ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Сборник трудов
1963 г. Института математики СО АН СССР Выпуск 5

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ВЕРОЯТНОСТНОГО РАСЧЕТА ОДНОТАКТНЫХ СХЕМ МЕТОДОМ ОРТОГОНАЛИЗАЦИИ

Ю.В. Мерекин

Введение

Важное теоретическое и практическое значение приобретает в настоящее время проблема изыскания методов синтеза, обеспечивающих заданный уровень вероятности правильной работы автомата при заданной надежности его элементов [I].

В работе [2] сформулированы и решены две задачи вероятностного расчета однотактных схем: задача № I, решающая вопрос загрузки элементов рассматриваемой схемы, и задача № 2, определяющая вероятность появления ошибки на выходе при сбое в одном из элементов. Для решения задачи № I были предложены алгоритмы A_1, A_2, A_3; для решения задачи № 2 - разработан метод, основанный на построении вспомогательной функции f_E, с помощью которой задача № 2 сводится к задаче № I. Для практических расчетов важно максимально упростить решение указанных задач.

В данной работе предлагается единый алгоритм для решения задачи № I, основанный на применении метода ортогонализации булевых выражений. Кроме того, показано, что решение задачи № 2 может быть сведено к задаче № I более простым методом - без построения вспомогательной функции f_E.

§ I. Некоторые определения и обозначения

Мы будем рассматривать булевы функции, реализуемые логическими схемами с ограничениями, наложенными условиями определения, данного в работе [3].

В качестве полной системы функций алгебры логики выберем конъюнкцию $\&$, дизъюнкцию $\vee$, отрицание $\overline{}$. В записи булевых выражений знак конъюнкции в дальнейшем опускается там, где это не вызовет недоразумений. Независимую переменную будем обозначать через x (В наших примерах аргументы обозначены большими буквами латинского алфавита $A, B, C, D, \ldots$), через m - количество независимых переменных рассматриваемой булевой функции. Булеву функцию, реализуемую схемой с идеально работающими элементами, обозначим через $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$; функцию, реализуемую схемой, где в одном элементе произошел сбой, - $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m)$.

Для аргумента x_i и его отрицания введем обозначение $x_i^{\sigma_i}$, где σ_i равно 0 или I, причем будем считать, что

$$x^0 = \bar{x}, \quad x' = x.$$

Выражение вида

$$x_1^{\sigma_1} \& x_2^{\sigma_2} \& \ldots \& x_r^{\sigma_r}, \qquad r \leq m,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_m$ попарно различимы, будем называть элементарной конъюнкцией. Число r - ранг элементарной конъюнкции.

Выражение вида

$$P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee P_k,$$

где $P_1, P_2, \ldots, P_k$ - элементарные конъюнкции, будем называть дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ). Конъюнкции P_i назовем членами ДНФ.

ДНФ назовем совершенной (СДНФ), если ранг каждого из ее членов будет равен m -числу независимых переменных.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Элементарная конъюнкция P_{r_1} ранга r_1 ($r_1 \leq m$) поглощает элементарную конъюнкцию P_{r_2} ранга r_2, если $P_{r_1} \& P_{r_2} = P_{r_2}$. Аналогично, булева функция $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ поглощает булеву функцию $f_2(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, если $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) \& f_2(x_1, x_2, \ldots x_m) = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_m)$.

Реализацией булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ будем называть формулу $F(f)$, задающую эту функцию. $F(f)$ полностью определяет вид и последовательность логических операций.

Элементом реализации будем называть элементарную операцию вида $\&, \vee, {}^{-}$, реализуемую элементарным автоматом (элементом). На количество входов элементарных автоматов, реализующих операции конъюнкции и дизъюнкции, ограничения не накладываются.

Элементарные конъюнкции P_i и P_j называются ортогональными, если $P_i \& P_j = 0$.

