В Ы Ч И С Л И Т Е Л Ь Н Ы Е   С И С Т Е М Ы

Сборник трудов

1964 г. Института математики СО АН СССР Выпуск II

ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ВОПРОСЫ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ ПО ВРЕМЕНИ

Д.И. Голенко

Как известно, основными понятиями сети являются понятия события и работы. При анализе сети необходимо задаться количественными оценками выполняемых работ (временными, стоимостными и т.п.). В настоящей работе мы будем исследовать временные оценки, хотя весь разработанный ниже математический аппарат приложим почти без каких-либо изменений к оценкам любого рода.

Прежде всего необходимо подчеркнуть, что временные оценки для любой из работ носят не фиксированный, а случайный характер, то есть являются значениями случайной величины, имеющими определенное распределение вероятностей. Действительно, если многократно выполнить одну и ту же работу, то, какие бы одинаковые условия ее выполнения мы ни пытались бы создать, времена выполнения этой работы будут различаться.

Разумеется, время выполнения любой из входящих в сетевой проект работ ($i\,j$) имеет свое специфическое распределение, которое изменяется при переходе от одной работы к другой (и для одной и той же работы может изменяться в зависимости от времени и места). Нашей задачей является построение такого обобщенного распределения, которое отражало бы наиболее общие закономерности для всех работ в целом и учитывалось бы в качестве типового априорного распределения при анализе вероятностных характеристик сетевого проекта. При оценке неизвестных эмпирических распределений можно прогнозировать, что они относятся к классу бета-распределений - наиболее часто встречающемуся виду эмпирических распределений.

Анализ большого количества статистических данных (хронометражи времен реализации отдельных работ, нормативные данные и т.д.) также подтверждает возможность использования бета-распределения в качестве априорного.

Зарубежные методы исследования временных сетей в системе "PERT" характеризуются следующим правилом: ответственный исполнитель по каждой работе (из числа входящих в сеть) заранее задает три оценки, характеризующие распределение времени выполнения для этой работы:

а) моду этого распределения M, которое носит название наиболее вероятного времени; величина M устанавливается ответственным исполнителем на основании своих знаний, научного и производственного опыта и является его априорной оценкой;

б) нижнюю грань области определения a, которая носит название оптимистического времени (то есть, что работа при наиболее благоприятном стечении обстоятельств будет выполнена за предельно короткий срок);

в) верхнюю грань области b, которая носит название пессимистического времени (то есть, что эта работа, вследствие самых неблагоприятных стечений обстоятельств, будет проведена в максимально длинные сроки).

На основании этих трех задаваемых оценок определяются математическое ожидание $\bar{x}$ и дисперсия Dx времени выполнения работы, по формулам:

$$\bar{x} = \frac{a+b+4M}{6}, \tag{I}$$

$$Dx = \frac{1}{36}(b-a)^2. \tag{2}$$

Анализируя приведенную выше методику, следует отметить, что требование к исполнителям работ относительно задания трех временных оценок является весьма жестким. В частности, особые трудности вызывает необходимость задания моды распределения, особенно в случае работ, по которым не накоплена достаточная статистика.

Помимо этого, бета-распределение характеризуется 4 параметрами Z, которые не могут быть оценены по трем задаваемым характеристикам. Последнее обстоятельство делает невозможным моделирование значений времени выполнения работ с помощью метода Монте-Карло.

Проанализировав значительный статистический материал, мы пришли к выводу, что применение некоторых частных случаев бета-распределения позволяет существенно снизить количество анализируемых данных с сохранением достаточной точности оценки. На наш взгляд, при исследовании параметров распределения следует постулировать распределение (типа "бета-распределения")

$$p(x) = \frac{12}{(b-a)^4}(x-a)(b-x)^2. \tag{3}$$

Его параметры легко вычислимы и равны

$$\bar{x} = \int_a^b x p(x) dx = \frac{2b+3a}{5}, \tag{4}$$

$$M = \frac{2a+b}{3}. \tag{5}$$

Нетрудно показать, что всегда $M < \bar{x}$; дисперсия

$$Dx = \int_a^b x^2 p(x) dx - \left[\int_a^b x p(x) dx\right]^2 = 0{,}04(b-a)^2. \tag{6}$$

Распределение (3) характеризуется лишь двумя параметрами a и b. Оно асимметрично, более круто поднимается при $x \sim a$ и полого опускается при приближении к верхнему пределу b. Сопоставление эмпирического распределения времени выполнения различных работ с распределением (3) показало весьма хорошее соответствие.

При этом использовалась следующая методика сопоставления. Для каждой из входящих в сетевой проект работ на основании оптимистической и пессимистической оценок a и b по формуле (5) определяется значение моды M. Одновременно исполнителями работ задается значение M, исходя из производственного опыта, в соответствии с методикой, принятой в системе "PERT". Заметим, что исполнители работ не знакомы с применяемой автором методикой, основанной на двух оценках, и, таким образом, на их решение ничто не влияет. По каждой работе, следовательно, имеются две оценки значения M -вычисляемая по формуле (5) и задаваемая исполнителем работы. Объединив полученные данные по всем входящим в сеть работам, мы получаем две эмпирических совокупности. Предстоит определить, принадлежат ли обе сравниваемые эмпирические совокупности к одной генеральной, или расхождения настолько существенны, что эту гипотезу следует отбросить. В последнем случае необходимо сделать вывод, что формулы (3) и (5) недостаточно точно аппроксимируют распределение вероятностей временных оценок для работ.

