ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Сборник трудов

1963 г. Института математики СО АН СССР Выпуск 9

ДЕКАРТОВО ПРОИЗВЕДЕНИЕ ГРАФОВ

В.Г. Визинг

§ I. Введение

При построении вычислительной системы из большого числа элементарных машин возникает вопрос о структуре соединений между машинами. Один из способов соединений, исследованию которого посвящена настоящая статья, строится по " итеративному" принципу. Предполагается, что вся вычислительная система состоит из некоторого числа одинаково построенных блоков машин, причём "одноимённые" машины в различных блоках соединяются друг с другом по некоторому закону. Все соединения между машинами считаются двусторонними, и потому структуру соединений вычислительной системы можно изображать с помощью неориентированного графа.

В дальнейшем под графом мы будем понимать конечный неориентированный граф без петель (см. [I]). Графы будем обозначать большими латинскими буквами: $\mathcal{G}, H, \dots$; иногда рядом с буквой - наименованием графа - в скобках будем указывать множество вершин графа. Так, $\mathcal{G}(X)$ есть граф $\mathcal{G}$ со множеством вершин X.

Пусть $\mathcal{G}(X)$ и $H(Y)$ - два графа. Декартовым произведением графов $\mathcal{G}$ и H называется граф $\mathcal{G}\times H$, вершинами которого служат всевозможные пары (x,y), где $x\in X$, $y\in Y$, причем две вершины (x,y) и (x',y') смежны тогда и только тогда, когда либо $x=x'$, y и y' смежны в графе H ; либо x и x' смежны в $\mathcal{G}$, $y=y'$.

Две вершины (x,y) и (x',y') графа $\mathcal{G}\times H$ назовем одноименными по $\mathcal{G}$, если $x=x'$; и - одноименными по H, если $y=y'$.

Указанный выше принцип соединения машин вычислительной системы описывается как раз с помощью декартова произведения графов. x)

Декартово произведение графов имеет теоретическое и практическое применение и в ряде других областей. Доказываемая нами в § 3 теорема 5, являющаяся усилением теоремы 5 из главы IУ книги К.Бержа [I], находит непосредственное применение в теории игр. В работе [3] показано, что задача нахождения хроматического числа графа сводится к нахождению числа внутренней устойчивости другого графа, являющегося декартовым произведением исходного графа на полный граф. Теоремы II, I2 и I3 настоящей работы могут быть использованы при анализе и синтезе сложных графов.

§ 2. Общие свойства декартова произведения; обозначения

ТЕОРЕМА I. Пусть $\mathcal{G}(X), H(Y), F(Z)$ - графы. Тогда

I. $\mathcal{G}\times H \cong H\times\mathcal{G}$ (коммутативность),

2. $(\mathcal{G}\times H)\times F \cong \mathcal{G}\times(H\times F)$ (ассоциативность),

где $\cong$ - знак изоморфизма.

Действительно, требуемые изоморфизмы, очевидно, устанавливаются следующими взаимно однозначными соответствиями между вершинами:

I. $(x,y)\longleftrightarrow(y,x)$.

2. $((x,y),z)\longleftrightarrow(x,(y,z))$.

Пусть (x,y) - некоторая фиксированная вершина графа $\mathcal{G}\times H$. Обозначим через $(\mathcal{G},y)$ подграф графа $\mathcal{G}\times H$, порожденный всеми вершинами графа $\mathcal{G}\times H$, одноименными по H с вершиной (x,y). Аналогично, через (x,H) обозначим подграф графа $\mathcal{G}\times H$, порожденный всеми одноименными по $\mathcal{G}$ с вершиной (x,y) вершинами графа $\mathcal{G}\times H$. Имеет место очевидная

x) Отметим, что предлагаемый в работе Ю.Г.Решетняка [2] способ соединения элементов вычислительной системы - n -мерный куб - представляет собой декартово произведение n графов, каждый из которых изоморфен отрезку.

ЛЕММА I. Пусть $\mathcal{G}(X)$ и $H(Y)$ - графы, $\mathcal{G}\times H$ - их декартово произведение. Тогда

$$(\mathcal{G},y)\cong\mathcal{G};\quad (x,H)\cong H.$$

Пусть $\mathcal{G}(X)$ - связный граф, x и x' - две его вершины. Расстоянием $\rho_{\mathcal{G}}(x,x')$ между вершинами x и x' графа $\mathcal{G}$ назовём длину кратчайшего пути между этими вершинами. Очевидно, введённое так расстояние удовлетворяет всем аксиомам метрики.

ЛЕММА 2. Пусть $\mathcal{G}(X)$ и $H(Y)$ - связные графы, (x,y) и (x',y) - две одноимённые по H вершины графа $\mathcal{G}\times H$. Тогда любой кратчайший путь в графе $\mathcal{G}\times H$ между вершинами (x,y) и (x',y) целиком лежит в подграфе $(\mathcal{G},y)$.

Доказательство леммы 2 очевидно; отметим, что утверждение, аналогичное лемме 2, имеет место для одноимённых по $\mathcal{G}$ вершин графа $\mathcal{G}\times H$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathcal{G}(X)$ и $H(Y)$ - связные графы. Тогда для любых двух вершин (x,y) и (x',y') графа $\mathcal{G}\times H$ имеет место соотношение: $\rho_{\mathcal{G}\times H}[(x,y),(x',y')]=\rho_{\mathcal{G}}(x,x')+\rho_H(y,y')$.

