ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Сборник трудов
1963 г. Института математики СО АН СССР Выпуск 7

МЕТОД МОМЕНТОВ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТНЫХ РАСЧЕТОВ МНОГОТАКТНЫХ СХЕМ

С.В. Макаров

Введение

В работах [I] и [2] показано, что такие задачи теории надежности, как определение частоты срабатываний элементов схемы и оценка важности элементов схемы, сводятся к о п р е д е л е н и ю в е р о я т н о с т и п о я в л е н и я е д и н и ц ы н а в ы х о д е с х е м ы п р и з а д а н н о м п о т о к е и м п у л ь с о в н а е е в х о д а х.

При этом предполагается, что каждое звено схемы может находиться только в одном из двух состояний: " 0 " или " I ". Впредь эту задачу мы будем называть о с н о в н о й. В [2] описан матричный метод решения основной задачи, который требует перемножения матриц высокого порядка и потому применим только к схемам с весьма малой памятью.

В настоящей статье предлагается другой подход к решению той же задачи ("метод моментов").

§ I. Опорная система уравнений

Под многотактной схемой (МС) будем понимать логическую сеть в смысле определения, данного в монографии [3]. В качестве элементов МС примем произвольные одновыходные переключательные элементы (ПЭ), каждый из которых реализует некоторую булеву функцию, и задержки на один такт. Кроме того, входы схемы будем рассматривать как входные элементы (ВЭ). Не теряя общности, предположим, что в МС не существует пути, соединяющего какие-либо две задержки и не проходящего при этом через ПЭ. Если это не так, то мы можем между любыми двумя задержками вставить дополнительный элемент, реализующий булеву функцию $x=x$, после чего вышеприведенное предположение окажется выполненым. Далее, под словом "элемент" будем подразумевать либо ПЭ, либо ВЭ, но не задержку. Предположим также, что значение вектора входов в момент t не зависит от предыдущих моментов времени.

Условимся говорить, что элемент E_i управляет элементом E_j, если E_i принадлежит к предыстории E_j (определение предыстории см. в [I]). Если существует путь E_iE_j, не проходящий ни через один элемент схемы, то E_i непосредственно управляет E_j.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Подмножество C элементов МС есть цикл тогда и только тогда, когда для любых элементов $E_i, E_j \in C$ элемент E_i управляет E_j и в то же время E_j управляет E_i и существуют пути E_iE_j и E_jE_i, проходящие только через элементы подмножества C.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть дана МС $\mathfrak{S}$ и пусть $\mathfrak{M}$ - некоторое подмножество элементов $\mathfrak{S}$. Мы будем называть $\mathfrak{M}$ системой, разрывающей циклы (РЦ), в том и только в том случае, если выполняются два условия:

I. В схеме $\mathfrak{S}$ не существует ни одного цикла, не содержащего хотя бы одного элемента из $\mathfrak{M}$.

2. При удалении из $\mathfrak{M}$ хотя бы одного элемента оставшееся подмножество перестает удовлетворять требованию I.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Рассмотрим некоторое подмножество $\mathfrak{N}$ элементов $\mathfrak{S}$, обладающее следующими свойствами:

I. $\mathfrak{N}$ включает в себя РЦ.

2. Каковы бы ни были элементы $E_i, E_j \in \mathfrak{S}$, путь E_iE_j, не проходящий ни через один элемент из $\mathfrak{N}$, содержит не более одной задержки.

3. Множество $\mathfrak{N}$ неизбыточно, т.е. при удалении из $\mathfrak{N}$ любого элемента оставшееся подмножество перестает удовлетворять требованиям I и 2.

Такое подмножество назовем опорной системой элементов (ОСЭ).

Так как вся схема $\mathfrak{S}$ тривиальным образом удовлетворяет свойствам I и 2, то удаляя из $\mathfrak{S}$ последовательно по одному элементу и проверяя каждый раз оставшееся подмножество на выполнение свойств I и 2 (в случае невыполнения одного из этих свойств, возвращая элемент в систему), мы неминуемо придем к некоторому подмножеству элементов, удовлетворяющему всем трем условиям. Следовательно, для любой МС существует хотя бы одна опорная система. Как нетрудно убедиться, для произвольно взятой МС существует, вообще говоря, несколько опорных систем.

