ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Сборник трудов
1963 г. Института математики СО АН СССР Выпуск 7

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ФОРМЫ ЗАПИСИ БУЛЕВЫХ ВЫРАЖЕНИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ РАСЧЕТА НАДЕЖНОСТИ СХЕМ

Ю.В. Мерекин

Введение

В связи с задачей создания вычислительных систем высокой производительности [I] в Институте математики СО АН СССР выполнен ряд работ по анализу надежности схем [2,3,4,5]. Данная работа является их логическим продолжением. Для решения задач надежности в статье используются арифметические формы записи булевых выражений. В общих чертах рассматриваются их свойства и пути применения полученных форм для решения задач надежности. В статье используются некоторые определения и обозначения из работы [3]. Дополнительно вводится определение глубины формулы, необходимое для дальнейшего изложения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. I. Аргументам x_i приписывается глубина μ-0.

2. Формулам $x_i \& x_j$, $x_i \vee x_j$ приписывается глубина μ=1.

3. Формулам $F^{\mu}(f_1)\& F^{\nu}(f_2)$, $F^{\mu}(f_1)\vee F^{\nu}(f_2)$, $\bar{F}^{\mu}(f_1)$ приписывается глубина $\mu+1$, если $\nu \leq \mu$.

Верхними индексами μ и ν обозначена глубина булевых формул.

§ I. Арифметические формы записи булевых выражений

Под булевой функцией, как обычно, понимается функция, определенная на множестве $\{0,1\}$ и принимающая значения из этого же множества. Булеву функцию $f(x_1,\dots,x_m)$ от m аргументов нам удобнее рассматривать как булеву функцию от $2m$ аргументов $-f(x_1,\dots,x_m,x_{m+1},\dots,x_{2m})$ где $x_{m+1}=\bar{x}_1,\dots,x_{2m}=\bar{x}_m$.

Под арифметической функцией понимается функция, определенная на множестве натуральных чисел и принимающая значения из этого множества. Наложим некоторые ограничения на аргументы арифметической функции:

I. Количество аргументов $-2m(x_1,\dots,x_m,x_{m+1},\dots,x_{2m})$

2. Аргументы $x_{m+i}\in\{x_{m+1},\dots,x_{2m}\}$ принимают произвольные значения из множества натуральных чисел, но

$$x_{m+i}\neq x_i\,,\ (1\leq i\leq m). \tag{I}$$

ЗАМЕЧАНИЕ I. Аргументы $x_{m+i}\in\{x_{m+1},\dots,x_{2m}\}$ будем обозначать через $\tilde{x}_i$.

Обозначим булевы функции через $f, F(f), P$ и т.д.; арифметические $-\tilde{f}, \tilde{F}(f), \tilde{P}$ и т.д.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Некоторая арифметическая функция $\tilde{f}(x_1,\dots,x_{2m})$ задает булеву функцию $f(x_1,\dots,x_{2m})$, если они совпадают на множестве аргументов $\{0,1\}$. Такое совпадение обозначим знаком условного равенства „$\mathrel{\overline{\underline{\times}}}$". x) Тогда имеем:

$$\tilde{f}(x_1,\dots,x_{2m})\mathrel{\overline{\underline{\times}}} f(x_1,\dots,x_{2m}) \tag{2}$$

Будем говорить, что $\tilde{f}$ есть арифметическое представление данной булевой функции f. Определим для каждой формулы $F(f)$, реализующей булеву функцию f, некоторую арифметическую функцию по следующим правилам:

Для глубины $\mu=0$:

$$\tilde{F}(x_i)=x_i\quad,\ (1\leq i\leq 2m). \tag{3}$$

Для глубины $\mu=1$

$$\tilde{F}(x_i\,\&\,x_j)=x_i x_j,$$

$$\tilde{F}(x_i\vee x_j)=1-(1-x_i)(1-x_j)=x_i+x_j-x_i x_j.$$

---

x) Знак „$\mathrel{\overline{\underline{\times}}}$" в этом же смысле будем понимать и для произвольных арифметических функций. Например, $\tilde{f}\tilde{f}\mathrel{\overline{\underline{\times}}}\tilde{f}$, т.е. равны на множестве $\{0,1\}$.

