УДК 517.983

НЕКОТОРЫЕ НЕРЕШЕННЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В. Б. Коротков

Настоящая статья содержит 44 нерешенные задачи теории интегральных операторов. Эти задачи возникли у автора в разное время в ходе многолетнего изучения свойств интегральных операторов. Большинство задач носит теоретический характер, однако многие из них в силу тесной связи между интегральными операторами и интегральными уравнениями так или иначе переводятся на язык интегральных уравнений, а некоторые обязаны своим возникновением конкретным задачам теории интегральных уравнений. Несколько задач небезынтересны для теории линейных дифференциальных уравнений с частными производными. Наибольший же интерес задачи данной статьи представляют для теории операторов. Это объясняется двумя основными причинами.

Интегральные операторы в L_2 являются в некотором смысле модельными для операторов в гильбертовом пространстве, и можно указать ряд важных проблем теории операторов в гильбертовом пространстве, которые достаточно решить в классе интегральных операторов. К их числу относится, например, проблема инвариантных подпространств. Суть другой причины очень точно выражает следующее высказывание из книги П. Халмоша и В. Сандера [39, с. 6]: «Теория интегральных операторов является источником всего современного функционального анализа и по сей день остается богатым источником нетривиальных примеров. Так как основным препятствием на пути прогресса во многих вопросах теории операторов является недостаток конкретных примеров, свойства которых можно было бы точно описать, то систематическое развитие теории интегральных операторов дает надежду найти новые пути преодоления трудностей, возникающих при изучении абстрактных операторов».

Выше были указаны области математики, для которых результаты теории интегральных операторов и нерешенные задачи для них могут представить непосредственный интерес. Однако все разнообразие связей теории интегральных операторов с другими математическими дисциплинами настолько широко и многогранно, что практически не поддается описанию. Некоторые из этих связей удивительны и неожиданны: так, например, Н. Ньюмен, С. Рявец, Б. Шур [29] показали, что положительное решение гипотезы о нулях ζ-функции эквивалентно неограниченности конкретной функции, построенной по собственным функциям самосопряженного оператора с явно выписываемым ядром.

Статья состоит из шести параграфов. В § 1 приведены необходимые обозначения и определения. В § 2–5 собраны нерешенные задачи, относящиеся к интегральным операторам в L_2, и лишь § 6 посвящен интегральным операторам в идеальных функциональных пространствах. Большинство приведенных в статье задач имеют естественные аналоги для интегральных операторов в L_p, и мы этих аналогов не приводим. Многие задачи снабжены комментариями и библиографией, некоторые были ранее опубликованы в книгах автора [16, 17].

§ 1. Основные обозначения и определения

Пусть (X, μ) — пространство с σ-конечной положительной мерой [38]. Всюду в статье предполагается, что мера μ не является чисто атомической, т. е. в X

существует μ-измеримое множество X_0, $\mu X_0 > 0$, такое, что любое μ-измеримое множество $e \subseteq X_0$ можно разбить на два непересекающихся множества с равными мерами.

Пусть $M = M(X, \mu)$ — линейное многообразие всех определенных на X μ-измеримых почти всюду конечных функций с обычным отождествлением функций, отличающихся лишь на множестве меры нуль, $L_2 = L_2(X, \mu)$ — линейное многообразие всех элементов f из M с конечной нормой

$$\|f\| = \Big(\int\limits_X |f(t)|^2\, d\mu(t)\Big)^{1/2}.$$

Всюду в статье под оператором в L_2 понимается линейный непрерывный оператор, определенный на L_2 и действующий в L_2.

Оператор G в L_2 называется *положительным* [12], если из $f(s) \geqslant 0$ почти всюду следует $Gf(s) \geqslant 0$ почти всюду. Оператор H в L_2 называется *регулярным* [12], если существует положительный оператор H^+ в L_2 такой, что $|Hf(s)| \leqslant H^+(|f(s)|)$ почти всюду для всех $f \in L_2$.