Действительно, пусть $[x_0,x_1,\dots,x_k]$, где $x_0=x$; $x_k=x'$ - кратчайший путь в графе $\mathcal{G}$ между вершинами x и x'; $[y_0,y_1,\dots,y_n]$, где $y_0=y$, $y_n=y'$ - кратчайший путь в графе H между вершинами y и y'. Тогда $\rho_{\mathcal{G}}(x,x')=k$; $\rho_H(y,y')=n$. Построим путь длины $k+n$ в графе $\mathcal{G}\times H$ между вершинами (x,y) и (x',y'): $[(x_0,y_0),(x_1,y_0),\dots,$ $\dots,(x_k,y_0),(x_k,y_1),\dots,(x_k,y_n)]$. Очевидно, в графе $\mathcal{G}\times H$ не существует более короткого пути между этими вершинами, то есть

$$\rho_{\mathcal{G}\times H}[(x,y),(x',y')]=k+n=\rho_{\mathcal{G}}(x,x')+\rho_H(y,y').$$

Предлагаем читателю самостоятельно доказать следующее утверждение, представляющее интерес с точки зрения возможностей обмена информацией между машинами вычислительной системы.

ТЕОРЕМА 3. Пусть между вершинами x и x' графа $\mathcal{G}$ имеется единственный кратчайший путь $[x_0,x_1,\dots,x_k]$ $(x_0=x;\ x_k=x')$ длины k, между вершинами y и y' графа H имеется единственный кратчайший путь $[y_0,y_1,\dots,y_n]$ $(y_0=y;\ y_n=y')$ длины n. Тогда между вершинами (x,y) и (x',y') графа $\mathcal{G}\times H$ имеется $C^k_{k+n}=C^n_{k+n}$ различных кратчайших путей.

В заключение этого параграфа укажем некоторые обозначения, которыми мы будем пользоваться в следующих параграфах. Если A - конечное множество, то через $|A|$ будем обозначать число его элементов. Если $\mathcal{G}$ - граф, то:

$\nu(\mathcal{G})$ - будет обозначать цикломатическое число графа $\mathcal{G}$;
$\gamma(\mathcal{G})$ - хроматическое число графа $\mathcal{G}$;
$\alpha(\mathcal{G})$ - число внутренней устойчивости графа $\mathcal{G}$;
$\beta(\mathcal{G})$ - число внешней устойчивости графа $\mathcal{G}$.

Определение этих понятий читатель найдет в [I].

§ 3. Основные числовые характеристики декартова произведения

ТЕОРЕМА 4. Если граф $\mathcal{G}(X)$ имеет p компонент связности, а граф $H(Y)$ - q компонент связности, то граф $\mathcal{G}\times H$ имеет pq компонент связности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (x,y) и (x',y') - вершины графа $\mathcal{G}\times H$, причем выполняется по крайней мере одно из следующих двух условий:

а) x и x' принадлежат различным компонентам связности графа $\mathcal{G}$;

б) y и y' принадлежат различным компонентам связности графа H. Тогда (x,y) и (x',y') принадлежат различным компонентам связности графа $\mathcal{G}\times H$. Действительно, пусть, например, выполняется условие а), но между вершинами (x,y) и (x',y') в графе $\mathcal{G}\times H$ существует путь $[(x,y),(x_1,y_1),\dots,(x_k,y_k),(x',y')]$. Выпишем последовательность первых координат - вершин графа $\mathcal{G}$: $\{x,x_1,\dots,x_k,x'\}$. Любые два соседних члена этой последовательности либо совпадают, либо смежны в графе $\mathcal{G}$. Поэтому, отождествив одинаковые вершины, являющиеся соседними в этой последовательности, мы получим в графе $\mathcal{G}$ путь, соединяющий вершины x и x', но это противоречит принадлежности x и x' различным компонентам связности графа $\mathcal{G}$. Из доказанного утверждения вытекает, что в условиях теоремы граф $\mathcal{G}\times H$ имеет не меньше чем pq компонент связности. С другой стороны, из доказательства теоремы 2 ясно, что если не имеют места ни а), ни б), то (x,y) и (x',y') принадлежат одной компоненте связности графа $\mathcal{G}\times H$. Отсюда следует утверждение теоремы.

СЛЕДСТВИЕ I. Граф $\mathcal{G}\times H$ связен тогда и только тогда, когда связны графы $\mathcal{G}$ и H.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть граф $\mathcal{G}(X)$ имеет m_1 ребер и p_1 компонент связности, а граф $H(Y)$ – m_2 ребер и p_2 компонент связности. Тогда

$$\nu(\mathcal{G}\times H)=m_1\cdot m_2+p_1\cdot\nu(H)+p_2\cdot\nu(\mathcal{G})-\nu(\mathcal{G})\cdot\nu(H)$$

Действительно, при непосредственном подсчете легко убедиться, что

$$m_1\cdot m_2+p_1\cdot\nu(H)+p_2\cdot\nu(\mathcal{G})-\nu(\mathcal{G})\cdot\nu(H)=|X|m_2+|Y|m_1-|X|\cdot|Y|+p_1\cdot p_2.$$