Для проверки указанной гипотезы использовался критерий Вилькоксона, основанный на числе инверсий, под которыми понимается следующее: все значения обеих совокупностей располагаются в общую последовательность в порядке возрастания их значений, например в виде $y_1\ x_1\ x_2\ y_2\ x_3\ y_3\ y_4 \ldots\ldots\ldots$, где $x_1, x_2 \ldots$ – значения первой совокупности, а $y_1, y_2 \ldots$ – значения второй совокупности. Если какому-либо значению x предшествует некоторый y, то мы говорим, что эта пара даёт инверсию. Так, например, в нашем примере x_1 и x_2 дают по одной инверсии с y_1, стоящим на первом месте, x_3 дает две инверсии с y_1 и y_2 и т.д. Гипотеза отвергается, если общее число инверсий V превосходит доверительную границу, выбранную в соответствии с тем, что если объем сравниваемых эмпирических совокупностей (то есть общее число N входящих в сеть работ) велик, то V распределено приближенно нормально со средним N^2 и дисперсией $\frac{N^2}{12}(2N+1)$. Практически это правило действует, начиная с $N = 20$.

Исследованию подвергались несколько сетевых проектов различных объектов, и ни разу общее число инверсий V не вышло за пределы трехсигмовых границ (соответствующих доверительной вероятности ($p = 0{,}997$) или двухсигмовых (для $p = 0.95$)). Например, для $N = 35$ число инверсий $V = 1076$, что не выходит за двухсигмовый доверительный интервал, для $N = 20$ $V = 324$ и т.д.

В качестве меры соответствия эмпирического распределения теоретическому были также использованы критерий χ^2 и критерий А.Н.Колмогорова.

На основе анализа статистических данных для ряда сетевых проектов мы пришли к выводу, что, помимо бета-распределения, может быть использовано л о г а р и ф м и ч е с к и - н о р м а л ь н о е р а с п р е д е л е н и е, с плотностью

$$p(x)=\frac{\sqrt{2}}{(x-a)\sqrt{\pi}}\, exp\left\{-2\left[\ln(x-a)-\ln(b-a)+1\right]^2\right\}, \qquad (7)$$

которое хорошо аппроксимирует распределение времени выполне-

ния работ, входящих в сетевой проект, и имеет следующие параметры:

Мода $$Mx \approx \frac{2{,}5a+b}{3{,}5}, \qquad (8)$$

Среднее $$\bar{x} \approx \frac{1{,}4a+b}{2{,}4}. \qquad (9)$$

Дисперсия Dx также легко вычислима и равна

$$Dx=(b-a)^2\left(e^{-1{,}5}-e^{-1{,}75}\right)\approx 0{,}04\,(b-a)^2. \qquad (10)$$

Распределения (3) и (7) практически мало отличимы друг от друга, и каждое из них может быть с успехом использовано в качестве типового. Заметим, что логарифмически-нормальное распределение нередко применяется статистиками при аппроксимации распределения ряда экономических показателей и хорошо согласуется с фактическими данными.

Таким образом, изложенная выше методика оценки параметров распределения на основании двух задаваемых временных оценок отличается рядом преимуществ по сравнению с ранее применявшейся. Существенно уменьшается объем информации, который требуется от исполнителя работы: он должен задавать только два параметра – соответственно оптимистическое и пессимистическое времена выполнения для этой работы. Что касается точности оценки, то при переходе к новой методике потери точности практически не происходит.

Переходим к исследованию некоторых параметров сетевого графика. Из сказанного выше вытекает, что параметры всей сети в целом также являются значениями некоторой случайной величины, которая имеет определенную плотность распределения. Нам необходимо их оценить и построить для некоторых параметров такие доверительные интервалы, чтобы выход значений параметров за их пределы являлся бы крайне маловероятным событием.

Одной из главных задач сетевого планирования является получение достоверной оценки (с p % достоверностью) минимального времени выполнения всего сетевого проекта. Оценка планируемого минимального времени (которую мы впредь будем называть p-квантильной оценкой и обозначать буквой W) определяется большинством авторов системы "PERT", исходя из следующих соображений. Каждой из входящих в сеть работ приписывается в качестве фиксированной временной оценки среднее время $\bar{x}$, после чего находят критический путь K, длина которого (если этот путь жестко фиксировать) распределена нормально (если критический путь складывается из достаточно большого числа "звеньев" - около 10-15) и приближенно нормально (в случае меньшего числа звеньев). В дальнейшем мы для простоты изложения будем предполагать, что величина критического пути имеет нормальное распределение, где средняя $\bar{K}$ есть сумма средних значений величин t_{ij} для работ, которые лежат на критическом пути, а дисперсия есть сумма соответствующих дисперсий (в случае независимости лежащих на критическом пути работ).

Планируемая величина критического пути $K_{пл}$ вычисляется, исходя из следующих соображений.

