ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Сборник трудов

1963 г. Института математики СО АН СССР Выпуск 9

О РЕАЛИЗАЦИИ СТОХАСТИЧЕСКИХ МАТРИЦ КОНЕЧНЫМИ АВТОМАТАМИ

С.В. Макаров

При решении ряда задач теории надежности (см. [1], [2]) приходится рассматривать конечные автоматы со случайными входами, синтезированные из булевских логических элементов и единичных задержек. Если случайный вектор входов в произвольный момент времени t не зависит от информации, относящейся к предыдущим моментам времени, то, как известно (см., например, [1]), последовательность состояний автомата образует однородную цепь Маркова с конечным множеством состояний, характеризуемую некоторой стохастической матрицей переходных вероятностей. Мы будем говорить, что данная стохастическая матрица реализуется данным конечным автоматом. Представляет интерес обратный вопрос, а именно: для всякой ли стохастической матрицы можно построить реализующий ее конечный автомат?

В настоящей заметке дается алгоритм, позволяющий для любой стохастической матрицы построить некоторый класс реализующих ее автоматов.

По поводу общих вопросов теории вероятностей и теории конечных автоматов отсылаем читателя к монографиям [3], [4], [5].

Рассмотрим систему логических уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&f_1(t)=a_{1,1}f_1^0(t-1)f_2^0(t-1)\ldots f_n^0(t-1)\vee\ldots\vee a_{1,2^n}f_1^1(t-1)\ldots f_n^1(t-1),\\
&f_2(t)=a_{1,2}f_1^0(t-1)f_2^0(t-1)\ldots f_n^0(t-1)\vee\ldots\vee a_{2,2^n}f_1^1(t-1)\ldots f_n^1(t-1),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&f_n(t)=a_{n,1}f_1^0(t-1)f_2^0(t-1)\ldots f_n^0(t-1)\vee\ldots\vee a_{n,2^n}f_1^1(t-1)\ldots f_n^1(t-1).
\end{aligned}\right\}\text{(I)}$$

Здесь приняты обозначения:
$f_i(t)$ есть функция выхода i -ой задержки на один такт (i = I,2,... n); $f_i^0=\bar{f}_i$; $f_i^1=f_i$; каждая из a_{ij} есть булева функция от m независимых переменных, которые принимают значение " I " с вероятностью I/2; все a_{ij} не зависят от времени. В каждой строке системы уравнений (I) присутствуют все 2^n минитермов, составленных из функций

$$f_i(t-1)\ (i=1,2,\ldots n).$$

Очевидно, что если заданы все a_{ij} , можно синтезировать конечный автомат с n единичными задержками, состояния выходов которых описываются системой уравнений (I). Независимые переменные булевых функций a_{ij} можно рассматривать как независимые входы автомата, причем вероятность единицы на каждом входе равна одной второй. Такой автомат обозначим $\omega(n,m)$.

Пусть дана стохастическая матрица A порядка N $(2^{n-1}<N\leq 2^n)$

$$A=\|P_{ij}\|, \tag{2}$$

причем

$$P_{ij}=\frac{b_{ij}}{2^m}, \tag{3}$$

где b_{ij} , m - целые числа.

Очевидно, что, выбрав m достаточно большим, мы можем с любой степенью точности аппроксимировать матрицей указанного вида любую стохастическую матрицу, заданную численно.

ТЕОРЕМА. Для любой стохастической матрицы A порядка N , удовлетворяющей условию (3), существует непустой класс автоматов $\Omega=\{\omega(n,m)\}$, реализующих A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала исследуем случай, когда $N=2^n$.

Без ограничения общности примем, что нумерация состояний марковской цепи, соответствующей матрице A , совпадает с естественной нумерацией строк и столбцов A , и двоичный номер состояния $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n$ есть в то же время номер минитерма $f_1^{\sigma_1}f_2^{\sigma_2}\ldots f_n^{\sigma_n}$. Напишем систему (I). Покажем, что коэффициенты системы a_{ij} можно задать таким образом, что матрица переходов автомата $\omega(n,m)$ будет совпадать с A .

Логическое условие перехода автомата из состояния $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n$ (в момент $t-1$) в состояние $\tau_1\tau_2\ldots\tau_n$ (в момент t) есть

$$a^{\tau_1}_{1,\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n}\,a^{\tau_2}_{2,\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n}\ldots\ldots a^{\tau_n}_{n,\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n}=1\ . \tag{4}$$

Чтобы сделать запись менее громоздкой, опустим в (4) индекс $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n$. Тогда (4) перейдет в (5):

$$a_1^{\tau_1}a_2^{\tau_2}\ldots a_n^{\tau_n}=1. \tag{5}$$

При этом будем подразумевать, что (5) относится к фиксированному начальному состоянию $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n$.

Мы должны подобрать булевы функции $a_1,a_2,\ldots,a_n$ таким образом, чтобы вероятность выполнения (5) совпадала с соответствующим (в принятой системе нумерации) элементом матрицы A :

$$\mathcal{P}\{a_1^{\tau_1}a_2^{\tau_2}\ldots a_n^{\tau_n}=1\}=\frac{b_{ij}}{2^m}\ , \tag{6}$$

где i обозначает номер $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n$ (в произвольной системе счисления), а j обозначает номер $\tau_1\tau_2\tau_3\ldots\tau_n$. Пусть $X_1,X_2,\ldots,X_m$ суть входы $\omega(n,m)$. Составим таблицу всех минитермов $X_1^{i_1}X_2^{i_2}\ldots X_m^{i_m}$. Из определения автомата $\omega(n,m)$ следует, что множество этих минитермов можно рассматривать как полную систему элементарных равновероятных событий, число которых равно 2^m ; тогда b_{ij} есть число событий, благоприятствующих выполнению (5).