А так как граф $\mathcal{G}\times H$ имеет $|X|\cdot|Y|$ вершин, $|X|\cdot m_2+|Y|\cdot m_1$ рёбер и $p_1\ p_2$ компонент связности, то

$$\nu(\mathcal{G}\times H)=|X|\cdot m_2+|Y|\cdot m_1-|X|\cdot|Y|+p_1\cdot p_2.$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\gamma(\mathcal{G})$ – хроматическое число графа $\mathcal{G}(X)$, $\gamma(H)$ – хроматическое число графа $H(Y)$. Тогда

$$\gamma(\mathcal{G}\times H)=\max\{\gamma(\mathcal{G}),\gamma(H)\}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как по лемме I граф $\mathcal{G}\times H$ содержит подграф, изоморфный графу $\mathcal{G}$, и подграф, изоморфный графу H, то $\gamma(\mathcal{G}\times H)\geq\max\{\gamma(\mathcal{G}),\gamma(H)\}$. Поэтому достаточно показать, что вершины графа $\mathcal{G}\times H$ можно раскрасить с помощью $p=\max\{\gamma(\mathcal{G}),\gamma(H)\}$ различных цветов.

Занумеруем цвета от 0 до $p-1$. Раскрасим с помощью этих p цветов вершины графов $\mathcal{G}$ и H. Вершину (x,y) графа $\mathcal{G}\times H$ окрашиваем в цвет k $(k\leq p-1)$, если $k\equiv \ell+r \pmod p$, где ℓ – номер цвета, в который окрашена вершина x графа $\mathcal{G}$, а r – номер цвета, в который окрашена вершина y графа H. Покажем, что при такой раскраске никакие две смежные вершины графа $\mathcal{G}\times H$ не окрасятся одинаково. Действительно, пусть (x,y) и (x',y') – смежные вершины графа $\mathcal{G}\times H$. Пусть, например, $x=x'$, y и y' смежны в H, причём вершина $x=x'$ графа $\mathcal{G}$ окрашена в цвет ℓ, вершина y графа H – в цвет r, а вершина y' – в цвет r'. Тогда вершина (x,y) графа $\mathcal{G}\times H$ окрашивается в цвет $k\equiv \ell+r \pmod p$, а вершина (x',y') – в цвет $k'\equiv \ell+r' \pmod p$. Покажем, что $k\not\equiv k' \pmod p$. Действительно, из $\ell+r\equiv \ell+r' \pmod p$ следует, что $r\equiv r' \pmod p$, а поскольку $r\leq p-1$ и $r'\leq p-1$,

то из $r\equiv r' \pmod p$ вытекает, что $r=r'$. А это невозможно, так как вершины y и y' графа H смежны.

Теорема 5 доказана.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\alpha(\mathcal{G})$ и $\alpha(H)$ – числа внутренней устойчивости графов $\mathcal{G}(X)$ и $H(Y)$, соответственно. Тогда

$$\alpha(\mathcal{G})\cdot\alpha(H)+\min\{(|X|-\alpha(\mathcal{G})),(|Y|-\alpha(H))\}\leq\alpha(\mathcal{G}\times H)\leq\min\{\alpha(\mathcal{G})\cdot|Y|,\alpha(H)\cdot|X|\}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S_1 и S_2 – наибольшие внутренне устойчивые множества графов $\mathcal{G}$ и H, соответственно. Тогда, очевидно, множество $S'=S_1\times S_2$ вершин графа $\mathcal{G}\times H$ будет внутренне устойчивым, причем $|S'|=|S_1|\cdot|S_2|=\alpha(\mathcal{G})\cdot\alpha(H)$.

Обозначим через $x_1,x_2,\dots,x_n$ элементы множества $X\setminus S_1$, а через $y_1,y_2,\dots,y_k$ – элементы множества $Y\setminus S_2$. Пусть, например, $n\leq k$. Тогда множество S'' вершин (x_i,y_i) $(i=1,2,\dots,n)$ графа $\mathcal{G}\times H$ также является внутренне устойчивым, так как если (x,y) и (x',y') – различные вершины множества S'', то, поскольку $x\neq x'$ и $y\neq y'$, вершины (x,y) и (x',y') не смежны в графе $\mathcal{G}\times H$. Пусть теперь $(x,y)\in S'$, $(x',y')\in S''$. Тогда $x\neq x'$ и $y\neq y'$. Поэтому, во-первых, $S'\cap S''=\varnothing$ и, во-вторых, множество $S'\cup S''$ является внутренне устойчивым в графе $\mathcal{G}\times H$. Отсюда вытекает утверждаемая теоремой нижняя оценка для $\alpha(\mathcal{G}\times H)$. Читатель легко докажет самостоятельно верхнюю оценку для $\alpha(\mathcal{G}\times H)$.

Легко получить также верхнюю оценку для числа внешней устойчивости декартова произведения графов $\mathcal{G}(X)$ и $H(Y)$. Именно, имеет место

ТЕОРЕМА 7. $\beta(\mathcal{G}\times H)\leq\min\{(\beta(\mathcal{G})\cdot|Y|);(\beta(H)\cdot|X|)\}$.

Автором, однако, не решен следующий вопрос.

Верно ли, что для любых графов $\mathcal{G}$ и H имеет место:

$$\beta(\mathcal{G})\cdot\beta(H)\leq\beta(\mathcal{G}\times H)\ ?$$

§ 4. Соотношения между элементарными путями в декартовом произведении графов и элементарными путями в сомножителях

ТЕОРЕМА 8. Пусть граф $\mathcal{G}(X)$ содержит элементарный путь длины ℓ, а граф $H(Y)$ – элементарный путь длины r. Тогда граф $\mathcal{G}\times H$ содержит элементарный путь длины $(\ell+1)(r+1)-1$.

