ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЛАПЛАСА И ГЕЛЬМГОЛЬЦА В СЛУЧАЕ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

С.М. Белоносов

§ I. Постановка задач и некоторые свойства решений

I. Пусть в цилиндрических координатах (r, z, φ) задано уравнение Гельмгольца

$$\Delta U + k^2 U = 0 , \qquad (\mathrm{I,\ I})$$

где
$$\Delta U(r, z, \varphi) = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} .$$

Частным случаем уравнения (I,I) является уравнение Лапласа

$$\Delta U = 0 . \qquad (\mathrm{I\ ,\ 2})$$

Для уравнений (I,I) и (I,2) рассмотрим краевые задачи Дирихле и Неймана в случае областей следующих двух видов:

I) Пространственная область B_1 образована вращением вокруг оси z кривой L
$$r = \rho(s) , \quad z = \zeta(s) , \quad (s_0 \leq s \leq s_1) .$$
Заданные функции $r(s)$ и $z(s)$ непрерывны вместе с первыми

производными и удовлетворяют условиям *) :

$$\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2 \neq 0 ; \qquad \frac{\partial z}{\partial s} \geq 0 ; \quad r(s) \geq 0 ;$$

$$r(s_0) = r(s_1) = 0 ;$$

Под параметром s условимся понимать длину дуги кривой L.

2) Пространственная область B_2 является клиновидной частью тела вращения B_1, отсекаемой от него двумя меридиональными плоскостями $\varphi = \varphi_0$ и $\varphi = \varphi_1$.

2. В уравнениях (I,I) и (I,2) отделим переменную φ, представляя решение $V(r,z,\varphi)$ и соответствующие граничные условия на поверхности вращения в виде тригонометрических рядов по φ. При этом, в случае задачи для клиновидной области B_2, на плоскостях $\varphi = \varphi_0$ и $\varphi = \varphi_1$ граничные условия предположим однородными, т.е.

$$U\Big|_{\substack{\varphi=\varphi_0 \\ \varphi=\varphi_1}} = 0 \qquad \text{(задача Дирихле)},$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi}\Big|_{\substack{\varphi=\varphi_0 \\ \varphi=\varphi_1}} = 0 \qquad \text{(задача Неймана)}.$$

Таким образом, решение поставленных задач разыскивается в форме следующего ряда:

$$U(r,z,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} V'_{m_n}(r,z) \cos m_n \varphi + V''_{m_n}(r,z) \sin m_n \varphi . \tag{I,3}$$

Здесь $m_n = n$, если решается задача для тела вращения B_1. В случае задачи для клиновидного тела B_2 $(0 = \varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1 \leq 2\pi)$ мы имеем $m_n = \frac{2\pi}{\varphi_1} n$ и, кроме того:

а) в задаче Дирихле $\quad V'_{m_n}(r,z) \equiv 0$,

б) в задаче Неймана $\quad V''_{m_n}(r,z) \equiv 0$.

Подставляя ряд (I,3) в уравнение (I,I), получаем для функций $V'_{m_n}(r,z)$ и $V''_{m_n}(r,z)$ дифференциальные уравнения вида

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \frac{m^2 V}{r} + k^2 V = 0 . \tag{I,4}$$

---

*) В случае, если тело вращения простирается на бесконечность (т.е. $s_j = \pm\infty$, $j = 1, 0$), условие $r(s_j) = 0$ не является обязательным.

Уравнение (I,4) необходимо решать в плоской области D, ограниченной контуром L и осью z (рис. I). На контуре L заданы следующие условия:

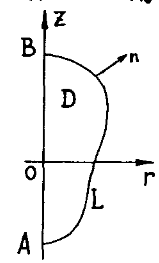

Рис. I

$$V\Big|_L = f(s) \qquad \text{(задача Дирихле)}$$

$$\frac{\partial V}{\partial n}\Big|_L = g(s) \qquad \text{(задача Неймана)}. \tag{I,5}$$

Для выяснения условий на линии $r = 0$ заметим, что при целых m функция

$$U(r,z,\varphi) = e^{im\varphi} V(r,z)$$

должна быть аналитической функцией декартовых координат x, y, z. Отсюда непосредственно следует, что $V(r,z)$ имеет вид

$$V(r,z) = r^m \psi(r,z) , \tag{I,6}$$

где $\psi(r,z)$ является аналитическим на линии $r = 0$ решением дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{2m+1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} + k^2 \psi = 0 . \tag{I,7}$$

Ниже при произвольных вещественных m исследуются решения уравнения (I,7), определенные в области D и аналитические на линии $r = 0$.

