\Omega = \mathbb{R}^N \setminus K$, $\Omega_\delta = \{x \in \Omega, \rho(x, \partial\Omega) \geq \delta\}$. Тогда положим $G_{-1} = \emptyset$, $G_0 = \Omega_{1/2}, \dots, G_m = \Omega_{\frac{1}{2^{m+1}}} \setminus \Omega_{\frac{1}{2^m}}, \dots$. Определим еще множества

$$U^\delta = \{x, \rho(x, U) \leq \delta\}, \quad \tilde{G}_m = \Omega_{\frac{1}{2^{m+1}} - \frac{1}{2^{m+3}}} \setminus \Omega_{\frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+3}}}, \dots$$

Положим

$$\varphi_m(x) = \frac{1}{\delta_m^N} \int_{\tilde{G}_m \cap U^{\delta_m}} \omega\left(\frac{x-y}{\delta_m}\right) dy,$$

где ω — обычное ядро усреднения, $\delta_m = 1/(2^{m+4})$. Таким образом, функция $\varphi_m(x)$ представляет собой усреднение характеристической функции множества

$\tilde{G}_m \cap U^{\delta_m}$ с радиусом усреднения δ_m . Из свойств средних функций (см. [1]) следует, что

- 1) $\varphi_m(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$;
- 2) $|D^k \varphi_m(x)| \leq c 2^{m|k|}$;
- 3) $\text{supp } \varphi_m \subset G_{m-1} \cup G_m \cup G_{m+1}$;
- 4) $0 \leq \varphi_m(x) \leq 1$, $\varphi_m(x) = 1$ для $x \in G_m \cap U$;
- 5) $1 \leq \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m(x) \leq 2$ для $x \in \Omega \cap U$.

Пусть $k \geq 1$, положим

$$E_N = \{x \in K, B_n(f) \leq N 2^{-nk} B_n(R_{m-k} * |g|) \text{ для всех } n \geq N\}.$$

Тогда множество E_N замкнуто, поскольку $B_n(f)$ и $B_n(R_{m-k} * |g|)$ непрерывны по x . По предположению теоремы и из (4.2) следует, что $K = \bigcup_{N=M}^{\infty} E_N$ для некоторого M .

Сначала выберем M настолько большим, что V — 2^{-M} -окрестность K , и предположим, что $E_M = K$.

Пусть $\{Q\}$ — покрытие Уитни множества K^c и $\tilde{Q} = A Q$ — подходящее концентрическое увеличение куба Q такое, что $\tilde{Q}$ содержит шар B с центром на множестве K , причем Q содержится в шаре B . Обозначим центр куба Q через x_Q .

Так как $C_{m-k,p}^w(K) = 0$, то выберем $\delta > 0$ и окрестность U множества K так, что

$$C_{m-k,p}^w(U) < A \delta^p \text{ и } U \text{ содержится в } 2^{-(M+1)}\text{-окрестности множества } K.$$

Рассмотрим неубывающую функцию

$$H \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad H(t) = \begin{cases} 0 & \text{для } t \leq 1/2, \\ 1 & \text{для } t \geq 1, \end{cases}$$

и $0 \leq H(t) \leq 1$.

Определим функцию

$$\omega(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } x \in K, \\ H \circ \left(\sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m(x) \right) & \text{для } x \in K^c. \end{cases}$$

Таким образом, $\omega(x) = 1$ на окрестности U множества K . Так как U содержится в $2^{-(M+1)}$ -окрестности компакта K , то $\text{supp } \omega$ содержится в 2^{-M} -окрестности K .

Оценим норму $\|\omega f\|_{W_p^m(\mathbb{R}^N, w)}$. Пусть Q — куб Уитни, где $\nabla \omega$ не равно тождественно нулю.

Рассмотрим случай $0 \leq j \leq k$. Так как оценка (4.2) выполнена для некоторого шара B , центр которого принадлежит множеству K и такого, что Q содержится в B , а B содержится в 2^{-M} -окрестности компакта K , то по неравенству (4.8)

$$\int_Q |\nabla^j f|^p w(x) dx \leq l(Q)^{(k-j)p} \int_Q (R_{m-k} * |\nabla^m f|)^p w(x) dx. \quad (4.10)$$

Оценим потенциал Рисса по неравенству (2.5) при $\varepsilon = l(Q)$:

$$\int_{\tilde{Q}} (R_{m-k} * |\nabla^m f|)^p w(x) dx \leq A l(Q)^{(m-k)p} \int_{\tilde{Q}} |\nabla^m f|^p w(x) dx. \quad (4.11)$$

Используя оценки (4.10) и (4.11), получаем

$$\int_Q |\nabla^{m-j} \omega|^p |\nabla^j f|^p w dx \leq A \int_{\tilde{Q}} |\nabla^m f|^p w dx.$$

Окончательно имеем оценку

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla^{m-j} \omega|^p |\nabla^j f|^p w dx \leq A \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla^m f(x)|^p w(x) dx \leq A \|f\|_{W_p^m(\mathbb{R}^N, w)}^p.$$

Для случая $k+1 \leq j \leq m-1$ положим $(m-j)/(m-k) = \theta$. По лемме Хедберга для почти всех $x \in \mathbb{R}^N$ $|\nabla^j f| \leq A(Mg)^{1-\theta}(R_{m-k} * |g|)^\theta$. Тогда по формуле (4.11) и неравенству Гёльдера

$$\begin{aligned} \int_Q |\nabla^{m-j} \omega|^p |\nabla^j f|^p w dx &\leq A l(Q)^{(j-m)p} \int_Q (Mg)^{p(1-\theta)} (R_{m-k} * |g|)^{p\theta} w dx \\ &\leq A l(Q)^{(j-m)p} \left(\int_Q (Mg)^p w dx \right)^{1-\theta} \left(\int_Q (R_{m-k} * g)^p w dx \right)^\theta \\ &\leq l(Q)^{(j-m)p} l(Q)^{(m-k)p\theta} \left(\int_Q g^p w dx \right)^\theta \left(\int_Q (Mg)^p w dx \right)^{1-\theta}. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Гёльдера для суммы, приходим к соотношениям

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla^{m-j} \omega|^p |\nabla^j f|^p w dx \leq A \int_{\mathbb{R}^N} |g(x)|^p w(x) dx \leq A \|f\|_{W_p^m(\mathbb{R}^N, w)}^p.$$

Пусть $j = m$. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\omega|^p |\nabla^m f|^p w dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla^m f|^p w dx.$$

Таким образом, норма $\|\omega f\|_{W_p^m(\mathbb{R}^N, w)}$ равномерно ограничена независимо от δ . С другой стороны, по построению $\omega(x)f(x) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$ и $x \in K^c$. Тогда существует последовательность $\{\omega_n\}$, $n \rightarrow \infty$, такая, что $\omega_n f$ сходятся к нулю слабо в $W_p^m(\mathbb{R}^N, w)$, и по теореме Мазура последовательность средних арифметических сходится в $W_p^m(\mathbb{R}^N, w)$ к нулю сильно, что и завершает первую часть доказательства.

Пусть теперь компакт K удовлетворяет условиям теоремы. Тогда $K = \bigcup_{N=M}^{\infty} E^N$, где E^N — компакт. Пусть $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < 1/2 \|f\|_{W_p^m(\mathbb{R}^N, w)}$, ω_M — функция, построенная в первой части доказательства, $\text{supp } \omega_M \subset V$, $0 \leq \omega_M \leq 1$, $\omega_M = 1$ на окрестности U_M множества E_N и

$$\|f\omega_M\|_{W_p^m(\mathbb{R}^N, w)} < \varepsilon/2.$$

Положим $f_M = f(1 - \omega_M)$, так что $\|f - f_M\|_{W_p^m(\mathbb{R}^N, w)} < \varepsilon/2$.