Действительно, пусть $[x_0, x_1, \dots, x_\ell]$ – элементарный путь в графе $\mathcal{G}$; $[y_0, y_1, \dots, y_r]$ – элементарный путь в графе H. В графе $\mathcal{G}\times H$ построим элементарный путь μ требуемой длины следующим образом. В подграфе $(\mathcal{G}, y_0)$ прочертим начальный отрезок пути μ: $[(x_0,y_0),(x_1,y_0),\dots,(x_\ell,y_0)]$, затем по дуге $((x_\ell,y_0),(x_\ell,y_1))$, переходя к подграфу $(\mathcal{G},y_1)$, прочерчиваем путь от (x_ℓ,y_1) до (x_0,y_1); далее, по дуге $((x_0,y_1),(x_0,y_2))$, переходя к подграфу $(\mathcal{G},y_2)$, прочерчиваем путь $[(x_0,y_2),(x_1,y_2),\dots,(x_\ell,y_2)]$; затем переходим к подграфу $(\mathcal{G},y_3)$ и т.д. Последний отрезок длины ℓ пути μ мы проведем в подграфе $(\mathcal{G},y_r)$. Нетрудно подсчитать, что построенный в графе $\mathcal{G}\times H$ элементарный путь μ имеет длину $(\ell+1)(r+1)-1$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если графы $\mathcal{G}(X)$ и $H(Y)$ имеют гамильтоновы пути, то граф $\mathcal{G}\times H$ также имеет гамильтонов путь.

Действительно, если $|X|=n$ и $|Y|=m$, то граф $\mathcal{G}$, по условию, содержит элементарный путь длины $n-1$, а граф H – элементарный путь длины $m-1$. Тогда по теореме 8 граф $\mathcal{G}\times H$ содержит элементарный путь длины $n\cdot m-1$, который будет гамильтоновым, так как граф $\mathcal{G}\times H$ имеет $n\cdot m$ вершин.

ТЕОРЕМА 9. *Если в графе $\mathcal{G}(X)$ имеется элементарный путь нечётной длины $2k-1$, а в графе $H(Y)$ – элементарный путь длины $\ell>0$, то граф $\mathcal{G}\times H$ содержит элементарный цикл, состоящий из $2k(\ell+1)$ вершин.*

Пусть $[x_0, x_1, \dots, x_{2k-1}]$ – элементарный путь длины $2k-1$ в графе $\mathcal{G}$, $[y_0, y_1, \dots, y_\ell]$ – элементарный путь длины ℓ в графе H. Обозначим через $\mathcal{G}'$ подграф графа $\mathcal{G}$, порожденный вершинами $x_0, x_1, \dots, x_{2k-1}$; через H' – подграф графа H, порожденный вершинами $y_0, y_1, \dots, y_\ell$. Тогда $\mathcal{G}'\times H'$ есть подграф графа $\mathcal{G}\times H$, имеющий $2k(\ell+1)$ вершин. Подграф $\mathcal{G}'\times H'$ имеет гамильтонов цикл, который можно построить, например, так, как показано жирными линиями на рис. I. Этот цикл и будет искомым циклом в графе $\mathcal{G}\times H$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Если графы $\mathcal{G}(X)$ и $H(Y)$ имеют гамильтоновы пути положительной длины, причём один из графов имеет чётное число вершин, то граф $\mathcal{G}\times H$ имеет гамильтонов цикл.

Действительно, пусть $|X|=2k$; $|Y|=\ell>1$. Тогда графы $\mathcal{G}$ и H имеют элементарные пути длины $2k-1$ и $\ell-1$,

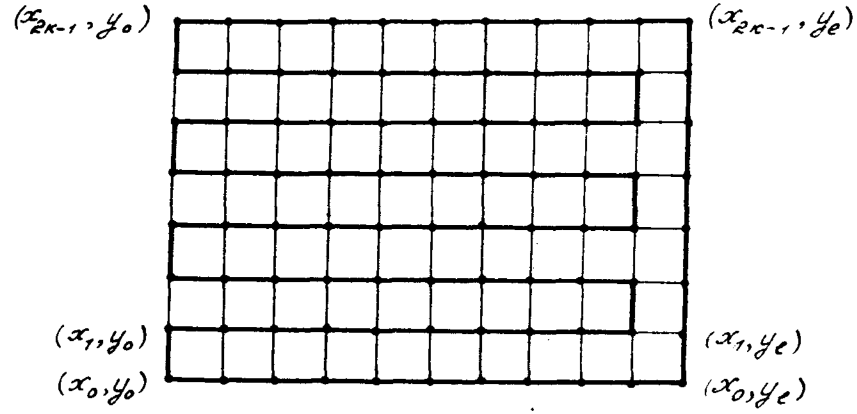

Рис. I

соответственно. Граф $\mathcal{G}\times H$, по теореме 9, имеет элементарный цикл, состоящий из $2k\ell$ вершин, который является гамильтоновым, так как охватывает все $2k\ell$ вершин графа $\mathcal{G}\times H$.