Для того, чтобы две элементарные конъюнкции были ортогональны, необходимо и достаточно, чтобы каждая из них содержала, по крайней мере, один общий аргумент x_i, при этом в одной из конъюнкций $\sigma_i = 0$, а в другой – $\sigma_i = 1$.

ДНФ называется ортогональной (ОДНФ), если все ее члены попарно ортогональны.

§ 2. Постановка задачи

Рассматриваемые здесь задачи поставлены в работе [2].

Задача № 1. Задана реализация $F(f_0)$ булевой функции $f_0(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Состояние i-го входа есть случайная величина x_i, множество значений которой состоит из двух чисел (0,1). Задано распределение вероятностей:

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{P}(x_i = 0) &= p_{x_i} \\ \mathcal{P}(x_i = 1) &= q_{x_i} \end{aligned}\right\} \quad \text{для} \quad i \leq m.$$

Предполагаем, что все x_i независимы в совокупности.

Необходимо определить загрузку i-го элемента, т.е. математическое ожидание количества срабатываний i-го элемента за $\mathcal{N}$ независимых включений схемы (под срабатыванием понимается выработка единицы на выходе i-го элемента).

Задача № 2. Задана реализация $F(f_0)$ булевой функции $f_0(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Состояние i-го входа есть случайная величина x_i, множество значений которой состоит из двух чисел (0,1). Задано распределение вероятностей:

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{P}(x_i = 0) &= p_{x_i} \\ \mathcal{P}(x_i = 1) &= q_{x_i} \end{aligned}\right\} \quad \text{для} \quad i \leq m$$

Предполагаем, что все x_i независимы в совокупности.

Предполагается, что в i-м элементе произошел сбой, т.е. функция, осуществляемая этим элементом, меняется (в частном случае i-й элемент эквивалентен генератору единицы или нуля). Сбой может произойти и на входе (x_i).

Необходимо найти вероятность появления ошибки на выходе, если сбой произошел в одном из элементов $\alpha_i \in F$, причем характер сбоя известен.

Замечание. Принципиально рассматриваемый здесь алгоритм позволяет решить задачу для случая, когда сбой имеет место в j элементах одновременно, однако объем вычислений растет пропорционально отношению $\frac{C_G^j}{C_G^1}$, где C_G^j и C_G^1 – число сочетаний из всего множества элементов реализации G по j и 1, соответственно.

Необходимо отметить, что наличие сбоя в элементе $\alpha_i \in F(f_0)$ еще не означает появления ошибки на выходе схемы, как показывают тривиальные примеры функций

$$F(f_0) = 1 \vee f_i \equiv 1,$$

$$F(f_0) = 0 \& f_i \equiv 0.$$

Решив задачу № 2 для всех элементов реализации $F(f_0)$, можно судить о важности каждого элемента и указать на те из них, которые необходимо делать более надежными. При наличии неисправности в схеме, решение задачи № 2 дает возможность указать наиболее вероятные места неисправности.

§ 3. Преобразование реализации $F(f)$ в ДНФ с ортогональными членами (ОДНФ)

Тривиальным представлением булевой функции в виде ОДНФ является СДНФ, ибо члены СДНФ попарно ортогональны. Однако количество членов СДНФ часто оказывается очень большим. Поэтому желательно иметь возможность получать ОДНФ со значительно меньшим количеством членов, чем в СДНФ.

Для решения поставленной задачи необходимо сформулировать некоторые леммы.

