ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Сборник трудов
1963 г. Института математики СО АН СССР Выпуск 6

РАСПОЛОЖЕНИЕ ГРАФА НА ПЛОСКОСТИ

Г.С. Плесневич

Математические задачи, решаемые в этой статье, возникли из вопросов автоматизации проектирования вычислительных машин.

В статье рассматриваются только связные неориентированные графы без петель и параллельных рёбер.

Пусть $\mathcal{G}=(X, U)$ - произвольный граф; $X=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ - множество его вершин и U - множество его рёбер $u=(x_i, x_j)$. Плоской реализацией графа $\mathcal{G}$ называется представление его вершин x_i точками плоскости $e(x_i)$, а его рёбер u - открытыми простыми дугами $e(u)$, лежащими в плоскости, причём выполняются следующие условия:

если $x_i \neq x_j$, то $e(x_i) \neq e(x_j)$,

если $u \neq u'$, то $e(u) \cap e(u') = \phi$,

если вершина x_i инцидентна ребру u, то точка $e(x_i)$ является концом дуги $e(u)$.

Граф называется плоским, если он имеет хотя бы одну плоскую реализацию. Всякая плоская реализация $e(\mathcal{G})$ графа $\mathcal{G}$ задает в каждом множестве

$$\Gamma(x_i)=\{x \mid (x, x_i)\in U\}=\{x_j, x_k, \dots, x_e\}$$

циклический порядок

$$x_j < x_k < \dots < x_e < x_j ,$$

который определяется порядком следования дуг $e(x_i, x_j), e(x_i, x_k), \dots, e(x_i, x_e)$ в соответствии с ориентацией плоскости. Наоборот, если в $\Gamma(x_i)$ заданы циклические порядки, индуцированные некоторой плоской реализацией, то её можно легко найти с точностью до изотопии на плоскости.

ЗАДАЧА I. Найти эффективный алгоритм, применимый к любому графу $\mathcal{G}$ и определяющий, является ли граф $\mathcal{G}$ плоским или нет.

ЗАДАЧА 2. Найти эффективный алгоритм, применимый к любому плоскому графу $\mathcal{G}$ и определяющий циклические порядки, индуцированные некоторой плоской реализацией $e(\mathcal{G})$ графа $\mathcal{G}$.

Покажем, что при решении задач I и 2 можно ограничиться графами $\mathcal{G}$, обладающими следующими свойствами:

А. $\mathcal{G}$ не имеет точки сочленения.

В. Степень каждой вершины $\mathcal{G}$ не меньше трех.

А. Пусть $G=(X, U)$ имеет точку сочленения x. Это означает, что подграф, порожденный множеством вершин $X \setminus x$, распадается на компоненты связности $(X_i, U_i) = \mathcal{G}_i$. Легко заметить, что граф $\mathcal{G}$ будет плоским тогда и только тогда, когда плоскими будут все графы $\mathcal{G}_i' = (X_i \cup x,\ U_i \cup \bigcup_{(x,y)\in U} (x,y))$. Из плоских реализаций графов $\mathcal{G}_i'$ легко получить плоскую реализацию графа $\mathcal{G}$.

В. Рассмотрим следующие преобразования графа $\mathcal{G}=(X,U)$:

1. $(X,U) \to (X \setminus x,\ U \setminus (x,x'))$, где x — вершина степени I и x' смежна с x.
2. $(X,U) \to (X \setminus x,\ [U \setminus \{(x,x'),(x,x'')\}] \cup (x',x''))$, где x — вершина степени 2 и x', x'' — вершины, смежные с x.

Очевидно, что граф, полученный преобразованием (I) или (2), будет плоским тогда и только тогда, когда исходный граф является плоским. Если мы имеем плоскую реализацию преобразованного графа, то легко получить плоскую реализацию исходного графа. Остается заметить, что любой граф последовательными преобразованиями вида I и 2 может быть приведен к графу, у которого каждая вершина имеет степень, большую или равную 3.

