УДК 517.518.234

ОБРАТИМАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА СЛЕДОВ ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА НА КУСОЧНО-ГЛАДКОЙ ГРАНИЦЕ ПЛОСКОЙ ОБЛАСТИ*)

М. Ю. Васильчик

Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ — некоторая область с границей ∂G. В данной статье мы рассматриваем задачу о следах функций из пространства Соболева $W_p^l(G)$ на границе ∂G в следующей постановке. Пусть $l \geqslant 1$, и пусть N — единичный вектор нормали на ∂G, направленный внутрь области G. Спрашивается, каким условиям должны удовлетворять определенные на ∂G функции $f_0, f_1, \dots, f_{l-1}$, чтобы быть следами соответствующих производных по нормали некоторой функции F из $W_p^l(G)$, т. е. чтобы выполнялись равенства

$$\left.\frac{\partial^k F}{\partial N^k}\right|_{\partial G} = f_k, \quad k = 0, 1, \dots, l-1. \tag{0.1.}$$

Если граница области достаточно гладкая, то, как известно (см., например, [1]), задача полностью решена. Необходимыми и достаточными условиями того, что для функций $f_0, f_1, \dots, f_{l-1}$ найдется функция $F \in W_p^l(G)$ такая, что выполняются равенства (0.1), является принадлежность функций f_k соответствующим пространствам Бесова на ∂G.

Если граница области кусочно-гладкая, то решение задачи о следах в вышеприведенной форме существенно зависит от геометрических свойств области.

Не претендуя на полноту, отметим здесь некоторые результаты, относящиеся преимущественно к плоскому случаю. Для пространств $W_p^1(G)$ описание следов для области с липшицевой границей следует из работы Гальярдо [2]. Случай области с кусочно-гладкой липшицевой границей изучался в работах [3, 4]. В работах [5–7] рассматривалась задача о следах для областей с кусочно-гладкой границей, имеющей пики (в вершине пика угол между гладкими участками границы равен нулю) (см. также [8] и приведенную там литературу). В работе [7] получены необходимые и достаточные условия на след функции из $W_p^l(G)$ на границе ∂G. Следы производных по нормали в [7] не рассматривались.

Настоящая работа продолжает исследования, начатые в [7]. Здесь мы получаем обратимую характеристику следов функций и их производных по некасательному направлению для областей в $\mathbb{R}^2$ с конечным числом точек на границе, являющихся вершинами углов, направленными во внешность области, нулевыми или нет.

§ 1. Предварительные сведения. Формулировка результатов

Определим некоторые функциональные пространства, необходимые нам в дальнейшем.

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета РФ по образованию (грант 94-1.2-134 в области фундаментального естествознания).

Пусть далее ξ — неотрицательная измеримая на интервале (a,b) функция. Обозначим через $L_{p,\xi}(a,b)$ множество измеримых на (a,b) функций f таких, что

$$\|f\|_{p,\xi,(a,b)} = \left\{ \int\limits_a^b |f(t)|^p \xi(t)\,dt \right\}^{1/p} < \infty.$$

Если k — натуральное число, то через $W^k_{p,\xi}(a,b)$ обозначается класс функций f, имеющих на (a,b) обобщенные производные $f^{(j)} = \frac{d^j f}{dt^j}$ до порядка k включительно и для которых конечна величина

$$\|f\|_{W^k_{p,\xi}(a,b)} = \sum_{j=0}^{k} \|f^{(j)}\|_{p,\xi,(a,b)}.$$

Для f, определенной на (a,b), обозначим через $\Delta(f,s,t)$ разность $f(s)-f(t)$ в том случае, если $[s,t] \subset (a,b)$. Если же $[s,t] \not\subset (a,b)$, то $\Delta(f,s,t) = 0$. Пусть $\beta > 0$ — нецелое число, $m = [\beta]$ — целая часть β, $r = \beta - m$, и пусть $1 \leqslant p < \infty$. Обозначим через $B^\beta_{p,\xi}(a,b)$ класс функций f из $W^m_{p,\xi}(a,b)$ таких, что конечна величина

$$\|f\|_{B^\beta_{p,\xi}(a,b)} = \|f\|_{W^m_{p,\xi}(a,b)} + \left\{ \int\limits_a^b ds \int\limits_0^{\xi(s)} \frac{|\Delta(f^{(m)}, s+\tau, s)|^p}{\tau^{rp+1}}\,d\tau \right\}^{1/p}.$$

Если $\xi(t) \equiv 1$, то пространства $W^k_{p,\xi}(a,b)$ и $B^\beta_{p,\xi}(a,b)$ становятся обычными пространствами Соболева $W^k_p(a,b)$ и Бесова $B^\beta_p(a,b)$ соответственно.

Определим пространства на гладких кривых. Пусть $\Gamma \subset R^2$ — кривая, задаваемая параметризацией $\lambda : t \to (x_1(t), x_2(t))$, $a < t < b$, $x_i \in C^l([a,b])$, где l — некоторое натуральное число. Пусть $S_{p,\xi}$ — какое-либо из пространств $L_{p,\xi}$, $W^l_{p,\xi}$, $B^\beta_{p,\xi}$. Будем говорить, что $f \in S_{p,\xi}(\Gamma)$, если $f \circ \lambda \in S_{p,\xi}(a,b)$. Полагаем

$$\|f\|_{S_{p,\xi}(\Gamma)} = \|f \circ \lambda\|_{S_{p,\xi}(a,b)}.$$

Введем в рассмотрение области, для которых устанавливаются основные результаты работы. Предполагается, что на плоскости зафиксирована декартова прямоугольная система координат.

Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ — некоторая область с границей ∂G, и пусть m — некоторое натуральное число. Точку $M \in \partial G$ будем называть m-регулярной, если существует окрестность $O(M)$ точки M такая, что в некоторой локальной системе координат x_1 и x_2 с началом в M, получаемой из фиксированной в $\mathbb{R}^2$ движением, часть границы $\partial G \cap O(M)$ имеет вид $\{x = (x_1, x_2) : |x_1| < a,\ x_2 = \zeta(x_1)\}$, где $a > 0$ — некоторое число, $\zeta \in C^m([a,b])$ и, кроме того, для некоторого числа $h > 0$ $\{x = (x_1,x_2) : |x_1| < a,\ \zeta(x_1) < x_2 < \zeta(x_1) + h\} \subset G \cap O(M)$. Точки, не являющиеся m-регулярными, называем *угловыми*. Будем говорить, что граница ∂G ограниченной области является кусочно-C^m-гладкой, если на ∂G существует конечное число угловых точек $M_1, M_2, \ldots, M_k$, а все точки множества $\partial G \setminus \{M_1, M_2, \ldots, M_k\}$ являются m-регулярными.

Опишем теперь тип угловых точек, рассматриваемых в данной статье. Будем здесь рассматривать только вершины внешних углов. Более точно, пусть $M \in \partial G$ — угловая точка. Существуют такие единичные взаимно ортогональные векторы $\bar{e}$ и $\bar{v}$ и такая окрестность $O(M)$ точки M, что все точки $y \in O(M) \cap G$ имеют вид

$$y = M + t\bar{e} + s\bar{v}, \tag{1.1}$$

где для некоторого $a > 0$

$$0 < t < a, \quad \varphi_1(t) < s < \varphi_2(t), \tag{1.2}$$

причем функции φ_1 и φ_2 принадлежат $C^m([0,a])$ и для них выполняются условия

$$\lim_{t\to+0} \varphi_i(t) = 0, \quad i = 1,2; \tag{1.3}$$

если $0 < \varphi_1(t) < \varphi_2(t)$ при $0 < t < a$, то $\varphi_i'(t) > 0$ и

$$\lim_{t\to+0} \varphi_1'(t) < 1/2; \tag{1.4}$$

если $\varphi_1(t) < \varphi_2(t) < 0$, то $\varphi_i'(t) < 0$, $i = 1,2$, и

$$\lim_{t\to+0} \varphi_2'(t) > -1/2; \tag{1.5}$$

если $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, то для некоторой постоянной $C < \infty$ выполняется

$$0 < \varphi'(t) \leqslant C, \quad 0 < t < a. \tag{1.6}$$

Случай $\lim\limits_{t\to+0} \varphi'(t) = 0$ не исключается.

Поскольку случай $\varphi_1(t) < \varphi_2(t) < 0$ сводится к случаю $\varphi_2(t) > \varphi_1(t) > 0$ переменой направления вектора v на противоположное, далее мы ограничиваемся только случаем, когда $\varphi_2(t) > 0$ при $0 < x_1 < a$.

Очевидно, что движением можно получить такую локальную систему координат x_1 и x_2 с началом в M, что для некоторой окрестности $O(M)$ точки M область $O(M) \cap G$ будет в этой системе иметь вид

$$P = \{x = (x_1, x_2) : 0 < x_1 < a,\ \varphi_1(x_1) < x_2 < \varphi_2(x_1)\}. \tag{1.7}$$

Пусть l — некоторое натуральное число. Далее везде границу области G считаем кусочно-C^{l+1}-гладкой. Пусть $M_1, M_2, \dots M_K$ — все угловые точки на ∂G и γ_j — C^{l+1}-гладкая часть границы ∂G, соединяющая соседние точки M_j и M_{j+1}, $1 \leqslant j \leqslant K$. Далее мы будем считать, что M_{K+1} — это точка M_1, и если точка M_j соединяет две гладкие дуги γ_{j-1} и γ_j, то при $j = 1$ γ_0 — это γ_K.