ЛЕММА 1. Отрицание элементарной конъюнкции $P_i = x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_r^{\sigma_r}$ эквивалентно дизъюнкции

$$\bar{P}_i = x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee x_1^{\sigma_1} x_2^{\bar{\sigma}_2} \vee \ldots \vee x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_{r-1}^{\sigma_{r-1}} x_r^{\bar{\sigma}_r}, \qquad (1)$$

причем члены данной дизъюнкции попарно ортогональны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждения будем вести индукцией по числу r. При $r=2$ имеем

$$x_1^{\bar\sigma_1}\vee x_1^{\sigma_1}x_2^{\bar\sigma_2}=x_1^{\bar\sigma_1}\vee x_2^{\bar\sigma_2}.$$

Пусть лемма доказана для $r-1$. Имеем

$$x_1^{\bar\sigma_1}\vee x_1^{\sigma_1}x_2^{\bar\sigma_2}\vee\dots\vee x_1^{\sigma_1}\dots x_{r-1}^{\sigma_{r-1}}x_r^{\bar\sigma_r}=x_1^{\bar\sigma_1}\vee x_1^{\sigma_1}y,$$

где $y=x_2^{\bar\sigma_2}\vee x_2^{\sigma_2}x_3^{\bar\sigma_3}\vee\dots\vee x_2^{\sigma_2}\dots x_{r-1}^{\sigma_{r-1}}x_r^{\bar\sigma_r}$,

$y=x_2^{\bar\sigma_2}\vee x_3^{\bar\sigma_3}\vee\dots\vee x_r^{\bar\sigma_r}$ по индукционному допущению. Но по доказанному

$$x_1^{\bar\sigma_1}\vee x_1^{\sigma_1}y=x_1^{\bar\sigma_1}\vee y=x_1^{\bar\sigma_1}\vee x_2^{\bar\sigma_2}\vee\dots\vee x_r^{\sigma_r},$$

что и требовалось доказать.

Ортогональность всех членов (I) очевидна.

ЛЕММА 2. П у с т ь $f(x_1,x_2,\dots,x_m)=\bigvee\limits_{k=1}^{R}P_k$ $(R\leqslant 2^m)$ – ДНФ. Т о г д а

$$\bar f=\bar P_1\bar P_2\dots\bar P_R \qquad (2)$$

и е с л и в м е с т о к а ж д о г о и з в ы р а ж е н и й $\bar P_k$ в ф о р м у л е (2) п о д с т а в и т ь е г о п р е д с т а в л е н и е с о г л а с н о ф о р м у л е (I), т о в р е з у л ь т а т е п р и в е д е н и я к о н ъ ю н к ц и и $\bar P_1\bar P_2\dots\bar P_R$ к Д Н Ф (п о с р е д с т в о м р а с к р ы т и я с к о б о к) м ы п о л у ч и м О Д Н Ф б у л е в о й ф у н к ц и и $f(x_1,x_2,\dots,m)$.

Справедливость выражения (2) следует из теоремы де Моргана и леммы I.

ЛЕММА 3. Б у л е в а ф у н к ц и я $f(x_1,x_2,\dots,x_m)$, п р е д с т а в л е н н а я в Д Н Ф $f(x_1,x_2,\dots,x_m)=\bigvee\limits_{k=1}^{R}P_k$ $(R\leqslant 2^m)$, э к в и в а л е н т н а б у л е в о й ф у н к ц и и

$$f(x_1,x_2,\dots,x_m)=P_1\vee\bar P_1P_2\vee\dots\vee\bar P_1\bar P_2\dots\bar P_{R-1}P_R. \qquad (3)$$

Е с л и в м е с т о к а ж д о г о и з в ы р а ж е н и й $\bar P_i$ $(i\leqslant R)$ п о д с т а в и т ь е г о п р е д с т а в л е н и е с о г л а с н о (I), т о в р е з у л ь т а т е п р и в е д е н и я д и з ъ ю н к ц и и (3) к Д Н Ф (п о с р е д с т в о м р а с к р ы т и я с к о б о к) м ы п о л у ч и м О Д Н Ф б у л е в о й ф у н к ц и и $f(x_1,x_2,\dots,x_m)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выражение (3) есть очевидное следствие равенства

$$\bigvee_{k=1}^{R}P_k=\overline{\mathop{\&}_{k=1}^{R}\bar P_k}$$

и леммы I.