Пусть $\mathcal{G}=(X,U)$ — произвольный граф. С каждым элементарным циклом $\mu=[x_{\mu_1}, x_{\mu_2}, \dots, x_{\mu_p}]$ графа $\mathcal{G}$ мы свяжем некоторый граф R_μ. Вершинами графа R_μ будем считать подграфы K графа $\mathcal{G}$ следующих двух видов:

I) $K=(x \cup x', (x,x'))$, где x и x' — любые две несоседние вершины цикла μ, т.е. $x = x_{\mu_i}, x' = x_{\mu_j}$ и $|i-j| \neq 1, p-1$;

2) $K=(X_i \cup Y, V)$, где X_i — множество вершин компоненты связности графа

$$\left(X \setminus \{x_{\mu_1}, x_{\mu_2}, \dots, x_{\mu_p}\},\ U \setminus \{(x_{\mu_1}, x_{\mu_2}), \dots, (x_{\mu_p}, x_{\mu_1})\}\right);$$

Y — множество вершин цикла μ, смежных хотя бы с одной вершиной из X_i; V — множество ребер графа $\mathcal{G}$, соединяющих вершины из $X_i \cup Y$.

Две вершины K и K' графа R_μ будем считать смежными, если существует четверка вершин цикла μ

$$x_{\mu_i}, x_{\mu_j}, x_{\mu_k}, x_{\mu_e} \quad (i<j<k<e)$$

такая, что

$$x_{\mu_i}, x_{\mu_k} \in K \qquad \text{и} \qquad x_{\mu_j}, x_{\mu_e} \in K'.$$

ЛЕММА I. Если граф $\mathcal{G}$ является плоским, то для любого его цикла μ граф R_μ будет бихроматическим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{G}$ — произвольный плоский граф и $e(\mathcal{G})$ — какая-либо его плоская реализация. Произвольному циклу μ графа $\mathcal{G}$ соответствует замкнутая кривая $e(\mu)$ в $e(\mathcal{G})$. Кривая $e(\mu)$ разбивает плоскость E^2 на две области: O_μ^1 и O_μ^0 — внутреннюю и внешнюю, соответственно.

$$E^2 = O_\mu^0 \cup O_\mu^1 \cup e(\mu), \quad \overline{O_\mu^0} \cap \overline{O_\mu^1} = e(\mu), \quad O_\mu^0 \cap O_\mu^1 = \varnothing .$$

Легко видеть, что для комплекса $e(K)$, соответствующего произвольной вершине K графа R_μ, имеет место одно из 2-х соотношений:

$$\text{либо} \quad e(K) \subset \overline{O_\mu^0}, \quad \text{либо} \quad e(K) \subset \overline{O_\mu^1}.$$

Действительно, если K имеет вид I, то это тривиально. Если K имеет вид 2 и $e(x) \in O_\mu^0$, $x \in X_i$, то для любого $x' \in X_i$ существует такая цепь λ, соединяющая x с x', что $e(\lambda) \cap e(\mu) = \varnothing$. Отсюда следует, что $e(X_i) \subset O_\mu^0$ и, значит, $e(K) \subset \overline{O_\mu^0}$.

Окрасим те вершины K графа R_μ, для которых $e(K) \subset \overline{O_\mu^i}$, в цвет i $(i=0,1)$. Эта окраска графа R_μ правильна, т.е. никакие две смежные вершины R_μ не окрашены одинаково. Действительно, пусть вершины K и K' смежные. Это означает, что существуют четыре вершины $x_{\mu_i}, x_{\mu_j}, x_{\mu_k}, x_{\mu_e}$ $(i<j<k<e)$ такие, что $x_{\mu_i}, x_{\mu_k} \in K$ и $x_{\mu_j}, x_{\mu_e} \in K'$. Соединим вершину x_{μ_i} с вершиной x_{μ_k} (соответственно, x_{μ_j}

с x_{μ_e}) цепью λ (соответственно, λ'), лежащей в K (соответственно, в K'). Предположим, что $e(K)\subset \overline{O'_\mu}$.
Тогда кривая должна лежать в O^o_μ (рис.I), так как

$$e(\lambda')\cap e(\mu)=x_{\mu_j}\cup x_{\mu_e}.$$

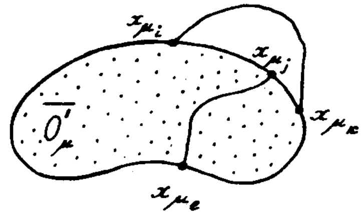

Рис. I

Следовательно, K и K' окрашиваются разными красками. Поэтому граф R_μ является бихроматическим.

Из доказательства леммы I видно, что каждая плоская реализация графа $\mathcal{G}$ индуцирует определенную бихроматическую окраску графа R_μ.