Оператор T в L_2 называется *интегральным* [3] (соответственно *частично интегральным* [16]), если существует функция $K \in M(X \times X, \mu \times \mu)$ такая, что для всех $f \in L_2$ (соответственно для всех $f \in L_2 \cap L_\infty$)

$$Tf(s) = \int\limits_X K(s,t) f(t)\, d\mu(t) \quad \text{для почти всех} \quad s \in X. \tag{1}$$

Интеграл в (1) понимается в лебеговском смысле, функция $K(s,t)$ в (1) называется *ядром интегрального* (соответственно *частично интегрального*) *оператора* T.

Интегральный оператор называется *карлемановским*, если его ядро удовлетворяет условию Карлемана [13]

$$\int\limits_X |K(s,t)|^2\, d\mu(t) < \infty \quad \text{для почти всех} \quad s \in X, \tag{2}$$

и *оператором Гильберта — Шмидта*, если для ядра $K(s,t)$ выполнено условие Гильберта — Шмидта [2]

$$\int\limits_X\int\limits_X |K(s,t)|^2\, d\mu(t) d\mu(s) < \infty. \tag{3}$$

Интегральный оператор называется *ядерным*, если он представим в виде произведения двух интегральных операторов Гильберта — Шмидта. Карлемановский интегральный оператор называется *бикарлемановским* [43], если наряду с условием (2) выполнено условие

$$\int\limits_X |K(s,t)|^2\, d\mu(s) < \infty \quad \text{для почти всех} \quad t \in X.$$

Интегральный оператор называется *ахиезеровским*, если его ядро $K(s,t)$ удовлетворяет условию Н. И. Ахиезера [1, 2]: существует положительная функция $\Lambda \in M$ такая, что

$$|K(s,t)| \leqslant \Lambda(s)\Lambda(t) \quad \text{для почти всех} \quad (s,t) \in X \times X.$$

Пусть e — измеримое множество положительной лебеговой меры в евклидовом пространстве R^N,

$$e - e = \{z \in R^N \mid z = x - y,\ x, y \in e\}.$$

Оператор в $L_2(e)$ называется ***интегральным оператором свертки***, если существует функция $K \in M(e-e)$ такая, что для всех $f \in L_2(e)$

$$T_K f(s) = \int_e K(s-t)f(t)\,dt \quad \text{для почти всех} \quad s \in e. \tag{4}$$

Функция K называется ***ядром интегрального оператора свертки*** T_K, а правая часть в (4) называется ***сверткой*** функций K, f и обозначается $K * f$. В случае $e = R^N$ в статье приняты обозначения: I — множество всех интегральных операторов свертки в $L_2(R^N)$; B — множество всех операторов из I с ограниченными ядрами; C — множество всех операторов из I, ядра которых принадлежат $L_2(R^N)$; A — множество всех операторов из I, представимых в виде произведения операторов из C; $D = B \cap C$. Наконец, через L_2^2 [40] в статье обозначено множество всех операторов в $L_2(R^N)$, перестановочных с операторами сдвига P_w:

$$(P_w f)(s) = f(s+w), \quad f \in L_2(R^N),$$

на всевозможные векторы $w \in R^N$.

Пусть L — некоторое линейное многообразие операторов в L_2. Линейное многообразие $N \subset L$ называется ***левым*** (соответственно ***правым***) ***идеалом множества*** L, если для любого оператора $T \in N$ и любого оператора $B \in L$ имеем $BT \in N$ (соответственно $TB \in N$). Множество N называется ***двусторонним идеалом*** L, если N является одновременно левым и правым идеалом L.

§ 2. Интегральное представление операторов

Задача 1. Пусть T — диагональный оператор в L_2:

$$Tf = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (f, \varphi_n)\varphi_n, \quad f \in L_2,$$

$\{\varphi_n\}$ — ортонормированная система в L_2, $\{\alpha_n\}$ — ограниченная числовая последовательность. Существует ли (желательно «метрический») критерий интегральности T в терминах $\{\alpha_n\}$ и $\{\varphi_n\}$?

Критерий карлемановости T существует [16, с. 121]: для карлемановости T необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 |\varphi_n(s)|^2 < \infty \quad \text{почти всюду.}$$

Задача 2. Пусть T — диагональный интегральный оператор в L_2. Как можно выразить его ядро через $\{\alpha_n\}$ и $\{\varphi_n\}$?