Для глубины μ: $\tilde{F}(f_1\,\&\,f_2)=\tilde{F}(f_1)\cdot\tilde{F}(f_2),$ (4)

$$\tilde{F}(f_1\vee f_2)=\tilde{F}(f_1)+\tilde{F}(f_2)-\tilde{F}(f_1)\tilde{F}(f_2), \tag{5}$$

$$\tilde{F}(\bar{f})=1-\tilde{F}(f), \tag{6}$$

где f_1 или f_2 имеют глубину $\mu-1$.

ТЕОРЕМА I. $F(f)\mathrel{\overline{\underline{\times}}}\tilde{F}(f)$ (7)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость теоремы непосредственно вытекает из индукционного определения (3,4,5,6).

ТЕОРЕМА 2. $\tilde{F}(f)$ представима в виде

$$\tilde{F}(f)\mathrel{\overline{\underline{\times}}}(-1)^c\,\tilde{\Phi}(\varphi)+c, \tag{8}$$

где $c\in\{0,1\}$, а арифметическое представление $\tilde{\Phi}(\varphi)$ не содержит свободного члена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждения будем вести индукцией по числу μ. Для $\mu=0$ и 1 справедливость выражения (8) очевидна. Пусть теорема доказана для $\mu-1$:

$$\tilde{F}_i(f)\mathrel{\overline{\underline{\times}}}(-1)^{c_i}\,\tilde{\Phi}_i(\varphi)+c_i\,,\qquad \text{где } c_i\in\{0,1\}.$$

Возможен один из трех видов представления $F^{\mu}(f)$:

$$\left.\begin{aligned}
&F_1^{\mu}(f)=F^{\mu-1}(f_1)\,\&\,F^{\nu}(f_2),\\
&F_2^{\mu}(f)=F^{\mu-1}(f_1)\vee F^{\nu}(f_2),\\
&F_3^{\mu}(f)=\bar{F}^{\mu-1}(f)
\end{aligned}\right\}\quad \nu\leq\mu-1$$

Тогда имеем:

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde{F}_1(f)\mathrel{\overline{\underline{\times}}}(-1)^{c_1+c_2}\tilde{\Phi}_1(f_1)\tilde{\Phi}_2(f_2)+(-1)^{c_1}\tilde{\Phi}_1(f_1)c_2+(-1)^{c_2}\tilde{\Phi}_2(f_2)c_1+c_1c_2\mathrel{\overline{\underline{\times}}}\\
&\qquad\mathrel{\overline{\underline{\times}}}(-1)^{c_1c_2}\tilde{\Phi}'+c_1c_2\,,\\
&\tilde{F}_2(f)\mathrel{\overline{\underline{\times}}}(-1)^{c_1}\tilde{\Phi}_1(f_1)(1-c_2)+(-1)^{c_2}\tilde{\Phi}_2(f_2)(1-c_1)-(-1)^{c_1+c_2}\tilde{\Phi}_1(f_1)\tilde{\Phi}_2(f_2)+(c_1+c_2-c_1c_2)\mathrel{\overline{\underline{\times}}}\\
&\qquad\mathrel{\overline{\underline{\times}}}(-1)^{c_1+c_2-c_1c_2}\tilde{\Phi}''+(c_1+c_2-c_1c_2),\\
&\tilde{F}_3(f)\mathrel{\overline{\underline{\times}}}-(-1)^{c_1}\tilde{\Phi}_1(f_1)+(1-c_1)\mathrel{\overline{\underline{\times}}}(-1)^{1-c_1}\tilde{\Phi}'''+(1-c_1).
\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