ЛЕММА 2. Если граф $\mathcal{G}$ плоский, то для каждой бихроматической окраски графа R_μ существует плоская реализация $e(\mathcal{G})$, которая индуцирует эту окраску.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма 2 легко доказывается индукцией по числу компонент связности графа R_μ. Если граф R_μ связен, то он имеет точно две различные бихроматические окраски. Пусть $e(\mathcal{G})$ - плоская реализация графа $\mathcal{G}$, которая индуцирует в R_μ первую бихроматическую окраску. Тогда, совершая инверсию плоскости относительно цикла μ, мы получим новую плоскую реализацию $e'(\mathcal{G})$ графа $\mathcal{G}$, которая индуцирует вторую бихроматическую окраску графа R_μ.

Предположим, что граф R_μ не связен, и пусть S - какая-либо его компонента связности (рис.2). Тогда существуют такие вершины x, y цикла μ, что

если $K\in S$, то $K\cap\mu\subset\mu[x,y]$,

если $K\in R_\mu\setminus S$, то $K\cap\mu\subset\mu[y,x]$.

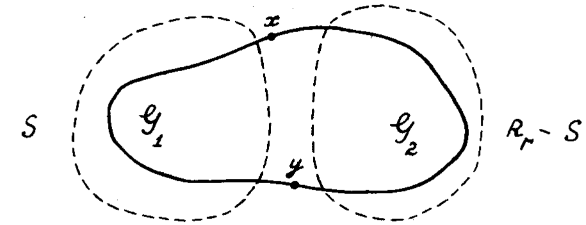

Рис. 2

Ясно, что граф $\mathcal{G}_1$, образованный цепью $\mu[y,x]$ и всеми подграфами $K\in S$ с присоединенным, кроме того, ребром (x,y), будет плоским. Далее, очевидно, что $S=R_{\mu[y,x]}\cup(x,y)$ и $R_\mu\setminus S=R_{\mu[x,y]}\cup(y,x)$ в соответствующем плоском графе $\mathcal{G}_2$. Поскольку число компонент связностей каждого из графов S и $R_\mu\setminus S$ меньше числа компонент графа R_μ, то, по предположению индукции, мы получим плоские реализации $e(\mathcal{G}_1)$ и $e(\mathcal{G}_2)$ графов $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$, которые индуцируют заданные бихроматические окраски графов S и $R_\mu\setminus S$. Склеивая $e(\mathcal{G}_1)$ и $e(\mathcal{G}_2)$ по x, y, можно получить плоскую реализацию $e(\mathcal{G})$, которая индуцирует заданную бихроматическую окраску графа R_μ.

Построим теперь для произвольного графа $\mathcal{G}$ некоторую систему его циклов $M=\{\mu\}$. Процесс построения циклов системы M можно представить в виде двоичного дерева (рис. 3), точки которого интерпретируют циклы μ, а стрелки указывают последовательность построения циклов.

Циклы системы $M=\{\mu\}$ строятся вместе с некоторыми бихроматическими окрасками R_μ. В качестве μ_0 берем какой-либо цикл графа $\mathcal{G}_1$, а в качестве бихроматической окраски графа R_{μ_0} - произвольную бихроматическую окраску. Если R_{μ_0} не является бихроматическим, то построение системы M завершается. Пусть μ_α - уже построенный цикл и R_{μ_α} - соответствующий ему граф с уже определенной бихроматической окраской. Рассмотрим совокупность всех вершин K_i графа R_{μ_α} вида 2), которые окрашены краской 0. Для каждого подграфа K_i из этой совокупности выберем пару вершин цикла μ_α $x_{i_1}, x_{i_2}\in K_i$, где i_1, i_2 - индексы из нумерации вершин цикла μ_α такие, что $i_1>i_2$ и для любого $i_1>j>i_2$ выполняется $x_j\notin K_i$. Возьмем в K_i элементарную цепь, соединяющую x_{i_1} с x_{i_2}, причем такую, что $\mu_\alpha\cap\lambda_i=\varnothing$. Определим цикл μ_{α_0} как цикл, составленный из ребер подграфа

$$(\mu_\alpha - \cup \mu_\alpha [x_{i_1}, x_{i_3}]) \cup (\bigcup_i \lambda_i).$$