Задача 3. Пусть T — диагональный интегральный оператор в L_2. Назовем ограниченную числовую последовательность $\mu = \{\mu_n\}$ ***интегромультипликатором***, если оператор

$$T_\mu f = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \alpha_n (f, \varphi_n)\varphi_n, \quad f \in L_2,$$

также интегральный. Как выглядит множество всех интегромультипликаторов оператора T?

Задача 4. Пусть N — нормальный интегральный оператор в L_2 и его спектр расположен в секторе с вершиной в 0 и раствором $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$. Существуют ли условия в терминах α (кроме $\alpha = 0$), при которых сопряженный оператор N^* также интегральный?

В [42] показано, что сопряженный к нормальному интегральному оператору может быть неинтегральным. Из этого результата и основного результата статьи [7] следует, что существует и диагональный интегральный оператор в L_2, сопряженный к которому неинтегральный.

Задача 5. Пусть T — нормальный интегральный оператор в L_2, $E(\cdot)$ — его разложение единицы. Будет ли $E(e)$ интегральным оператором для любого борелевского множества e, удовлетворяющего условию $0 \notin \bar{e}$?

Для нормальных карлемановских интегральных операторов положительный ответ на этот вопрос непосредственно следует из [16, с. 174].

Задача 6. Пусть T — оператор в L_2, и пусть W — множество всех унитарных операторов U в L_2 таких, что UTU^{-1}, UPU^{-1} — интегральные операторы, где P — ортопроектор на $\operatorname{Ker} T = \{f \mid f \in L_2, Tf = 0\}$. Будет ли множество W непустым для любого интегрального оператора T?

Из положительного ответа на этот вопрос следует, что существуют самосопряженный интегральный оператор T_0 в L_2 и борелевское множество e_0 такие, что $0 \notin \bar{e}_0$ и $E_0(e_0)$ — неинтегральный оператор. Здесь $E_0(\cdot)$ — разложение единицы для T_0.

Задача 7. Найдите необходимые и достаточные условия интегральности нормальных операторов в L_2 в терминах разложений единицы для них.

Необходимые и достаточные условия карлемановости самосопряженных операторов в терминах разложений единицы для них даны в [16, с. 174, 175].

Задача 8. Пусть T — интегральный оператор в L_2, и пусть T отображает каждое ограниченное по норме и вместе с тем порядково ограниченное в M множество в порядково ограниченное в M множество. Будет ли T карлемановским интегральным оператором?

Обратное утверждение справедливо в силу неравенства Коши — Буняковского.

Задача 9. Пусть T — оператор в L_2. Опишите бесконечномерные линейные многообразия E в L_2 такие, что из $\operatorname{im} T \subseteq E$ следует, что T — интегральный оператор. Здесь $\operatorname{im} T = TL_2$.

Отметим, что если $E = \operatorname{im} L$, где L — карлемановский интегральный оператор (соответственно интегральный оператор Гильберта — Шмидта), то T — карлемановский интегральный оператор (соответственно интегральный оператор Гильберта — Шмидта) [14, 16, с. 123]. Справедлив и более общий результат: если K принадлежит правому идеалу N алгебры всех операторов в L_2 и $\operatorname{im} T \subseteq K$, то $T \in N$. Это утверждение является следствием теоремы из [9].

Задача 10. Пусть T — оператор в L_2. Охарактеризуйте линейные многообразия G в L_2 такие, что из $G \subseteq \operatorname{im} T$ следует, что T — неинтегральный оператор.

Пример такого многообразия см. в [16, с. 50].

Задача 11. Будет ли сужение тождественного оператора в L_2 на любое всюду плотное линейное многообразие H в L_2 неинтегральным оператором?

Эта задача возникает в связи с известным результатом из [26] о том, что тождественный оператор на всем L_2 неинтегральный. Другие доказательства неинтегральности тождественного оператора на всем L_2 см. в [5, с. 56; 12, с. 402; 16, с. 20; 39, с. 53].