Необходимо показать, что $\widetilde{\Phi}', \widetilde{\Phi}'', \widetilde{\Phi}'''$ суть арифметические представления некоторых булевых функций и не содержит свободных членов. В этом легко убедиться, перебирая все возможные случаи, когда $c_1, c_2 \in \{0,1\}$. Например, для $c_1=0, c_2=1$ имеем:

$$\widetilde{F}_1(f) \equiv -\widetilde{\Phi}_1(f_1)\widetilde{\Phi}_2(f_2)+\widetilde{\Phi}_1(f_1)=\widetilde{\Phi}_1(f_1)(1-\widetilde{\Phi}_2(f_2))=\widetilde{\Phi}(f_1 \& \bar{f}_2).$$

Из выражений (9) очевидно, что $\widetilde{\Phi}', \widetilde{\Phi}'', \widetilde{\Phi}'''$ не содержит свободных членов. Теперь каждое из выражений (9) можно записать в следующем виде:

$$\widetilde{F}(f) \equiv (-1)^c \widetilde{\Phi}(\varphi)+c,$$

где $c \in \{c_1c_2;\ (c_1+c_2-c_1c_2);\ (1-c_1)\}$.

По индукционному допущению $c_1, c_2 \in \{0,1\}$, тогда $c \in \{0,1\}$.

Индукционный переход совершен.

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для каждой функции $\widetilde{F}(f)$ можно найти представление вида (8) с $c=0$ и с $c=1$

Действительно, при $c=0$ имеем:

$$\widetilde{F}(f) \equiv \widetilde{\Phi}(\varphi)=\widetilde{\Phi}(\varphi)-1+1 \equiv -\widetilde{\Phi}(\bar{\varphi})+1.$$

Булеву функцию $\bar{\varphi}$ можно представить в ДНФ. Согласно формулам (3,4,5) $\widetilde{\Phi}(\bar{\varphi})$ не содержит свободного члена.

При $c=1$ рассуждения аналогичны.

Согласно теореме 2, $\widetilde{\Phi}(\varphi)$ не содержит свободного члена. Следовательно, $\widetilde{\Phi}(\varphi)$ можно представить в виде произведений степеней аргументов, соединенных знаками " + " и " – ":

$$\widetilde{\Phi}(\varphi) \equiv \sum_{i=1}^{R_1} \widetilde{P}_i - \sum_{j=1}^{R_2} \widetilde{P}_j, \tag{10}$$

где $\widetilde{P}_i, \widetilde{P}_j = x_{i_1}^{a_1} x_{i_2}^{a_2}, \ldots, x_{i_k}^{a_k} \quad (a_k=1,2,3,\ldots)$

Так как $x_{i_s}^{a_s} \equiv x_{i_s}$, то в дальнейшем изложении под $\widetilde{P}$ будем понимать произведение $x_{i_1} \ldots x_{i_k}$. Назовем выражение $\widetilde{P} \equiv x_{i_1},\ldots,x_{i_k}$ арифметическим элементарным членом (АЭЧ), число k – рангом АЭЧ. Рассмотрим АЭЧ $\widetilde{P}$ ранга $k>m$. Среди его множителей найдутся два, индексы которых отличаются на величину m. Пусть это будут x_i и x_{m+i}, так как $x_{m+i} \neq x_i$, то $\widetilde{P} \equiv 0$.

Этим доказана лемма I.

ЛЕММА I. Если АЭЧ $\widetilde{P}$ имеет ранг $k>m$, то $\widetilde{P} \equiv 0$.

ЗАМЕЧАНИЯ 3. а) Справедливы формулы

$$x_i \bar{x}_i \equiv 0 \tag{11}$$

$$x_i + \bar{x}_i \equiv 1 \tag{12}$$

б) АЭЧ $\widetilde{P}$ ранга m имеет вид:

$$\widetilde{P} \equiv y_1 \ldots y_m, \tag{13}$$

где $y_i \in \{x_i, \bar{x}_i\}, \quad (1 \leq i \leq m)$.

Согласно теореме 2 и вышеизложенным рассуждениям, $\widetilde{F}(f)$ представимо в виде:

$$\widetilde{F}(f) \equiv (-1)^c \left(\sum_{i=1}^{R_1} \widetilde{P}_i - \sum_{j=1}^{R_2} \widetilde{P}_j\right)+c, \tag{14}$$

где $c \in \{0,1\}$, $\widetilde{P}_i, \widetilde{P}_j \not\equiv 0$.