На каждой кривой γ_j рассмотрим единичное векторное поле $N_j = \{\cos\omega_j, \sin\omega_j\}$ класса C^l такое, что если $\bar n_j$ — единичный вектор внутренней нормали на γ_j, то всюду на γ_j для скалярного произведения $(\bar n_j, N_j)$ выполняется

$$(\bar n_j, N_j) \geqslant \varkappa_0 > 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant K, \tag{1.8}$$

где $\varkappa_0$ — некоторое фиксированное число.

Если функция $F(x)$ дифференцируема достаточное число раз в окрестности γ_j, то в точках γ_j определены производные от F по направлению N_j:

$$\left.\frac{\partial^k F}{\partial N_j^k}\right|_{\gamma_j} = \sum_{m=0}^{k} C_k^m (\cos\omega_j)^m (\sin\omega_j)^{k-m} \left.\frac{\partial^k F}{\partial x_1^m \partial x_2^{k-m}}\right|_{\gamma_j}.$$

Для того чтобы ввести нужные нам величины и сформулировать основные результаты, необходима следующая

Лемма 1. *Пусть l — натуральное число, и пусть функции $c(t)$, $s(t)$, $\psi(t)$ принадлежат $C^l([0,a])$, причем $s(t) - c(t)\psi'(t) \geqslant \varkappa_0 > 0$ при $0 \leqslant t \leqslant a$, где $\varkappa_0$ — некоторое фиксированное число. Тогда для любой системы функций $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_{l-1}$ такой, что $\zeta_j \in C^{l-j}([0,a])$ при $0 \leqslant j \leqslant l-1$, система обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$\zeta_k = \sum_{m=0}^{k} C_k^m c^m s^{k-m} \sum_{r=k-m}^{l-1} \alpha_r^{(m)} \frac{\psi^{r-k+m}}{(r-k+m)!}, \quad k = 0,1,\dots,l-1, \tag{1.9}$$

однозначно разрешима относительно функций $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{l-1}$ *и решение дается равенствами*

$$\alpha_j = \sum_{r=j}^{l-1} (-1)^{r-j} L_r \frac{\psi^{r-j}}{(r-j)!}, \quad j = 0, 1, \ldots, l-1, \tag{1.10}$$

где функции $L_r(t) = L_r(t, \bar{\zeta}) = L_r(t, \zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_r)$ *линейно зависят от наборов функций* $\bar{\zeta} = \{\zeta_i\}_{i=0}^{l-1}$

$$L_r = \sum_{j=0}^{r} \sum_{i=0}^{r-j} b_{(r)i,j}(t) \zeta_j^{(i)} + (s - \psi' c)^{-r} \zeta_r. \tag{1.11}$$

Коэффициенты $b_{(r)i,j} \in C^{l-r}([0, a])$, *причем* $b_{(r)0,0} = 0$.

Функции L_r *можно вычислить с помощью рекуррентных соотношений*

$$L_0 = \zeta_0,$$

$$L_r = \frac{1}{(s - c\psi')^r} \left[\zeta_r - \sum_{m=1}^{r} C_r^m c^m s^{r-m} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\psi^i}{i!} R^{(m)}_{(r)r-m+i} \right], \tag{1.12}$$

$$R_{(r)j} = \sum_{i=1}^{r-j-1} (-1)^i L_{i+j} \frac{\psi^i}{i!} \tag{1.13}$$

при $0 \leqslant r \leqslant l-1$, $0 \leqslant j \leqslant r-1$.

Лемма 1 доказывается в § 2. Приведем здесь выражения для L_r, когда функции $c(t) = c$ и $s(t) = s$ постоянны и $\psi(t) = kt$, где k — постоянная. Положим $\sigma = s - kc$, тогда

$$L_r = \frac{1}{\sigma^r} \sum_{i=0}^{r} (-1)^i C_r^i c^i \zeta_{r-i}^{(i)}.$$

Пусть M — угловая точка и пересечение некоторой окрестности $O(M)$ с G имеет вид (1.1)–(1.2). Условия (1.3)–(1.6) считаем выполненными. Пусть на кривых $\Gamma_i = \{y \in \mathbb{R}^2 : y = M + t\bar{e} + \varphi_i(t)\bar{v},\ 0 < t < a\}$ заданы системы функций $\bar{\mu}_{(i)} = \{\mu_{(i)j}\}_{j=0}^{l-1}$, $i = 1, 2$, причем $\mu_{(i)j} \circ \lambda_i \in C^{l-j}(0, a)$, где λ_i — параметризация Γ_i. Далее мы для краткости будем писать $\mu_{(i)j}(t)$ вместо $\mu_{(i)j} \circ \lambda_i(t)$. То же относится и к другим функциям, определенным на Γ_i.

Пусть $L_{(i)r}(t, \bar{\mu}_{(i)})$ — функции (1.11), вычисленные для $c = \cos\omega_i$, $s = \sin\omega_i$, $\psi = \varphi_i$, $\zeta_j = \mu_{(i)j}$, $0 \leqslant j \leqslant l-1$, $i = 1, 2$ (см. лемму 1). Полагаем для $0 \leqslant r + n \leqslant l-1$, $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$,

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{r,n}(t) &= \mathfrak{M}_{r,n}(t, \bar{\mu}_{(1)}, \bar{\mu}_{(2)}) \\ &= L^{(n)}_{(2)r}(t, \bar{\mu}_{(2)}) - \sum_{i=0}^{n} C_n^i \sum_{m=r}^{l-i-1} L^{(i)}_{(1)m}(t, \bar{\mu}_{(1)}) \left[\frac{\varphi(t)^{m-r}}{(m-r)!} \right]^{(n-i)}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

При $n = 0$ пишем просто $\mathfrak{M}_r$. Полагаем далее

$$E_k = \sum_{i=0}^{l-k-1} \|\varphi^{k+i-l} \mathfrak{M}_{k,i}\|_{p,\varphi,(0,a)}, \quad 0 \leqslant k \leqslant l-1, \tag{1.15}$$

$$\Lambda = \Lambda(\bar{\mu}_{(1)}, \bar{\mu}_{(2)}) = \sum_{k=0}^{l-1} \left\{ \sum_{i=1}^{2} \|\mu_{(i)k}\|_{B^{l-k-1/p}_{p,\varphi}(\Gamma_i)} + E_k \right\}. \tag{1.16}$$

Рассмотрим систему окрестностей $\{U_i\}_{i=1}^{T}$, удовлетворяющую следующим условиям:

(1) $\partial G \subset \bigcup\limits_{i=1}^{T} U_i$.

(2) Если M_j — угловая точка, то $M_j \in U_j$, $1 \leqslant j \leqslant K$, и окрестность U_j не содержит других угловых точек.

(3) Для $1 \leqslant j \leqslant K$ область $U_j \cap G$ состоит из точек $y = (y_1, y_2)$ вида (1.1) с $\varphi_{(j)1}$ и $\varphi_{(j)2}$, удовлетворяющими условиям (1.3)–(1.6).

(4) Для $i = K+1, \dots, T$ все точки, принадлежащие $U_j \cap \partial G$, будут $(l+1)$-регулярными.

Теперь мы в состоянии сформулировать основные результаты работы.

Теорема 1. *Пусть $F \in W_p^l(G)$, $l \geqslant 1$, $1 < p < \infty$, G — ограниченная область с кусочно-C^{l+1}-гладкой границей, $M_1, \dots, M_K$ — угловые точки введенного выше типа, γ_j — C^{l+1}-гладкие части ∂G, соединяющие точки M_j и M_{j+1}, $1 \leqslant j \leqslant K$, и пусть N_j — единичные векторные поля на γ_j класса C^l, для которых выполняется (1.8). Тогда на γ_j, $1 \leqslant j \leqslant K$, почти всюду в смысле одномерной меры Хаусдорфа определены функции*

$$\left.\frac{\partial^k F}{\partial N_j^k}\right|_{\gamma_j} = \mu_{(j)k}, \quad 0 \leqslant k \leqslant l-1,$$

для которых выполняются следующие условия:

(1) *При $1 \leqslant j \leqslant K$*

$$\mu_{(\tau)k} \in B_{p,\varphi_{(j)}}^{l-k-1/p}(\gamma_\tau \cap U_j), \quad \tau = j-1, j,$$

где $\varphi_{(j)} = \varphi_{(j)2} - \varphi_{(j)1}$, а функции $\varphi_{(j)1}$ и $\varphi_{(j)2}$ — это функции (1.2) для точки M_j, и выполняется

$$\Lambda_j = \Lambda(\bar\mu_{(j-1)}, \bar\mu_{(j)}) \leqslant C_1 \|F\|_{W_p^l(G)}. \tag{1.17}$$

(2) *При $i = K+1, \dots, T$*

$$\mu_{(j)k} \in B_p^{l-k-1/p}(U_i \cap \partial G), \quad 0 \leqslant k \leqslant l-1,$$

если $\gamma_j \cap U_i \neq \varnothing$, и выполняется

$$\|\mu_{(j)k}\|_{B_p^{l-k-1/p}(\gamma_j \cap U_i)} \leqslant C_2 \|F\|_{W_p^l(G)}. \tag{1.18}$$

Постоянные C_1 и C_2 в (1.17) и (1.18) зависят только от l, p и области G.