Пусть $x \in E_{M+1}$. Тогда для каждого $B_n(x)$, $n \geq M+1$, имеем

$$B_n(f_M) \leq B_n(f) \leq (M+1)2^{-nk} B_n(R_{m-k} * |g|),$$

и, следовательно, по (4.10) для $1 \leq j \leq k$ верно

$$\begin{aligned} B_n(\nabla^j f_M) &\leq A 2^{nj} B_n(f_M) + A(M+1)2^{-n(k-j)} B_n(R_{m-k} * |g_M|) \\ &\leq A(M+1)2^{-n(k-j)} (B_n(R_{m-k} * |g|) + B_n(R_{m-k} * |g_M|)). \end{aligned}$$

Аналогично первой части доказательства, используя тот факт, что

$$\|f_M| W_p^m(\mathbb{R}^N, w)\| \leq 2 \|f| W_p^m(\mathbb{R}^N, w)\|,$$

построим функцию ω_{M+1} такую, что $0 \leq \omega_{M+1} \leq 1$ и $\omega_{M+1} = 1$ на окрестности U_{M+1} множества E_{M+1} , причем норма $\|f - f_M| W_p^m(\mathbb{R}^N, w)\|$ не превосходит $\varepsilon/2^2$. Положим $f_{M+1} = f_M(1 - \omega_{M+1})$, так что $\|f_M - f_{M+1}| W_p^m(\mathbb{R}^N, w)\| < \varepsilon/2^2$ и $f_{M+1} = 0$ на $U_M \cup U_{M+1}$. Продолжая построение по индукции, получим функцию f_N такую, что

$$\|f - f_N| W_p^m(\mathbb{R}^N, w)\| < \varepsilon \sum_{n=1}^{N-M} 2^{-n},$$

f_N равняется нулю на $\bigcup_{n=M}^N U_n$, $U_n \supset E_n$. Так как K — компакт, то функция f_N равна нулю и в окрестности K , если N достаточно велико. Функция $\omega = (1 - (1 - \omega_M) \dots (1 - \omega_N))$ удовлетворяет всем условиям теоремы.

§ 5. Аппроксимация на произвольных замкнутых множествах

Изложение этого параграфа основано на схеме работы [9].

Теорема 5.1. Пусть K — компакт, $f \in W_p^m(\mathbb{R}^N, w)$, $1 < p < \infty$, $w \in A_p$, $0 \leq k \leq m-1$, $D^\alpha f|_K = 0$ для всех α , $0 \leq |\alpha| \leq k$. Предположим, что f удовлетворяет (4.1) всюду на K за исключением множества $E \subset K$ такого, что $C_{m-k,p}^w(E) = 0$, и при $k \geq 1$ f удовлетворяет свойству (4.2) всюду на E . Тогда для некоторой окрестности V множества K и любого $\varepsilon > 0$ существует функция $\omega \in C_0^\infty(V)$ такая, что $0 \leq \omega \leq 1$, $\omega = 1$ в окрестности множества K , и $\|f\omega| W_p^m(\mathbb{R}^N, w)\| < \varepsilon$.

Доказательство. Пусть V выбрана так, что $\int_V |\nabla^m f|^p w(x) dx < \varepsilon^p$. Возьмем M настолько большим, что V есть 2^{-M} -окрестность множества K . Положим $B_n = B_n(x)$ и

$$F_N = \left\{ x \in K : \sum_{n=M}^N \left(\frac{2^{-nm} B_n(\nabla^m f)}{B_n(f)} \right)^q \geq 1 \right\}.$$

Предположим, что $B_n(f) \neq 0$ для всех n и всех $x \in K$, так как в противном случае K можно заменить на $K \setminus B_n(x)$. Таким образом, предыдущая сумма является непрерывной функцией от x и F_N — компакт. Более того, $(K \setminus E) \subset \bigcup_{M}^{\infty} F_N$. Так как $C_{m-k}^w(E) = 0$, то по лемме 3.1 существует функция $\omega_N \in C_0^\infty(V)$ такая, что $\omega_N = 1$ на 2^{-N} -окрестности компакта F_N , $0 \leq \omega \leq 1$ и $\|\omega_N f| W_p^m(\mathbb{R}^N, w)\|^p \leq A \int_V |\nabla^m f|^p w dx$. Более того, легко видеть, что ω_N можно построить так, что $\omega_N = 1$ на 2^{-n} -окрестности F_n для каждого $n = M, M+1, \dots, N$ (ω_N — по существу, возрастающая последовательность).

Таким образом, существует возрастающая последовательность открытых множеств U_N , $U_N \supset F_N$, такая, что $\omega_N = 1$ на U_N и $\|\omega_N f\|_{W_p^m(\mathbb{R}^N, w)}^p \leq A \int_V |\nabla^m f|^p w dx$.

Положим $H = \bigcup_M^\infty U_N$. В силу слабой компактности пространства Соболева существует слабо сходящаяся подпоследовательность $\{(1 - \omega_N)f\}$, которая сходится к f_0 , $f_0 = 0|_H$, и выполнено неравенство

$$\|f - f_0\|_{W_p^m(\mathbb{R}^N, w)}^p \leq A\varepsilon.$$

По теореме Мазура средние арифметические последовательности $\{(1 - \omega_N)f\}$ сходятся по норме $W_p^m(\mathbb{R}^N, w)$ к функции f_0 . Предположим, что эта последовательность имеет вид $\{(1 - \tilde{\omega}_n)f\}$, где $0 \leq \tilde{\omega}_n \leq 1$, $\tilde{\omega}_n = 1$ на U_{i_n} и $i_n \rightarrow \infty$, когда $n \rightarrow \infty$.

Рассмотрим множество

$$E_N = \{x \in K \setminus H : B_n(f) \leq N 2^{-nk} B_n(R_{m-k} * |g|) \text{ для всех } n \geq N\}.$$

Тогда $K \setminus H = \bigcup_M^\infty E_N$ для некоторого M , $K \setminus H$ — компакт и $C_{m-k,p}^w(K \setminus H) = 0$ по предположению теоремы. Как и в доказательстве теоремы 4.2 для $x \in E_N$ и всех $B_n(x)$, $n \geq N$, верны неравенства

$$B_n(f_0) \leq B_n(f) \leq N 2^{-nk} B_n(R_{m-k} * |g|)$$

и

$$B_n(\nabla^j f_0) \leq N 2^{-n(k-j)} (B_n(R_{m-k} * |g|) + B_n(R_{m-k} * |g_0|)) \text{ для } 1 \leq j \leq k.$$

Таким образом, как в теореме 4.2, построим функцию $\omega' \in C_0^\infty(V)$, $0 \leq \omega' \leq 1$, $\omega' = 1$ в окрестности H' множества $K \setminus H$, такую, что $\|f_0 \omega'\|_{W_p^m(\mathbb{R}^N, w)} \leq A\varepsilon$. Отсюда следует, что $f' = f_0(1 - \omega') = 0$ в окрестности $H \cup H'$ множества K , и $\|f - f'\|_{W_p^m(\mathbb{R}^N, w)} \leq \|f - f_0\|_{W_p^m(\mathbb{R}^N, w)} + \|f \omega'\|_{W_p^m(\mathbb{R}^N, w)} \leq A\varepsilon$. Более того,

$$\begin{aligned} & \|f' - f(1 - \tilde{\omega}_n)(1 - \omega')\|_{W_p^m(\mathbb{R}^N, w)} \\ & \leq \|(1 - \omega')(f_0 - f(1 - \tilde{\omega}_n))\|_{W_p^m(\mathbb{R}^N, w)} \\ & \leq \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha(1 - \omega')\|_{L_\infty} \cdot \|f_0 - f(1 - \tilde{\omega}_n)\|_{W_p^m(\mathbb{R}^N, w)} < A\varepsilon, \end{aligned}$$

если n достаточно велико. Так как $K \setminus H'$ — компакт и $K \setminus H' \subset \bigcup_{n=1}^\infty U_{i_n}$, то, следовательно, функция $f(1 - \tilde{\omega}_n)(1 - \omega')$ равна нулю в окрестности K , если n выбрано достаточно большим. Тогда $\omega = 1 - (1 - \tilde{\omega}_n)(1 - \omega')$ удовлетворяет условиям теоремы.