Пусть вероятность того, что время при конкретной реализации работ, лежащих на критическом пути (т.е. значение величины K) не превысит $K_{пл}$, не менее чем p, то есть

$$P\left\{K \leq K_{пл}\right\} \geq p.$$

Тогда величину $K_{пл}$ можно определить из следующего уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma(K)} \cdot \int_{-\infty}^{K_{пл}} e^{-\frac{(x-\bar{K})^2}{2DK}}\, dx \geq p ,$$

или

$$K_{пл} \geq \bar{K} + F^{-1}(p)\,\sigma(K) . \qquad (11)$$

Значение $K_{пл}$, определенное по формуле (11), есть верхний $p\,\%$ доверительный предел для времени прохождения критического пути. Однако этот предел не может служить в качестве p - квантили для времени выполнения всего проекта в целом. Более того, покажем, что не существует вообще такого пути в сети, p -квантильная оценка длины которого являлась бы искомой p -квантилью для всего проекта.

Обозначим всевозможные пути, соединяющие начальную и конечную вершины сети, через $\eta_j\ (j = 1, 2, 3, \ldots, m)$. Суммарное время выполнения работ, лежащих на любом из путей η_j (обозначим это время через t_{η_j}), распределено по нормальному закону со средним $\bar{t}_{\eta_j}$ и дисперсией Dt_{η_j}. Вводим случайную величину $t_\eta = \max t_{\eta_j}$, ее p -квантиль (это и будет p -квантиль для всего проекта) обозначим через W_η, а p - квантили случайных величин t_{η_j} - через W_{η_j}. Нетрудно видеть, что $W_p \neq \max\limits_{1 \leq j \leq m} W_{\eta_j} = W_p'$.

Действительно, если считать значения t_{η_j} независимыми, то

$$P\left\{t_\eta < y\right\} = P\left\{\max_{1 \leq j \leq m} t_{\eta_j} < y\right\} = \prod_{j=1}^{m}\left[\Phi\left(\frac{y - t_{\eta_j}}{\sqrt{Dt_{\eta_j}}}\right)\right] \qquad (12)$$

и распределение случайной величины t_η распределено не по нормальному, а по близкому к экспоненциальному закону. Отсюда вытекает, что метод перебора всевозможных путей η_j и отыскания максимальной $W_{\eta_j}\,p$ -квантили не является приемлемым, так как значение W_p не соответствует какому-либо пути в сети. Мы доказали, таким образом, что способ оценки по формуле (11) не является представительным для всей сети в целом, характеризуя p -квантиль лишь для одного из путей.

Ряд проведенных авторами пробных расчетов для сетей сравнительно небольшого объема показывает, что определенное по формуле (11) значение $K_{пл}$ в качестве оценки планируемого времени для всего проекта в целом на 15-25% меньше истинной оценки (полученной с помощью метода статистического моделирования).

Совершенно аналогичные рассуждения можно привести в отношении доверительных оценок для наиболее ранних сроков свершения событий, входящих в сетевой проект и не являющихся конечными. Ряд зарубежных и отечественных систем сетевого планирования типа "PERT" предусматривает периодическое оперативно-календарное планирование сроков выполнения входящих в сетевой проект работ на основании определения критического пути в сети (по средним значениям) и соответственного расчета резервов времени для каждой из входящих в сеть работ, а также наиболее ранних и наиболее поздних сроков. С теоретико-вероятностной точки зрения вся эта методика не является обоснованной, так как минимальное глобальное время W для всей сети вообще не соответствует какому-либо определенному "критическому" пути в сети (оно скорее соответствует множеству "критических" путей в сети). По-видимому, необходимо строить доверительные оценки не только для минимального времени выполнения всего сетевого проекта в целом, но и для некоторых, наиболее важных входящих в сеть событий. Эти события должны играть существенную роль в выполнении проекта. Построение p - квантильных оценок дает возможность существенно уточнить оперативное календарное планирование сетевого проекта, так как прогнозируемые сроки завершения работ делаются более обоснованными.

На наш взгляд, достоверные оценки завершения событий (как для случая всей сети в целом, так и для лежащих внутри сети событий) можно получить только с помощью метода статистических испытаний (методы Монте-Карло).

Аналитический способ оценки величины W_p с помощью многомерного распределения вектора $(t_{\eta_1} \dots t_{\eta_m})$ со средним $(\bar{t}_{\eta_1} \dots \bar{t}_{\eta_m})$ и симметричной дисперсионной матрицей

$$B = \begin{pmatrix} Dt_{\eta_1} & \rho_{12}\sqrt{Dt_{\eta_1} Dt_{\eta_2}} & \cdots & \rho_{1m}\sqrt{Dt_{\eta_1} Dt_{\eta_m}} \\ \rho_{12}\sqrt{Dt_{\eta_1} Dt_{\eta_2}} & Dt_{\eta_2} & \cdots & \rho_{2m}\sqrt{Dt_{\eta_2} Dt_{\eta_m}} \\ \rho_{1m}\sqrt{Dt_{\eta_1} Dt_{\eta_m}} & \rho_{2m}\sqrt{Dt_{\eta_2} Dt_{\eta_m}} & \cdots & Dt_{\eta_m} \end{pmatrix},$$

где ρ_{ij} - коэффициент корреляции между t_{η_i} и t_{η_j}, весьма трудно реализовать, ввиду большой размерности матрицы B. Что касается метода статистических испытаний, то предлагаемая методика его применения следующая: для каждой входящей в сеть работы моделируется время ее выполнения по закону распределения (3) или (7) на основании задаваемых оценок a и b. Иными словами, мы как бы имитируем время выполнения каждой из работ t_{ij}, не вычисляя при этом ни средней $\bar{t}_{ij}$, ни дисперсии Dt_{ij}.