Теорема 1 доказывается в § 4.

Теорема 2. *Пусть область G — такая же, как в теореме 1, и пусть на гладких участках границы γ_j, $1 \leqslant j \leqslant K$, определены единичные векторные поля N_j класса C^l, удовлетворяющие (1.8), и системы функций $\mu_{(j)k}$, $0 \leqslant k \leqslant l-1$, для которых выполнены следующие условия:*

(1) *При $1 \leqslant j \leqslant K$*

$$\mu_{(\tau)k} \in B_{p,\varphi_{(j)}}^{l-k-1/p}(\gamma_\tau \cap U_j), \quad \tau = j-1, j,$$
$$\Lambda_j = \Lambda(\bar\mu_{(j-1)}, \bar\mu_{(j)}) < \infty.$$

(2) *При $i = K+1, \dots, T$ и при $U_i \cap \gamma_j \neq \varnothing$*

$$\mu_{(j)k} \in B_p^{l-k-1/p}(U_i \cap \gamma_j).$$

Тогда существует функция $F \in W_p^l(G)$ такая, что почти всюду на γ_j, $j = 1, 2, \dots, K$, в смысле 1-меры Хаусдорфа выполняется

$$\left.\frac{\partial^k F}{\partial N_j^k}\right|_{\gamma_j} = \mu_{(j)k}, \quad 0 \leqslant k \leqslant l-1,$$

и справедливо неравенство

$$\|F\|_{W_p^l(G)} \leqslant C_3 \sum_{j=1}^{K} \left\{ \Lambda(\bar{\mu}_{(j-1)}, \bar{\mu}_{(j)}) + \sum_{i=K+1}^{T} \sum_{k=0}^{l-1} \|\mu_{(j)k}\|_{B_p^{l-k-1/p}(\gamma_j \cap U_i)} \right\}, \tag{1.19}$$

где суммирование по i распространено только на те значения i, для которых $U_i \cap \gamma_j \neq \varnothing$. Постоянная C_3 зависит лишь от l, p и области G.

Теорема 2 доказывается в § 5.

Далее везде постоянные, зависящие только от l, p и области G, будем обозначать $C, C_1, C_2, \dots$, причем в различных неравенствах возможно использование одного обозначения для, вообще говоря, различных по значению констант.

§ 2. Доказательство леммы 1

При доказательстве леммы 1 мы будем использовать некоторые комбинаторные тождества. Приведем их в самом начале параграфа. Далее везде считаем, что $C_n^m = 0$, если $0 \leqslant n < m$.

Справедливы тождества

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j C_{k+j}^j C_q^{n-j} = C_{q-k-1}^n, \tag{2.1}$$

(см. [9, с. 250]);

$$\sum_{i=0}^{m} C_{\rho+i-1}^i C_{m+n-\rho-i-1}^{m-i} = C_{m+n-1}^m, \quad \rho \geqslant 1, \tag{2.2}$$

(см. [9, с. 57]);

$$\sum_{i \geqslant 0} (-1)^i C_{m-i}^n C_n^i = 1, \quad m \geqslant n, \tag{2.3}$$

(см. [9, с. 253]). В тождестве (2.3) сумма распространена на целые неотрицательные i, для которых определена левая часть (2.3).

Следующая лемма легко проверяется, приводим ее без доказательства.

Лемма 2. *Пусть $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ и $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — такая функция, что $\delta(t) = 0$ при $t < 0$ и $\delta(t) = 1$ при $t \geqslant 0$. Тогда для любого натурального m можно указать m многочленов от m переменных $a_j = a_j(y_1, \dots, y_m)$, $1 \leqslant j \leqslant m$, степени не выше m таких, что для любого целого неотрицательного r будет выполняться равенство*

$$\frac{d}{dt^m}\left(\frac{h^r}{r!}\right) = \sum_{j=1}^{r} \frac{h^{r-j}}{(r-j)!} \delta(m-j) a_j(t), \tag{2.4}$$

где $a_j(t) = a_j(h', h'', \dots, h^{(m)})$, и

$$a_m(t) = [h'(t)]^m. \tag{2.5}$$

Утверждение леммы 1 будет следовать из следующих равенств:

$$\alpha_k = L_k - \sum_{r=k+1}^{l-1} \alpha_r \frac{\psi^{r-k}}{(r-k)!}, \quad 0 \leqslant k \leqslant l-2, \quad \alpha_{l-1} = L_{l-1}, \tag{2.6}$$

которые мы докажем по индукции. В (2.6) L_k — это функции (1.11).

При $k=0$ из первого уравнения системы (1.9) имеем

$$\alpha_0 = \zeta_0 - \sum_{r=1}^{l-1} \alpha_r \frac{\psi^r}{r!}.$$

Таким образом, полагая $L_0 = \zeta_0$, убеждаемся, что при $k=0$ утверждение верно. Пусть равенство

$$\alpha_j = L_j - \sum_{r=j+1}^{l-1} \alpha_r \frac{\psi^{r-j}}{(r-j)!} \tag{2.7}$$

справедливо при $j = 0, 1, \ldots, k-1$. Покажем, что оно будет верным и при $j = k$.

Из равенства (2.7) при $j = 0, 1, \ldots, k-1$ легко выводится равенство

$$\alpha_j = R_{(k)j} + (-1)^{k-j} \sum_{r=k}^{l-1} C_{r-j-1}^{r-k} \alpha_r \frac{\psi^{r-j}}{(r-j)!}, \tag{2.8}$$

где $R_{(k)j}$ — это функции (1.13). Рассмотрим в системе (1.9) k-е уравнение. Выделим слагаемое, соответствующее $m = 0$, затем в остальных сумму по r разобьем на две: по r от $k-m$ до $k-1$ и по r от k до $l-1$. После этого в сумму, где фигурируют α_r с $r \leqslant k-1$, подставим выражения для α_r из (2.7) и выделим в отдельное слагаемое сумму с функциями $R_{(k)j}$, а в других суммах выделим выражения, соответствующие $m = 1$. В результате получим

$$\begin{aligned}\zeta_k &= \sum_{m=1}^{k} C_k^m c^m s^{k-m} \sum_{j=k-m}^{k-1} R_{(k)j}^{(m)} \frac{\psi^{j-k+m}}{(j-k+m)!} \\ &+ (s - kc\psi')s^{k-1} \sum_{j=k}^{l-1} \alpha_j \frac{\psi^{j-k}}{(j-k)!} + \sum_{m=2}^{k} C_k^m c^m s^{k-m} \sum_{r=k}^{l-1} \Bigg\{ \alpha_r^{(m)} \frac{\psi^{r-k+m}}{(r-k+m)!} \\ &+ \sum_{i=0}^{m} C_m^i \alpha_r^{(i)} \sum_{j=k-m}^{k-1} (-1)^{k-j} C_{r-j-1}^{r-k} \frac{\psi^{j-k+m}}{(j-k+m)!} \left[\frac{\psi^{r-j}}{(r-j)!}\right]^{(m-i)} \Bigg\}.\end{aligned} \tag{2.9}$$

Введем обозначения:

$$T_k = \sum_{m=1}^{k} C_k^m c^m s^{k-m} \sum_{j=k-m}^{k-1} R_{(k)j}^{(m)} \frac{\psi^{j-k+m}}{(j-k+m)!},$$

$$A_{m,r}(m) = 1 + \sum_{j=k-m}^{k-1} (-1)^{k-j} C_{r-j-1}^{k-j-1} C_{r-k+m}^{r-j},$$

$$A_{m,r}(i) = \sum_{j=k-m}^{k-1} (-1)^{k-j} C_{r-j-1}^{r-k} \frac{\psi^{j-k+m}}{(j-k+m)!} \left(\frac{\psi^{r-j}}{(r-j)!}\right)^{(m-i)}.$$

Тогда (2.9) принимает вид

$$\begin{aligned}\zeta_k &= T_k + (s - kc\psi')s^{k-1} \sum_{j=k}^{l-1} \alpha_j \frac{\psi^{j-k}}{(j-k)!} + \sum_{m=2}^{k} C_k^m c^m s^{k-m} \\ &\times \sum_{r=k}^{l-1} \Bigg\{ \alpha_r A_{m,r}(0) + A_{m,r}(m) \alpha_r^{(m)} \frac{\psi^{r-k+m}}{(r-k+m)!} + \sum_{i=1}^{m-1} C_m^i \alpha_r^{(i)} A_{m,r}(i) \Bigg\}.\end{aligned} \tag{2.10}$$