В [10, с. 225] показано, что если H — порядковый идеал в L_2, то сужение тождественного оператора на H не является интегральным оператором.

Задача 12. Существует ли оператор t в l_2 такой, что операторы utu^{-1} нерегулярны для любого унитарного оператора u в l_2?

Эта задача имеет прямое отношение к интегральным операторам, так как любой оператор в l_2 является карлемановским интегральным оператором [25, с. 400].

§ 3. Алгебраические свойства интегральных и частично интегральных операторов

Задача 1. Пусть T — частично интегральный оператор в L_2 и для любых частично интегральных операторов A, B в L_2 оператор ATB частично интегральный. Будет ли T интегральным оператором Гильберта — Шмидта?

Задача 2. Пусть T — частично интегральный оператор в L_2 и для любых вполне непрерывных частично интегральных операторов A, B в L_2 оператор ATB частично интегральный. Будет ли T интегральным оператором Гильберта — Шмидта?

Задачи 1, 2 имеют непосредственное отношение к задачам о наиболее широких идеалах множеств частично интегральных и множеств интегральных операторов, изученным в [18, 19]. Например, в [18] приведен следующий результат: если $UVTW$ — частично интегральный оператор для любых вполне непрерывных карлемановских интегральных операторов V, W в L_2 и любого вполне непрерывного интегрального оператора U в L_2, то T — интегральный оператор Гильберта — Шмидта.

Задача 3. Найдите всевозможные левые, правые и двусторонние идеалы множества всех ахиезеровских интегральных операторов в L_2. Найдите наиболее широкие левые, правые и двусторонние идеалы множества всех ахиезеровских интегральных операторов в L_2, если таковые идеалы существуют.

Для интегральных операторов свертки в $L_2(R^N)$ эта задача частично изучалась в [17, § 3].

Задача 4. Является ли каждый интегральный оператор в L_2 произведением двух интегральных операторов в L_2?

Для карлемановских интегральных операторов это утверждение справедливо. Отметим также, что аналогичная задача и для частично интегральных операторов имеет положительное решение: каждый частично интегральный оператор в L_2 является произведением двух частично интегральных операторов в L_2 [18].

Если в задаче 4 потребовать, чтобы сомножители имели некоторое дополнительное свойство, то такая задача может иметь и положительное, и отрицательное решение в зависимости от выбранного свойства, даже если произведение имеет это свойство. Так, например, каждый карлемановский интегральный оператор является произведением двух карлемановских интегральных операторов. С другой стороны, И. Поповичи и Д. Вуза [30] показали, что существует положительный интегральный оператор, не представимый в виде произведения двух положительных интегральных операторов.

Задача 5. Найдите критерий интегральности произведения двух интегральных операторов.

Произведение двух интегральных операторов в L_2 не всегда является интегральным оператором [15, 16, 35, 36, 41]. Критерии интегральности произведения двух интегральных операторов свертки в $L_2(R^N)$ даны в [21, 22]. В [31] найден критерий интегральности оператора $T = AB$, где A, B, B^* — интегральные операторы в L_2. Достаточные условия интегральности произведений интегральных операторов установлены в [23].

Задача 6. Имеет ли нетривиальное инвариантное подпространство каждый бикарлемановский интегральный оператор в L_2?

Аналогичная задача для карлемановских операторов в L_2 эквивалентна в силу [16, с. 99] проблеме существования инвариантного подпространства у любого линейного непрерывного оператора в гильбертовом пространстве.

Задача 7. Имеет ли нетривиальное инвариантное подпространство каждый регулярный интегральный оператор в L_2?

Эта задача эквивалентна предыдущей задаче в силу [16, с. 100, 101].

§ 4. Интегральные операторы свертки

В этом параграфе используются определения и обозначения из § 1.

Задача 1. Каковы необходимые и достаточные условия унитарной эквивалентности оператора в $L_2(R^N)$ интегральному оператору свертки?

Задача 2. Каковы необходимые и достаточные условия представимости оператора в $L_2(e)$, $e \subseteq R^N$, в форме интегрального оператора свертки?