ТЕОРЕМА IO. *Если граф $\mathcal{G}(X)$ имеет гамильтонов цикл, а граф $H(Y)$ – гамильтонов путь, то граф $\mathcal{G}\times H$ имеет гамильтонов цикл.*

Пусть $[x_0, x_1, \dots, x_n, x_0]$ $(n\geq 2)$ – гамильтонов цикл в графе $\mathcal{G}$, а $[y_0, y_1, \dots, y_m]$ – гамильтонов путь в графе H. Построим гамильтонов цикл в графе $\mathcal{G}\times H$. Для этого в каждом подграфе $(\mathcal{G}, y_i)$ $(i=0,1,\dots,m)$ прочертим элементарный путь $[(x_1,y_i),(x_2,y_i),\dots,(x_n,y_i)]$ в подграфе (x_0, H) – элементарный путь $[(x_0,y_0)(x_0,y_1),\dots,(x_0,y_m)]$. Далее, проведем ребро $((x_1,y_m),(x_0,y_m))$, если m нечётно, или ребро $((x_n,y_m),(x_0,y_m))$, если m четно. Затем возьмём еще рёбра $((x_i,y_i),(x_i,y_{j+1}))$, где $j=0,1,\dots,m-1$, а $i=n$, если j чётно, и $i=1$, если j нечётно. Добавив к полученному гамильтонову пути графа $\mathcal{G}\times H$ ребро $((x_1,y_0),(x_0,y_0))$, мы завершим построение гамильтонова цикла в графе $\mathcal{G}\times H$.

Замечание. Приведённые нами в этом параграфе достаточные условия существования гамильтонова цикла и пути в графе $\mathcal{G}\times H$ не являются необходимыми, как показывает следующий пример.

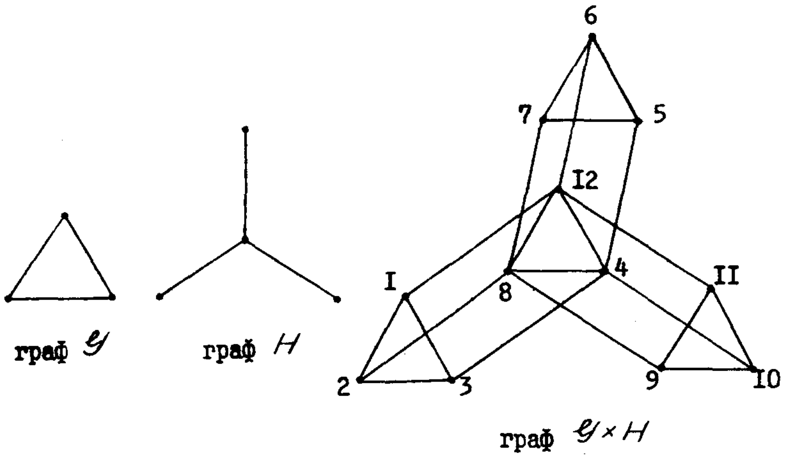

Рис. 2

Изображенный на рис. 2 граф H не содержит гамильтонова пути, тем не менее граф $\mathcal{G}\times H$ содержит гамильтонов цикл:

$$[I,2,3,4,5,6,7,8,9,I0,II,I2,I]$$

§ 5. О разложении связных графов в декартово произведение

Будем говорить, что граф $\mathcal{G}$ разложим в декартово произведение графов $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \ldots, \mathcal{G}_n$, если $\mathcal{G} \cong \mathcal{G}_1\times\mathcal{G}_2\times\ldots\times\mathcal{G}_n$. Имеем, очевидно, $\mathcal{G}\cong\mathcal{G}\times E$, где E - одновершинный граф. Граф называется простым, если любое разложение его в декартово произведение не содержит двух отличных от одновершинных графов сомножителей. Два разложения графа $\mathcal{G}$ в декартово произведение называются эквивалентными, если между их сомножителями, не являющимися одновершинными графами, можно установить взаимно однозначное соответствие, при котором соответствующие друг другу сомножители изоморфны.

В этом параграфе мы будем иметь дело с разложением связных графов в декартово произведение. Отметим, что доказываемые нами теоремы II и I2 содержатся в работе [4]. Однако мы помещаем своё доказательство этих теорем, так как оно значительно проще доказательства Сабидусси.

ЛЕММА 3. П у с т ь $\mathcal{G}(X)$, $H(Y)$, $\mathcal{F}(Z)$ и $K(V)$ - связные графы, причём $\mathcal{G}\times H \cong \mathcal{F}\times K$. Пусть при изоморфизме между $\mathcal{G}\times H$ и $\mathcal{F}\times K$ устанавливаются следующие соответствия между вершинами: $(x,y)\longleftrightarrow(z,v)$; $(x',y)\longleftrightarrow(z',v')$. Тогда найдутся такие $x''\in X$ и $x'''\in X$, что $(x'',y)\longleftrightarrow(z,v')$ и $(x''',y)\longleftrightarrow(z',v)$.

Действительно, по лемме 2 любой кратчайший путь между вершинами (x,y) и (x',y) графа $\mathcal{G}\times H$ целиком лежит в подграфе $(\mathcal{G},y)$. С другой стороны, в графе $\mathcal{F}\times K$ между вершинами (z,v) и (z',v') существует кратчайший путь, проходящий через вершину (z,v'), и кратчайший путь, проходящий через вершину (z',v). Следовательно, при изоморфизме между $\mathcal{G}\times H$ и $\mathcal{F}\times K$ вершинам (z,v') и (z',v) графа $\mathcal{F}\times K$ должны соответствовать некоторые вершины (x'',y) и (x''',y) подграфа $(\mathcal{G},y)$ графа $\mathcal{G}\times H$, что и требовалось доказать.