Рассмотрим $A_{m,r}(m)$. Сделав замену индекса суммирования $k - j - 1 = i$, в силу (2.1) имеем

$$A_{m,r}(m) = 1 - \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i C^i_{r-k+i} C^{m-1-i}_{r-k+m} = 1 - C^{m-1}_{m-1} = 0. \tag{2.11}$$

Рассмотрим $A_{m,r}(i)$. Обозначив $r = k+q$ и сделав замену $n = k-j$, запишем $A_{m,r}(i)$ в виде

$$A_{m,k+q}(i) = \sum_{n=1}^{m} (-1)^n C^q_{q+n-1} \frac{\psi^{m-n}}{(m-n)!} \left[\frac{\psi^{n+q}}{(n+q)!}\right]^{(m-i)}.$$

Отсюда и из (2.4) следует (при замене в (2.4) h на ψ, r на $n+q$, m на $m-i$)

$$A_{m,k+q}(i) = \sum_{n=1}^{m} (-1)^n \sum_{j=1}^{n+q} C^q_{q+n-1} C^{m-n}_{m+q-j} a_j(t) \delta(m-i-j) \frac{\psi^{m+q-j}}{(m+q-j)!}$$
$$= \sum_{n=1}^{m} (-1)^n \sum_{s=m-n}^{m+q-1} C^q_{q+n-1} C^{m-n}_s a_{m+q-s}(t) \delta(s-q-i) \frac{\psi^s}{s!}.$$

Меняя порядок суммирования по n и s, отсюда выводим

$$A_{m,k+q}(i) = \sum_{s=0}^{m} \frac{\psi^s}{s!} \delta(s-q-i) a_{m+q-s} \sum_{j=0}^{s} (-1)^{m-j} C^q_{q+m-j-1} C^j_s$$
$$- \sum_{s=m-1}^{m+q-1} \frac{\psi^s}{s!} \delta(s-q-i) a_{m+q-s} \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j C^q_{q+j} C^{m-1-j}_s.$$

Из (2.1) следует, что

$$\sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j C^q_{q+j} C^{m-1-j}_s = C^{m-1}_{s-q-1} = 0,$$

так как $s - q - 1 \leqslant m - 2 < m - 1$. Рассмотрим сумму

$$A = \sum_{j=0}^{s} (-1)^j C^q_{q+m-j-1} C^j_s.$$

После замены $s - j = n$ имеем

$$A = (-1)^s \sum_{n=0}^{s} (-1)^n C^q_{q+m+n-s-1} C^{s-n}_s.$$

В силу (2.2) справедливо равенство

$$C^q_{q+m+n-s-1} = \sum_{\tau=0}^{q} C^\tau_{\rho+\tau-1} C^{q-\tau}_{q+m+n-s-\rho-\tau-1}, \qquad \rho \geqslant 1.$$

Выбирая $\rho = m - s - 1 \geqslant 1$ (так как $s \leqslant m-2$), с помощью (2.1) получаем

$$A = (-1)^s \sum_{\tau=0}^{q} C^\tau_{m-2+\tau-s} \sum_{n=0}^{s} (-1)^n C^{q-\tau}_{q-\tau+n} C^{s-n}_s$$
$$= (-1)^s \sum_{\tau=0}^{q} C^\tau_{m-2+\tau-s} C^s_{s-q+\tau-1} = 0,$$

так как $s+r-q-1<s$. Таким образом,

$$A_{m,k+q}(i)=0. \tag{2.12}$$

Рассмотрим $A_{m,r}(0)$. Обозначим $r-k=q$, сделаем замену $k-j=i$ и используем (2.4). После этого имеем

$$A_{m,k+q}(0)=\sum_{i=1}^{m}(-1)^i C_{q+i-1}^{q}\sum_{j=1}^{q+i}\frac{\psi^{q+m-j}}{(q+m-j)!}C_{q+m-j}^{m-i}\delta(m-j)a_j.$$

Сделаем замену индекса суммирования $q+m-j=n$. После некоторых несложных преобразований, выделив слагаемое с ψ^q и учтя определение функции δ, получим

$$A_{m,k+q}(0)=-\frac{\psi^q}{q!}a_m\sum_{j=0}^{m-1}(-1)^j C_{q+j}^{q}C_q^{m-j-1}$$
$$-\sum_{j=0}^{m-1}(-1)^j C_{q+j}^{q}\sum_{n=q+1}^{q+m-1}\frac{\psi^n}{n!}C_n^{m-j-1}a_{q+m-n}=-B_1-B_2.$$

Рассмотрим B_1. Сделаем замену индекса суммирования $m-1-j=i$. Тогда из (2.3) следует

$$B_1=\frac{\psi^q}{q!}a_m(-1)^{m-1}\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i C_{q+m-1-i}^{q}C_q^i=(-1)^{m-1}a_m\frac{\psi^q}{q!}.$$

Рассмотрим B_2. Вследствие (2.1) имеем

$$\sum_{j=0}^{m-1}(-1)^j C_{q+j}^{j}C_n^{m-1-j}=C_{n-q-1}^{m-1}=0,$$

так как $n-q-1\leqslant m-2<m-1$. Отсюда следует $B_2=0$. Таким образом, учитывая (2.5), имеем

$$A_{m,k+q}(0)=(-1)^m a_m\frac{\psi^q}{q!}=(-\psi')^m\frac{\psi^q}{q!}.$$

Возвращаясь к индексу $r=k+q$, получаем

$$A_{m,r}(0)=(-\psi')^m\frac{\psi^{r-k}}{(r-k)!}. \tag{2.13}$$

Из (2.10)-(2.13) следует, что

$$\zeta_k=T_k+(s-c\psi')^k\sum_{r=k}^{l-1}\alpha_r\frac{\psi^{r-k}}{(r-k)!}.$$

Положим

$$L_k=\frac{\zeta_k-T_k}{(s-c\psi')^k}. \tag{2.14}$$

Тогда

$$L_k=\alpha_k+\sum_{r=k+1}^{l-1}\alpha_r\frac{\psi^{r-k}}{(r-k)!},$$

а это — равенство (2.7) при $j = k$. Следовательно, (2.6) доказано для $0 \leqslant k \leqslant l-2$. Для $k = l-1$ надо провести те же рассуждения, что и выше, учитывая, что (2.6) для $k \leqslant l-2$ установлено. В результате получим $\alpha_{l-1} = L_{l-1}$, где L_{l-1} будет иметь вид (1.12) при $r = l-1$. Полагая в (2.7) $k = l-2$, получим $\alpha_{l-2} = L_{l-2} - \psi L_{l-1}$. Продолжая таким образом, имеем

$$\alpha_{l-j} = \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^i L_{l-j+i} \frac{\psi^i}{i!}, \quad 1 \leqslant j \leqslant l,$$

или, после замены $l - j = n$,

$$\alpha_n = \sum_{i=0}^{l-n-1} (-1)^i L_{n+i} \frac{\psi^i}{i!},$$

а это, как несложно заметить, искомые равенства (1.10). Лемма 1 доказана.

§ 3. Интегральное представление для функций $W_p^l(P)$

Рассмотрим область P (1.7). Далее везде считаем $a = 1$. Функции φ_1, φ_2 и $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ принадлежат $C^{l+1}([0,1])$ и удовлетворяют условиям (1.3)–(1.6).

Отметим вначале следующее. Используя разбиение единицы, изучение граничного поведения функций в области G можно свести к рассмотрению такового в окрестности каждой отдельно взятой угловой точки. При этом можно считать, что все функции, определенные в окрестности точки и на частях границы области, попадающих в эту окрестность, зануляются при достаточном удалении от этой точки. Поэтому интегральное представление для функций из $W_p^l(P)$ мы получим в предположении, что функции обращаются в нуль при $x_1 > x_0$, где x_0 — некоторое число из интервала $(0, 1)$.

Построение нужного нам интегрального представления следует схеме построения подобных представлений в [1, § 7], и довольно подробный вывод дан в [7] для случая $\varphi_1(x_1) = 0$. Поэтому здесь мы только укажем кратко, как можно получить требуемое представление, и отметим некоторые следствия.

Пусть $K, K_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, причем $\operatorname{supp} K \subset [0,1]$, $\operatorname{supp} K_1 \subset [1/2, 1]$, $\int\limits_{\mathbb{R}} K(t)\,dt = \int\limits_{\mathbb{R}} K_1(t)\,dt = 1$.