Теорема 5.2. Пусть $f \in W_p^m(\mathbb{R}^N, w)$, $1 < p < \infty$, K — произвольное замкнутое множество и $D^\alpha f|_K = 0$ для всех α , $0 \leq |\alpha| \leq m - 1$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует функция ω , $0 \leq \omega \leq 1$, $\omega = 1$ в окрестности множества K , и $\|\omega f\|_{W_p^m(\mathbb{R}^N, w)} < \varepsilon$. Более того, ω может быть выбрана из C^∞ или так, что $(1 - \omega)f \in L_\infty$.

Доказательство. Пусть K — произвольное компактное множество и f — данная функция. Предположим, что V , M , F_N , ω_N , $\tilde{\omega}_n$, f_0 , U_{i_n} и H такие же, как в доказательстве теоремы 5.1. Обозначим H через H_0 .

По свойству Келлога и замечанию 2.1 $C_{1,q}^w(K \setminus H_0) = 0$. Теперь положим

$$E_{1N} = \{x \in K \setminus H_0 : B_n(f) \leq N 2^{-n(m-1)} B_n(R_1 * |g|) \text{ для всех } n \geq N\}.$$

Тогда E_{1N} — компакт и $C_{1,q}^w(E_{1N}) = 0$. Более того, по свойству Келлога и по теореме 4.1 при $k = m - 1$ имеем $C_{2,q}^w\left(K \setminus \left(H_0 \cup \left(\bigcup_{N=M}^{\infty} E_{1N}\right)\right)\right) = 0$.

Как и в доказательстве теоремы 4.2, существуют функции $\omega_{1N} \in C_0^\infty(V)$ такие, что $0 \leq \omega_{1N} \leq 1$, $\omega_{1N} = 1$ в окрестности H_{1N} множества E_{1N} , и $f_{1N} = f_0(1 - \omega_{1M}) \dots (1 - \omega_{1N})$, так что $f_{1N} = 0$ на $\bigcup_M^N H_{1n}$ и $\|f_0 - f_{1N}\|_{W_p^m(\mathbb{R}^N, w)} <$

$\varepsilon/2$. Положим $H_1 = \bigcup_M^{\infty} H_{1n}$. Как в доказательстве теоремы 4.2, последовательность средних f_{1n} сходится строго к f_1 , так что $f_1 = 0$ на $H_0 \cup H_1$ и $\|f_0 - f_1\|_{W_p^m(\mathbb{R}^N, w)} < \varepsilon/2$. Запишем $f_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} f_0(1 - \tilde{\omega}_{1n})$ и предположим, что $\tilde{\omega}_{1n} = 1$ на H_{1,i_n} , $i_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Теперь положим

$$E_{2N} = \{x \in K \setminus (H_0 \cup H_1) : B_n(f) \leq N 2^{-nk} B_n(R_2 * |g|) \text{ для всех } n \geq N\}.$$

Тогда $C_{2,q}^w(E_{2N}) = 0$ для каждого N , E_{2N} — компакт и

$$C_{3,q}^w\left(K \setminus \left(H_0 \cup H_1 \cup \left(\bigcup_{N=M}^{\infty} E_{2N}\right)\right)\right) = 0.$$

Построим функции $\omega_{2N} \in C_0^\infty(V)$ такие, что $0 \leq \omega_{2N} \leq 1$, $\omega_{2N} = 1$ в окрестности H_{2N} множества E_{2N} , и $f_{2N} = f_1(1 - \omega_{2M}) \dots (1 - \omega_{2N})$, так что $f_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} f_1(1 -$

$\tilde{\omega}_{2n})$. Тогда $f_2 = 0$ на $H_2 = \bigcup_M^N H_{2n}$ и $\|f_2 - f_1\|_{W_p^m(\mathbb{R}^N, w)} < \varepsilon/2$.

Продолжая построение по индукции, получим такую функцию

$$f_{m-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{m-2}(1 - \tilde{\omega}_{m-1,n}),$$

что $\|f_{m-1} - f_{m-2}\|_{W_p^m(\mathbb{R}^N, w)} < \varepsilon/2^{m-1}$, $f_{m-1} = 0$ на $\bigcup_{k=0}^{m-1} H_k$, $H_k = \bigcup_{N=M}^{\infty} H_{kN}$, где H_{kN} — соответствующая окрестность множества

$$E_{kN} = \left\{x \in K \setminus \left(\bigcup_0^{k-1} H_j\right) : B_n(f) \leq N 2^{-n(m-k)} B_n(R_k * |g|) \text{ для всех } n \geq N\right\}.$$

Тогда $C_{mp}^w\left(K \setminus \left(\bigcup_0^{m-1} H_j\right)\right) = 0$ и $K \setminus \left(\bigcup_0^{m-1} H_j\right)$ — компакт. Таким образом, существует функция $\omega_m \in C_0^\infty(V)$ такая, что $\omega_m = 1$ в окрестности H_m множества $K \setminus \left(\bigcup_0^{m-1} H_j\right)$ и $f_m = (1 - \omega_m)f_{m-1}$ удовлетворяет неравенству $\|f_m - f_{m-1}\|_{W_p^m(\mathbb{R}^N, w)} < \varepsilon/2^m$. Отсюда следует, что $\|f_m - f\|_{W_p^m(\mathbb{R}^N, w)} < \varepsilon$ и f_m равно нулю на объединении $\bigcup_0^m H_j$, которое, в свою очередь, является окрестностью множества K .

Итак,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_{m-1} - (1 - \tilde{\omega}_{m-1,n})f_{m-2}\|_{W_p^m(\mathbb{R}^N, w)} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} & \|f_m - (1 - \omega_m)(1 - \tilde{\omega}_{m-1,n})f_{m-2}| W_p^m(\mathbb{R}^N, w)\| \\ & \leq \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha(1 - \omega_m)| L_\infty\| \cdot \|f_{m-1} - (1 - \tilde{\omega}_{m-1,n})f_{m-2}| W_p^m(\mathbb{R}^N, w)\|. \end{aligned}$$

Последнее выражение стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Более того, в силу компактности верно $(1 - \omega_m)(1 - \tilde{\omega}_{m-1,n}) = 0$ в окрестности множества $K \setminus \left(\bigcup_0^{m-2} H_j\right)$, если n достаточно велико. Возвращаясь шаг за шагом, мы получим, что существуют функции $\tilde{\omega}_{k,n_k}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, такие, что $\omega = 1 - (1 - \tilde{\omega}_{0,n_0})(1 - \tilde{\omega}_{1,n_1}) \dots (1 - \tilde{\omega}_{m-1,n_{m-1}})(1 - \omega_m)$ равна единице в окрестности множества K и $\|f\omega| W_p^m(\mathbb{R}^N, w)\| < \varepsilon$. Итак, мы доказали теорему 5.1, за исключением последнего утверждения ($C_{m,p}^w(K) = 0$), которое сформулируем отдельно.