Итак, пусть a и b - границы области определения времени t_{ij}, заданные исполнителем работы (т.е. оптимистическое и пессимистическое времена). Нам необходимо смоделировать случайную величину, распределенную по закону

$$p_{ij}(x) = \frac{12}{(b-a)^4}(x-a)(b-x)^2,$$

и получить значение этой случайной величины.

Заметим, что метод Монте-Карло основан на моделировании времен t_{ij}. Последнее, однако, не может быть реализовано в случае распределения вида (I-2), ибо на основании 3 задаваемых характеристик невозможно определить все параметры этого распределения. Что касается распределения (3) или (7), то они легко моделируются на основе всего лишь 2 задаваемых характеристик, в чем их большое преимущество.

Аналогичную процедуру "розыгрыша" производим для всех входящих в сеть работ, после чего каждой работе будет соответствовать смоделированное время t_{ij} - оценка времени выполнения работы. Пользуясь алгоритмом нахождения критического пути, находим длину критического пути, которую обозначим K_1. Снова "разыгрываем" все времена t_{ij}, после чего вновь определяем значение длины критического пути K_2 и т.д. Многократно повторяя "розыгрыши" времен t_{ij} с последующим нахождением значения критического пути, получаем набор значений $K_1 \dots K_N$, если розыгрыш был произведен N раз. Значения $K_1 \dots K_N$ имеют эмпирическое распределение вероятностей, по которому можно найти p -квантиль, то есть $p\%$-ю верхнюю доверительную грань. Этот предел и будет оценкой величины W.

В полном соответствии с только что изложенной методикой производим аналогичную процедуру для выбранного нами фиксированного набора событий, входящих в сеть в качестве внутренних точек. Находим (после моделирования времен выполнения всех входящих в сеть работ) критические пути от начальной точки до точек этих событий. Многократно повторяя "розыгрыши" критических путей и накапливая статистику, строим p -квантильные оценки для каждого из критических путей по данным розыгрышей. Это и будут доверительные оценки для самых ранних сроков свершения событий.

Приводим методику генерирования псевдослучайных чисел с произвольной плотностью распределения $p_\eta(x)$. Пусть задана ограниченная плотность распределения $p_\eta(x)$. Выбирается d так, чтобы выполнялось неравенство $dp_\eta(x) < 1$ для всех x. Пусть ξ_1, ξ_2 - равномерно распределенные случайные величины; ξ_1 распределено в области изменения случайной величины η, ξ_2 - в интервале $[0,1]$. Если $dp_\eta(\xi_1) \geq \xi_2$, то число ξ_1 принимается в качестве искомой случайной величины, распределенной с плотностью $p_\eta(x)$. Если же $dp_\eta(\xi_1) < \xi_2$, то пара (ξ_1, ξ_2) отбрасывается и берется следующая новая пара. Этот процесс продолжается до тех пор, пока не находится требуемое число ξ_1. Данный способ является особенно эффективным в тех случаях, когда изменение функции $p_\eta(x)$ невелико. Отсюда немедленно вытекает методика моделирования закона распределения вида (3).

Пусть $p_\eta(x)$ - плотность распределения случайной величины η (в нашем случае случайная величина η - время выполнения работы (ij), входящей в сетевой проект). Областью изменения случайной величины η служит интервал (a, b). Поместим область, ограниченную осью абсцисс и графиком функции $y = p_\eta(x)$, внутри прямоугольника, ограниченного осью абсцисс, прямыми $x=a$ и $x=b$ и прямой $y=\max\limits_{a\le x\le b} p_\eta(x)=m$. Площадь такого прямоугольника равна $(b-a)\max\limits_{a\le x\le b} p_\eta(x)=(b-a)\,m$. Пусть ξ_1 и ξ_2 – две равномерно распределенные случайные (точнее, псевдослучайные) величины; ξ_1 распределена в интервале (a,b), а ξ_2 – в интервале $(0,m)$. Если $p_\eta(\xi_1)\ge\xi_2$, то число ξ_1 принимается в качестве искомой случайной величины, распределенной по закону $p_\eta(x)$. Если же $\xi_2>p_\eta(\xi_1)$, то пара (ξ_1,ξ_2) отбрасывается и берется следующая, новая пара. Этот процесс продолжается до тех пор, пока $p_\eta(\xi_1)\ge\xi_2$ – в этом случае ξ_1 принимается. Доказательство соответствия закона распределения принятой случайной величины ξ_1 функции $p_\eta(x)$ совершенно тривиально:

$$P\left\{c\le\xi_1\le d \,/\, p_\eta(\xi_1)\ge\xi_2\right\}=\frac{\int_c^d p_\eta(x)\,dx}{\int_a^b p_\eta(x)\,dx}=\int_c^d p_\eta(x)\,dx$$