Такое представление булевой функции $f(x_1,\ldots,x_{2m})$ будем называть регулярной арифметической нормальной формой (РАНФ). РАНФ называется совершенной (РСАНФ), если ранги $\widetilde{P}_i$ и $\widetilde{P}_j$ равны m. РАНФ (РСАНФ) называются АНФ (САНФ), когда (14) не содержит АЭЧ, удовлетворяющих условию: $\widetilde{P}_i \equiv \widetilde{P}_j$.

ТЕОРЕМА 3. Любое представление $\widetilde{F}(f)$ булевой функции $f(x_1,\ldots,x_{2m})$ имеет две и только две САНФ. Одну вида:

$$\widetilde{F}(f) \equiv \sum_{i=1}^{R'} \widetilde{P}_i, \tag{15}$$

одну вида:

$$\widetilde{F}(f) \equiv -\sum_{i=1}^{R''} \widetilde{P}_i + 1. \tag{16}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 2, $\widetilde{F}(f) \equiv (-1)^c \widetilde{\Phi}(\varphi)+c$, где $c \in \{0,1\}$. Рассмотрим случаи, когда $c=0$ и $c=1$.

I. Пусть $c=0$. Тогда $\widetilde{F}(f) \equiv \widetilde{\Phi}(\varphi)$ т.е. $f=\varphi$. Согласно выражению (10) имеем:

$$\widetilde{F}(f) \equiv \sum_{i=1}^{R_1} \widetilde{P}_i - \sum_{j=1}^{R_2} \widetilde{P}_j. \tag{17}$$

Учитывая формулу (12), каждый АЭЧ $\widetilde{P}$ из выражения (17) можно представить в виде:

$$\widetilde{P} \equiv x_{i_1} \ldots x_{i_k} (x_{i_{k+1}} + \bar{x}_{i_{k+1}}) \ldots (x_{i_m} + \bar{x}_{i_m}), \tag{18}$$

где множество $\{x_1, \ldots, x_{i_k}\} \cap \{x_{i_{k+1}}, \bar{x}_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_m}, \bar{x}_{i_m}\} = \Lambda$

Раскрыв скобки, получим 2^{m-k} различимых непустых АЭЧ ранга m :

$$\widetilde{P} \equiv \widetilde{P}_1 + \widetilde{P}_2 + \ldots + \widetilde{P}_{2^{m-k}}. \tag{19}$$

Представим каждый АЭЧ в выражении (17) согласно формуле (19). В результате получим РСАНФ функции f :

$$\widetilde{F}(f) \equiv \sum_{i=1}^{R_3} \widetilde{P}_i - \sum_{j=1}^{R_4} \widetilde{P}_j \quad (R_3 \geq R_1; \quad R_4 \geq R_2). \tag{20}$$

Для любого $\widetilde{P}_j \in \{\widetilde{P}_j\}$ всегда найдется $\widetilde{P}_i \in \{\widetilde{P}_i\}$ такой, что $\widetilde{P}_i \equiv \widetilde{P}_j$. В противном случае для некоторых значений аргументов $F(f) < 0$.

Если $F(f) \not\equiv 0$, то всегда найдется АЭЧ $\widetilde{P}_i \in \{\widetilde{P}_i\}$ такой, что $\widetilde{P}_i \not\equiv \widetilde{P}_j$, $\widetilde{P}_j \in \{\widetilde{P}_j\}$ Взаимно уничтожив члены $\widetilde{P}_i \equiv \widetilde{P}_j$, получим САНФ:

$$\widetilde{F}(f) \equiv \sum_{i=1}^{R} \widetilde{P}_i. \tag{21}$$

Необходимо показать, что булева функция f имеет единственную САНФ, не содержащую свободного члена. Предположим, что существует другая САНФ булевой функции f с $C=0$