В случае $e = R^N$ эта задача решена в [33].

Задача 3. Верно ли, что: а) $I = B + C$; б) $I = B + C_r$, где C_r — множество всех регулярных карлемановских операторов из I?

Задача 4. Охарактеризуйте $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{D}$, $\overline{I}$. Здесь черта означает замыкание по операторной норме.

Задача 5. Охарактеризуйте A^*, B^*, C^*, D^*, I^*. Здесь E^* — пространство, сопряженное к нормированному пространству E. Норма в A, B, C, D, I операторная. Верно ли, что $I^* = A$, $A^* = L_2^2$?

Задача 6. Охарактеризуйте $\widehat{I}$, $\widehat{B}$, $\widehat{D}$. Здесь $\widehat{I}$ — совокупность преобразований Фурье ядер всех операторов из I. Аналогично определяются $\widehat{B}$, $\widehat{D}$. Верно ли, что $\widehat{D} = (L_1 + L_2) \cap L_\infty$?

Задача 7. Пусть $T_k \in I$. Опишите класс всех функций $a \in L_\infty$ таких, что $T_l \in I$, если $\hat{l} = a\hat{k}$.

Задача 8. Пусть T_k — интегральный оператор свертки в $L_2(R_1)$ с ограниченным ядром k. Верно ли, что $T_k \in A$, если для любого числа $\alpha > 0$ номера $n(\alpha)$ тех множеств

$$e_{n,\alpha} = [n, n+1) \cap \{s \in R_1, |\hat{k}(s)| > \alpha\}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

для которых $me_{n,\alpha} \neq 0$, образуют лакунарное по Адамару множество? Если ответ отрицательный, то будет ли иметь место включение $T_k \in A$ в случае, когда выполнено дополнительное условие: номера $n(\alpha)$ не зависят от α?

Напомним, что множество целых чисел называется *лакунарным* по Адамару [44], если оно имеет вид $\{\pm m_k, k = 1, 2, 3, \ldots\}$, где m_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$, — последовательность натуральных чисел, удовлетворяющих условию

$$\inf \frac{m_{k+1}}{m_k} > 1.$$

Задача 9. Пусть $T \in L_2^2$ и $TU \in I$ для любого $U \in L_2^2$. Верно ли $T \in C$?

Задача 10. Верно ли, что если $T \in L_2^2$ и $TU \in I$ для любого $U \in I$, то $T = T_1 + T_2$, где T_1 — регулярный оператор из L_2^2, оператор $T_2 \in C$?

Задача 11. Пусть $T \in I$ и TU — регулярный оператор для любого $U \in I$. Каковы характеристические свойства оператора T?

Задача 12. Отличаются ли односторонние идеалы I от двусторонних, или любой односторонний идеал I является двусторонним идеалом I? В связи с этой задачей представляют интерес следующие задачи: 1) является ли всякий оператор из I произведением двух операторов из I? 2) представляется ли каждый оператор T из C в виде $T = T_1 T_2$, где $T_1 \in C$, $T_2 \in I$?

Задача 13. Существует ли $T \in I$ такой, что $T^\alpha \notin I$ для любого $0 < \alpha < \infty$, $\alpha \neq 1$?

Задача 14. Пусть $T \in I$. Верно ли, что $E(\Delta) \in I$ для любого борелевского множества Δ, замыкание которого не содержит 0? Здесь $E(\cdot)$ — разложение единицы для нормального оператора T.

Задача 15. Пусть $T \in I$. Верно ли, что $|T| = (TT^*)^{1/2} \in I$? Справедливо ли обратное утверждение?

§ 5. Спектр интегральных операторов

Задача 1. Пусть T — плотно определенный в L_2 замкнутый линейный интегральный оператор. Существует ли в области определения сопряженного оператора T^* ортонормированная последовательность $\{h_n\}$ такая, что $\lim\limits_{n\infty} \|T^* h_n\| = 0$? Другими словами, принадлежит ли нуль предельному спектру оператора T^*?

Эта задача является обобщением известной задачи о характеристическом свойстве спектра неограниченных самосопряженных карлемановских интегральных операторов, поставленной и изученной в [27].