Теорема 5.3 (невесовой случай см., например, [28]). Пусть компакт K из $\mathbb{R}^N$, функция f принадлежит $W_p^m(\mathbb{R}^N, w)$, где $1 < p < \infty$, $mp < N$, $w \in A_p$ и $C_{m,p}^w(K) = 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует функция ω из пространства $W_p^m(\mathbb{R}^N, w)$ такая, что $0 \leq \omega \leq 1$, $\omega = 1$ в некоторой окрестности компакта K , $(1 - \omega)f$ принадлежит $L_\infty(\mathbb{R}^N) \cap W_p^m(\mathbb{R}^N, w)$ и норма $\|f\omega| W_p^m(\mathbb{R}^N, w)\|$ не превосходит ε .

Доказательство. Функция f из пространства $W_p^m(\mathbb{R}^N, w)$ представима в виде потенциала Рисса

$$f(x) = I_m g(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{g(y)}{|x - y|^{N-m}} dy,$$

где плотность $g(y)$ принадлежит весовому пространству $L_p(\mathbb{R}^N, w)$.

Построим функцию ω . Пусть $\lambda > 0$. Множество $\Omega_\lambda = \{x : I_m |g| > 1/\lambda\}$ открыто. Выберем открытое множество e , содержащее K , с емкостью $C_{mp}^w(e) < \lambda^p$, пусть функция $\xi_\lambda|_e = 1$ и $\xi_\lambda|_{\mathbb{R}^N \setminus e} = 0$. Функцию $\lambda I_m |g|$ обозначим через Φ_λ . Таким образом, Φ_λ больше единицы на Ω_λ и $C_{mp}^w(\Omega_\lambda) < \lambda^p$. Положим $\omega_\lambda = H(\Phi_\lambda + \xi_\lambda)$, где H из $C^\infty(\mathbb{R})$, и

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{для } t \leq 1/2, \\ 1 & \text{для } t \geq 1, \end{cases}$$

$0 \leq H(t) \leq 1$, $H(t) = 1$ на $\tilde{\Omega}_\lambda = \Omega_\lambda \cup e$. Тогда $|(1 - \omega_\lambda)f(x)| \leq \lambda^{-1}$, следовательно, $(1 - \omega_\lambda)f(x)$ принадлежит пространству $L_\infty(\mathbb{R}^N)$.

Так как $(\|f| L_p(\mathbb{R}^N, w)\| + \|\nabla^m f| L_p(\mathbb{R}^N, w)\|)$ является эквивалентной нормой в $W_p^m(\mathbb{R}^N, w)$ (см., например, [17]), то для доказательства теоремы достаточно оценить $\|\omega_\lambda f| L_p(\mathbb{R}^N, w)\|$ и норму $\|\nabla^m(\omega_\lambda f)| L_p(\mathbb{R}^N, w)\|$, равную

$$\sum_{j=0}^m \int |\nabla^j \omega_\lambda(x)|^p |\nabla^{m-j} f(x)|^p w(x) dx.$$

При $\lambda \rightarrow 0$ функция ω_λ стремится к нулю для почти всех x , и так как $0 \leq \omega_\lambda \leq 1$, то

$$\|\omega_\lambda f| L_p(\mathbb{R}^N, w)\| \rightarrow 0 \quad \text{при } \lambda \rightarrow 0.$$

Рассмотрим $\int |\nabla^j \omega_\lambda(x)|^p |\nabla^{m-j} f(x)|^p w(x) dx$ для произвольного j , $0 \leq j \leq m$. При $j = 0$ оценка аналогична предыдущему случаю, поэтому будем предполагать $j \geq 1$.

Так как $\nabla^j \omega_\lambda(x)$ обращается в нуль на $\tilde{\Omega}_\lambda$, для оценки $\nabla^{m-j} f(x)$ на $\tilde{\Omega}_\lambda^c$ воспользуемся леммой 1.1. Для почти всех $x \in \tilde{\Omega}_\lambda^c$ имеем

$$\begin{aligned} |\nabla^{m-j} f(x)| &\leq A I_j |g|(x) \leq A (Mg(x))^{1-j/m} (I_m |g|(x))^{j/m} \\ &\leq A (Mg(x))^{1-j/m} \lambda^{-j/m}. \end{aligned}$$

Для $j < m$ на $\tilde{\Omega}_\lambda^c$ получаем аналогичную оценку

$$\begin{aligned} |\nabla^j \Phi_\lambda(x)| &= |\lambda \nabla^j (I_m |g|(x))| \leq A \lambda I_{m-j} |g|(x) \\ &\leq A \lambda (Mg(x))^{j/m} (I_m |g|(x))^{1-j/m} \leq A (Mg(x))^{j/m} \lambda^{j/m}. \end{aligned}$$

Теперь легко оценить $|\nabla^j H \circ \Phi_\lambda(x)|$, используя равенство

$$|D^\beta (H \circ \Phi_\lambda(x))| = \left| \sum_{k=1}^{|\beta|=j} H^{(k)}(\Phi_\lambda(x)) \sum c_\beta D^{\beta_1} \Phi_\lambda(x) \dots D^{\beta_k} \Phi_\lambda(x) \right|,$$

где сумма берется по всем наборам $(\beta_1, \dots, \beta_k)$ таким, что $\sum_{i=1}^k |\beta_i| = j$, $|\beta_i| \geq 1$.

Так как $H^{(k)}(\Phi_\lambda(x)) = 0$, где $\Phi_\lambda(x) > 1$, то из последних двух оценок получаем

$$\begin{aligned} |D^\beta (H \circ \Phi_\lambda(x))| &\leq A (Mg(x))^{(|\beta_1| + \dots + |\beta_k|)/m} \lambda^{(|\beta_1| + \dots + |\beta_k|)/m} \\ &\leq A (Mg(x))^{j/m} \lambda^{j/m}. \end{aligned}$$

В случае $j = m$ выполнена та же самая оценка, исключая член, соответствующий $k = 1$, т. е.

$$|\nabla^m (H \circ \Phi_\lambda(x))| \leq A(\lambda |Mg(x)| + |\nabla^m \Phi_\lambda(x)|) \leq A\lambda(|Mg(x)| + \nabla^m I_m |g|(x)).$$

Таким образом, для $0 < j < m$ имеем

$$|\nabla^j \omega_\lambda| |\nabla^{m-j} f(x)| \leq A |Mg(x)|$$

и

$$|\nabla^m \omega_\lambda| |f(x)| \leq A(|Mg(x)| + \nabla^m I_m |g|(x)).$$

Так как в условиях теоремы $Mg(x)$ принадлежит $L_p(\mathbb{R}^N, w)$, а $\nabla^m I_m |g|(x)$ принадлежит пространству $L_p(\mathbb{R}^N, w)$ по теории сингулярных интегралов (см. [25]), то, следовательно, исходная норма равномерно ограничена независимо от λ . При λ , стремящемся к нулю, $\omega_\lambda \rightarrow 0$ почти всюду. Таким образом, утверждение теоремы вытекает из слабой компактности и теоремы Мазура.

Далее рассмотрим вопросы аппроксимации финитными функциями в весовом пространстве $W_p^m(\Omega, w)$, задачу аппроксимации в L_q решениями вырождающихся эллиптических уравнений и тесно связанную с ней проблему стабильности в весовых пространствах Соболева. Приведем характеристики нигде неплотных множеств, которые являются (m, p, w) -стабильными, и достаточные условия (m, p, w) -стабильности множеств с непустой внутренностью.