$$\left(\text{так как } \int_a^b p_\eta(x)\,dx=1\right).$$

Заметим, что математическое ожидание числа "розыгрышей" двумерной точки (ξ_1,ξ_2) для получения одного значения случайной величины η (то есть принятого ξ_1) равно

$$M(K)=(b-a)\,m \qquad (13)$$

Для случая $p_\eta(x)=\frac{12}{(b-a)^4}(x-a)(b-x)^2$ значение m равно $\frac{16}{9}\cdot\frac{1}{b-a}$. Таким образом, ξ_1 моделируется в интервале $[a,b]$, а ξ_2 – в интервале $\left[0,\frac{16}{9}\cdot\frac{1}{b-a}\right]$. Заметим, что если случайная величина ξ распределена в интервале $[0,1]$ равномерно (а именно такого рода случайные последовательности генерируются программным способом), сведение к случайной величине η, распределенной равномерно в интервале $[a,b]$ (a,b – любые значения) производится с помощью функционального преобразования

$$\eta=(b-a)\,\xi+a.$$

Переходим к описанию генерирования закона распределения

$$p(x)=\frac{\sqrt{2}}{(x-a)\sqrt{\pi}}\,e^{-2\left[\ln(x-a)-\ln(b-a)+1\right]^2}.$$

Здесь целесообразно вместо случайной величины x ввести новую случайную величину y

$$y=\left(\ln(x-a)-\ln(b-a)+1\right)2.$$

Нетрудно показать, что случайная величина y распределена по нормальному закону с нулевым средним и дисперсией, равной единице. Отсюда немедленно вытекает следующая методика моделирования распределения (7). Сначала моделируем псевдослучайное число y, распределенное по нормальному закону с параметрами (0,1). После этого преобразованием

$$x=\exp\left[\frac{y}{2}-1+\ln(b-a)\right]+a \qquad (14)$$

переходим к искомой случайной (точнее, псевдослучайной) величине x, распределенной по закону

$$p(x)=\frac{\sqrt{2}}{(x-a)\sqrt{\pi}}\exp\left\{-2\left[\ln(x-a)-\ln(b-a)+1\right]^2\right\}.$$

Следует отметить, что процедура моделирования распределения (7) требует существенно большего объема вычислительных работ на ЭВМ, нежели в случае распределения (3). Поэтому в случае независимых друг от друга работ (при этом необходимо генерировать лишь одномерные законы распределения) целесообразно пользоваться распределением (3), а не (7). Что касается случая связанных (коррелированных) работ, к моделированию которых мы переходим, то здесь картина получается существенно иной.

Выше мы считали, что все работы (i,j), входящие в сетевой проект, являются независимыми, а соответствующие им случайные величины – некоррелированными.

Однако в действительности нередко имеют место случаи, когда две или несколько работ связаны друг с другом. Время выполнения одной из работ может при этом оказать существенное влияние на времена выполнения других работ. В этом случае моделирование времени выполнения каждой из такого рода связанных работ в отдельности, вне связи с остальными работами, является неправомочным приемом. На наш взгляд, эффективным решением такого рода задачи является совместное моделирование многомерной случайной величины с многомерной плотностью распределения $p(x_1\ldots x_n)$, где $x_1\ldots x_n$ – временные реализации связанных (коррелированных) работ, а $p(x_1\ldots x_n)$ – установленная исполнителями этих работ, многомерная плотность распределения. Надо заметить, что построение гипотезы относительно вида многомерного распределения является нелегким делом и во многом определяется спецификой рассматриваемых работ. Во всяком случае, такого рода постулируемая априорная плотность распределения $p(x_1\ldots x_n)$ должна быть установлена. Мы вправе, как и в одномерном случае, считать ее асимметричной, причем параметрами в нее должны входить оценки $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots a_n, b_n$, задаваемые исполнителями входящих в сетевой проект работ.

Моделирование многомерной случайной величины с плотностью распределения $p(x_1 \ldots x_n)$ осуществляется следующим образом.

Пусть a_i и b_i – области определения случайной величины x_i $(i=1,2,\ldots,n)$ Иными словами,

$$\int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_n}^{b_n} p(x_1\ldots x_n)\,dx_1\ldots dx_n=1 .$$

Зафиксируем величину

$$m=\max p(x_1\ldots x_n) \quad a_i\le x_i\le b_i,\ i=1,2,\ldots,n.$$

Замоделируем $(n+1)$ случайных равномерно распределенных величин $\xi_1\ldots\xi_n, \xi_{n+1}$; величины ξ_i $(i=1,2,\ldots,n)$ распределены в интервале $[a_i, b_i]$, а величина ξ_{n+1} – в интервале $[0,m]$. Если $p(\xi_1\ldots\xi_n)\ge\xi_{n+1}$, то значения $\xi_1\ldots\xi_n$ применяются в качестве компонент многомерной случайной величины с плотностью распределения $p(x_1\ldots x_n)$. В случае $p(\xi_1\ldots\xi_n)<\xi_{n+1}$ значения $(\xi_1,\xi_2,\ldots\xi_n,\xi_{n+1})$ отбрасываются, генерируется новый набор ξ_1 до тех пор, пока не будет выполнено условие $p(\xi_1\ldots\xi_n)\ge\xi_{n+1}$.