Обзор относящихся к задаче 1 результатов см. в [16, с. 156, 157].

Отметим, что условие замкнутости оператора T существенно: в [16, с. 58] построен незамкнутый плотно определенный в $L_2(0,1)$ интегральный оператор T_0 такой, что спектр T_0^* не содержит нуль.

Задача 2. Пусть $T : D_T \to L_2$ — плотно определенный в L_2 замкнутый интегральный оператор,

$$W = \{f \mid f \in D_T, \|f\|^2 + \|Tf\|^2 \leqslant 1\}.$$

Компактно ли множество TW в смысле сходимости почти всюду?

Из положительного ответа на этот вопрос следует положительный ответ на вопрос предыдущей задачи (см. [16, с. 158–159]).

Если $D_T = L_2$, то в указанном смысле компактно даже множество TV, где V — единичный шар в L_2 (см. [11] и [16, с. 17]).

Задача 3. Укажите метод отыскания спектра карлемановского интегрального оператора в L_2 с квазивырожденным ядром

$$K(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu e_n}} g_n(t), \quad g_n \in L_2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

$\{e_n\}$ — последовательность попарно не пересекающихся множеств из X с положительными мерами.

К интегральным операторам с такими ядрами сводятся произвольные интегральные операторы [17, с. 132, 133].

Задача 4. Пусть T — карлемановский интегральный оператор в L_2. Разработайте методы отыскания спектра T и ядра резольвенты Фредгольма $F_\lambda = -\lambda T(T - \lambda 1)^{-1}$.

Для самосопряженных операторов решение этой задачи см. в [13, 17]. Для нормальных операторов эта задача решена в [28]; кроме того, в [28] задача 4 решена и для вполне непрерывных интегральных операторов.

Задача 5. Пусть T — интегральный оператор в L_2. Будет ли резольвента Фредгольма $F_\lambda = -\lambda T(T - \lambda 1)^{-1}$ интегральным оператором для всех λ из резольвентного множества оператора T?

Если T — карлемановский интегральный оператор, то положительный ответ на этот вопрос непосредственно следует из леммы о правом умножении [24; 16, с. 122].

Отметим, что для любого интегрального оператора T в L_2 и любого числа λ из его резольвентного множества резольвента Фредгольма оператора T как угодно точно приближается по операторной норме карлемановскими интегральными операторами в L_2 [20].

Если в задаче 5 интегральность T и F_λ заменить частичной интегральностью, то для такой задачи ответ, вообще говоря, отрицательный: существует самосопряженный частично интегральный оператор T_1 в L_2 такой, что оператор $T_1(T_1 - \lambda 1)^{-1}$ не является частично интегральным для некоторых λ из резольвентного множества оператора T_1 [20].

Задача 6. Опишите дифференциальные операторы с частными производными, резольвенты или некоторые степени резольвент которых являются интегральными операторами.

Эта задача представляет собой естественное расширение известной задачи [8, с. 248] об условиях представимости резольвент или некоторых степеней резольвент дифференциальных операторов с частными производными в интегральной форме с ядром Карлемана. Широкий класс таких операторов указан в [8, с. 248; 4, с. 458, 463; 25, с. 274]. Обзор результатов о карлемановости резольвент (или их степеней) дифференциальных операторов с частными производными дан в [8, с. 266; 4, с. 757–760, 763–765].

В связи с задачей 6 отметим работы [32, 34], в которых доказана интегральность резольвент эллиптических, параболических и некоторых гипоэллиптических операторов с постоянными коэффициентами.

§ 6. Разные задачи

Задача 1. Пусть $E = E(X, \mu)$ — идеальное пространство, μ — сепарабельная σ-конечная неатомическая мера, $T : E \to E$ — линейный непрерывный оператор, $\{h_n\}$ — некомпактная ограниченная последовательность в E^* такая, что $\|T^* h_n\|_{E^*} \to 0$ при $n \to \infty$. Существует ли последовательность конечномерных линейных непрерывных операторов $T_n : E \to E$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|Tx - T_n x\|_E = 0$ для любых $x \in E$?