§ 6. О плотности финитных функций в весовых пространствах Соболева $W_p^m(\Omega, w)$

Цель настоящего параграфа — получить необходимые и достаточные условия на функцию $f \in W_p^m(\Omega, w)$ для того, чтобы $f \in \overset{\circ}{W}_p^m(\Omega, w)$. (В невесовом случае см. [29].)

Рассмотрим функцию $f \in W_p^m(\Omega, w)$. Положим

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{для } x \in \Omega, \\ 0 & \text{для } x \in \Omega^c. \end{cases}$$

Предположим, что f и все ее производные $D^\alpha f$, $|\alpha| \leq m$, продолженные нулем вне Ω , являются квазинепрерывными функциями.

Функция g , определенная (m, p, w) -квазивсюду в Ω , имеет квазипредел ноль на $\partial\Omega$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество ω с $C_{m,p}^w(\omega) < \varepsilon$ и такое, что для любой точки $y \in \partial\Omega \setminus \omega$ $g(x)$ стремится к нулю при $x \rightarrow y$, $x \in \Omega \setminus \omega$. Сформулированное свойство функции g обозначается символом

$$(m, p, w)\text{-quasi lim } g = 0 \quad \text{на } \partial\Omega.$$

Отметим, что если $f \in W_p^m(\Omega, w)$ и $(m, p, w)\text{-quasi lim } g = 0$ на $\partial\Omega$, то $\tilde{f}$ квазинепрерывна на $\mathbf{R}^N$, и мы имеем следующий результат.

Теорема 6.1. Предположим, что $f \in W_p^m(\Omega, w)$, $1 < p < \infty$. Следующие утверждения эквивалентны:

- (1) $(m - |\alpha|, p, w)\text{-quasi lim } D^\alpha f = 0$ на $\partial\Omega$ для всех α , $0 \leq |\alpha| \leq m - 1$;
- (2) $\tilde{f} \in W_p^m(\mathbf{R}^N, w)$ и $D^\alpha \tilde{f} = (D^\alpha f)^\sim$ для всех α , $0 \leq |\alpha| \leq m$.

Замечание. Импликацию (2) $\implies$ (1) следует понимать так: пусть $F \in W_p^m(\mathbf{R}^N, w)$, обозначим через f сужение $F|_\Omega \in W_p^m(\Omega, w)$. Если f удовлетворяет (2), то выполнено условие (1).

Следствие 6.1. Если $f \in W_p^m(\Omega, w)$, вес $w \in A_p$, $1 < p < \infty$, то условие (1) выполнено тогда и только тогда, когда $f \in \overset{\circ}{W}_p^m(\Omega, w)$. В частности, для $m = 1$

$$(3) \quad f \in \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega, w) \iff (1, p, w)\text{-quasi lim } f = 0 \quad \text{на } \partial\Omega.$$

Доказательство. Сначала установим соотношение (3). Схема та же самая, что и в доказательстве теоремы спектрального синтеза при $m = 1$, $1 < p < \infty$ и $w \equiv 1$ (см., например, [11]).

Достаточно показать импликацию $\Leftarrow$, так как обратное утверждение тривиально. Выберем $\varepsilon > 0$, и пусть ω , $C_{1,p}^w(\omega) < \varepsilon$, — соответствующее исключительное множество такое, что f непрерывна на $\Omega \setminus \omega$ и имеет нулевой предел, как только $x \in \Omega \setminus \omega$ стремится к $y \in \partial\Omega \setminus \omega$. Тогда найдем функцию $\varphi_\varepsilon \in W_p^1(\mathbf{R}^N, w)$ с $\int |\nabla \varphi_\varepsilon|^p w dx < \varepsilon$ такую, что $0 \leq \varphi_\varepsilon \leq 1$ всюду и $\varphi_\varepsilon = 1$ на ω .

Мы можем предположить, что $0 \leq f \leq M < \infty$. Для $\delta > 0$ рассмотрим функцию $f' = f'_\delta = (f - \delta)^+ \in W_p^1(\Omega, w)$. Тогда $F = F_{\varepsilon, \delta} = f'(1 - \varphi_\varepsilon) \in \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega, w)$ и F имеет компактный носитель в Ω , так что $F \in \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega, w)$.

По предположению $\varphi_\varepsilon \rightarrow 0$ по мере. Таким образом, неравенство

$$\|\nabla(f' \varphi_\varepsilon)\|_{L_p(\Omega, w)} \leq M \|\nabla \varphi_\varepsilon\|_{L_p(\Omega, w)} + \|\varphi_\varepsilon \nabla f\|_{L_p(\Omega, w)}$$

показывает, что $f' \varphi_\varepsilon \rightarrow 0$ в $\overset{\circ}{W}_p^1(\Omega, w)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Следовательно, сначала выбирая ε , а затем δ , сходящимися к нулю, мы получаем, что

$$f - F_{\varepsilon, \delta} = f - f'_\delta + f'_\delta \varphi_\varepsilon \rightarrow 0$$

в $\overset{\circ}{W}_p^1(\Omega, w)$, и (3) выполнено.

Вернемся к общему случаю. Пусть $m > 1$ и выполнено (1). Докажем, что условие (2) справедливо в этом случае. Легко видеть, что если $j > 1$, то $C_{1,p}^w(\cdot) \leq AC_{j,p}^w(\cdot)$ (см. доказательство леммы 2.2). Таким образом, $(1, p, w)\text{-quasi lim } g = 0$ на $\partial\Omega$, если $(j, p, w)\text{-quasi lim } g = 0$ на $\partial\Omega$. Следовательно, так же, как и в случае

при $m = 1$, приходим к выводу, что $D^\alpha f \in \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega, w)$ для всех мультииндексов α , $0 \leq |\alpha| \leq m - 1$.

Выберем последовательность функций $\psi_n \in C_0^\infty(\Omega)$ такую, что

$$\|f - \psi_n\|_{W_p^1(\Omega, w)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Для $i = 1, 2, \dots, N$ и для некоторого $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ рассмотрим

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^N} \tilde{f} D_i \varphi &= \int_{\Omega} f D_i \varphi = \lim_n \int_{\Omega} \psi_n D_i \varphi \\ &= \lim_n \left(- \int_{\Omega} D_i \psi_n \varphi \right) = - \int_{\Omega} D_i f \varphi = - \int_{\mathbf{R}^N} (D_i f)^\sim \varphi, \end{aligned}$$

таким образом, $D_i \tilde{f} = (D_i f)^\sim$ почти всюду. Очевидно, что

$$D_i D_j \tilde{f} = D_i [(D_j f)^\sim] = (D_i D_j f)^\sim,$$

и, следовательно, по индукции получаем, что $D^\alpha \tilde{f} = (D^\alpha f)^\sim$ почти всюду для всех мультииндексов α , $|\alpha| \leq m$. Итак, мы показали, что $\tilde{f}$ имеет обобщенные производные до порядка $|\alpha| = m$ включительно, принадлежащие $L_p(\mathbf{R}^N, w)$, следовательно, $\tilde{f} \in W_p^m(\mathbf{R}^N, w)$. По предположению все функции $(D^\alpha f)^\sim$ при всех α , $0 \leq |\alpha| \leq m - 1$, квазинепрерывны, и в силу единственности квазинепрерывного представителя для всех $|\alpha| \leq m - 1$ имеем $D^\alpha \tilde{f} = (D^\alpha f)^\sim$, что и требовалось установить в (2).

Следствие 6.1 вытекает из теоремы о спектральном синтезе.