Ортогональность (3) очевидна.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если первые S членов ДНФ ($S\leqslant R$) булевой функции $f(x_1,x_2,\dots,x_m)=\bigvee\limits_{k=1}^{R}P_k$ попарно ортогональны, то выражение (3) может быть приведено к виду

$$f(x_1,x_2,\dots x_m)=P_1\vee P_2\vee\dots\vee P_{S+1}\vee\bar P_1\bar P_2\dots\bar P_{S+1}P_{S+2}\vee\dots\vee\bar P_1\bar P_2\dots\bar P_{R-1}P_R. \qquad (4)$$

ЛЕММА 4. П у с т ь f_1,f_2,f_3,f_4 – б у л е в ы ф у н к ц и и. Т о г д а

$$f=\overline{\bar f_1f_2\vee\bar f_3f_4}=[f_1\vee\overline{f_1\vee f_2}]\mathbin{\&}[f_3\vee\overline{f_3\vee f_4}]. \qquad (5)$$

Е с л и к а ж д о е и з в ы р а ж е н и й $\overline{f_1\vee f_2}$ и $\overline{f_3\vee f_4}$ п р е о б р а з о в а т ь с о г л а с н о ф о р м у л а м (2) и (I), т о п о с л е п р и в е д е н и я в ы р а ж е н и я (5) к Д Н Ф (п о с р е д с т в о м р а с к р ы т и я с к о б о к) м ы п о л у ч и м О Д Н Ф б у л е в о й ф у н к ц и и f.

Справедливость выражения (5) следует из теоремы де Моргана.

Теперь дадим описание алгоритма преобразования реализации к ОДНФ. По написанию все реализации могут быть разбиты на два класса.

I. К I-му классу отнесем все формулы $F(f)$, не содержащие выражения вида $\bar Q$, где Q –формула, отличная от независимой переменной (x_i).

2. Ко 2-му – формулы $F(f)$, каждая из которых содержит, по крайней мере, одно выражение вида $\bar Q$, где Q не есть независимая переменная.

Для I-го класса алгоритм состоит из четырех этапов:

I) приведения реализации $F(f)$ к ДНФ;
2) нумерации членов ДНФ от I до R $(R\leqslant 2^m)$, причем членам низшего ранга присваиваются низшие номера;
3) выделения и устранения поглощенных членов, ибо их наличие приводит к увеличению количества операций при определении ОДНФ;
4) определения ОДНФ с помощью леммы 3.

ЗАМЕЧАНИЕ. На 4-м этапе для уменьшения количества операций целесообразно в конъюнкции $\bar{P}_1\bar{P}_2\ldots\bar{P}_{i-1}P_i$ произвести следующие упрощения:

I. Приравнять нулю те члены ДНФ P_j $(j\leqslant i-1)$, которые ортогональны члену P_i.

2. Приравнять нулю те элементарные конъюнкции отрицаний $\bar{P}_j$ $(j\leqslant i-1)$, которые ортогональны P_i.

ПРИМЕР I. $F(f_0)=B(AC\vee DF)\vee E(\bar{A}C\vee\bar{B}D\bar{F})\vee BCDF$;

$$BAC\vee BDF\vee E\bar{A}C\vee E\bar{B}D\bar{F}\vee BCDF;$$

$$BAC\vee BDF\vee E\bar{A}C\vee E\bar{B}D\bar{F}\vee BCDF;$$

$$BAC\vee BDF\vee E\bar{A}C\vee E\bar{B}DF;$$

$$BAC\vee(\cancel{\bar{B}}\vee B\bar{A}\vee BA\bar{C})BDF\vee(\bar{B}\vee B\bar{D}\vee BDF)E\bar{A}C\vee(\cancel{\bar{E}}\vee EA\vee E\bar{A}\bar{C})E\bar{B}D\bar{F};$$

$$f_0=BAC\vee B\bar{A}DF\vee BA\bar{C}DF\vee\bar{B}E\bar{A}C\vee B\bar{D}E\bar{A}C\vee BD\bar{F}\bar{A}C\vee EA\bar{B}DF\vee E\bar{A}\bar{C}\bar{B}DF.$$