Рассмотрим функцию

$$\Omega(s, x) = \Omega_1(s_1, x_1)\Omega_2(s_2, x),$$

где

$$\Omega_1(s_1, x_1) = \frac{\partial^l}{\partial s_1^l} \left[\frac{s_1^{l-1}}{(l-1)!} \int\limits_{s_1}^{\infty} K\left(\frac{u_1}{\varphi(x_1)}\right) \frac{du_1}{\varphi(x_1)} \right],$$

$$\Omega_2(s_2, x) = \frac{\partial^l}{\partial s_2^l} \left[\frac{s_2^{l-1}}{(l-1)!} \int\limits_{s_2}^{\infty} K_1\left(\frac{u_2 + x_2 - \varphi(x_1)}{\varphi(x_1)}\right) \frac{du_2}{\varphi(x_1)} \right].$$

Для $\varepsilon > 0$ и для $F \in W_p^l(P)$ положим

$$F_\varepsilon(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} F(x+s) \frac{1}{\varepsilon^2} \Omega\left(\frac{s}{\varepsilon}, x\right) ds,$$

где $s/\varepsilon = (s_1/\varepsilon, s_2/\varepsilon)$. Тогда при $\delta \in (0,1)$

$$F_\delta(x) = F_1(x) - \int\limits_\delta^1 \frac{\partial F_\varepsilon(x)}{\partial \varepsilon}\, d\varepsilon.$$

При $\delta \to 0$ F_δ стремится к F в $L_p(P)$ (см. [1, § 5]). Поэтому запишем

$$F(x) = F_1(x) - \int\limits_0^1 \frac{\partial F_\varepsilon(x)}{\partial \varepsilon}\, d\varepsilon = F_1(x) + R(x). \tag{3.1}$$

Произведя в Ω_2 дифференцирование, имеем для F_1 следующее представление:

$$F_1(x) = \sum_{j=0}^{l-1} c_j \int\limits_{\mathbb{R}^2} F(t) \frac{(t_2 - x_2)^j}{j!} K_1^{(j)} \left(\frac{t_2 - \varphi_1(x_1)}{\varphi(x_1)} \right) \Omega_1(t_1 - x_1, x_1) \frac{dt}{\varphi^2(x_1)}. \tag{3.2}$$

Интегрированием по частям перебросим в интеграле (3.2) производные по t_2 с функции K_1 на функцию F, получим

$$\begin{aligned} F_1(x) = \sum_{j=0}^{l-1} c_j \sum_{m=0}^{j} C_j^m \int\limits_{\mathbb{R}^2} D_2^m F(t) \frac{(t_2 - x_2)^m}{m!} \\ \times K_1 \left(\frac{t_2 - \varphi_1(x_1)}{\varphi(x_1)} \right) \Omega_1(t_1 - x_1, x_1) \frac{dt}{\varphi^2(x_1)}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Пусть $h(x_1)$ — некоторая функция, определенная на $(0,1)$. Записывая $t_2 - x_2 = (t_2 - h(x_1)) - (x_2 - h(x_1))$, из (3.3) имеем

$$F_1(x) = \sum_{r=0}^{l=1} b_r(x_1) \frac{[x_2 - h(x_1)]}{r!}. \tag{3.4}$$

Здесь

$$\begin{aligned} b_r(x_1) = (-1)^r \sum_{m=r}^{l-1} d_{rm} \int\limits_{\mathbb{R}^2} D_2^m F(t) \frac{[t_2 - h(x_1)]^{m-r}}{(m-r)!} \\ \times K_1 \left(\frac{t_2 - \varphi_1(x_1)}{\varphi(x_1)} \right) \Omega_1(t_1 - x_1, x_1) \frac{dt}{\varphi^2(x_1)}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

где d_{rm} постоянные числа. При $h_1 \equiv 0$ функции b_r будем обозначать через α_r. Таким образом, в этом случае

$$F_1(x) = \sum_{r=0}^{l-1} \alpha_r(x_1) \frac{x_2^r}{r!}. \tag{3.6}$$

Обозначим через Γ_i, $i = 1, 2$, части границы P:

$$\Gamma_i = \{x = (x_1, x_2) : 0 < x_1 < 1,\ x_2 = \varphi_i(x_1)\}. \tag{3.7}$$

Если $N_i = \{c_i, s_i\}$, где $c_i = \cos\omega_i$, $s_i = \sin\omega_i$ — единичное векторное поле класса C^l, определенное на Γ_i, то положим $\zeta_{(i)k} = \frac{\partial^k F}{\partial N_i^k}$. Тогда функции α_r из (3.6) удовлетворяют системе (1.9), где $\psi = \varphi_i$ и в левой части равенств стоят функции $\zeta_{(i)k}$. Подставляя в (3.6) выражения (1.10) для α_r при $L_r = L_{(i)r}(x_1, \bar\zeta_{(i)})$, получим $(i = 1, 2)$

$$F_1(x) = \sum_{r=0}^{l-1} L_{(i)r}(x_1, \bar\zeta_{(i)}) \frac{[x_2 - \varphi_i(x_1)]^r}{r!}. \tag{3.8}$$

Поскольку $F_1(x)$ есть многочлен по x_2, из (3.4) и (3.8) при $h = \varphi_i$ вытекает, что $b_r = L_{(i)r}$.

Для слагаемого R в (3.1) имеем

$$R(x) = -\int_0^1 \frac{\partial F_\varepsilon(x)}{\partial \varepsilon}\, d\varepsilon = R_1(x) + R_2(x), \tag{3.9}$$

где

$$R_1(x) = \varphi^{l-2}(x_1) \int_0^1 \varepsilon^{l-3}\, d\varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} D_1^l F(t) \left(\frac{t_1 - x_1}{\varepsilon\varphi(x_1)}\right)^l K\left(\frac{t_1 - x_1}{\varepsilon\varphi(x_1)}\right) \Omega_2\left(\frac{t_2 - x_2}{\varepsilon\varphi(x_1)}; x\right) dt,$$

$$R_2(x) = \varphi^{l-2} \int_0^1 \varepsilon^{l-3}\, d\varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} D_2^l F(t) \left(\frac{t_2 - x_2}{\varepsilon\varphi(x_1)}\right)^l \times K_1\left(\frac{t_2 - x_2}{\varepsilon\varphi(x_1)} + \frac{x_2 - \varphi_1(x_1)}{\varphi(x_1)}\right) \Omega_1\left(\frac{t_1 - x_1}{\varepsilon\varphi(x_1)}, x_1\right) dt.$$

Заметим, что в силу условий (1.4) и (1.5) интегрирование по t в выражениях для F_1 и R фактически ведется по области P (носитель представления содержится в P — в терминологии [1]). Именно с этой целью эти условия были введены.

Приведем некоторые оценки, вытекающие из интегрального представления и того, что $F \in W_p^l(P)$.

Лемма 3. *Пусть $N_i = \{c_i, s_i\}$ — единичные векторные поля класса C^l, определенные на кривых (3.7), $\zeta_{(i)k} = \frac{\partial^k F}{\partial N_i^k}\Big|_{\Gamma_i}$, $L_{(i)r}(x_1) = L_{(i)r}(x_1, \bar\zeta_{(i)})$ — функции (1.11) при $\zeta_k = \zeta_{(i)k}$, $\psi = \varphi_i$ и $\mathfrak{M}_r = \mathfrak{M}_r(x_1, \bar\zeta_{(1)}, \bar\zeta_{(2)})$ — это функции (1.14). Тогда справедливы следующие оценки:*

$$\left\|L_{(i)r}^{(j)}\right\|_{p,\varphi}, \ \left\|\mathfrak{M}_r^{(j)}\right\|_{p,\varphi} \leqslant C_1 \|F\|_{W_p^l(P)} \tag{3.10}$$

при $0 \leqslant j \leqslant l - r$ и

$$\left\|\varphi^j L_{(i)r}^{(l-r+j)}\right\|_{p,\varphi}, \ \left\|\varphi^j \mathfrak{M}_r^{(l-r+j)}\right\|_{p,\varphi} \leqslant C_2 \|F\|_{W_p^l(P)} \tag{3.11}$$

при $0 \leqslant j \leqslant r$. Постоянные в (3.10) и (3.11) зависят только от l, p и области P.

Доказательство леммы проводится точно так же, как и доказательство леммы 1 из [7].

Замечание. Ограничение на число производных функций α_r, $L_{(i)r}(x_1, \bar\zeta_{(i)})$ (см. (1.10)) обусловлено только дифференцируемостью функций φ_1 и φ_2. Если, например, $\varphi_i \in C^\infty(0,1)$, то $\alpha_r, L_{(i)r}(x_1, \bar\zeta_{(i)}) \in C^\infty$ и (3.11) справедливо для всех $j \geqslant 0$. По нашему предположению φ_1, φ_2, $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 \in C^{l+1}([0,1])$. Это означает, что все функции α_r, $L_{(i)r}$, $r = 0, 1, \dots, l-1$, дифференцируемы $l+1$ раз на $(0,1)$, а функции $\mathfrak{M}_r = \mathfrak{M}_r(x_1, \bar\zeta_{(1)}, \bar\zeta_{(2)})$ — $l + 1 - r$ раз.

Лемма 4. *Пусть* $L_{(i)r}(x_1) = L_{(i)r}(x_1, \bar{\zeta}_{(i)})$ *— те же функции, что и в лемме 3. Тогда при* $r = 0, 1, \ldots, l-1$

$$w_{(i)r}(x) = L_{(i)r}(x_1)\frac{[x_2 - \varphi_i(x_1)]^r}{r!} \in W_p^l(P).$$

Лемма 4 доказывается так же, как лемма 6 из [7].