Рассмотрим (m, p, w) -тонконепрерывные функции [28]. Функция g называется (m, p, w) -тонконепрерывной в точке x , если для произвольного $\varepsilon > 0$ множество

$$\{y : |g(x) - g(y)| \geq \varepsilon\}$$

(m, p, w) -разреженное в точке x . В этой топологии функция g имеет конечный предел λ в точке ξ

$$(m, p, w)\text{-fine } \lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = \lambda,$$

если множество $\{x : |g(x) - \lambda| \geq \varepsilon\}$ (m, p, w) -разреженно в точке ξ для любого $\varepsilon > 0$.

В работе [30] установлено, что свойства функции быть (m, p, w) -квазинепрерывной и (m, p, w) -тонконепрерывной (m, p, w) -квивалентны. Таким образом, имеет место следующая

Теорема 6.2. Пусть $f \in W_p^m(\Omega, w)$, $1 < p < \infty$, и вес $w \in A_p$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (4) $(m - |\alpha|, p, w)\text{-fine } \lim D^\alpha f = 0$ квазивсюду на $\partial\Omega$, для всех мультииндексов α , $0 \leq |\alpha| \leq m - 1$;
- (5) $(m - |\alpha|, p, w)\text{-quasi } \lim D^\alpha f = 0$ на $\partial\Omega$ для всех мультииндексов α , $0 \leq |\alpha| \leq m - 1$;
- (6) $\tilde{f} \in W_p^m(\mathbf{R}^N, w)$ и $D^\alpha \tilde{f} = (D^\alpha f)^\sim$ для всех мультииндексов α , $0 \leq |\alpha| \leq m$;
- (7) $f \in \overset{\circ}{W}_p^m(\Omega, w)$.

Приведенные результаты позволяют обобщить теорему 1.6 следующим образом.

Теорема 6.3. Пусть $G \subset \mathbf{R}^N$ — ограниченная область, $w \in A_2$. Пусть функция u из пространства $W_2^m(G, w)$ есть слабое решение уравнения (1.7) в G и $(m - |\alpha|, 2, w)\text{-quasi } \lim D^\alpha u = 0$ на ∂G для всех мультииндексов α , $0 \leq |\alpha| \leq m - 1$. Тогда u равна нулю в области G .

§ 7. Аппроксимация в L_q слабыми решениями
вырождающихся эллиптических уравнений
и проблема (m, p, w) -стабильности

Рассмотрим вырождающееся полигармоническое уравнение

$$P(x, D)u(x) = \sum_{|\alpha|=m} (-1)^m \frac{m!}{\alpha_1! \dots \alpha_N!} \frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}} \left(w(x) \frac{\partial^\alpha u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}} \right) = 0, \quad (7.1)$$

которое имеет фундаментальное решение $g(x, y)$. Это можно установить методом работы [31]. Пусть оператор $P(x, D)$ определен в области $\Omega \subset \mathbf{R}^N$. Пусть еще $\omega \subset \Omega$ — открытое множество, обозначим через $\mathcal{N}(\omega, w)$ пространство обобщенных функций u , определенных в ω и удовлетворяющих в области ω однородному уравнению $P(x, D)u(x) = 0$ в слабом смысле, т. е. для любой функции $\varphi \in \dot{W}_2^m(\omega, w)$ справедливо равенство

$$\sum_{|\alpha|=m} \int_{\omega} \frac{m!}{\alpha_1! \dots \alpha_N!} \frac{\partial^\alpha u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}} \frac{\partial^\alpha \varphi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}} w(x) dx = 0. \quad (7.2)$$

Если K — компактное подмножество Ω , то через $\mathcal{N}(K, w)$ обозначим множество обобщенных функций, определенных и удовлетворяющих в окрестности K уравнению (7.2). Определим

$$\mathcal{N}_2(K^\circ, w) \stackrel{\text{def}}{=} L_2(F, w) \cap \mathcal{N}(F^\circ, w)$$

как множество функций $u \in L_2(K, w)$, удовлетворяющих (7.2) внутри K . Если $K \subset \Omega$ — компакт, тогда очевидно, что $\mathcal{N}(K, w) \subset \mathcal{N}_2(K, w)$.

В настоящем параграфе мы обсудим условия на компакт K , при которых множество решений (7.2) в окрестности K плотно в $\mathcal{N}_2(K, w)$ в норме $L_2(K, w)$ (невесовой случай см. в [4]).

Кроме того, в этом параграфе установлено, что задача аппроксимации в L_2 эквивалентна проблеме $(m, 2, w)$ -стабильности и не зависит от дифференциального оператора $P(x, D)$ и открытого множества Ω , на котором он определен.

Напомним, что множество K называется (m, p, w) -стабильным, если пространство $C_0^\infty(K^\circ)$ плотно в $\dot{W}_p^m(K, w)$.

Теперь мы можем сформулировать основной результат.

Теорема 7.1. Пусть $P(x, D)$ — вырождающийся эллиптический оператор порядка $2m$, определенный соотношением (7.1) в области Ω . Тогда если $K \subset \Omega$ — компакт, то следующие утверждения эквивалентны:

- (1) $\mathcal{N}(K, w)$ плотно в $\mathcal{N}_2(K, w)$;
- (2) $C_0^\infty(K^\circ)$ плотно в $\dot{W}_2^m(K, w)$;
- (3) $C_0^\infty(\mathbf{R}^N \setminus K)$ плотно в $W_2^m(\mathbf{R}^N \setminus K^\circ, w)$;
- (4) $(u, f) = 0$ для всех $u \in W_2^m(\mathbf{R}^N \setminus K^\circ, w)$ и функций $f \in \dot{W}_2^m(K, w)$.

Положим

$$A_2(K, w) \stackrel{\text{def}}{=} \{f : f/w \in L_2(K, w), (f, u) = 0 \text{ для всех } u \in \mathcal{N}(K, w)\}.$$

Для доказательства теоремы 7.1 потребуется следующая

Лемма 7.1. Пусть $K \subset \Omega$ — компакт, тогда отображение

$$P^*(x, D) : \dot{W}_2^m(K, w) \rightarrow A_2(K, w)$$

биективно.

Доказательство. Если функция v принадлежит $\mathring{W}_2^m(K, w)$, то для любой функции $u \in \mathcal{N}(K, w)$ необходимо доказать равенство

$$(u, P^*(x, D)v) = (P(x, D)u, v) = 0.$$

Для любой $u \in \mathcal{N}(K, w)$ существует открытая окрестность U_u множества K такая, что

$$\sum_{|\alpha|=m_{U_u}} \int \frac{m!}{\alpha_1! \dots \alpha_N!} \frac{\partial^\alpha u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}} \frac{\partial^\alpha v}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}} w(x) dx = 0$$

для любой функции $v \in \mathring{W}_2^m(U_u, w)$. Таким образом, если $\tilde{v} \in \mathring{W}_2^m(K, w)$, то $\text{supp } \tilde{v} \subset K \subset U_u$, и, следовательно, $\tilde{v} \in \mathring{W}_2^m(U_u, w)$. Получаем равенство

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha|=m_{U_u}} \int \frac{m!}{\alpha_1! \dots \alpha_N!} \frac{\partial^\alpha u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}} \frac{\partial^\alpha v}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}} w(x) dx \\ = \sum_{|\alpha|=m_K} \int \frac{m!}{\alpha_1! \dots \alpha_N!} \frac{\partial^\alpha u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}} \frac{\partial^\alpha v}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}} w(x) dx = 0 \end{aligned}$$

для любой функции $\tilde{v} \in \mathring{W}_2^m(K, w)$.

Итак, мы установили, что отображение $P^*(x, D): \mathring{W}_2^m(K, w) \rightarrow A_2(K, w)$ взаимно-однозначно. Покажем, что это есть отображение «на».