ЛЕММА 4. П у с т ь $\mathcal{G}(X)$, $H(Y)$, $\mathcal{F}(Z)$, $K(V)$ - связные графы, $\mathcal{G}\times H\cong\mathcal{F}\times K$. Если $K(V)$ - простой граф, то из $(x,y)\longleftrightarrow(z,v)$ и $(x',y)\longleftrightarrow(z,v')$ $(v\neq v')$ следует, что при любом $v''\in V$ найдётся такая вершина $x''\in X$, для которой $(x'',y)\longleftrightarrow(z,v'')$.

Обозначим через $\mathcal{G}^*(X^*)$ подграф графа $\mathcal{G}(X)$, порожденный теми вершинами $x^*\in X$, для которых существуют такие $y^*\in Y$ и $v^*\in V$, что $(x^*,y^*)\longleftrightarrow(z,v^*)$. Через $H^*(Y^*)$ обозначим подграф графа $H(Y)$, порождённый теми вершинами $y^*\in Y$, для которых существуют такие $x^*\in X$ и $v^*\in V$, что $(x^*,y^*)\longleftrightarrow(z,v^*)$. Так как $(x,y)\longleftrightarrow(z,v)$; $(x',y)\longleftrightarrow(z,v')$, то $x\in X^*$ и $x'\in X^*$, а поскольку $x\neq x'$, то граф $\mathcal{G}^*$ не является одновершинным. Лемма утверждает, что граф $H^*(Y^*)$ является одновершинным. Так как граф $K(V)$ простой и граф $\mathcal{G}^*$ имеет более одной вершины, то утверждение леммы будет доказано, если мы покажем, что $K\cong\mathcal{G}^*\times H^*$. А для этого достаточно показать, что при изоморфизме между графами $\mathcal{G}\times H$ и $\mathcal{F}\times K$ вершинам подграфа (z,K) графа $\mathcal{F}\times K$ взаимно однозначным образом соответствуют вершины подграфа $\mathcal{G}^*\times H^*$ графа $\mathcal{G}\times H$. Действительно, пусть $(z,v^*)\longleftrightarrow(x^*,y^*)$. Тогда, по определению, $x^*\in X^*$ и $y^*\in Y^*$. Обратно, пусть $(x^*,y^*)\longleftrightarrow(z^*,v^*)$, где $x^*\in X^*$, $y^*\in Y^*$. Покажем, что $z^*=z$. Так как $x^*\in X^*$, то существует такое $\tilde{y}\in Y$ и такое $\tilde{v}\in V$, что $(x^*,\tilde{y})\longleftrightarrow(z,\tilde{v})$. Аналогично, так как $y^*\in Y^*$, то существует такое $\tilde{x}\in X$ и такое $\tilde{\tilde{v}}\in V$, что $(\tilde{x},y^*)\leftrightarrow(z,\tilde{\tilde{v}})$. Итак, имеем: $(z,\tilde{v})\leftrightarrow(x^*,\tilde{y})$; $(z,\tilde{\tilde{v}})\leftrightarrow(\tilde{x},y^*)$. По лемме 3 существует такое $v''\in V$, что $(z,v'')\leftrightarrow(x^*,y^*)$. Отсюда и из того, что $(z^*,v^*)\leftrightarrow(x^*,y^*)$, заключаем, что $z=z^*$.

Лемма 4 доказана.

ТЕОРЕМА II. Пусть $\mathcal{G}(X)$, $H(Y)$, $\mathcal{F}(Z)$ и $K(V)$ - связные графы. Если $\mathcal{G}\times H\simeq\mathcal{F}\times K$ и $H\simeq K$, то $\mathcal{G}\simeq\mathcal{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если графы H и K - одновершинные, то теорема очевидна. Пусть H и K не являются одновершинными графами. В силу ассоциативности декартова произведения можно, не умаляя общности, предполагать, что H и K - простые графы, не являющиеся одновершинными.

Установим изоморфизм φ графа $\mathcal{G}\times H$ на граф $\mathcal{F}\times K$. Обозначим через (X',Y) подмножество всех тех вершин подграфа $(\mathcal{G},Y)$ графа $\mathcal{G}\times H$, которые при изоморфизме φ отображаются в вершины подграфа $(\mathcal{F},V)$ графа $\mathcal{F}\times K$. Множество образов вершин (X',Y) обозначим через (Z',V). Пусть $(\mathcal{G}',Y)$ - подграф графа $\mathcal{G}\times H$, порождённый вершинами (X',Y); $(\mathcal{F}',V)$ - подграф графа $\mathcal{F}\times K$, порождённый вершинами (Z',V). Ясно, что $(\mathcal{G}',Y)\simeq(\mathcal{F}',V)$. Если $(\mathcal{G}',Y)=(\mathcal{G},Y)$, то, очевидно, $(\mathcal{F}',V)=(\mathcal{F},V)$ и потому $(\mathcal{G},Y)\simeq(\mathcal{F},V)$, откуда $\mathcal{G}\simeq\mathcal{F}$ и теорема доказана.