Минимальную по количеству элементов опорную систему обозначим МОС. (В случае, если для одной и той же схемы $\mathfrak{S}$ окажется несколько МОС, выбираем одну из них произвольно).

Мы не останавливаемся здесь на описании удобных алгоритмов для построения РЦ, МОС; отметим лишь, что, вследствие конечности изучаемых схем, они могут быть найдены, в крайнем случае, посредством полного перебора.

ПРИМЕР.

На рис. I изображена МС. Маленькие кружки с номерами обозначают ПЭ; прямоугольники - задержки на один такт; висячие стрелки - входы схемы; Z - выход схемы в целом. Пунктирными кружками обведены элементы МОС.

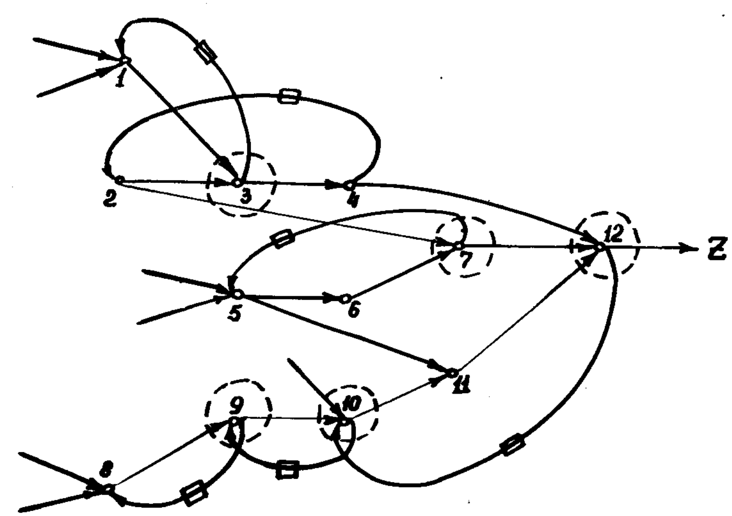

Рис.I

Нетрудно проверить, что элементы 3,7,9,I0 образуют РЦ, а элементы 3,7,9,I0,I2 образуют МОС.

Выражая каждый элемент схемы $\mathscr{G}$ через непосредственно управляющие им элементы, получим систему уравнений. Для записи уравнений используем арифметические формы представления булевых функций [4]. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ - входы $\mathscr{G}$; $E_1, E_2, \ldots, E_m$ - элементы $\mathscr{G}$. Состояние выхода элемента будем обозначать той же буквой, что и сам элемент. Тогда исходная система уравнений запишется так:

$$E_i(t) = f_i\left[X_1(t), \ldots X_n(t), X_1(t-1) \ldots X_n(t-1), E_1(t) \ldots E_m(t), E_1(t-1), \ldots E_m(t-1)\right] \quad (I)$$
$$(i = 1, 2, \ldots m).$$

В силу сделанного в начале статьи предположения о схеме, в правой части (I) отсутствуют аргументы времени, отличные от t и $t-1$. Считаем, что построена МОС, содержащая κ элементов:

$$\{B_1, B_2, \ldots B_\kappa\}, \qquad B_i \in \mathscr{G} \quad (i = 1, 2, \ldots \kappa).$$

Замену некоторого элемента E_j , входящего в правую часть (I), на его выражение того же вида будем называть подстановкой.

ЛЕММА I. С помощью конечного числа подстановок каждый элемент E_i , не принадлежащий МОС, может быть выражен явно через компоненты МОС:

$$E_i(t) = f_i\left[X_1(t), \ldots X_n(t), X_1(t-1), \ldots X_n(t-1) B_1(t) \ldots B_\kappa(t), B_1(t-1), \ldots B_\kappa(t-1)\right]. \quad (2)$$