$E = E(X, \mu)$ называется *идеальным пространством* [37], если оно является линейным многообразием в $M = M(X, \mu)$, снабжено нормой $\|\cdot\|_E$ и из $|f(s)| \leqslant |g(s)|$ почти всюду, $f \in M$, $g \in E$ следует $f \in E$ и $\|f\|_E \leqslant \|g\|_E$.

Задача 1 была поставлена в [17].

Задача 2. Пусть E, F — идеальные пространства, $T : E \to F$ — вполне непрерывный интегральный оператор. Существует ли последовательность конечномерных линейных непрерывных операторов $T_n : E \to F$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|T - T_n\|_{E\to F} = 0$? Эта задача была поставлена в [17].

Задача 3. Пусть E — идеальное пространство. Каковы необходимые и достаточные условия подобия линейного непрерывного оператора $T : E \to E$ интегральному оператору (оператор $T : E \to E$ называется *подобным оператору* $\widetilde{T} : E \to E$, если существует линейный гомеоморфизм $C : E \to E$ такой, что $T = C\widetilde{T}C^{-1}$)?

Эта задача была поставлена в [16, с. 95] и изучалась лишь в случае $E = L_2$ (см. [16, гл. III; 39, § 15]).

Задача 4. Пусть E — идеальное пространство, $T : E \to E$ — линейный непрерывный оператор. Каковы необходимые и достаточные условия интегральности линейных операторов CTC^{-1} для любого линейного гомеоморфизма $C : E \to E$?

Эта задача также была поставлена в [16, с. 95]. Она изучалась в случае $E = L_2$ в [16, гл. III; 39, § 16]; для случая $E = L_p$, $1 < p < \infty$, решение этой задачи содержится в [6, следствие теоремы 4.7.6].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ахиезер Н. И.* Интегральные операторы с ядрами Карлемана // Успехи мат. наук. 1947. Т. 2, вып. 5. С. 93–132.
2. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966. 543 с.
3. *Banach S.* Sur les opérations dans les ensembles absraits et leur applications aux équations intégrales // Fundam. Math. 1922. V. 3. P. 133–181.
4. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наук. думка, 1965. 798 с.