Формулы класса П приводят к формулам класса I, если к $\bar{Q}$ применить леммы 2 и 4.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для уменьшения количества операций целесообразно отрицание $\bar{Q}$ (если Q принадлежит классу I) преобразовать по формуле:

$$\bar{Q}=\bar{P}_1\bar{P}_2\ldots\bar{P}_{R-1}P_{R1}\vee\bar{P}_1\bar{P}_2\ldots\bar{P}_{R-1}P_{R2}\vee\ldots\vee\bar{P}_1\bar{P}_2\ldots\bar{P}_{R-1}P_{Rr}, \qquad (6)$$

где $P_{R1}\vee P_{R2}\vee\ldots\vee P_{Rr}=\bar{P}_R$.

Определение ОДНФ конъюнкции вида $\bar{P}_1\bar{P}_2\ldots\bar{P}_{R-1}P_{Ri}$ $(i\leqslant r)$ описано выше.

ПРИМЕР 2. $F(f_0)=\overline{B(A\vee C)\vee\bar{A}C}\vee\bar{A}\bar{B}$;

$$F_1(f_0)=\overline{BA\vee BC\vee\bar{A}C}\vee\bar{A}\bar{B};$$

$$F_2(f_0)=(\bar{B}\vee\bar{A})(\bar{B}C\vee\bar{C})(AC\vee\bar{C})\vee\bar{A}\bar{B};$$

$$F_3(f_0)=(\bar{B}A\vee\cancel{\bar{A}})(\bar{B}C\vee\cancel{\bar{C}})AC\vee(\bar{B}A+\bar{A})(\cancel{\bar{B}C}\vee\bar{C})\bar{C}\vee\bar{A}\bar{B};$$

$$F_4(f_0)=\bar{B}AC\vee\bar{B}A\bar{C}\vee\bar{A}\bar{C}\vee\bar{A}\bar{B};$$

$$f_0=\bar{B}AC\vee\bar{B}A\bar{C}\vee\bar{A}\bar{C}\vee(\cancel{A\bar{C}}\vee C)\bar{A}\bar{B}=$$

$$=\bar{B}AC\vee\bar{B}A\bar{C}\vee\bar{A}\bar{C}\vee\bar{A}\bar{B}C.$$

§ 4. Решение задачи № I

Первый этап решения задачи для элемента $\alpha_i\in F(f_0)$ заключается в том, что реализация, согласно которой работает данный элемент, преобразуется в ОДНФ. Алгоритм подобных преобразований описан выше.

На втором этапе определяется математическое ожидание срабатывания элемента α_i за N независимых включений. Ввиду того, что члены ОДНФ попарно ортогональны, необходимо и достаточно определить вероятность равенства единице каждого члена в отдельности и просуммировать полученные вероятности, поскольку обращение в единицу двух членов ОДНФ – несовместимые события.

Очевидно, что вероятность равенства единице элементарной конъюнкции

$$P=x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}\ldots x_r^{\sigma_r}$$

равна произведению

$$\mathcal{P}(P=1)=\omega_{x_1}^{\sigma_1}\cdot\omega_{x_2}^{\sigma_2}\ldots\omega_{x_r}^{\sigma_r},$$

где $\omega_{x_i}^{\sigma_i}=q_{x_i}$ при $\sigma_i=1$,

$\omega_{x_i}^{\sigma_i}=p_{x_i}$ при $\sigma_i=0$.

ПРИМЕР 3. $F(f_0)=\overline{B(A\vee C)\vee\bar{A}C}\vee\bar{A}\bar{B}$.