Если мы имеем n связанных (коррелированных) работ, которые мы обозначим $R_1, R_2,\ldots,R_n$, то при достаточно общих предположениях относительно их характера можно всё же считать, что исполнители работ в состоянии задать матрицу частных коэффициентов корреляции

$$\rho_{ij}=\frac{M[(\xi_i-M\xi_i)(\xi_j-M\xi_j)]}{\sigma_{\xi_i}\sigma_{\xi_j}}, \qquad (15)$$

где ξ_i – случайное время выполнения работы R_i,

$$1\le i\le n,\ 1\le j\le n;\ \rho_{kk}=1\quad(1\le k\le n).$$

Матрица частных коэффициентов корреляции, по-видимому, является единственным источником информации, которая может быть получена от исполнителей работ в случае их коррелированности.

Рассмотрим случай, когда одномерное распределение работ R_i аппроксимируется плотностью распределения вида (3) и, используя матрицу ρ_{ij}, перейдем к многомерному распределению. В этом случае мы наталкиваемся на существенные труднос-

ти, связанные с тем, что не существует многомерного бета-распределения, в плотность которого в явном виде входили бы частные коэффициенты корреляции ρ_{ij}. Мы в состоянии, обобщая формулу (3) на многомерный случай, написать соответствующую плотность распределения, но при этом мы не имеем никакой информации относительно многомерной области определения, в которой построенная плотность распределения имела бы место. Рассматривая даже наиболее простой вид многомерного распределения – двумерный случай – мы наталкиваемся на это затруднение. Действительно, в случае $p(x)=\frac{12}{(b-a)^4}(x-a)(b-a)^2$ функциональное преобразование $y=\frac{x-a}{b-a}$ приводит к нормированной плотности $p(y)=12y(1-y)^2$. Естественным обобщением этого закона распределения в многомерном случае явилась бы плотность

$$p(y_1\ldots y_n)\ C\ y_1\ldots y_n(1-y_1-y_2-\ldots-y_n)^2,$$

где C – нормируемая константа, а для двумерного случая

$$p(y_1,y_2)=C\,y_1y_2(1-y_1-y_2)^2.$$

Однако здесь и возникает вопрос относительно двумерной области определения. Если считать ее квадратом $0\le y_1\le1,\ 0\le y_2\le1$, то константа C определяется из условия

$$\int_0^1\int_0^1 p'(y_1y_2)\,dy_1dy_2=1 .$$

В случае треугольной области $0\le y_1\le1,\ 0\le y_2\le(1-y_1)$ условия нормирования меняются и сводятся к вычислению интеграла

$$\int_0^1\int_0^{1-y_1} p''(y_1y_2)\,dy_2dy_1=1 .$$

Окончательно получаем:

для $0\le y_1\le1,\ 0\le y_2\le1$,

$$p'(y_1y_2)=18y_1y_2(1-y_1-y_2)^2,$$

для $0\le y_1\le1,\ 0\le y_2\le(1-y_1)$,

$$p''(y_1y_2)=30y_1y_2(1-y_1-y_2)^2 .$$

Если размерность n больше двух, то соответствующие трудности по-прежнему имеют место, и постулирование для случая многомерного распределения делается еще более неопределенным. Соответственно неясен выбор методики генерирования многомерных случайных величин. Если область определяется n-мерной случайной величиной с плотностью распределения

$$\rho(y_1 \dots y_n) = C\, y_1 \dots y_n (1 - y_1 - \dots - y_n)^2$$

представляет собой n -мерный тетраэдр вида

$$0 \le y_1 \le 1,$$
$$0 \le y_2 \le 1 - y_1,$$
$$0 \le y_3 \le 1 - y_1 - y_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$0 \le y_n \le 1 - y_1 - \dots - y_{n-1},$$

то можно предложить следующую простую методику генерации. Вначале моделируем случайную величину y_1 с плотностью $\rho'(y_1) = 12\, y_1 (1 - y_1)^2$. После этого фиксируем значение y_1 и моделируем случайную величину y_2 с плотностью

$$y''(y_2) = C_1 y_2 (1 - y_1 - y_2)^2,$$

где константа C_1 находится из условия $\int_0^{1-y_1} \rho''(y_2)\, dy_2 = 1$ и зависит от y_1. В дальнейшем, фиксируя уже два значения y_1 и y_2, генерируем случайную величину y_3 с плотностью

$$\rho'''(y_3) = C_2\, y_3 (1 - y_1 - y_2 - y_3)^2$$, причем

$$\int_0^{1-y_1-y_2} \rho'''(y_3)\, dy_3 = 1 .$$

Аналогичным образом генерируем y_4 и т.д., вплоть до последней величины y_n. В случае если область определения представлена в виде n -мерного гиперкуба $0 \le y_i \le 1,\ 1 \le i \le n$, распределение $\rho(y_1 \dots y_n)$ целесообразно моделировать в соответствии с описанной в начале настоящего параграфа методикой, то есть обобщенным методом инверсий. Заметим, что существует и другой способ, основанный на следующем правиле. Вначале генерируются $(n+1)$ независимых случайных величин, распределенных по экспоненциальному закону с плотностью $\rho(x) = e^{-x}$ при $x \ge 0$ и $\rho(x) = 0$ при $x < 0$. Пусть $z_1 \dots z_{n+1}$ - значения этих случайных величин. Тогда случайные величины

$$\frac{z_1}{z_1 + \dots + z_{n+1}} = y_1,$$

$$\frac{z_1 + z_2}{z_1 + \dots + z_{n+1}} = y_2, \dots, \frac{z_1 + \dots + z_n}{z_1 + \dots + z_{n+1}} = y_n$$

распределены по закону бета-распределения.