Лемма 5. *Пусть* R *— функция из* (3.9) *и* $\rho_{(i)k} = \frac{\partial R}{\partial N_i^k}$. *Тогда справедливы следующие оценки:*

$$\|\varphi^{k-l} D^\mu R\|_{L_p(P)} \leqslant C\|F\|_{W_p^l(P)} \tag{3.12}$$

при $\mu = (\mu_1, \mu_2)$, $|\mu| = \mu_1 + \mu_2 = k \leqslant l$;

$$\left\|\varphi^{k+j-l}\frac{d^j}{dx_1^j} D^\mu R|_{\Gamma_i}\right\|_{p,\varphi} \leqslant C\|F\|_{W_p^l(P)} \tag{3.13}$$

при $|\mu| = \mu_1 + \mu_2 = k$, $0 \leqslant k + j \leqslant l - 1$;

$$\left\|\varphi^{k+j-l}\rho_{(i)k}^{(j)}\right\|_{p,\varphi} \leqslant C\|F\|_{W_p^l(P)} \tag{3.14}$$

при $0 \leqslant k + j \leqslant l - 1$.

Оценка (3.12) при $|\mu| = l$ следует из леммы 4 и из того, что $F \in W_p^l(P)$. Оценки (3.12)–(3.14) (при $0 \leqslant |\mu| \leqslant l-1$) устанавливаются теми же рассуждениями, что и при доказательстве леммы 2 в [7].

§ 4. Доказательство теоремы 1

Используя разбиение единицы, доказательство теоремы 1 достаточно провести для окрестности одной какой-нибудь угловой точки. Более того, из определения угловой точки следует, что доказательство достаточно провести для области (1.7) с $a = 1$.

Пусть $F \in W_p^l(P)$. Напомним: мы считаем, что $\varphi_2(x_1) > 0$ при $0 < x_1 < 1$ и $F(x) = 0$ при $x_1 > x_0 > 0$, где $x_0 \in (0, 1)$ — некоторое фиксированное число.

Через $N_i = \{\cos\omega_i, \sin\omega_i\}$, $i = 1, 2$, как и выше, обозначаем заданные на Γ_i единичные векторные поля класса C^l, удовлетворяющие условию (1.8). Поскольку каждая точка $x = (x_1, x_2) \in \Gamma_i$ при $0 < x_1 < 1$ является C^{l+1}-регулярной, то (см., например, [1]) почти всюду на Γ_i (в смысле 1-меры Хаусдорфа) определены следы производных по направлениям N_i ($c_i = \cos\omega_i$, $s_i = \sin\omega_i$)

$$\mu_{(i)k} = \left.\frac{\partial^k F}{\partial N_i^k}\right|_{\Gamma_i}$$

$$= \left.\frac{\partial^k R}{\partial N_i^k}\right|_{\Gamma_i} + \sum_{m=0}^{k} C_k^m c_i^m s_i^{k-m} \sum_{r=k-m}^{l-1} \alpha_r^{(m)}(x_1)\frac{\varphi_i^{r-k+m}}{(r-k+m)!}, \tag{4.1}$$

i=1,2, причем если U — такая окрестность, что начало не принадлежит U, то

$$\mu_{(i)k} \in B_p^{l-k-1/p}(\Gamma_i \cap U)$$

и (см. [1]) справедливы неравенства (1.18) (для $\gamma_j = \Gamma_1$ или Γ_2).

Пусть $\rho_{(i)k} = \frac{\partial R}{\partial N_i^k}$, $x \in \Gamma_i$. Из леммы 5 следует, что $\rho_{(i)k} \in W_{p,\varphi}^{l-k-1}(\Gamma_i)$. Включение $\rho_{(i)k}^{(l-k-1)} \in B_{p,\varphi}^{1-1/p}(0,1)$ и соответствующие оценки для нормы в $B_{p,\varphi}^{1-1/p}$ через норму F в $W_p^l(P)$ устанавливаются теми же рассуждениями, что и оценки (3.5) в [7]. Отсюда и из леммы 3 следует, что

$$\mu_{(i)k} \in B_{p,\varphi}^{l-k-1/p}(\Gamma_i), \quad i = 1, 2, \quad k = 0, 1, \ldots, l-1,$$

и справедливы оценки

$$\|\mu_{(i)k}\|_{B_{p,\varphi}^{l-k-1/p}(\Gamma_i)} \leqslant C\|F\|_{W_p^l(P)}.$$

Таким образом, для завершения доказательства теоремы 1 осталось оценить величину (1.15).

Обозначим $\zeta_{(i)k} = \mu_{(i)k} - \rho_{(i)k}$, $k = 0, 1, \ldots, l-1$. Из (4.1) следует, что

$$\zeta_{(i)k} = \sum_{m=0}^{k} C_k^m c_i^m s_i^{k-m} \sum_{r=k-m}^{l-1} \alpha_r^{(m)} \frac{\varphi_i^{r-k+m}}{(r-k+m)!},$$

откуда вытекает (см. замечание после леммы 3), что $\zeta_{(i)k} \in C^{l-k}(0,1)$.

Из (3.8) имеем

$$F(x) = \sum_{r=0}^{l-1} L_{(i)r}(x_1, \bar{\zeta}_{(i)}) \frac{[x_2 - \varphi_i(x_1)]^r}{r!} + R(x), \quad i = 1, 2. \tag{4.2}$$

Из (4.2) при $i = 2$ получаем

$$F(x) = \sum_{r=0}^{l-1} \left[L_{(2)r} - \sum_{j=r}^{l-1} L_{(1)j} \frac{\varphi^{j-r}}{(j-r)!} \right] \frac{(x_2 - \varphi_2)^r}{r!}$$

$$+ \sum_{r=0}^{l-1} \sum_{j=r}^{l-1} \frac{1}{j!} L_{(1)j} C_j^r \varphi^{j-r} \cdot (x_2 - \varphi_2)^r + R$$

$$= \sum_{r=0}^{l-1} \mathfrak{M}_r(x_1, \bar{\zeta}_{(1)}, \bar{\zeta}_{(2)}) \frac{[x_2 - \varphi_2(x_1)]^r}{r!} + F(x). \tag{4.3}$$

При выводе последнего равенства мы учли (4.2) при $i = 1$ и равенство ($\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$)

$$\sum_{r=0}^{l-1} \sum_{j=r}^{l-1} \frac{1}{j!} L_{(1)j} C_j^r \varphi^{j-r} (x_2 - \varphi_2)^r = \sum_{j=0}^{l-1} L_{(1)j} \frac{(x_2 - \varphi_1)^j}{j!}.$$

Из (4.3) после дифференцирования по x_2 следует

$$\sum_{r=k}^{l-1} \mathfrak{M}_r(x_1) \frac{[x_2 - \varphi_2(x_1)]^{r-k}}{(r-k)!} = 0, \quad 0 \leqslant k \leqslant l-1. \tag{4.4}$$

Полагая в (4.4) $x_2 = \varphi_2(x_1)$, при $0 < x_1 < 1$ выводим

$$\mathfrak{M}_k(x_1) = L_{(2)k}(x_1, \bar{\zeta}_{(2)}) - \sum_{j=k}^{l-1} L_{(1)j}(x_1, \bar{\zeta}_{(1)}) \frac{\varphi(x_1)^{j-k}}{(j-k)!} = 0.$$

Дифференцируя последнее равенство по x_1 m раз, $m \leqslant l-k-1$, имеем

$$L_{(2)k}^{(m)} - \sum_{i=0}^{m} C_m^i \sum_{j=k}^{l-1} L_{(1)j}^{(i)} \left[\frac{\varphi^{j-k}}{(j-k)!} \right]^{(m-i)}$$

$$= L_{(2)k}^{(m)} - \sum_{i=0}^{m} C_m^i \sum_{j=k}^{l-i-1} L_{(1)j}^{(i)} \left[\frac{\varphi^{j-k}}{(j-k)!} \right]^{(m-i)}$$

$$- \sum_{i=1}^{m} C_m^i \sum_{j=l-i}^{l-1} L_{(1)j}^{(i)} \left[\frac{\varphi^{j-k}}{(j-k)!} \right]^{(m-i)} = 0.$$

С учетом того, что (см. (1.11)) $L_{(i)k}(\bar{\zeta}_{(i)}) = L_{(i)k}(\bar{\mu}_{(i)}) - L_{(i)k}(\bar{\rho}_{(i)})$, отсюда следует

$$\mathfrak{M}_{k,m}(x_1, \bar{\mu}_{(1)}, \bar{\mu}_{(2)}) = \sum_{i=1}^{m} C_m^i \sum_{j=l-i}^{l-1} L_{(1)j}^{(i)}(\bar{\zeta}_{(1)}) \left[\frac{\varphi^{j-k}}{(j-k)!}\right]^{(m-i)} + \mathfrak{M}_{k,m}(\bar{\rho}_{(1)}, \bar{\rho}_{(2)}) = A + \mathfrak{M}_{k,m}(\bar{\rho}_{(1)}, \bar{\rho}_{(2)}). \quad (4.5)$$