Пусть $q_A=\frac{1}{2}$, $q_B=\frac{1}{4}$, $q_C=\frac{1}{8}$,

в ОДНФ $f_0=\bar{B}AC\vee\bar{B}A\bar{C}\vee\bar{A}\bar{C}\vee\bar{A}\bar{B}C$

$$\mathcal{P}(f_0=1)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{8},$$

$$\mathcal{P}(f_0=1)=\frac{55}{64}.$$

§ 5. Решение задачи № 2

Сбой в элементе реализации $\alpha_i\in F(f_0)$ приводит к изменению реализации, а именно к $F(\varphi_0)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если реализации $F(f_0)$ и $F(\varphi_0)$ различимы, то существует функция ошибки f_E, равная единице тогда и только тогда, когда сочетание независимых переменных $x_1,x_2,\ldots,x_m$ вызывает различные реакции на выходах реализаций $F(f_0)$ и $F(\varphi_0)$.

Вероятность того, что функция ошибки f_E равна единице есть вероятность появления ошибки на выходе реализации при сбое в элементе α_i .

Рассмотрим теорему I, количественно характеризующую искомую вероятность.

ТЕОРЕМА I. Вероятность появления ошибки на выходе реализации $F(f_0)$ при сбое в элементе реализации $\alpha_i \in F(f_0)$ равна

$$\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(f_0=1) + \mathcal{P}(\psi_0=1) - 2\mathcal{P}(f_0\psi_0=1). \qquad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f_0 ψ_0 и $f_0 \& \psi_0$ имеют следующие представления в виде СДНФ:

$$f_0 = P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee P_{R_1} ,$$
$$\psi_0 = P_1' \vee P_2' \vee \ldots \vee P_{R_2} ,$$
$$f_0 \& \psi_0 = P_1'' \vee P_2'' \vee \ldots \vee P_{R_3}'' .$$

Считая элементарные конъюнкции

$$P_i , \quad 1 \leq i \leq R_1 ,$$
$$P_j' , \quad 0 \leq j \leq R_2 ,$$
$$P_k'' , \quad 0 \leq K \leq R_3$$

элементами соответствующих множеств

$$\mathcal{M}_{f_0} = \{ P_1, P_2, \ldots, P_{R_1} \} ,$$
$$\mathcal{M}_{\psi_0} = \{ P_1', P_2', \ldots, P_{R_2}' \} ,$$
$$\mathcal{M}_{f_0\psi_0} = \{ P_1'', P_2'', \ldots, P_{R_3}'' \} ,$$

легко определить множество элементарных конъюнкций $\mathcal{M}_E$, соответствующее СДНФ функции ошибки:

$$\mathcal{M}_E = (\mathcal{M}_{f_0} \setminus \mathcal{M}_{f_0\psi_0}) \cup (\mathcal{M}_{\psi_0} \setminus \mathcal{M}_{f_0\psi_0}) . \qquad (8)$$

Действительно, множества $\mathcal{M}_{f_0} \setminus \mathcal{M}_{f_0\psi_0}$ и $\mathcal{M}_{\psi_0} \setminus \mathcal{M}_{f_0\psi_0}$ ортогональны, и их элементы (элементарные конъюнкции m - ранга) соответствуют сочетаниям независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$, которые вызывают различные реакции на выходах реализаций $F(f_0)$ и $F(\psi_0)$.

Поскольку $\mathcal{M}_{f_0} \setminus \mathcal{M}_{f_0\psi_0}$ и $\mathcal{M}_{\psi_0} \setminus \mathcal{M}_{f_0\psi_0}$ ортогональны, а $\mathcal{M}_{f_0} \supset \mathcal{M}_{f_0\psi_0}$ и $\mathcal{M}_{\psi_0} \supset \mathcal{M}_{f_0\psi_0}$, то

$$\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(f_0=1) - \mathcal{P}(f_0\psi_0=1) + \mathcal{P}(\psi_0=1) - \mathcal{P}(f_0\psi_0=1)$$

или

$$\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(f_0=1) + \mathcal{P}(\psi_0=1) - 2\,\mathcal{P}(f_0\psi_0=1) .$$

Теорема доказана.