$$\widetilde{F}'(f) \equiv \sum_{i=1}^{L} \widetilde{P}_i'. \tag{22}$$

Как доказано выше, при $C=0$ САНФ не может содержать отрицательных АЭЧ. В выражении (22) найдется хотя бы один АЭЧ $\widetilde{P}' = x_{i_1} \ldots x_{i_m}$ ранга m, удовлетворяющий условию $\widetilde{P}_i' \notin \{\widetilde{P}_i\}$ Когда $\widetilde{P}' \equiv 1$, все члены множества $\{\widetilde{P}_i'\}$ обращаются в ноль, так как каждый из них содержит хотя бы один аргумент из множества $\{\bar{x}_{i_1}, \bar{x}_{i_2}, \ldots, \bar{x}_{i_m}\}$. Следовательно, $\widetilde{F}(f) \not\equiv \widetilde{F}'(f)$ что невозможно.

Аналогичными рассуждениями при $C=1$ можно показать, что САНФ имеет вид

$$\widetilde{F}(f) \equiv -\sum_{i=1}^{R''} \widetilde{P}_i + 1, \tag{23}$$

что эта форма всегда существует и что она единственная.

Ввиду замечания 2 каждая из функций имеет представления вида (21) и (23).

Теорема доказана.

САНФ вида (15) будем называть САНФ без свободного члена и обозначать САНФ$_0$. САНФ вида (16) – САНФ со свободным членом и обозначать САНФ$_1$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Между членами СДНФ – $\bigvee_{j=1}^{R_1} P_j$ и членами САНФ$_0$ – $\sum_{i=1}^{R_2} \widetilde{P}_i$ булевой функции f существует взаимно однозначное соответствие вида $P_j \longleftrightarrow \widetilde{P}_i$, причем $P_j \equiv \widetilde{P}_i$

Действительно, СДНФ – $\bigvee_{j=1}^{R_1} P_j$ и САНФ$_0$ – $\sum_{i=1}^{R_2} \widetilde{P}_i$ одной и той же булевой функции $f(x_1, \ldots, x_{2m})$ при одинаковом значении аргументов $x_1, \ldots, x_{2m}$ должны одновременно принимать одно и то же значение из множества $\{0,1\}$. Отметим, что все элементарные конъюнкции P_j и АЭЧ $\widetilde{P}_i$ есть члены ранга m, все $P_j(\widetilde{P}_i)$ различимы и два $P_j(\widetilde{P}_i)$ не могут одновременно равняться 1. Следовательно, между P_j и $\widetilde{P}_i$ можно установить взаимно однозначное соответствие по закону $P_j \longleftrightarrow \widetilde{P}_i$, причем $P_j \equiv \widetilde{P}_i$, что и доказывает справедливость следствия.

СЛЕДСТВИЕ 2. Между членами СДНФ – $\bigvee_{j=1} P_j$ булевой функции f и членами неконстантной части САНФ$_1$ – $\sum_{i=1}^{R_2} \widetilde{P}_i$ булевой функции $\bar{f}$ существует взаимно однозначное соответствие вида $P_j \longleftrightarrow \widetilde{P}_i$, причем $P_j \equiv \widetilde{P}_i$.

Пусть САНФ булевой функции f имеет вид: $1 - \sum_{i=1}^{R_2} \widetilde{P}_i$. Тогда $\widetilde{F}(\bar{f}) \equiv 1 - (1 - \sum_{i=1}^{R_2} \widetilde{P}_i) \equiv \sum_{i=0}^{R_2} \widetilde{P}_i$.

Справедливость следствия 2 вытекает из следствия 1.

§ 3. Графическое представление арифметических форм записи булевых выражений

Для графического представления $\widetilde{F}(f) \equiv F(f)$ можно использовать методы графического изображения булевых функций [6,7]. Однако специфические свойства $\widetilde{F}(f)$ требуют введения некоторых изменений. В данном параграфе рассматриваются два способа графического представления $\widetilde{F}(f) \equiv F(f)$. Первый основан на использовании m-мерного куба в качестве фигуры, вершины, ребра, грани которой, а также их сочетания, соответствуют определенным булевым функциям. За основу второго способа взято представление булевых выражений по диаграмме Вейча.