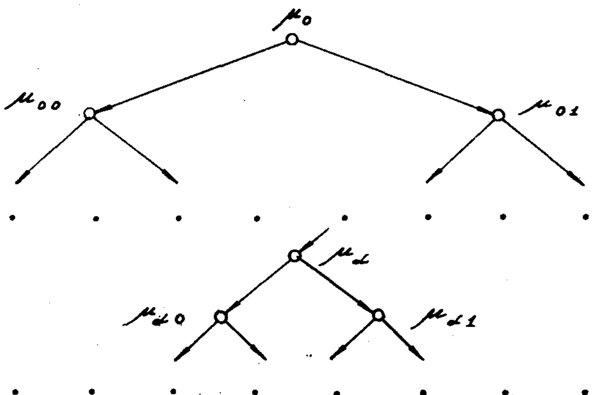

Рис 3

Рассмотрим теперь граф $R_{\mu_{\alpha 0}}$. Вершины графа $R_{\mu_{\alpha_0}}$ можно разбить на три категории вершин: I) совпадающие с некоторыми вершинами графа R_{μ_α} ; 2) K_j' , для которых существует хотя бы одна вершина K_i графа R_{μ_α} такая, что $K_j' \subset K_i$; 3) K_j , для которых существуют такие вершины K_k' и K_e' графа R_{μ_α} , что $K_j' \supset K_k' \cup K_e'$. Окрасим теперь все вершины категорий I) и 2) в цвет I. Бихроматическую окраску графа $R_{\mu_{\alpha 0}}$ получаем, распространяя только что полученную окраску вершин R_{μ_α} на весь граф. Если такого распространения не существует, то будем считать, что цикл μ_{α_0} не имеет последующих циклов $\mu_{\alpha 00}$, $\mu_{\alpha 01}$.

ТЕОРЕМА. Граф $\mathcal{G}$ является плоским тогда и только тогда, когда указанным выше способом можно построить хотя бы одну систему циклов M такую, что а) каждый граф R_μ бихроматический; б) каждая вершина $\mathcal{G}$ принадлежит некоторому циклу $\mu \in M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{G}=(X,U)$ – плоский граф и $e(\mathcal{G})$ – его плоская реализация. Мы можем построить систему M , используя для графов R_μ бихроматические окраски, индуцированные плоской реализацией $e(\mathcal{G})$. Процесс построения циклов μ закончится тогда, когда все вершины $\mathcal{G}$ будут использованы хотя бы в одном цикле. Таким образом, система M удовлетворяет условиям а) и б).

Построим в графе $\mathcal{G}=(X,U)$ систему $M=\{\mu\}$ циклов со свойствами а) и б). Докажем, что граф $\mathcal{G}$ будет плоским. Рассуждения будем проводить индукцией по числу циклов в системе M . Если M состоит из одного цикла μ , то μ в силу условия б) является гамильтоновым циклом. Следовательно, каждая вершина графа R_μ имеет вид I), т.е. является просто ребром графа $\mathcal{G}$. Взяв какую-либо бихроматическую окраску графа R_μ, легко получим плоскую реализацию графа $\mathcal{G}$, помещая окрашенные цветом I ребра вне цикла $e(\mu)$, а окрашенные цветом 0 ребра – внутри цикла $e(\mu)$.

Предположим, что теорема верна для всех графов, у которых существуют системы M , удовлетворяющие условиям а) и б) и содержащие меньше чем N циклов.

Пусть $\mathcal{G}$ – произвольный граф и M – система циклов, удовлетворяющая условиям а) и б) и содержащая N циклов. Возьмем в системе M какой-либо цикл μ_β , не имеющий последующих циклов $\mu_{\beta 0}$ и $\mu_{\beta 1}$. Пусть μ_δ – предшествующий μ_β цикл, например $\mu_{\delta_0} = \mu_\beta$. Рассмотрим граф $\mathcal{G}' = \mu_\delta \cup \bigcup K'$, где K пробегает все окрашенные в цвет I вершины графа R_δ. Система циклов $M \setminus \mu_\beta$ является, очевидно, системой циклов типа M для графа $\mathcal{G}'$.

Граф $R_{\mu_\delta}(\mathcal{G}')$ является пустым (т.е. не содержащим ребер) графом. По предположению индукции граф $\mathcal{G}'$ является плоским. Возьмем такую его плоскую реализацию $e(\mathcal{G}')$, которая индуцирует окраску вершин графа $R_{\mu_\delta}(\mathcal{G}')$ в цвет I.