Пусть $f \in A_2(K, w)$. Рассмотрим функцию $\tilde{f} = \int_K g(x, y) f(y) dy$. Тогда $\tilde{f}$ — обобщенное решение уравнения

$$P^*(x, D)\tilde{f} = P(x, D)\tilde{f} = f(x).$$

Действительно, для любой функции $v \in C_0^\infty(K^\circ)$ получаем

$$\begin{aligned} \int_{R^N} P^*(x, D)\tilde{f} v(x) dx &= \int_{R^N} \int_K P(x, D)g(x, y)v(x) dx f(y) dy \\ &= \int_K \int_K \delta_y v(x) dx f(y) dy = \int_K v(y)f(y) dy, \end{aligned}$$

носитель функции $\tilde{f}$ содержится в множестве K . Таким образом, $\tilde{f} \in \mathring{W}_2^m(K, w)$.

Доказательство теоремы 7.1. Предположим, что U и V — подпространства банахова пространства B и $U \subset V$. По следствию теоремы Хана — Банаха U плотно в V тогда и только тогда, когда каждый линейный функционал на B , который является аннулятором U , является также аннулятором множества V . (На этом заключении основано доказательство каждой части теоремы.)

Докажем импликацию (1) $\Rightarrow$ (2). Предположим, что $\mathcal{N}(K, w)$ плотно в $\mathcal{N}_2(K, w)$, покажем, что $C_0^\infty(K^\circ)$ плотно в $\mathring{W}_2^m(K, w)$. Действительно, в силу предыдущей леммы достаточно показать, что $P^*(x, D)C_0^\infty(K^\circ)$ плотно в множестве $P^*(x, D)\mathring{W}_2^m(K, w) = A_2(K, w)$.

Предположим, что функция $f \in L_p(K, w)$ удовлетворяет уравнению

$$(f, P^*(x, D)\varphi) = 0$$

для всех $\varphi \in C_0^\infty(K^\circ)$, тогда $P(x, D)f = 0$ на K° . Следовательно, $f \in \mathcal{N}_2(K, w)$. Так как по предположению $\mathcal{N}(K, w)$ плотно в $\mathcal{N}_2(K, w)$, то существует последовательность $\{f_i\} \subset \mathcal{N}(K, w)$, сходящаяся к f в $L_2(K, w)$. Таким образом, если

$u \in A_2(K, w)$, то получаем, что $(f, u) = \lim_{i \rightarrow \infty} (f_i, u) = 0$, где $(f, u) = \int_K f(x)u(x) dx$.

Другими словами, аннулятор f пространства $P^*(x, D)C_0^\infty(K^\circ)$ является также аннулятором для множества $P^*(x, D)\overset{\circ}{W}_2^m(K, w) = A_2(K, w)$. Следовательно, пространство $C_0^\infty(K^\circ)$ плотно в $\overset{\circ}{W}_2^m(K, w)$.

Покажем (2) $\implies$ (1). Пусть $f \in L_p(K, w)$ и $(f, u) = 0$ для всех $u \in \mathcal{N}(K, w)$. Тогда функция f принадлежит $A_2(K, w)$. Таким образом, в силу справедливости (2) и леммы 7.1 получаем, что существует последовательность $\varphi_n \in C_0^\infty(K^\circ)$ такая, что $P^*(x, D)\varphi_n$ сходится к f в $L_2(K, w)$. Тогда если $u \in \mathcal{N}_2(K, w)$, то получаем цепочку равенств

$$(f, u) = \lim_{n \rightarrow \infty} (P^*(x, D)\varphi_n, u) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi_n, P(x, D)u) = 0.$$

Таким образом, установлено, что f является аннулятором и для $\mathcal{N}_2(K, w)$, а значит, $\mathcal{N}(K, w)$ плотно в $\mathcal{N}_2(K, w)$.

Покажем эквивалентность (2) и (3). Рассмотрим

$$\overset{\circ}{W}_2^m(K, w) = \{u \in W_2^m(\mathbf{R}^N, w) : (u, \varphi) = 0 \text{ для всех } \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N \setminus K)\}.$$

Очевидно, что $C_0^\infty(\mathbf{R}^N \setminus K)$ плотно в

$$\left(\overset{\circ}{W}_2^m(K, w)\right)^\perp = \left\{f \in W_2^{-m}(\mathbf{R}^N, w) : (f, u) = 0 \text{ для всех } u \in \overset{\circ}{W}_2^m(K, w)\right\},$$

так как $\overset{\circ}{W}_2^m(K, w)$ является аннулятором как для $C_0^\infty(\mathbf{R}^N \setminus K)$, так и для $\left(\overset{\circ}{W}_2^m(K, w)\right)^\perp$. Более того,

$$\begin{aligned} \left(\overset{\circ}{W}_2^m(K, w)\right)^\perp &\subset W_2^{-m}(\mathbf{R}^N \setminus K^\circ, w) \\ &= \{f \in W_2^{-m}(\mathbf{R}^N, w) : (f, \varphi) = 0 \text{ для всех } \varphi \in C_0^\infty(K^\circ)\}. \end{aligned}$$

Следовательно, $C_0^\infty(\mathbf{R}^N \setminus K)$ плотно в $W_2^{-m}(\mathbf{R}^N \setminus K^\circ, w)$ тогда и только тогда, когда $\left(\overset{\circ}{W}_2^m(K, w)\right)^\perp = W_2^{-m}(\mathbf{R}^N \setminus K^\circ, w)$. Обратно, $\left(\overset{\circ}{W}_2^m(K, w)\right)^\perp = W_2^{-m}(\mathbf{R}^N \setminus K^\circ, w)$ тогда и только тогда, когда $C_0^\infty(K^\circ)$ плотно в $\overset{\circ}{W}_2^m(K, w)$.

Докажем (2) $\implies$ (4). Итак, если (2) верно, то для любой функции $f \in \overset{\circ}{W}_2^m(K, w)$ существует последовательность $\varphi_n \in C_0^\infty(K^\circ)$, сходящаяся к f в $L_2(K, w)$ и такая, что для каждой функции u , принадлежащей пространству $W_2^{-m}(\mathbf{R}^N \setminus K^\circ, w)$, верно соотношение

$$(u, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} (u, \varphi_n) = 0.$$

Докажем (4) $\implies$ (2). Предположим, что (2) не имеет места, тогда существуют $u \in W_2^{-m}(\mathbf{R}^N \setminus K^\circ, w)$ и $f \in \overset{\circ}{W}_2^m(K, w)$ такие, что $(u, f) \neq 0$. При этом $(u, \varphi) = 0$ для всех $\varphi \in C_0^\infty(K^\circ)$ (т. е. $C_0^\infty(K^\circ)$ не плотно в $\overset{\circ}{W}_2^m(K, w)$). Тогда по свойству (4) u принадлежит $W_2^{-m}(\mathbf{R}^N \setminus K^\circ, w)$ и, следовательно, $(u, f) = 0$ для каждой функции $f \in \overset{\circ}{W}_2^m(K, w)$. Тем самым доказательство теоремы 7.1 завершено.

§ 8. Необходимые и достаточные условия стабильности компакта K в весовом пространстве Соболева W_p^m

Приведем пример (m, p, w) -стабильного множества K . Пусть K — нигде не плотное множество. Тогда $K^\circ = \emptyset$ и $C_0^\infty(K^\circ) = \{0\}$. По этой причине $C_0^\infty(K^\circ)$ плотно в $\dot{W}_2^m(K, w)$ тогда и только тогда, когда $\dot{W}_2^m(K, w) = \{0\}$. Таким образом, если весовое пространство Соболева W_p^m вложено в пространство непрерывных функций C , то $\dot{W}_2^m(K, w) = \{0\}$, только если $K^\circ = \emptyset$.