3.1. m-мерный куб. В графическом представлении булевой функции каждой вершине m-мерного куба ставится в соответствие элементарная конъюнкция ранга m.

Двум вершинам, соединенным одним ребром, соответствует элементарная конъюнкция ранга $m-1$. Член $P = x_{i_1} \& \dots \& x_{i_k}$ соответствует $(m-k)$-мерному кубу, множество вершин которого определяется элементарными конъюнкциями из следующего выражения:

$$x_{i_1} \& \dots \& x_{i_k} \& (x_{i_{k+1}} \vee \bar{x}_{i_{k+1}}) \& \dots \& (x_{i_m} \vee \bar{x}_{i_m}),$$

где $x_{i_{k+1}}, \bar{x}_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_m}, \bar{x}_{i_m} \notin \{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}$.

Любой АЭЧ $\tilde{P} = x_{i_1} \dots x_{i_k}$ будем представлять в m-мерном кубе подобно элементарной конъюнкции $P = x_{i_1} \& \dots \& x_{i_k}$.

Когда $\tilde{F}(f)$ представлена в РАНФ, методика ее графического представления заключается в следующем: i-ой вершине m-мерного куба ставится в соответствие два числа v_i и ℓ_i. Первое из них v_i соответствует количеству вхождений АЭЧ ранга m, поставленного в соответствие данной вершине, в положительные АЭЧ данной РАНФ; второе ℓ_i – в отрицательные. Таким образом, i-ой вершине соответствует число $\omega_i = v_i - \ell_i$. Очевидно, $0 \le \omega_i \le 1$, так как $\tilde{F}(f) \equiv F(f)$ принимает значения из множества $\{0,1\}$. Если для каждой вершины m-мерного куба определено соответствующее число ω, то в искомое геометрическое представление войдет множество тех вершин, для которых $\omega_i = 1$.

ПРИМЕР I.

$$F(f) = \overline{\bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_2 x_3}$$

$$\tilde{F}(f) = 1 + x_1 x_2 - x_3 - x_2 \bar{x}_3$$

$$\omega_{x_1 x_2 x_3} = 2 - 1 = 1, \qquad \omega_{\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3} = 1 - 1 = 0,$$

$$\omega_{x_1 x_2 \bar{x}_3} = 2 - 1 = 1, \qquad \omega_{\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3} = 1 - 1 = 0,$$

$$\omega_{x_1 \bar{x}_2 x_3} = 1 - 1 = 0, \qquad \omega_{\bar{x}_1 x_2 x_3} = 1 - 1 = 0,$$

$$\omega_{x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3} = 1 - 0 = 1 \qquad \omega_{\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3} = 1 - 0 = 1.$$

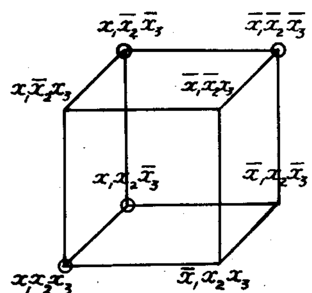

Рис.I

3.2. Д и а г р а м м а   В е й ч а. В графическом представлении $F(f)$ по диаграмме Вейча необходимо построить квадрат (прямоугольник) и разделить его площадь на 2^m частей. Каждая часть ставится во взаимно однозначное соответст-

вие с АЭЧ ранга m (рис.2). Для булевой функции f, представленной в РАНФ, графическое представление на диаграмме Вейча строится аналогично тому, как это делалось для m-мерного куба, если отождествить вершины куба и 2^m частей диаграммы.

$m = 4$

$x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$	$x_1 x_2 x_3 \bar{x}_4$	$\bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4$	$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$
$x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$	$x_1 x_2 x_3 x_4$	$\bar{x}_1 x_2 x_3 x_4$	$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$
$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4$	$x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4$	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4$	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4$
$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$	$x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4$	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4$	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$

Рис.2

§ 4. Применение арифметических форм для вероятностного расчета однотактных схем

Для вероятностного расчета однотактных схем [2,3] необходимо знать вероятность равенства единице булевой функции f, реализуемой данной схемой. При этом аргументы $x_1, x_2, \dots, x_m$ независимы в совокупности и имеют заданные вероятности равенства единице. Задача определения равенства единице булевой функции f может быть с успехом решена, если f представить в РАНФ. Рассмотрим теорему, доказывающую такую возможность.