При этом в правой части (2) нет элементов, не принадлежащих МОС.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\mathscr{E}'$ множество элементов, непосредственно управляющих элементом E_i . Выделим в $\mathscr{E}'$ компоненты МОС и входы (если таковые найдутся), а для каждого из оставшихся элементов построим множества непосредственно управляющих элементов и возьмем их объединение $\mathscr{E}''$. В множестве $\mathscr{E}''$ выделим компоненты МОС и входы. Если $\mathscr{E}''$ содержит элементы, не являющиеся ни компонентами МОС, ни входами, то далее поступаем аналогично, получая последовательность множеств:

$$\mathscr{E}', \mathscr{E}'', \mathscr{E}''', \ldots \quad (3)$$

Так как в $\mathscr{G}$ не существует циклов, не проходящих через элементы МОС, то процесс построения множеств (3) конечен. Ни один из элементов (B_i и ВЭ), выделенных при таком построении, не может иметь какого-либо другого аргумента времени, кроме t и $t-1$, так как это противоречило бы определению МОС.

Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Каждый элемент $B_i \in МОС (i = 1, 2, \ldots \kappa)$ посредством конечного числа подстановок может быть выражен только через ВЭ и элементы МОС, причем таким образом, что все элементы B_i , входящие в правую часть соответствующего выражения, будут иметь аргумент времени $t-1$:

$$B_i(t) = f_i\left[X_1(t), \ldots X_n(t), X_1(t-1), \ldots X_n(t-1), B_1(t-1), \ldots B_\kappa(t-1)\right]. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя лемму I, элемент $B_i(t)$ представляем сначала в виде (2); при этом в правой части может находиться $B_i(t-1)$, но не $B_i(t)$, так как это противоречило бы правильной организации схемы. Для всех элементов B_j , входящих в правую часть полученного выражения с аргументом t , находим аналогичное представление в виде (2) и подставляем его в исходное выражение для $B_i(t)$. Повторяя эту процедуру несколько раз, мы неминуемо придем к формуле вида (4). При этом, вследствие свойств МОС, в правой части (4) не может появиться аргументов времени, отличных от t и $t-1$.

Систему уравнений (4) назовем опорной системой уравнений (ОСУ) для МС $\mathscr{G}$.

§ 2. Решение основной задачи методом моментов

Произведение

$$\mu_\kappa(t) = X_{j_1}(t) \ldots X_{j_{e_1}}(t) \cdot B_{i_1}(t), \ldots B_{i_{e_2}}(t), \quad \kappa = e_1 + e_2,$$

(все сомножители различны) назовем синхронным термом κ -ого порядка, отнесенным к моменту времени t .

Из свойств арифметических булевых форм [4] следует, что правые части ОСУ (4) можно записать как алгебраическую сумму синхронных термов различных порядков, отнесенных к $t-1$.

Перемножая левые и правые части некоторых уравнений из ОСУ (4) и, в случае необходимости, домножая получаемые выражения на некоторые входные переменные, мы можем выразить любой синхронный терм k -ого порядка, отнесенный к t , через термы разных порядков, отнесенные к $t-1$. Так как для фиксированной МОС число всех возможных термов конечно, то, выражая указанным способом термы, отнесенные к t , через термы, отнесенные к $t-1$, мы можем построить линейную синхронную систему уравнений относительно термов (ЛСТ), в которой, если отождествить термы, отличающиеся только аргументами времени (t или $t-1$), число неизвестных равно числу уравнений, причем в левых частях уравнений находятся только термы, отнесенные к t , а в правых частях – только термы, отнесенные к $t-1$, а также арифметические булевы формы от входных переменных с аргументами времени t .

Так как булевы переменные и все арифметические формы от них, в том числе и термы любого порядка, могут принимать только два значения – "0" или "I", то математическое ожидание терма есть вероятность обращения этого терма в единицу. А поскольку выход любого элемента схемы является частным случаем терма, то з а д а ч а о б о т ы с к а н и и м а т е м а т и ч е с к и х о ж и д а н и й т е р м о в е с т ь о б о б щ е н и е о с н о в н о й з а д а ч и.

Математическое ожидание терма k -ого порядка назовем м о м е н т о м k - о г о п о р я д к а, а переход от терма к соответствующему моменту назовем с г л а ж и в а н и е м.

Математическое ожидание будем отмечать чертой сверху.