Допустим, что $(\mathcal{G}',Y)\neq(\mathcal{G},Y)$. Тогда, по леммам 3 и 4, все одноимённые по $\mathcal{F}$ с (Z',V) вершины графа $\mathcal{F}\times K$ и только они будут при изоморфизме φ соответствовать вершинам подграфа $(\mathcal{G},Y)$. Следовательно, $(\mathcal{G},Y)\simeq(\mathcal{F}',V)\times K$. С другой стороны, по тем же леммам 3 и 4, все одноимённые по $\mathcal{G}$ с (X',Y) вершины графа $\mathcal{G}\times H$ и только они при изоморфизме φ^{-1} будут соответствовать вершинам подграфа $(\mathcal{F},V)$; отсюда $(\mathcal{F},V)\simeq$ $\simeq(\mathcal{G}',Y)\times H$. Так как $(\mathcal{F}',V)\simeq(\mathcal{G}',Y)$ и $K\simeq H$, то $(\mathcal{G},Y)\simeq$ $\simeq(\mathcal{F},V)$, откуда $\mathcal{G}\simeq\mathcal{F}$.

Теорема II доказана.

ЛЕММА 5. Пусть $H(Y)$ и $K(V)$ - простые связные графы, не изоморфные друг другу; $\mathcal{G}(X)$ и $\mathcal{F}(Z)$ - связные графы. Тогда, если $\mathcal{G}\times H\simeq\mathcal{F}\times K$, то существует такое разложение графа $\mathcal{G}$ в декартово произведение связных графов, при котором один из сомножителей изоморфен K, и такое разложение графа $\mathcal{F}$ в декартово произведение связных графов, при котором один из сомножителей изоморфен H.

Действительно, пусть $\mathcal{G}\times H\simeq\mathcal{F}\times K$. Поскольку $H\not\simeq K$, то, по теореме II, $\mathcal{G}\not\simeq\mathcal{F}$. А так как графы $\mathcal{G}$ и $\mathcal{F}$ не изоморфны, то по крайней мере один из них не изоморфен никакому подграфу другого. Пусть, например, $\mathcal{G}$ не изоморфен никакому подграфу графа $\mathcal{F}$. Тогда при изоморфном отображении графа $\mathcal{G}\times H$ на граф $\mathcal{F}\times K$ образ подграфа $(\mathcal{G},Y)$ не будет целиком лежать в подграфе $(\mathcal{F},V)$ и, как показывается при доказательстве теоремы II, $\mathcal{G}\simeq\mathcal{F}'\times K$, где $\mathcal{F}'$ - некоторый связный, в силу следствия I, граф. Имеем: $\mathcal{G}\times H\simeq\mathcal{F}\times K$ и $\mathcal{G}\simeq\mathcal{F}'\times K$. Поэтому $(\mathcal{F}'\times K)\times H\simeq\mathcal{F}\times K$. Отсюда, в силу теорем I и II, $\mathcal{F}'\times H\simeq\mathcal{F}$.

Лемма 5 доказана.

ТЕОРЕМА I2. Любые два разложения связного графа на простые сомножители эквивалентны.

Если граф простой, то теорема тривиальна. Допустим теперь, что теорема доказана для всех графов, которые в разложении на простые сомножители содержат меньше чем n простых сомножителей, отличных от одновершинных графов. Пусть теперь $H_1\times H_2\times\ldots\times H_n\simeq K_1\times K_2\times\ldots\times K_m$, $(n>1)$, где H_i $(i=1,2,\ldots,n)$ и K_j $(j=1,2,\ldots,m)$ - простые связные графы, не являющиеся одновершинными. Достаточно показать, что K_m изоморфен некоторому H_i. Пусть $K_m\not\simeq H_n$. Имеем:

$$(H_1\times H_2\times\ldots\times H_{n-1})\times H_n\simeq(K_1\times K_2\times\ldots\times K_{m-1})\times K_m.$$

По лемме 5, тогда $(H_1\times H_2\times\ldots\times H_{n-1})\simeq R\times K_m$, где R - некоторый связный граф. Так как по предположению индукции любые два разложения графа $(H_1\times H_2\times\ldots\times H_{n-1})$ на простые сомножители эквивалентны, то при некотором $i=1,2,\ldots,n-1$,

$$H_i\simeq K_m.$$

Теорема I2 доказана.

§ 6. О распространении теорем II и I2 на случай несвязных графов

Теоремы II и I2 доказаны нами только для связных графов. Сейчас мы докажем теорему II без этого ограничения. Вопрос о верности теоремы I2 для этого более общего случая остаётся открытым.

ТЕОРЕМА I3. П у с т ь $\mathcal{G}(X), H(Y), \mathcal{F}(Z)$ и $K(V)$ – г р а ф ы. Е с л и $\mathcal{G}\times H \cong \mathcal{F}\times K$ и $H\cong K$, т о $\mathcal{G}\cong\mathcal{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{G}\times H\cong\mathcal{F}\times K$ и $H\cong K$. Тогда графы $\mathcal{G}$ и $\mathcal{F}$, по теореме 4, состоят из одинакового числа компонент связности. Пусть $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \ldots, \mathcal{G}_q$ и $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_q$ – компоненты связности графов $\mathcal{G}$ и $\mathcal{F}$, соответственно. Предположим, что теорема неверна, то есть между компонентами $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \ldots, \mathcal{G}_q$ и $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_q$ нельзя установить взаимно однозначного соответствия, при котором соответствующие друг другу $\mathcal{G}_i$ и $\mathcal{F}_j$ изоморфны. Тогда, не умаляя общности, можно полагать, что графы $\mathcal{G}$ и $\mathcal{F}$ вообще не содержат изоморфных компонент.