После генерирования случайных величин $y_1 \dots y_n$ функциональным преобразованием

$$x_i = y_i (b_i - a_i) + a_i, \quad 1 \le i \le n,$$

переходим к исходным значениям случайных величин $x_1, \dots, x_n$ - временам свершения коррелированных работ $R_1, \dots, R_n$.

Подведем некоторые итоги. Все приведенные выше способы генерации многомерных случайных величин - времен выполнения корректированных работ - отличаются одним существенным недостатком: в формулу плотности распределения не входят задаваемые исполнителями работ меры связи - частные коэффициенты корреляции. Поэтому изложенная методика ни в коей мере не может претендовать на универсальность и отвечает реальной действительности лишь для отдельных, частных случаев. Отсюда вытекает, что использование бета-распределения для случая коррелированных работ не является целесообразным.

Рассмотрим случай аппроксимации одномерного распределения формулой логарифмически-нормального распределения (7) и возможность перехода к многомерному распределению с использованием матрицы частных коэффициентов корреляции ρ_{ij}

Имеется, таким образом, совокупность $R_1 \dots R_n$ корректированных работ с заданной исполнителями этих работ симметричной матрицей C частных коэффициентов корреляции

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} \cdots \rho_{1n} \\ \rho_{12} & 1 & \rho_{23} \cdots \rho_{2n} \\ \dots & \dots & \dots\dots\dots \\ \rho_{1n} & \rho_{2n} & \rho_{3n} \cdots 1 \end{pmatrix}$$

Будем считать, что плотность одномерного распределения каждой из работ R_i $(1 \le i \le n)$ подчиняется логарифмически - нормальному закону

$$\rho(x_i) = \frac{\sqrt{2}}{(x_i - a_i)\sqrt{\pi}}\, e^{-2\left[\ln(x_i - a_i) - \ln(b_i - a_i) + 1\right]^2},$$

где x_i - случайная величина времени свершения работы R_i, a_i и b_i - соответственно оптимистическое и пессимистическое времена, заданные для работы R_i. Выше уже было отмечено, что преобразование

$$y_i = 2\left\{\ln(x_i - a_i) - \ln(b_i - a_i) + 1\right\}, \quad 1 \le i \le n, \qquad (16)$$

приводит к новой случайной величине y_i, распределенной по нормальному закону с нулевым средним и единичной дисперсией. Сделаем одно допущение, которое позволит нам перейти к моделированию многомерного распределения. Предположим, что нам удалось построить n -мерный случайный вектор, компоненты которого распределены по нормальному закону с заданными корреляционными связями, то есть матрицей C. Иными словами, разработана методика генерирования n случайных величин

$$y_1 \dots y_n \quad \text{так, что} \quad \rho_{y_k y_\ell} = \rho_{k\ell} \quad (1 \le k \le n,\ 1 \le \ell \le n).$$

После получения каждой из реализаций набора n значений $y_1 \dots y_n$ преобразованием (I4) переходим к искомым значениям $x_1 \dots x_n$ - временам свершения работ $R_1 \dots R_n$. Хотя коэффициенты корреляции $\rho_{x_k x_\ell}$ будут несколько отличаться от соответствующих значений $\rho_{y_k y_\ell}$, мы вправе считать это отклонение несущественным и не нарушающим общей картины связей внутри работ. Дело в том, что если заменить функцию e^x ее приближенной аппроксимацией по формуле Тейлора $e^x \sim 1 + x$ (это приближение имеет место для малых значений x) и для большинства входящих в сеть работ такое допущение может быть принято), то преобразование (I4) приводится к виду

$$x_i = (a_i + 1) + \frac{y_i}{2} - 1 + \ln(b_i - a_i) = a_i + 0{,}5 y_i + \ln(b_i - a_i), \tag{I7}$$

которое сохраняет коэффициенты корреляции неизменными. Разумеется, в отдельных случаях может быть взято большее число членов в разложении в ряд Тейлора, однако сделанное выше приближение, на наш взгляд, может быть априорно принято в качестве допустимого.

Рассмотрим способ моделирования нормально распределенных случайных величин $y_1 \dots y_n$ с заданными корреляционными связями. Основная идея излагаемого метода состоит в том, чтобы вначале генерировать n независимых нормальных величин с единичными дисперсиями и нулевыми математическими ожиданиями, а после этого подвергнуть их такому линейному преобразованию, после которого полученные величины $y_1 \dots y_n$ имели бы наперед заданную матрицу частных коэффициентов корреляции C. Заметим, что свойство нормальности распределения сохраняется при линейных преобразованиях и именно вследствие этого обстоятельства мы использовали функциональное преобразование (I6), сводящее логарифмически-нормально распределенные случайные величины x_k, к нормально распределенным величинам y_k

Рассмотрим вид линейного преобразования A, которое переводит n -мерный случайный вектор $(z_1 \dots z_n)$ с независимыми компонентами в n -мерный вектор $y_1 \dots y_n$ с заданными корреляционными связями.