ТЕОРЕМА 4. Е с л и $x_1, \dots, x_m$ с у т ь   н е з а в и с и м ы е   с л у ч а й н ы е   в е л и ч и н ы, с   з а д а н н ы м и   в е р о я т н о с т я м и, т о   в е р о я т н о с т ь   р а в е н с т в а   е д и н и ц е   б у л е в о й   ф у н к ц и и $f(x_1, x_2, \dots, x_{2m})$ п р е д с т а в л е н н о й   в   Р А Н Ф,

$$\tilde{F}(f) \equiv \sum_{i=1}^{R_1} \tilde{P}_i - \sum_{j=1}^{R_2} \tilde{P}_j + c \qquad (24)$$

о п р е д е л я е т с я   в ы р а ж е н и е м

$$\mathcal{P}(f=1) = \sum_{i=1}^{R_1} \mathcal{P}(\tilde{P}_i = 1) - \sum_{j=1}^{R_2} \mathcal{P}(\tilde{P}_j = 1) + c. \qquad (25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из элементарных вероятностных соображений следует, что математическое ожидание $M(f)$ случайной величины f равно вероятности $\mathcal{P}(f=1)$, когда случайные величины принимают значения из множества $\{0,1\}$. На основании свойства математического ожидания получаем:

$$M(\tilde{f}) = M\Big(\sum_{i=1}^{R_1} \tilde{P}_i\Big) - M\Big(\sum_{j=1}^{R_2} \tilde{P}_j\Big) + c.$$

Используя тот факт, что $x_1, x_2, \ldots, x_m$ независимы, имеем:

$$M(\tilde{f}) = \sum_{i=1}^{R_1} (M(x_1)\ldots M(x_k))_i - \sum_{j=1}^{R_2} (M(x_1)\ldots M(x_k))_j + c$$

Ввиду сказанного выше получаем:

$$\mathcal{P}(f=1) = \sum_{i=1}^{R_1} \mathcal{P}(\tilde{P}_i=1) - \sum_{j=1}^{R_2} \mathcal{P}(\tilde{P}_j=1) + c,$$

что и доказывает теорему.

Заключение

Арифметические представления булевых выражений позволяют решать задачи вероятностного расчета схем, используя аппарат арифметики. Алгоритм решения задачи сводится к нахождению регулярной арифметической нормальной формы, заданной булевой функции с последующим определением вероятности равенства единице полученной формы. Широкое применение арифметики позволит получать простые и удобные программы для решения задач на ЭВМ.

Описанные в работе арифметические формы и их некоторые свойства, вероятно, могут быть использованы для решения других логических задач на ЭВМ, например, для минимизации булевых формул.

Автор выражает благодарность Ю.Г.Решетняку и Л.А.Бокутю за ряд полезных советов.

Литература

1. Евреинов Э.В. и Косарев Ю.Г. О возможности построения вычислительных систем высокой производительности. Изд-во СО АН СССР, Новосибирск, 1962.
2. Макаров С.В. Вероятностные расчеты однотактных схем. Сб. "Вычислительные системы" вып. 4, Новосибирск, 1963.
3. Мерекин Ю.В. Решение задач вероятностного расчета схем методом ортогонализации. Сб. "Вычислительные системы" вып. 5, Новосибирск, 1963.
4. Макаров С.В. О надежности многотактных схем с малой памятью. Сб. "Вычислительные системы" вып. 5, Новосибирск 1963.

5. Макаров С.В. Метод моментов для вероятностных расчетов многотактных схем. Настоящий сборник.
6. Phister Montgomery, Logical Design of Digital Computers, John Wiley & Sons, New York, 1960.
7. Samuel H.Coldwell, Switching Circuits and Logical Design. John Wiley & Sons, Inc, 1959.