Действительно, если $\mathcal{G}_i\cong\mathcal{F}_j$, то, обозначив через $\mathcal{G}'$ подграф графа $\mathcal{G}$, образованный компонентами $\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_{i-1}, \mathcal{G}_{i+1}, \ldots, \mathcal{G}_q$, и через $\mathcal{F}'$ – подграф графа $\mathcal{F}$, образованный компонентами $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_{j-1}, \mathcal{F}_{j+1}, \ldots, \mathcal{F}_q$, мы получим, очевидно, $\mathcal{G}'\times H\cong\mathcal{F}'\times K$, причем графы $\mathcal{G}'$ и $\mathcal{F}'$ имеют по $q-1$ компонент связности.

Итак, пусть $\mathcal{G}\not\cong\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}_i\not\cong\mathcal{F}_j$ ни при каких i и j.

По теореме I2 каждую компоненту связности графов $\mathcal{G}, H, \mathcal{F}$ и K можно единственным образом разложить на простые связные сомножители. Условимся в каждом таком разложении в качестве одного и только одного сомножителя обязательно иметь одновершинный граф E. Пусть $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \ldots, \mathcal{L}_n$ – не изоморфные друг другу простые графы, отличные от одновершинных, которые фигурируют в разложениях компонент связности графов $\mathcal{G}, H, \mathcal{F}, K$. Это значит, что любая компонента связности графов $\mathcal{G}, H, \mathcal{F}$ и K изоморфна декартову произведению $\mathcal{L}_1^{\alpha_1}\times\mathcal{L}_2^{\alpha_2}\times\ldots\times\mathcal{L}_n^{\alpha_n}\times E$, где α_i – число сомножителей $\mathcal{L}_i$, входящих в разложение этой компоненты, причём $\alpha_i=0$, если в это разложение не входит $\mathcal{L}_i$. Поставим в соответствие (однозначное) каждой компоненте связности графов $\mathcal{G}, H, \mathcal{F}$ и K $(n+1)$-мерный вектор $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, 1)$, если эта компонента изоморфна $\mathcal{L}_1^{\alpha_1}\times\mathcal{L}_2^{\alpha_2}\times\ldots\times\mathcal{L}_n^{\alpha_n}\times E$. Наше предположение состоит в том, что совокупность q векторов, соответствующих компонентам связности $\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_q$ графа $\mathcal{G}$, и совокупность q векторов, соответствующих компонентам связности $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_q$ графа $\mathcal{F}$, не содержат равных векторов. Заметим, что так как $H\cong K$, то аналогичные совокупности векторов для графов H и K одинаковы.

Из всех векторов, соответствующих графу $\mathcal{G}$, выберем

множество тех векторов, которые имеют наибольшую первую компоненту. Обозначим это множество через A_1 и пусть α_1 – значение первой компоненты векторов множества A_1. Из векторов, соответствующих графу $\mathcal{F}$, выберем множество B_1 тех векторов, которые имеют наибольшую первую компоненту, равную β_1. Покажем, что $\alpha_1=\beta_1$. Действительно, обозначим через A_1' множество векторов, соответствующих графу H, имеющих наибольшую первую компоненту, равную α_1', а через B_1' – множество векторов, соответствующих графу K, имеющих наибольшую первую компоненту β_1'. Так как $H\cong K$, то $\alpha_1'=\beta_1'$, а так как $\mathcal{G}\times H\cong\mathcal{F}\times K$, то $\alpha_1+\alpha_1'=\beta_1+\beta_1'$. Отсюда $\alpha_1=\beta_1$. Теперь из множеств A_1, B_1, A_1', B_1' выберем соответственно подмножества A_2, B_2, A_2', B_2' векторов, имеющих наибольшую вторую компоненту $\alpha_2, \beta_2, \alpha_2', \beta_2'$, соответственно. Снова имеем $\alpha_2+\alpha_2'=\beta_2+\beta_2'$ и $\alpha_2'=\beta_2'$, поэтому $\alpha_2=\beta_2$. Теперь, выбрав из множеств A_2, B_2, A_2', B_2' множество векторов, имеющих наибольшую третью компоненту, аналогично заключаем, что $\alpha_3=\beta_3$ и т.д. Пусть

$$(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,1)\in A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n \quad\text{и}\quad (\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n,1)\in B_1\cap B_2\cap\ldots\cap B_n.$$

Тогда, по доказанному, $\alpha_1=\beta_1, \ldots, \alpha_n=\beta_n$, то есть графы $\mathcal{G}$ и $\mathcal{F}$ имеют изоморфные компоненты связности, что противоречит нашему предположению.

Теорема I3 доказана.

Л и т е р а т у р а

I. Берж К. Теория графов и её применения. ИЛ., М., I962.

2. Решетняк Ю.Г. О задаче соединения элементов вычислительной системы. Сб. "Вычислительные системы", вып. 3, Новосибирск, I962.

3. Визинг В.Г. и Плесневич Г.С. К проблеме минимальной раскраски вершин графа. Сиб. Мат. журн. (в печати).

4. G. Sabidussi. Graph multiplication. Math. Zeit, 72, N 5, 1960.