Рассмотрим отдельно слагаемые в правой части. Для A имеем

$$L_{(1)j}^{(i)}(\bar{\zeta}_{(1)}) \left[\frac{\varphi^{j-k}}{(j-k)!}\right]^{(m-i)} = \left[\varphi^{i+j-l} L_{(1)j}^{(i)}(\bar{\zeta}_{(1)})\right] \left\{\varphi^{l-i-j} \left[\frac{\varphi^{j-k}}{(j-k)!}\right]^{(m-i)}\right\}.$$

Так как при $j \geqslant l - i$ выполняется $j - k \geqslant m - i$, то из леммы 2 следует

$$\left|\varphi^{l-i-j} \left[\frac{\varphi^{j-k}}{(j-k)!}\right]^{(m-i)}\right| \leqslant C\varphi^{l-k-m}.$$

Таким образом, $A = \xi_1 \cdot \varphi^{l-k-m}$, где $\xi_1 \in L_{p,\varphi}(0,1)$, и по (3.11)

$$\|\xi_1\|_{p,\varphi} \leqslant C\|F\|_{W_p^l(P)}. \quad (4.6)$$

Из (1.11), (3.14) и (3.11), записав

$$\mathfrak{M}_{k,m}(\bar{\rho}_{(1)}, \bar{\rho}_{(2)}) = L_{(2)k}^{(m)}(\bar{\rho}_{(2)}) - \sum_{i=0}^{m-1} C_m^i \sum_{j=k}^{k+m-i-1} L_{(1)j}^{(i)}(\bar{\rho}_{(1)}) \left[\frac{\varphi^{j-k}}{(j-k)!}\right]^{(m-i)}$$
$$- \sum_{j=k}^{l-m-1} L_{(1)j}^{(m)}(\bar{\rho}_{(1)}) \frac{\varphi^{j-k}}{(j-k)!} - \sum_{i=0}^{m-1} C_m^i \sum_{j=m+k-i}^{l-i-1} L_{(1)j}^{(i)}(\bar{\rho}_{(1)}) \left[\frac{\varphi^{j-k}}{(j-k)!}\right]^{(m-i)},$$

получим

$$\mathfrak{M}_{k,m}(\bar{\rho}_{(1)}, \bar{\rho}_{(2)}) = \xi_2 \cdot \varphi^{l-k-m},$$

где $\xi_2 \in L_{p,\varphi}(0,1)$ и выполняется

$$\|\xi_2\|_{p,\varphi} \leqslant C\|F\|_{W_p^l(P)}. \quad (4.7)$$

Из (4.5)–(4.7), (1.15) и (1.16) следует оценка (1.17). Теорема 1 доказана.

§ 5. Доказательство теоремы 2

Пусть $\bar{\mu}_{(i)} = \{\mu_{(i)k}\}_{k=0}^{l-1}$ — системы функций, определенных на Γ_i, для которых выполнены условия (1) и (2) теоремы 2. Построим функции F_1, $F_2 \in W_p^l(P)$ такие, что

$$\left.\frac{\partial^k F_i}{\partial N_i^k}\right|_{\Gamma_i} = \mu_{(i)k}, \quad i = 1, 2, \quad k = 0, 1, \ldots, l-1. \quad (5.1)$$

Функции F_1 и F_2 можно построить каким-либо из известных способов. Укажем кратко, как это можно сделать. Рассмотрим отображения

$$\Pi_i : (u, v) \to \{u + v\cos\omega_i(u), \varphi_i(u) + v\sin\omega_i(u)\},$$

где $\{\cos\omega_i(u), \sin\omega_i(u)\} = N_i \circ \lambda_i$, λ_i — параметризация $u \to (u, \varphi_i(u))$ кривой Γ_i. Считаем, что векторные поля N_i таковы, что отображения Π_i являются квазиизометриями. Это будет так, если N_i являются единичными внутренними нормалями на Γ_i по отношению к области P. Отображения Π_i будут квазиизометриями, если для углов $\omega_i(u)$ выполняются следующие условия: $\omega_2(u)$ —

возрастающая функция, а $\omega_1(u)$ возрастает при $\varphi_1(u) > 0$ и возрастающей функции φ_1 и $\omega_1(u)$ убывает при $\varphi_1(u) < 0$ и убывающей φ_1. Все это легко проверить непосредственными вычислениями.

Пусть $P_i^* = \Pi_i^{-1}(P)$. Тогда если $F_i \in W_p^l(P)$, то [10, § 1] функции $G_i = F_i \circ \Pi_i$ будут принадлежать $W_p^l(P_i^*)$ и нормы $\|G_i\|_{W_p^l(P_i^*)}$ и $\|F_i\|_{W_p^l(P)}$ эквивалентны.

При отображении Π_i кривой Γ_i соответствует часть оси $\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : v = 0\}$ и выполняются равенства

$$\left.\frac{\partial^k G_i}{\partial v^k}\right|_{v=0} = \mu_{(i)k}(u) = \frac{\partial^k F_i}{\partial N_i^k} \circ \lambda_i(u).$$

Рассмотрим область P_i^*, и пусть функции $\mu_{(i)k}$ заданы на части границы ∂P_i^*, соответствующей $v = 0$. Функцию $G_i \in W_p^l(P_i^*)$ можно построить, например, как в [11, ч. 3, гл. 11]. Принадлежность G_i пространству $W_p^l(P_i^*)$ проверяется аналогично тому, как это проделано при доказательстве леммы 4 в [7]. Таким образом, мы имеем функции F_1, $F_2 \in W_p^l(P)$, для которых выполняются равенства (5.1). Рассмотрим функцию

$$\varkappa(x) = \left[\frac{x_2 - \varphi_1(x_1)}{\varphi(x_1)}\right]^l \sum_{i=0}^{l-1} C_{l-1+i}^i \left[\frac{\varphi_2(x_1) - x_2}{\varphi(x_1)}\right]^i.$$

Функция $\varkappa(x)$ является простой модификацией функции

$$u = (u_1, u_2) \to \left(\frac{u_1}{u_1 + u_2}\right)^l \sum_{i=0}^{l-1} C_{l+i-1}^i \left(\frac{u_2}{u_1 + u_2}\right)^i$$

из [12, доказательство теоремы 3.2] и обладает следующими свойствами: $D_1^m D_2^k \varkappa|_{\Gamma_1} = 0$ при $0 \leqslant m + k \leqslant l$, $\varkappa|_{\Gamma_2} = 1$, $D_1^m D_2^k \varkappa\big|_{\Gamma_2} = 0$ при $1 \leqslant m + k \leqslant l$, и справедлива оценка

$$|D_1^m D_2^k \varkappa| \leqslant \frac{C}{\varphi^{m+k}}, \quad 0 \leqslant k + m \leqslant l. \tag{5.2}$$

Положим $F = F_1 + \varkappa(F_2 - F_1)$. Теорема будет доказана, если мы покажем, что $F \in W_p^l(P)$, так как для F будут выполняться равенства (5.1). Для функции F и $|\beta| = \beta_1 + \beta_2 \leqslant l$ имеем

$$D^\beta F = D^\beta F_1 + \sum_{\mu \leqslant \beta} c_\mu D^{\beta - \mu} \varkappa \cdot D^\mu (F_2 - F_1),$$

где $\mu \leqslant \beta$ означает $\mu_1 \leqslant \beta_1$ и $\mu_2 \leqslant \beta_2$. Таким образом, ввиду (5.2) достаточно доказать, что при $|\mu| \leqslant l$ выполняется

$$\varphi^{|\mu| - l} D^\mu (F_2 - F_1) \in L_p(P). \tag{5.3}$$

При $|\mu| = l$ (5.3) вытекает из того факта, что $F_2 - F_1 \in W_p^l(P)$. Таким образом, (5.3) достаточно установить для случая $|\mu| \leqslant l - 1$.

Рассмотрим для F_1 и F_2 интегральные представления (см. (3.6))

$$F_i(x) = \sum_{r=0}^{l-1} \alpha_{(i)r}(x_1) \frac{x_2^r}{r!} + R_i(x), \quad i = 1, 2.$$

Положим $\rho_{(i)k} = \frac{\partial^k R_i}{\partial N_i^k}$, $x \in \Gamma_i$, $\zeta_{(i)k} = \mu_{(i)k} - \rho_{(i)k}$, $0 \leqslant k \leqslant l-1$, $i = 1, 2$. Используя (3.8), как и при выводе (4.3), получим

$$F_2(x) - F_1(x) = R_2(x) - R_1(x) + \sum_{r=0}^{l-1} \mathfrak{M}_r(x_1, \bar\zeta_{(1)}, \bar\zeta_{(2)}) \frac{[x_2 - \varphi_2(x_1)]^r}{r!}. \tag{5.4}$$

Для R_1 и R_2 из леммы 5 имеем

$$\|\varphi^{|\mu|-l} D^\mu R_i\|_{L_p(P)} \leqslant C \|F_i\|_{W_p^l(P)}, \quad i = 1, 2. \tag{5.5}$$

Сделаем два замечания.