Согласно теореме I, для решения задачи № 2 необходимо найти булевы функции f_0 , ψ_0 и $f_0 \& \psi_0$, а затем решить для каждой из них задачу № I.

ПРИМЕР 4. $F(f_0) = A(\bar{B}CD \vee \bar{D}) \vee \bar{A}\ \bar{B}\bar{C}\bar{D}$

Пусть $q_A = \frac{1}{2}$, $q_B = \frac{1}{4}$, $q_C = \frac{1}{8}$, $q_D = \frac{1}{16}$.

Сбой произошел в конъюнкции $\bar{B}CD$. Характер сбоя: $\bar{B}CD \equiv 0$. Тогда $\psi_0 = A\bar{D} \vee \bar{A}$. Записав функции f_0 , ψ_0 , $f_0 \& \psi_0$ в ОДНФ, получаем:

$$f_0 = A\bar{B}CD \vee A\bar{D} \vee \bar{A}BCD \vee \bar{A}\bar{C}D \vee \bar{A}\bar{D} ;$$
$$\psi_0 = A\bar{D} \vee \bar{A} ;$$
$$f_0 \& \psi_0 = (A\bar{B}CD \vee A\bar{D} \vee \bar{A}BCD \vee \bar{A}\bar{C}D \vee \bar{A}\bar{D}) \& (A\bar{D} \vee \bar{A}) =$$
$$= A\bar{D} \vee \bar{A}BCD \vee \bar{A}\bar{C}D \vee \bar{A}\bar{D} ;$$
$$\mathcal{P}(f_0=1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{16} + \frac{1}{2}\frac{15}{16} + \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{8}\frac{1}{16} + \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{8}\frac{1}{16} + \frac{1}{2}\cdot\frac{15}{16} = \frac{992}{1024} ;$$
$$\mathcal{P}(\psi_0=1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{15}{16} + \frac{1}{2} = \frac{992}{1024} ;$$
$$\mathcal{P}(\psi_0 f_0=1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{15}{16} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{16} + \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{16} + \frac{1}{2}\cdot\frac{15}{16} = \frac{989}{1024} ;$$
$$\mathcal{P}(E) = \frac{992}{1024} + \frac{992}{1024} - 2\cdot\frac{989}{1024} = \frac{6}{1024} ;$$
$$\mathcal{P}(E) = \frac{6}{1024} .$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Сбои в элементе $\alpha_i \in F(f_0)$, приводящие к зависимостям

1. $\psi_0 \supset f_0$,
2. $f_0 \supset \psi_0$,
3. $\left.\begin{matrix} \psi_0 \not\supset f_0 , \\ f_0 \not\supset \psi_0 , \end{matrix}\right\}$

будем называть сбоями I, 2 и 3-го рода, соответственно.

ПРИМЕР 5. Сбои I-го рода:

а) $F(f_0) = AB \vee \bar{C}$, $\qquad F(\psi_0) \equiv 1$;

б) $F(f_0) = AB \vee \bar{C}$, $\qquad F(\psi_0) = (A \vee B) \vee \bar{C}$.

Сбои 2-го рода:

а) $F(f_0) = (A\vee D)C$, $F(\psi_0) \equiv 0$;

б) $F(f_0) = (A\vee D)C$, $F(\psi_0) = (A\& D)C$.

Сбои 3-го рода:

а) $F(f_0) = A\bar{B}$, $F(\psi_0) = \overline{A\bar{B}}$;

б) $F(f_0) = AB\vee\bar{A}$, $F(\psi_0) = \bar{A}B\vee\bar{\bar{A}}$.