5. *Бухвалов А. В.* Приложения методов теории порядково ограниченных операторов к теории операторов в пространствах L^p // Успехи мат. наук. 1983. Т. 38, вып. 6. С. 37–83.
6. *Векторные* решетки и интегральные операторы / А. В. Бухвалов, В. Б. Коротков, А. Г. Кусраев, С. С. Кутателадзе, Б. М. Макаров. Новосибирск: Наука, 1992. 214 с.
7. *Voiculescu D.* Some results on norm ideal perturbations of Hilbert space operators // J. Oper. Theory. 1979. V. 2, N 1. P. 3–37.
8. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции. Вып. 3: Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1958. 274 с.
9. *Douglas R. G.* On majorization, factorization and range of inclusion of operators on Hilbert space // Proc. Amer. Math. Soc. 1966. V. 17. P. 413–415.
10. *Zaanen A. C.* Riesz Space. II. Amsterdam etc.: North Holland, 1983. 720 p.
11. *Забрейко П. П.* Исследования по теории интегральных операторов: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 1968.
12. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 750 с.
13. *Carleman T.* Sur les équations intégrales singulieres a noyau réel et symétrique. Uppsala: A.-B. Lundequistska Bokhandeln, 1923. 228 p.
14. *Коротков В. Б.* Об интегральных карлемановских операторах // Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск, 1980. С. 106–112.
15. *Коротков В. Б.* К задачам Халмоша — Сандера об интегральных операторах в L_2 // Сиб. мат. журн. 1982. Т. 23, № 3. С. 214–216.
16. *Коротков В. Б.* Интегральные операторы. Новосибирск: Наука, 1983. 224 с.
17. *Коротков В. Б.* Некоторые вопросы теории интегральных операторов. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1988. 148 с.
18. *Коротков В. Б.* Об интегральных и частично интегральных операторах. Владивосток, 1988. 7 с. (Препринт).
19. *Коротков В. Б.* Об идеалах множеств интегральных и частично интегральных операторов // Сиб. мат. журн. 1990. Т. 31, № 4. С. 207–211.
20. *Коротков В. Б.* О резольвентах интегральных и частично интегральных операторов // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 2. С. 88–91.
21. *Коротков В. Б., Степанов В. Д.* О некоторых свойствах интегральных операторов свертки // Применение методов функционального анализа к задачам математической физики и вычислительной математики. Новосибирск, 1979. С. 64–68.
22. *Коротков В. Б., Степанов В. Д.* Критерии порождаемости интегральных операторов измеримыми функциями // Сиб. мат. журн. 1982. Т. 23, № 2. С. 199–203.
23. *Интегральные* операторы в пространствах суммируемых функций / М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский. М.: Наука, 1966. 500 с.
24. *Misra B., Speiser D., Targonski G.* Integral operators in the theory of scattering // Helv. Phys. Acta. 1963. V. 36, N 7. P. 963–980.
25. *Морен К.* Методы гильбертова пространства. М.: Мир, 1965. 570 с.
26. *Нейман И.* Математические основы квантовой механики. М.: Наука, 1964. 367 с.
27. *Neumann J.* Charakterizierung das Spectrums eines Integraloperators // Actualities Sci. et Indust. Paris, 1935. N 229.
28. *Новицкий И. М.* Интегральные представления линейных операторов в L_2. Приложения к интегральным уравнениям: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1987.
29. *Newman M., Ryavec C., Shure B. N.* The use of integral operators in number theory // J. Func. Anal. 1979. V. 32, N 2. P. 123–130.
30. *Popovici I.M., Vuza D. T.* Factorization of convolution operators // An. Univ. Craiova. Ser. mat., fiz.-chim. 1988. V. 16. P. 1–8.
31. *Смирнова О. Д.* Критерий интегральности произведения некоторых линейных операторов // Сиб. мат. журн. 1982. Т. 23, № 4. С. 208–211.
32. *Степанов В. Д.* Об одном случае регулярности резольвенты самосопряженного гипоэллиптического оператора в L_2 // Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к некоторым задачам математической физики. Новосибирск: Наука, 1973. С. 193–196.
33. *Степанов В. Д.* Об операторах в пространствах $L_p(R^N)$, перестановочных со сдвигами // Сиб. мат. журн. 1974. Т. 15, № 3. С. 693–699.
34. *Степанов В. Д.* Регулярные интегральные операторы свертки и суммируемость преобразования Фурье функций многих переменных: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1976.
35. *Степанов В. Д.* Об одной проблеме Халмоша и Сандера // Докл. АН СССР. 1984. Т. 278, № 2. С. 296–298.
36. *Степанов В. Д.* Интегральные операторы свертки в лебеговых пространствах: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Хабаровск, 1984.

37. *Функциональный* анализ / М. Ш. Бирман, Н. Я. Виленкин, Е. А. Горин и др.; Под ред. С. Г. Крейна. М.: Наука, 1972. 544 с.
38. *Халмош П.* Теория меры. М.: Изд-во иностр. лит., 1953. 291 с.
39. *Халмош П., Сандер В.* Ограниченные интегральные операторы в пространствах L^2. М.: Наука, 1985. 158 с.
40. *Хёрмандер Л.* Оценки для операторов, инвариантных относительно сдвига. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 71 с.
41. *Schachermayer W.* Integral Operators in L^p Spaces. Pt I // Indiana Univ. Math. J. 1981. V. 30, N 1. P. 123–140.
42. *Schachermayer W.* Addendum to integral operators on L_p spaces // Indiana Univ. Math. J. 1982. V. 31, N 1. P. 73–81.
43. *Schreiber M., Targonski G.* Carleman and semi-Carleman operators // Proc. Amer. Math. Soc. 1970. V. 24. P. 293–299.
44. *Эдвардс Р.* Ряды Фурье в современном изложении: В 2-х т. М.: Мир, 1985. Т. 2. 400 с.

г. Новосибирск

Статья поступила 29 июня 1994 г.