

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Г.А. Бекишев

В данной статье рассматривается одна задача теории графов, постановка которой возникла в связи с оценками оптимальных алгоритмов для решения математических задач на ВС [1], [2], [3].

Пусть дан граф $G = (X, \Gamma)$, где X - множество вершин графа, а Γ - отображение X в себя [4].

В работе [1] мы назвали A - разбиением графа G такое разбиение множества X на классы S_α ($\alpha = 1, 2, 3, \dots$), при котором выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} a) S_\alpha \neq \emptyset, \quad c) \bigcup_\alpha S_\alpha = X, \\ b) S_\alpha \cap S_\beta = \emptyset, \quad d) \Gamma S_\alpha \subseteq \bigcup_{\beta < \alpha} S_\beta. \end{aligned}$$

Там же было показано, что A - разбиением обладают прогрессивно конечные графы и только они. Наряду с этим указывалось, как построить минимальное A -разбиение для данного прогрессивно конечного графа G , т.е. A - разбиение с минимальным числом классов S_α или с минимальной мощностью множества этих классов в случае, если граф бесконечен. Однако, вопрос об оценке числа классов S_α в минимальном A -разбиении

графа G в работе [1] в общем виде не ставился. Точно так же в [1] не ставился в общем виде и вопрос об оценке величины

$$d = \min_{\alpha} \max |S_{\alpha}|,$$

где минимум берется по множеству всех минимальных AL -разбиений данного графа G .

Ограничиваясь случаем конечных графов, мы ставим теперь вопрос об оценках указанного рода. Точнее говоря, мы ставим следующие 2 задачи.

Пусть L - заданное натуральное число. Назовем AL -разбиением прогрессивно конечного графа $G=(X, \Gamma)$ с конечным числом m вершин $x_i \in X$ всякое A -разбиение G на классы S_{α} , при котором мощность классов удовлетворяет неравенству $|S_{\alpha}| \leq L$. Очевидно, всякое AL -разбиение графа G будет некоторым его A -разбиением, а при $L \geq m$ верно будет и обратное заключение.

В дальнейшем нам удобнее считать, что условие $d)$ в определении A -разбиения графа заменено на условие

$$d') \Gamma S_{\alpha} \subseteq \bigcup_{\beta > \alpha} S_{\beta}.$$

Такая замена в случае конечного графа G будет соответствовать нумерации S_{α} в обратном порядке.

Сформулируем теперь наши задачи.

ЗАДАЧА 1. Для данного прогрессивно конечного графа $G=(X, \Gamma)$ найти минимальное AL -разбиение и указать оценку числа классов S_{α} .

ЗАДАЧА 2. В множестве $\mathcal{T}$ всех минимальных AL -разбиений графа G найти минимальное AL -разбиение, на котором реализуется величина.

$$d = \min_{\mathcal{T}} \max_{\alpha} |S_{\alpha}|.$$

Дать оценку величины d .

Пусть $G=(X, \Gamma)$ - прогрессивно конечный граф с конечным числом вершин: $|X|=m$. Пусть L, p - заданные натуральные числа. Пронумеровав некоторым образом вершины графа $x_i \in X, i=1, 2, \dots, m$, строим квадратную матрицу порядка m

$$A = \|a_{ik}\|, m \text{ с элементами}$$

$$a_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если } x_k \in \Gamma x_i, \\ 0, & \text{если } x_k \notin \Gamma x_i. \end{cases} \\ (i, k = 1, 2, \dots, m).$$

Основная теорема, которую мы собираемся доказать, состоит в следующем.

ТЕОРЕМА 1. Для того, чтобы граф $G=(X, \Gamma)$ обладал AL -разбиением, состоящим из p классов $S_i (i=1, 2, \dots, p)$, необходимо и достаточно, чтобы система линейных неравенств:

$$\xi_{ij} \geq 0, \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, p \\ j = 1, 2, \dots, m \end{matrix} \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^p \xi_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^m \xi_{ij} \leq L, \quad i = 1, 2, \dots, p. \quad (3)$$

$$\sum_{k=1}^m a_{ik} \xi_{jk} \leq L \sum_{s=1}^{j-1} \xi_{si}, \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, m \\ j = 1, 2, \dots, p \end{matrix} \quad (4)$$

имела решение в целых числах.

НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть множества

$$S_1, S_2, \dots, S_p, \quad |S_i| \leq L,$$

образуют AL -разбиение графа $G=(X, \Gamma)$, состоящее из p классов. Построим матрицу

$$R = \|\xi_{ij}\|, \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, p, \\ j = 1, 2, \dots, m, \end{matrix}$$

элементы ξ_{ij} которой определены равенствами:

$$\xi_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } x_j \in S_i \\ 0, & \text{если } x_j \notin S_i. \end{cases}$$

Так как при AL -разбиении графа G каждая вершина $x_j \in X$ попадает в один и только один из классов $S_i, i=1, 2, \dots, p$,

то

$$\sum_{i=1}^p \xi_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Далее, так как $|S_i| \leq L$, то

$$\sum_{j=1}^m \xi_{ij} \leq L, \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

Покажем, что

$$\sum_{k=1}^m a_{ik} \xi_{jk} \leq L \sum_{s=1}^{j-1} \xi_{si},$$

$$i = 1, 2, \dots, m,$$

$$j = 1, 2, \dots, p.$$

В самом деле, существуют 2 возможности:

$$a) \sum_{s=1}^{j-1} \xi_{si} = 0, \quad b) \sum_{s=1}^{j-1} \xi_{si} = 1.$$

Первая из них означает, что $x_i \in S_z$, $z \geq j$.

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^m a_{ik} \xi_{jk} = 0.$$

В случае в) $x_i \in S_z$, где $z < j$, поэтому

$$\sum_{k=1}^m a_{ik} \xi_{jk} \leq L.$$

Таким образом, в обоих случаях неравенства (4) выполняются.

Из приведенных рассуждений следует, что система линейных неравенств (I) - (4) обладает решением ξ_{ij} ($i=1,2,\dots,p; j=1,2,\dots,m$) в целых числах, т.е. необходимость условия доказана.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Пусть ξ_{ij} ($i=1,2,\dots,p; j=1,2,\dots,m$) образуют целочисленное решение системы (I) - (4). Из условий (I) и (2) вытекает, что каждое ξ_{ij} есть либо 0, либо 1, причем, для каждого $j=1,2,\dots,m$ существует одно и только одно $i=1,2,\dots,p$, такое, что $\xi_{ij} = 1$.

Отнесём теперь всякую вершину x_j , для которой $\xi_{ij} = 1$ в класс S_i ($i=1,2,\dots,p$). На основании сделанных выше замечаний каждая вершина x_j попадет в один и только один из классов S_i . Далее, из условия (3) следует, что мощность каждого класса не превосходит L : $|S_i| \leq L$, $i=1,2,\dots,p$.

Чтобы окончательно убедиться в том, что построенные множества S_i образуют AL -разбиение графа G , остается лишь проверить условие $d')$ в определении AL -разбиения.

Пусть $x_i \in S_z$, а $x_j \in S_k$. Покажем, что $x_i \in S_z$, где $z > k$. Для этого предположим, что $x_i \in S_z$, $z \leq k$. Мы имеем $\xi_{zi} = 1$, $\xi_{kj} = 1$. Возьмем в совокупности неравенств (4) неравенство

$$\sum_{k=1}^m a_{jk} \xi_{zk} \leq L \sum_{s=1}^{z-1} \xi_{sj}$$

При $z \leq k$ правая часть этого неравенства будет равна 0. Левая же часть его будет больше 0, ибо

$$a_{ji} = 1, \quad \xi_{zi} = 1.$$

Следовательно, при нашем допущении система линейных неравенств (I) - (4) не будет удовлетворяться ξ_{ij} , и мы заключаем, что

$$x_i \in S_z, \quad z > k \quad \text{или} \quad \Gamma S_k \subseteq \bigcup_{i>k} S_i.$$

Теорема I доказана.

Доказанная теорема в принципе решает обе поставленные выше задачи. Именно, найдя минимальное ρ , при котором система линейных неравенств (I) - (4) ещё имеет решение в целых числах ξ_{ij} , мы по этому решению уже без труда можем построить некоторое минимальное AL -разбиение графа. Зафиксировав найденное минимальное ρ , мы затем можем искать минимальное L , при котором система (I) - (4) имеет целочисленное решение.

Практическое отыскание целочисленного решения системы (I) - (4) с помощью известных методов линейного программирования может быть сопряжено с большими трудностями. Поэтому полезно сделать следующие замечания.

В ряде случаев при решении задач I и 2 для данного графа $G=(X, \Gamma)$ можно ограничиться решением указанных задач для некоторого его подграфа. Иногда может оказаться известной приближенная оценка для числа классов в минимальном AL -разбиении.

В этих случаях решение системы (I) - (4) соответственно упрощается. Такая ситуация довольно часто возникает при оценке длины оптимального алгоритма, принадлежащего некоторому семейству OL_L алгоритмов, представленных в виде соответствующих графов [2], [3].

Литература

1. Г.А.Бекишев. О распараллеливании вычислительных алгоритмов. Сб. "Вычислительные системы", вып.5, Новосибирск, 1963.
2. Г.А.Бекишев. Об алгоритмах, эффективно реализуемых на вычислительных системах. Сб. "Вычислительные системы", вып. 7, Новосибирск, 1963, (в печати).
3. Г.А.Бекишев. К вопросу эффективного решения простейших задач алгебры матриц на вычислительной системе, состоящей из машин. Сб. "Вычислительные системы", Новосибирск (в печати).
4. К.Берж. Теория графов и её применения. М., ИЛ., 1962.