Теорема 8.1. Компакт K — (m, p, w) -стабильный тогда и только тогда, когда каждая функция $f \in W_p^m(\mathbf{R}^N, w)$, равная нулю на K^c , удовлетворяет соотношениям $D^\alpha f|_{\partial K} = 0$ для всех α , $0 \leq |\alpha| \leq m-1$.

Доказательство. Теорема 8.1 вытекает из теоремы спектрального синтеза.

Теорема 8.2. Компакт K — (m, p, w) -стабильный, если множество K^c (k, p, w) -плотно (k, p, w) -квазивсюду на ∂K для всех k , $k = 1, 2, \dots, m$.

Доказательство. Если дополнение K^c (k, p, w) -плотно (k, p, w) -квазивсюду на ∂K для всех $k = 1, 2, \dots, m$, то по определению (k, p, w) -разреженности множества K^c и $(K^\circ)^c$ (k, p, w) -разрежены в одних и тех же точках ∂K , следовательно, по определению емкости получаем, что $C_{k,p}^w(U \setminus K) = C_{k,p}^w(U \setminus K^\circ)$ для всех открытых U (так как емкостной потенциал для $U \setminus K$ равен единице (k, p, w) -квазивсюду на $U \setminus K^\circ$ (см., например, [30])). Применение теоремы 8.3 завершает доказательство.

Теорема 8.3. Компакт K — (m, p, w) -стабильный, если существует постоянная $\eta > 0$ такая, что

$$C_{k,p}^w(U \setminus K) \geq \eta C_{k,p}^w(U \setminus K^\circ)$$

для $k = 1, 2, \dots, m$ и всех открытых множеств U .

Доказательство. Пусть $C_{k,p}^w(U \setminus K) \geq \eta C_{k,p}^w(U \setminus K^\circ)$ для всех квазиоткрытых множеств U , в частности для множеств вида $U = \{x : |f(x)| > 0\}$ для каждой $f \in W_p^m$. Рассмотрим функцию f , принадлежащую пространству $\dot{W}_2^m(K, w)$, т. е. $D^\alpha f(x) = 0$ на K^c для всех α , $0 \leq |\alpha| \leq m-1$. Тогда $\eta C_{k,p}^w(U \setminus K^\circ) \leq C_{k,p}^w(U \setminus K) = 0$ для всех $k = 1, 2, \dots, m$ и, следовательно, $|D^\alpha f(x)| = 0$ на ∂K $(m - |\alpha|, p, w)$ -квазивсюду, что и требовалось установить.

ЗАМЕЧАНИЕ. К теме данной статьи следует отнести работу [32], в которой систематически изложена теория весовых пространств Соболева. В частности, в этой работе исследуется спектральный синтез в весовых пространствах Соболева в предположении равномерной $(1, p, w)$ -плотности рассматриваемого компакта. Ситуация, изученная в работе [32], соответствует § 3 настоящей статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1950.
2. Соболев С. Л. Плотность финитных функций в пространстве $L_p^{(m)}(E_n)$ // Сиб. мат. журн. 1963. Т. 4, № 3. С. 673–684.
3. Соболев С. Л. Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.
4. Polking J. C. Approximation in L_p by solutions of elliptic partial differential equations // Amer. Math. J. 1972. V. 94. P. 1231–1244.
5. Буренков В. И. О приближении функций из пространств $W_p^r(\Omega)$ финитными функциями для произвольного открытого множества Ω // Тр. Мат. ин-та / АН СССР. 1974. Т. 131. С. 51–63.
6. Hedberg L. I. Non-linear potentials and approximation in the mean by analytic functions // Math. Z. 1972. Bd 129. S. 299–319.

7. Hedberg L. I. Approximation in the mean by solutions of elliptic equations // Duke Math. J. 1973. V. 40. P. 9–16.
8. Hedberg L. I. Two approximation problems in function spaces // Ark. Mat. 1978. V. 16. P. 51–81.
9. Hedberg L. I. Spectral synthesis in Sobolev spaces, and Uniqueness of solutions of the Dirichlet problem // Acta Math. 1981. V. 147. P. 237–264.
10. Beurling A., Deny J. Dirichlet spaces // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1959. V. 45. P. 208–215.
11. Bagby T. Quasi-topologies and rational approximation // J. Func. Anal. 1972. V. 10. P. 259–268.
12. Hedberg L. I. Spectral synthesis and Stability in Sobolev spaces. Berlin etc.: Springer, 1980. P. 73–103. (Lecture Notes in Math.; N 779).
13. Тарханов Н. Н. Аппроксимация на компактах решениями систем с сюръективным символом. Красноярск, 1989. 55 с. (Препринт / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т физики им. Л. В. Киренского; № 48, М).
14. Бесов О. В. О плотности финитных функций в весовом пространстве С. Л. Соболева // Тр. Мат. ин-та / АН СССР. 1983. Т. 161. С. 29–47.
15. Водопьянов С. К. L_p -теория потенциала и квазиконформные отображения на однородных группах // Тр. Ин-та математики / АН СССР. Сиб. отд-ние. 1989. Т. 14: Современные проблемы геометрии и анализа. С. 45–89.
16. Келдыш М. В. О разрешимости и устойчивости задачи Дирихле // Успехи мат. наук. 1940. Т. 8. С. 171–231.
17. Nieminen E. Hausdorff measures, capacities, and Sobolev spaces with weights. Helsinki, 1991. 39 p. (Preprint / University of Helsinki. Ser. A 1. Math. dissertations; N 81).
18. Meyers N. G. A theory of capacities for potentials of functions in Lebesgue classes // Math. Scand. 1970. V. 26, N 2. P. 255–292.
19. Adams D. R. Weighted nonlinear potential theory // Trans. Amer. Math. Soc. 1986. V. 297, N 1. P. 73–94.
20. Водопьянов С. К. Весовая L_p -теория потенциала на однородных группах // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, № 2. С. 29–48.
21. Carlsson A. A Note on Spectral Synthesis. Linköping, 1993. 5 p. (Preprint / Linköping University, LiTH-MAT-R-93-03).
22. Нетрусов Ю. В. Спектральный синтез в пространствах гладких функций // Докл. РАН. 1992. Т. 325, № 5. С. 923–925.
23. Мазья В. Г. Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985.
24. Буренков В. И. О плотности бесконечно дифференцируемых функций в пространствах Соболева для произвольного открытого множества // Тр. Мат. ин-та / АН СССР. 1974. Т. 131. С. 39–50.
25. Coifman R., Fefferman C. Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals // Studia Math. 1974. V. 5. P. 241–250.
26. Seng-Kee Chua. Extension theorems on weighted Sobolev spaces // Indiana Math. J. 1992. V. 41, N 4. P. 1027–1076.
27. Kilpeläinen T. Weighted Sobolev spaces and capacity // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI. Math. 1994. V. 19, N 1. P. 95–115.
28. Webb J. R. L. Boundary value problems for strongly nonlinear elliptic equations // J. London Math. Soc. 1980. V. 21, N 2. P. 123–132.
29. Kolsrud T. A uniqueness theorem for higher order elliptic partial differential equations // Stockholm Univ. Math. Dept. Report. 1981. N 9.
30. Водопьянов С. К. Разреженные множества в весовой теории потенциала и вырождающиеся эллиптические уравнения // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 1. С. 28–36.
31. Fabes E., Jerison D., Kenig C. The Wiener test for degenerate elliptic equations // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1982. V. 32, N 3. P. 151–182.
32. Turesson B. O. Nonlinear potential theory and Weighted Sobolev Spaces. Linköping (Sweden): Linköping Univ., 1995. Dissertations; N 387.