Переход автомата в состояние $\tau_1\tau_2\ldots\tau_n$ осуществляется тогда и только тогда, когда функции $a_1,a_2,\ldots,a_n$ (взятые именно в данной последовательности) образуют комбинацию $\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n$. Следовательно, для достижения поставленной цели надо так определить функции $a_1,a_2,\ldots,a_n$ на множестве одних и тех же минитермов, чтобы комбинация $\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n$ встречалась b_{ij} раз. А это, как нетрудно видеть, всегда можно сделать, причем неоднозначным образом. Аналогично поступаем для всех начальных состояний $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n$.

Пусть теперь $2^{n-1} < N < 2^{n}$. Составим уравнения вида (I); из числа всевозможных 2^{n} состояний задержек $f_1, f_2 \dots f_n$ отметим произвольным образом N состояний и будем считать их существенными; остальные $2^{n} - N$ состояний – несущественными. Коэффициенты a_{ij}, стоящие при минитермах $f_1^{\sigma_1} f_2^{\sigma_1} \cdots f_n^{\sigma_n}$, для которых $\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n$ есть номер несущественного состояния, положим равными нулю. Остальные коэффициенты вычисляем так же, как и для случая $N = 2^{n}$, принимая, что вероятность перехода из любого существенного состояния в любое несущественное состояние равна нулю. Так как выбор существенных состояний неоднозначен, то в этом случае класс автоматов, порождающих данную матрицу переходов, шире, чем в случае $N = 2^{n}$. (В обоих случаях возникает именно класс автоматов в силу многозначности выбора функций a_{ij}).

Теорема доказана.

Отсюда, в частности, следует, что при моделировании марковских цепей с помощью дискретных цифровых устройств достаточно использовать случайные датчики стандартного типа (а именно, генерирующие единичные импульсы с вероятностью одна вторая).

П р и м е р. Дана матрица

0,25	0,75	0	0	
0,5	0,5	C	0	(7)
0,I25	0,250	0,375	0,250	
0,375	0,I25	0,250	0,250	

Найдем реализующий её конечный автомат. Здесь достаточно принять $m = 3$; очевидно, $n = 2$. Уравнения (I) примут вид:

$$\left.\begin{aligned} f_1(t) &= a_{11}(X_1, X_2, X_3)\overline{f_1(t-1)}\,\overline{f_2(t-1)} \vee \dots \vee a_{14}(X_1, X_2, X_3) f_1(t-1) f_2(t-1), \\ f_2(t) &= a_{21}(X_1, X_2, X_3)\overline{f_1(t-1)}\,\overline{f_2(t-1)} \vee \dots \vee a_{24}(X_1, X_2, X_3) f_1(t-1) f_2(t-1). \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Функции $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}; a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}$ определим, например, так, как указано в таблице:

X_1	X_2	X_3	a_{11}	a_{21}	a_{12}	a_{22}	a_{13}	a_{23}	a_{14}	a_{24}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	I	0	0	0	0	0	I	0	0
0	I	0	0	I	0	0	0	I	0	0
0	I	I	0	I	0	0	I	0	0	I
I	0	0	0	I	0	I	I	0	I	0
I	0	I	0	I	0	I	I	0	I	0
I	I	0	0	I	0	I	I	I	I	I
I	I	I	0	I	0	I	I	I	I	I

Выписав из таблицы функции a_{ij} сначала в дизъюнктивной нормальной форме, а затем элементарно упростив, получим один из вариантов решения задачи:

$$\left.\begin{aligned} a_{11} &= 0, \\ a_{21} &= X_1 \vee X_2, \\ a_{12} &= 0, \\ a_{22} &= X_1, \\ a_{13} &= X_1 \vee \bar{X}_1 X_2 X_3, \\ a_{23} &= X_1 X_2 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_2 X_3 \vee \bar{X}_1 X_2 \bar{X}_3, \\ a_{14} &= X_1, \\ a_{24} &= X_1 X_2 \vee \bar{X}_1 X_2 X_3. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Следовательно, уравнения (8) примут вид:

$$\left.\begin{aligned} f_1(t) &= (X_1 \vee \bar{X}_1 X_2 X_3) f_1(t-1)\overline{f_2(t-1)} \vee X_1 f_1(t-1) f_2(t-1), \\ f_2(t) &= (X_1 \vee X_2)\overline{f_1(t-1)}\,\overline{f_2(t-1)} \vee X_1 \overline{f_1(t-1)} f_2(t-1) \vee \\ &\vee (X_1 X_2 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_2 X_3 \vee \bar{X}_1 X_2 \bar{X}_3) f_1(t-1)\overline{f_2(t-1)} \vee \\ &\vee (X_1 X_2 \vee \bar{X}_1 X_2 X_3) f_1(t-1) f_2(t-1) \end{aligned}\right\} \quad (I0)$$

Литература

1. Макаров С.В. О надежности многотактных схем с малой памятью. Сб. "Вычислительные системы", вып. 5, Новосибирск, 1963.
2. Макаров С.В. Метод моментов для вероятностных расчетов многотактных схем. Сб. "Вычислительные системы",вып.7, Новосибирск, 1963.
3. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М., 1954.
4. Романовский В.И. Дискретные цепи Маркова. М., 1949.
5. Кобринский Н.Е. и Трахтенброт Б.А. Введение в теорию конечных автоматов. М., 1962.