Очевидно, сбой в элементе $\alpha_i \in F(f_0)$ вырождается из I-го рода во 2-й и наоборот, если реализация $F(f_0)$ предусматривает выполнение над элементом α_i нечетного количества операций отрицания.

ПРИМЕР 6. $F(f_0) = \overline{\overline{AB\vee\bar{D}}\vee C}$.

Пусть в элементе α_i , работающем согласно реализации $F(f_i) = D$, произошел сбой. Характер сбоя: $D \equiv 0$ (сбой 2-го рода), т.е. $F(\psi_0) = \overline{\overline{AB\vee\bar{0}}\vee C}$. Сбой реализации $F(f_0)$ будет I-го рода, ибо $f_0 \subset \psi_0$.

Если реализация $F(f_0)$ содержит сбои только I-го или только 2-го рода, то справедливо следующее следствие теоремы I.

СЛЕДСТВИЕ. Реализация $F(f_0)$, содержащая сбои только I-го или только 2-го рода, имеет вероятность ошибки на выходе от этого сбоя:

$$\mathcal{P}(E) = |\mathcal{P}(f_0=1) - \mathcal{P}(\psi_0=1)| \quad . \qquad (9)$$

Справедливость следствия следует из выражений:

$$f_0 \& \psi_0 = f_0 \text{ , если } f_0 \subset \psi_0 \text{ ;}$$

$$f_0 \& \psi_0 = \psi_0 \text{ , если } f_0 \supset \psi_0 \text{ .}$$

ПРИМЕР 7. $F(f_0) = \overline{B(A\vee C)\vee\bar{A}C}\vee\bar{A}\bar{B}$

Пусть $q_A = \frac{1}{2}$, $q_B = \frac{1}{4}$, $q_C = \frac{1}{8}$.

Сбой произошел в конъюнкции $B(A\vee C)$. Характер сбоя: $B(A\vee C) \equiv 1$. Тогда

$$\psi_0 = \overline{1\vee\bar{A}C}\vee\bar{A}\bar{B} = 0(AC\vee\bar{C})\vee\bar{A}\bar{B} = \bar{A}\bar{B};$$

$$\mathcal{P}(f_0=1) = \frac{55}{64} \text{ ;}$$

$$\mathcal{P}(\psi_0=1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} = \frac{24}{64} \text{ ;}$$

$$\mathcal{P}(E) = \left|\frac{55}{64} - \frac{24}{64}\right| = \frac{31}{64} \text{ ;}$$

$$\mathcal{P}(E) = \frac{31}{64} \text{ .}$$

На практике следствие теоремы I имеет гораздо большее значение, чем сама теорема, ибо большинство реализаций могут иметь сбои только I-го или только 2-го рода.

Заключение

I. При анализе надежности однотактных схем оказывается весьма эффективным применение метода ортогонализации булевых выражений. Применение этого метода позволяет существенно упростить решение задачи № I (определение загрузки i-го элемента за N независимых включений схемы) и заменить три разнородных алгоритма A_1, A_2, A_3 одним, более простым и в то же время более эффективным.

2. Доказанная теорема I значительно упрощает определение вероятности появления ошибки на выходе при сбое в одном из элементов схемы. При этом компоненты искомой вероятности могут быть найдены как с помощью алгоритмов A_1, A_2, A_3 , так и методом ортогонализации.

Литература

I. Нейман Дж. Вероятностная логика и синтез надежных организмов из ненадежных компонент. Сб. "Автоматы", ИЛ, М., 1956.

2. Макаров С.В. Вероятностные расчеты однотактных схем. Сб. "Вычислительные системы", вып. 4, Новосибирск, Изд-во ИМ СО АН СССР, 1962.

3. Лупанов О.Б. Об одном классе схем из функциональных элементов. Сб. "Проблемы кибернетики", вып. 7, М., 1962.

4. Кобринский А.Е. и Трахтенброт Б.А. Введение в теорию конечных автоматов. Физматгиз, М., 1962.