Будем считать матрицу преобразования A треугольной:

$$\begin{aligned} y_1 &= z_1, \\ y_2 &= z_1 + a_{22} z_2, \\ y_3 &= z_1 + a_{23} z_2 + a_{33} z_3, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots, \\ y_n &= z_1 + a_{2n} z_2 + a_{3n} z_3 + \dots + a_{nn} z_n. \end{aligned} \tag{I8}$$

Элементы матрицы A определяются из условия, что

$$\frac{M[(y_k - My_k)(y_\ell - My_\ell)]}{\sigma y_k \sigma y_\ell} = \rho_{k\ell} \quad (1 \le k \le n,\ 1 \le \ell \le n).$$

Учитывая, что $My_k = 0$ ввиду $Mz_k = 0 \quad (1 \le k \le n)$, окончательно получаем

$$\frac{M(y_k y_\ell)}{\sigma y_k \sigma y_\ell} = \rho_{k\ell}. \tag{I9}$$

Заметим, что ввиду независимости $z_i \quad (1 \le i \le n)$ имеем

$$M(z_k z_\ell) = \delta_{k\ell} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad k = \ell \\ 0 & \text{при} \quad k \ne \ell \end{cases}.$$

Отсюда получаем следующие расчетные формулы:

$$\rho_{12} = \frac{M(y_1 y_2)}{\sigma y_1 \sigma y_2} = \frac{1}{\sqrt{1 + a_{22}^2}} = \rho_{12}.$$

Отсюда

$$a_{22} = \sqrt{(\rho_{12})^{-2} - 1}$$

Определяем элементы третьей строки матрицы A на основании соотношений

$$\left.\begin{aligned} \rho_{13} &= \frac{M(y_1 y_3)}{\sigma y_1 \sigma y_3} = \frac{1}{\sqrt{1 + a_{23}^2 + a_{33}^2}}; \\ \rho_{23} &= \frac{M(y_2 y_3)}{\sigma y_2 \sigma y_3} = \frac{1 + a_{22} + a_{23}}{\sqrt{1 + a_{22}^2}\ \sqrt{1 + a_{23}^2 + a_{33}^2}} \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Действуя подобным образом, можно последовательно определить все элементы матрицы A. После нахождения ее первых K строк следующая $(k+1)$-я строка вычисляется с помощью k уравнений (и определяются k коэффициентов)

$$\frac{M[y_i y_{k+1}]}{\sigma y_i \, \sigma y_{k+1}} = \rho_{i(k+1)}, \quad 1 \le i \le k .$$

Выбор преобразования A с треугольной матрицей позволяет экономить оперативную память ЭВМ (матрица занимает в памяти ЭВМ $\frac{(n-1)n}{2}$ ячеек) и сократить количество арифметических операций для получения n -мерного вектора $y_1 \dots y_n$

После получения значений случайных величин $y_1 \dots y_n$ преобразованием

$$x_i = exp\left\{\frac{y_i}{2} + \ln(b_i - a_i) - 1\right\} + a_i, \quad 1 \le i \le n$$

переходим к искомым значениям времен реализаций коррелированных работ $R_1 \dots R_n$ - процесс моделирования окончен. Предлагаемая методика проста в применении и может быть реализована практически на любой ЭВМ.

В заключение необходимо отметить, что метод статистического моделирования может быть использован и для некоторых стоимостных параметров, характеризующих сетевой проект. В частности, при некоторых общих предположениях можно считать, что стоимость работы C_{ij} является функцией времени ее реализации t_{ij}, причем уменьшение времени может повлечь за собой увеличение стоимости. Ряд сетевых проектов включает в себя следующую линейную зависимость между параметрами C_{ij} и t_{ij}

$$C_{ij} = A_{ij} - B_{ij} t_{ij} \qquad (21)$$

где A_{ij} и B_{ij} - константы, характеризующие работу (ij). Установление такого рода зависимости делает возможным построение доверительных оценок стоимости реализации всего проекта в целом или отдельных его частей. Последнее может быть достигнуто с помощью метода статистических испытаний, методика применения которого такова. Сначала, в соответствии с описанной выше методикой, моделируется время реализации работы t_{ij}. После этого, используя соотношение (21), определяется стоимость работы C_{ij} (она, таким образом, также моделируется). Аналогичная процедура совершается по всем входящим в сетевой проект работам. Суммируя полученные значения C_{ij}, получаем реализацию стоимости всего проекта в целом, которую мы обозначаем C_1. Повторяя такого рода "розыгрыш" многократно (N раз) и фиксируя значения $C_1 \dots C_n$, определяем ρ - квантильную доверительную оценку в соответствии с выбранным коэффициентом доверия ρ. Если для каждой работы ее ответственный исполнитель в состоянии указать параметры A_{ij} и B_{ij} то определение доверительного, прогнозируемого значения стоимости проекта может быть проведено до начала работы под последним, одновременно с построением доверительных оценок по времени. Следует особо отметить, что вычисление стоимостных параметров требует минимального дополнительного объема машинного времени по сравнению с одним временным вариантом.