Далее, рассмотрим совокупность графов $\mathcal{G}_i$, каждый из которых имеет вид $\mathcal{G}_i = \mu_\delta \cup K_i$, где K_i – окрашенная в цвет 0 вершина графа R_{μ_δ}. Ясно, что цикл $\mu_i = \mu_\delta \cup \lambda_i$, где $\lambda_i = \mu_\beta \cap K_i$, является гамильтоновым циклом в графе $\mathcal{G}_i'$. Граф $R_{\mu_i}(\mathcal{G}')$, являясь подграфом графа $R_{\mu_\beta}(\mathcal{G})$, – бихроматический. Следовательно, $\mathcal{G}_i'$ – плоский граф. Возьмем такую плоскую реализацию $e(\mathcal{G}_i')$ графа $\mathcal{G}_i$, что индуцированная бихроматическая окраска графа $R_{\mu_i}(\mathcal{G}')$ совпадает с бихроматической окраской его, как подграфа графа R_{μ_β}. Наконец, если мы склеим плоские реализации $e(\mathcal{G})$, $e(\mathcal{G}_i)$ по циклу $e(\mu_\beta)$, то получим плоскую реализацию графа $\mathcal{G}$. Таким образом, граф $\mathcal{G}$ – плоский.

Теорема показывает, что в качестве алгоритма, решающего задачу I, может быть взят процесс построения системы циклов M в графе $\mathcal{G}$. Граф $\mathcal{G}$ – плоский, если этот процесс приводит к системе M со свойствами а) и б). Действительно, если $\mathcal{G}$ –

плоский граф, то в силу теоремы существует система циклов M' со свойствами а) и б). Лемма 2 показывает, что тогда всякая система циклов типа M в $\mathcal{G}$ будет обладать свойствами а) и б). Если граф $\mathcal{G}$ не плоский, то теорема показывает, что всякая система типа M не обладает свойствами а) и б).

Этот же алгоритм, с небольшой модификацией, можно использовать при решений задачи 2. В этом случае вместе с нахождением циклов μ в множествах $\Gamma(x), x \in \mu$, определяются частичные циклические порядки, причём в конце построения системы M, удовлетворяющей условиям а) и б) каждое из множеств $\Gamma(x), x \in X$ получает циклические порядки.

В заключение укажем некоторые оценки числа ребер m плоского графа $\mathcal{G}$ в зависимости от числа его вершин.

Обозначим через q число граней какой-либо плоской реализации $e(\mathcal{G})$ графа $\mathcal{G}$. Известно (см. [I], стр. 228), что q на единицу меньше цикломатического числа $\nu(\mathcal{G})$ графа $\mathcal{G}$. Следовательно, по формуле Эйлера

$$m - n + 1 = q - 1 . \qquad (*)$$

Подсчитаем число q. К каждому ребру графа $\mathcal{G}$ примыкают две грани. Следовательно, m ребрам соответствует $2m$ граней, причем каждая i -угольная грань считается здесь i раз. Таким образом,

$$2m = \sum_{i=3}^{n} i q_i ,$$

где q_i - число i -угольных граней в графе $\mathcal{G}$. Отсюда имеем оценку

$$2m \geqslant \sum_{i=3}^{n} 3 q_i = 3 \sum_{i=3}^{n} q_i = 3q .$$

Тогда из $(*)$ получаем

$$m \leqslant 3(n-2) .$$

Более точную оценку для m получим, учитывая число q_3 треугольных граней:

$$2m = 3q_3 + \sum_{i=4}^{n} i q_i \leqslant 3q_3 + 4(q - q_3) = 4q - q_3 ,$$

$$m \leqslant 2(n-2) + \frac{q_3}{2} .$$

Поскольку всегда $q_3 \leqslant a_3$ - числа треугольников в $\mathcal{G}$, мы имеем

$$m \leqslant 2(n-2) + \frac{a_3}{2} .$$

Число a_3 может быть легко вычислено как след матрицы A^3, где A - матрица смежности $\mathcal{G}$. В частности, для числа ребер плоского графа без треугольников (например, для бихроматического графа) получим

$$m \leqslant 2(n-2) .$$

Литература

I. К. Берж. Теория графов и ее применения. М., ИЛ, 1962.