Введем гипотезу о стационарности. А именно, каков бы ни был момент $\overline{\mu_k(t)}$, мы примем, что

$$\overline{\mu_k(t)}=\overline{\mu_k(t-1)}. \qquad (5)$$

При малых t соотношение (5), вообще говоря, не выполняется хотя бы потому, что начальное состояние схемы, задаваемое произвольно, может оказаться невозвратным. Однако при больших t соотношение (5) в наиболее интересных для приложений случаях выполняется практически точно, ибо при решении основной задачи нет никаких оснований предпочитать один отдельно взятый момент времени другому. Таким образом, принимая (5), мы изучаем схему $\mathcal{G}$ в установившемся стационарном режиме работы.

Применяя операцию сглаживания и используя (5), мы перейдем от ЛСТ к линейной системе уравнений относительно моментов (ЛСМ).

ЛСМ есть линейная алгебраическая система уравнений, порядок которой равен числу неизвестных. Коэффициенты системы суть математические ожидания арифметических булевых форм с одним и тем же аргументом времени t и, следовательно, могут быть найдены путем решения основной задачи для однотактных схем (см. [I], [4], [5]).

Порядок ЛСМ ограничен сверху количеством всех возможных моментов. Большое количество рассмотренных автором примеров показывает, что, как правило, порядок ЛСМ значительно ниже верхней оценки и, во-вторых, подавляющее большинство коэффициентов ЛСМ суть нули. Это наводит на мысль, что предлагаемый способ решения основной задачи может быть значительно упрощен; однако конкретных результатов в этом направлении пока не получено.

Решая ЛСМ, мы находим вероятности единицы на выходе элементов из МОС. Если требуется решить основную задачу для элемента, не входящего в МОС, то мы всегда можем это сделать в силу леммы I, учитывая, что любой момент, возникающий при развертывании выражения (2), может быть найден аналогичным способом.

§ 3. Пример

На рис. 2 изображена МС с тремя единичными задержками. Символы $\&$, V, $\urcorner$ обозначают конъюнкцию, дизъюнкцию, отрицание, соответственно, A, B, C – входы, Z – выход схемы.

Малыми латинскими буквами отмечены ПЭ; $З$ – задержка. Полагаем для определенности, что входы A, B, C независимы и для каждого из них вероятность единицы есть $\frac{1}{2}$.

Элементы e, f, g составляют МОС.

Арифметическая система уравнений схемы:

$$\left.\begin{aligned} a(t) &= A(t)\cdot f(t-1), \\ b(t) &= B(t)\cdot g(t-1), \\ d(t) &= C(t)+[1-C(t)]e(t-1), \\ e(t) &= C(t)+[1-C(t)]\cdot a(t), \\ f(t) &= 1-b(t), \\ g(t) &= e(t)f(t)d(t). \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

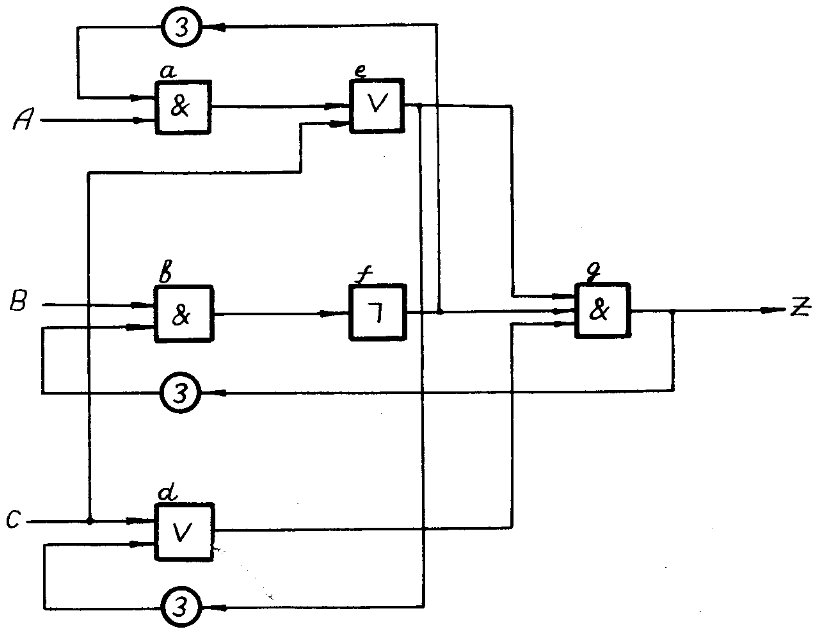

Рис. 2

Исключая последовательно все элементы, кроме компонент МОС, получим ОСУ:

$$\left.\begin{aligned}
&e(t)=C(t)+\left[1-C(t)\right]A(t)f(t-1)\ ,\\
&f(t)=1-B(t)g(t-1)\ ,\\
&g(t)=\left\{C(t)+\left[1-C(t)\right]A(t)f(t-1)\right\}\left\{1-B(t)g(t-1)\right\}\left\{C(t)+\left[1-C(t)\right]e(t-1)\right\}.
\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

Записав третье уравнение системы (7) в развернутом виде и применяя операцию сглаживания, получим

$$\begin{aligned}
&\bar e=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}\bar f\ ,\\
&\bar f=1-\tfrac{1}{2}\bar g\ ,\\
&\bar g=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}\bar g+\tfrac{1}{4}\overline{ef}-\tfrac{1}{8}\overline{efg}
\end{aligned}\qquad(8)$$

Чтобы получить уравнение для $\overline{ef}$, образуем терм ef,

перемножая первое и второе уравнение из (7):

$$e(t)f(t)=C(t)-C(t)B(t)g(t-1)+\left[1-C(t)\right]A(t)f(t-1)-\left[1-C(t)\right]A(t)B(t)f(t-1)g(t-1).$$

Сглаживаем:

$$\overline{ef}=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}\bar g+\tfrac{1}{4}\bar f-\tfrac{1}{8}\overline{fg}.\qquad(9)$$

Из (6) находим:

$$f(t)g(t)=e(t)f(t)g(t)=g(t).$$

Следовательно,

$$\overline{fg}=\bar g.\qquad(I0)$$

Аналогично

$$\overline{efg}=\bar g.\qquad(II)$$

Объединяя (8), (9), (I0), (II), получим ЛСМ

$$\left.\begin{aligned}
&\bar e=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}\bar f\ ,\\
&\bar f=1-\tfrac{1}{2}\bar g\ ,\\
&\bar g=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}\bar g+\tfrac{1}{4}\overline{ef}-\tfrac{1}{8}\overline{efg}\ ,\\
&\overline{ef}=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}\bar g+\tfrac{1}{4}\bar f-\tfrac{1}{8}\overline{fg}\ ,\\
&\overline{fg}=\bar g\ ,\\
&\overline{efg}=\bar g\ .
\end{aligned}\right\}\qquad(I2)$$

Решая алгебраическую систему (I2), получаем:

$$\bar e=0{,}693,\quad \bar f=0{,}771,\quad \bar g=0{,}458,$$

а также значения моментов $\overline{ef}$, $\overline{fg}$, $\overline{efg}$.

Теперь легко можно найти вероятности единицы на выходе любого элемента, не принадлежащего МОС. Например, из (6) следует:

$$\bar d=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\bar e=0{,}846.$$

Для решения основной задачи метод моментов требует, по-видимому, значительно меньшего объема вычислений, нежели матричный метод [2], и поэтому он может быть применен к схемам с большей памятью. Точная оценка эффективности метода затруднительна.

Литература

I. Макаров С.В. Вероятностные расчеты однотактных схем. Сб. "Вычислительные системы", вып. 4, Новосибирск, I962.
2. Макаров С.В. О надежности многотактных схем с малой памятью. Сб. "Вычислительные системы", вып. 5, Новосибирск, I963.
3. Кобринский Н.Е. и Трахтенброт Б.А., Введение в теорию конечных автоматов. М., I962.
4. Мерекин Ю.В. Арифметические формы записи булевых функций и их применение для расчета надежности схем. Сб. "Вычислительные системы", вып.7, Новосибирск,I963.
5. Мерекин Ю.В. Решение задач вероятностного расчета однотактных схем методом ортогонализации. Сб. "Вычислительные системы", вып. 5, Новосибирск, I963.