Замечание 1. Из леммы 2 следует, что

$$\left| \frac{\partial^q}{\partial x_1^q} \cdot \frac{[x_2 - \varphi_2(x_1)]^{r-k}}{(r-k)!} \right| \leqslant C \varphi^{r-k-q}, \quad r - k \geqslant q \geqslant 0,$$
$$\left| \frac{\partial^q}{\partial x_1^q} \cdot \frac{[x_2 - \varphi_2(x_1)]^{r-k}}{(r-k)!} \right| \leqslant C, \quad r - k < q.$$

Замечание 2. Как легко проверить, если $|\xi(x)| \leqslant h(x_1)$ для почти всех $x = (x_1, x_2) \in P$ и $h \in L_{p,\varphi}(0,1)$, то $\xi \in L_p(P)$.

Вернемся к равенству (5.4). Для $\mathfrak{M}_r(x_1) = \mathfrak{M}_r(x_1, \bar\zeta_{(1)}, \bar\zeta_{(2)})$ имеем

$$D^\mu \sum_{r=0}^{l-1} \mathfrak{M}_r(x_1) \frac{[x_2 - \varphi_2(x_1)]]^r}{r!}$$
$$= \sum_{i=0}^{m} C_m^i \sum_{r=k}^{l-i-1} \mathfrak{M}_r^{(i)}(x_1) \left\{ \frac{\partial^{m-i}}{\partial x_1^{m-i}} \frac{[x_2 - \varphi_2(x_1)]^{r-k}}{(r-k)!} \right\}$$
$$+ \sum_{i=1}^{m} C_m^i \sum_{r=l-i}^{l-1} \mathfrak{M}_r^{(i)}(x_1) \frac{\partial^{m-i}}{\partial x_1^{m-i}} \frac{[x_2 - \varphi_2(x_1)]^{r-k}}{(r-k)!} = S_1 + S_2. \tag{5.6}$$

Чтобы получить оценки для S_1 и S_2, докажем лемму.

Лемма 6. *При $0 \leqslant r \leqslant l-1$, $0 \leqslant i \leqslant l$, справедливо утверждение*

$$\varphi^{1/(l-r-i)} \mathfrak{M}_r^{(i)}(x_1, \bar\zeta_{(1)}, \bar\zeta_{(2)}) \in L_{p,\varphi}(0,1).$$

Доказательство. При $r + i \geqslant l$ утверждение леммы 6 следует из (3.11). Пусть $r + i \leqslant l - 1$. Из (1.14) следует

$$\mathfrak{M}_r^{(i)}(x_1, \bar\zeta_{(1)}, \bar\zeta_{(2)}) = \mathfrak{M}_{r,i}(x_1, \bar\mu_{(1)}, \bar\mu_{(2)}) - \mathfrak{M}_{r,i}(x_1, \bar\rho_{(1)}, \bar\rho_{(2)})$$
$$- \sum_{n=1}^{i} C_i^n \sum_{j=l-n}^{l-1} L_{(1)j}^{(n)}(x_1, \bar\zeta_{(1)}) \left[\frac{\varphi^{j-r}}{(j-r)!} \right]^{(i-n)}. \tag{5.7}$$

По условию (1) теоремы 2 имеем $\varphi^{r+i-l} \mathfrak{M}_{r,i}(\bar\mu_{(1)}, \bar\mu_{(2)} \in L_{p,\varphi}(0,1)$. Включение $\varphi^{r+i-l} \mathfrak{M}_{r,i}(\bar\rho_{(1)}, \bar\rho_{(2)}) \in L_{p,\varphi}(0,1)$ следует из (1.14) и (3.14). Если записать

$$\varphi^{r+i-l} L_{(1)j}^{(n)}(x_1, \bar\zeta_{(1)}) \left[\frac{\varphi^{j-r}}{(j-r)!} \right]^{(i-n)}$$

в виде

$$[\varphi^{j+n-l} L_{(1)j}^{(n)}(x_1, \bar\zeta_{(1)})] \left\{ \varphi^{r+i-j-n} \left[\frac{\varphi^{j-r}}{(j-r)!} \right]^{(i-n)} \right\},$$

то отсюда, а также из (3.11) и леммы 2 будет следовать, что и последнее слагаемое в (5.7), умноженное на φ^{r+i-l}, будет принадлежать $L_{p,\varphi}(0,1)$. Лемма 6 доказана.

Для величины S_1 в (5.6) имеем

$$\varphi^{|\mu|-l}S_1 = \sum_{r=\mu_2}^{l-\mu_1-1} \left[\mathfrak{M}_r^{(\mu_1)}\varphi^{r+\mu_1-l}\right] \left[\varphi^{\mu_2-r}\frac{(x_2-\varphi_2(x_1))^{r-\mu_2}}{(r-\mu_2)!}\right]$$
$$+\sum_{i=0}^{\mu_1-1} C_{\mu_1}^i \sum_{r=\mu_2}^{|\mu|-i-1} \left[\varphi^{r+i-l}\mathfrak{M}_r^{(i)}\right]\varphi^{|\mu|-r-i}\frac{\partial^{\mu_1-i}}{\partial x_1^{\mu_1-i}}\frac{[x_2-\varphi_2(x_1)]^{r-\mu_2}}{(r-\mu_2)!}$$
$$+\sum_{i=0}^{\mu_1-1} C_{\mu_1}^i \sum_{r=|\mu|-i}^{l-i-1} \left[\varphi^{r+i-l}\mathfrak{M}_r^{(i)}\right]\varphi^{|\mu|-r-i}\frac{\partial^{\mu_1-i}}{\partial x_1^{\mu_1-i}}\frac{[x_2-\varphi_2(x_1)]^{r-\mu_2}}{(r-\mu_2)!}.$$

Отсюда, из леммы 6 и замечаний 1 и 2 следует, что $\varphi^{|\mu|-l}S_1 \in L_p(P)$.

Для S_2 в (5.6) имеем

$$\varphi^{|\mu|-l}S_2 = \sum_{i=1}^{\mu_1} C_{\mu_1}^i \sum_{r=l-i}^{l-i} \left[\varphi^{r+i-l}\mathfrak{M}_r^{(i)}\right]\varphi^{|\mu|-r-i}\frac{\partial^{\mu_1-i}}{\partial x_1^{\mu_1-i}}\frac{[x_2-\varphi_2(x_1)]^{r-\mu_2}}{(r-\mu_2)!}.$$

В силу того, что $r-\mu_2 \geqslant \mu_1 - i$, а также ввиду леммы 6 и замечаний 1 и 2 отсюда получаем
$$\varphi^{|\mu|-l}S_2 \in L_p(P).$$

Отсюда и из (5.4)–(5.6) следует, что включения (5.3) доказаны. Тем самым доказана и теорема 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975. 480 с.
2. *Gagliardo E.* Caratterizzazionic delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi difunzioni in piu variabili // Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. 1957. V. 27. P. 284–305.
3. *Никольский С. М.* Граничные свойства функций, определенных на области с угловыми точками. I–III // Мат. сб.: I — 1956. Т. 40(82), № 3. С. 303–318; II — 1957. Т. 44(86). С. 127–144; III — 1958. Т. 45(87). С. 181–194.
4. *Яковлев Г. Н.* Граничные свойства функций класса $W_p^{(l)}$ на областях с угловыми точками // Докл. АН СССР. 1961. Т. 140, № 1. С. 73–76.
5. *Яковлев Г. Н.* Задача Дирихле для областей с нелипшицевой границей // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1, № 8. С. 1085–1098.
6. *Мазья В. Г., Поборчий С. В.* О следах функций с суммируемым градиентом в области с вершиной пика на границе // Мат. заметки. 1989. Т. 45, № 1. С. 57–65.
7. *Васильчик М. Ю.* О необходимых и достаточных условиях на след функций из пространства Соболева на границе плоской области с нелипшицевой границей // Исследования по математическому анализу и римановой геометрии. Новосибирск: Наука, 1992. С. 5–29.
8. *Grisvard P.* Elliptic problems in nonsmooth domains. Pitman; Boston, 1985. 410 p.
9. *Виленкин Н. Я.* Комбинаторика. М.: Наука, 1969. 328 с.
10. *Мазья В. Г.* Пространства Соболева. Л.: Изд-во Ленингр. гос. ун-та, 1985. 416 с.
11. *Избранные* главы анализа и высшей алгебры / Д. К. Фаддеев, Б. З. Вулих, Н. Н. Уральцева и др.; Под ред. М. З. Соломяка. Л.: Изд-во Ленингр. гос. ун-та, 1981. 200 с.
12. *Яковлев Г. Н.* О следах функций из пространства W_p^l на кусочно-гладких поверхностях // Мат. сб. 1967. Т. 74(116), № 4. С. 526–543.

г. Новосибирск *Статья поступила 6 марта 1995 г.*