3. ЛЕММА. Всякое решение уравнения (I,7), определенное в области D и аналитическое на линии $r = 0$, симметрично продолжимо в область $\tilde{D}$, являющуюся зеркальным отражением области D относительно оси z.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ряд Тейлора

$$\psi(r,z) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} r^i (z - z_0)^j$$

определяет решение уравнения (I,7) в окрестности точки $(0, z_0)$, где $z(s_0) \leq z_0 \leq z(s_1)$. Подставляя этот ряд в уравнение (I,7), получаем $a_{2p-1,j} = 0$ $(p = 0, 1, 2, \ldots)$, т.е. $\psi(r,z) = \Psi(r^2, z)$.

Эта функция удовлетворяет уравнению (I,7) как при положительных, так и при отрицательных r.

ТЕОРЕМА. Пусть m не равно целому отрицательному числу. Всякое решение уравнения (I,7), аналитическое на оси $r=0$, единственным образом определяется в области $D+\bar{D}$ своими значениями на оси $r=0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая, в силу леммы, $\psi(r,z)=\sum^{\infty} b_p(z)r^{2p}$

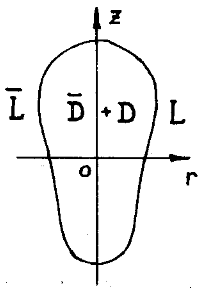

Рис. 2

и подставляя этот ряд в уравнение (I,7), получаем рекуррентные уравнения:

$$4p(p+m)b_p(z)+\frac{d^2 b_{p-1}(z)}{dz^2}+k^2 b_{p-1}(z)=0.$$

Пусть теперь $\psi_1(r,z)$ и $\psi_2(r,z)$ – два решения уравнения (I,7), совпадающие на отрезке оси $r=0$.

Полагая $\psi(r,z)=\psi_1(r,z)-\psi_2(r,z)$,

получим

$$b_0(z)=0.$$

Из рекуррентных соотношений следует, что при всех $p\geq 0$, $b_p(z)\equiv 0$ и, значит, $\psi(r,z)\equiv 0$ во всей области $D+\bar{D}$, где эта функция аналитична.

§ 2. Различные интегральные представления разделенных решений уравнения Лапласа

Рассмотрим уравнение Лапласа

$$\Delta U=0 \qquad (2,2)$$

внутри тела вращения B_1, ограниченного замкнутой поверхностью S *).

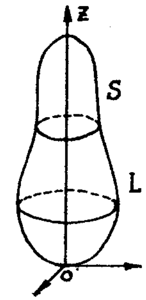

Рис. 3

Как известно [I*], произвольное решение уравнения (2,2) можно представить потенциалом простого или двойного слоя, распределенного по поверхности S. Исходя из этого, выведем интегральные представления общего решения уравнения

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}-\frac{m^2}{r^2}V=0. \qquad (2,3)$$

а) Распределим по поверхности S плотность простого слоя $\nu(s)e^{im\theta}$, где $\nu(s)$ – произвольная функция длины дуги контура L, а θ – азимутальный угол в цилиндрической системе координат. Общее решение уравнения (2,2) с отделенной переменной φ имеет вид

$$V(r,z)e^{im\varphi}=\int_L\int_0^{2\pi}\frac{\nu(s)e^{im\theta}\,ds\,d\theta}{\sqrt{\rho^2+r^2-2\rho r\cos(\varphi-\theta)+(z-\zeta)^2}}. \qquad (2,4)$$

Здесь $\rho=\rho(s)$, $\zeta=\zeta(s)$ – координаты точек контура. Полагая $\theta=\varphi+\lambda$, находим из (2,4):

$$\begin{aligned}V(r,z)&=\int_L\nu(s)\int_0^{2\pi}\frac{e^{im\lambda}\,d\lambda}{\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos\lambda+(z-\zeta)^2}}\,ds=\\&=2\int_L\nu(s)\int_0^{\pi}\frac{\cos m\lambda\,d\lambda}{\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos\lambda+(z-\zeta)^2}}\,ds=\\&=\frac{2}{\sqrt{r}}\int_L\frac{\nu(s)}{\sqrt{\rho(s)}}Q_{m-\frac{1}{2}}\left(\frac{r^2+\rho^2+(z-\zeta)^2}{2r\rho}\right)ds.\end{aligned} \qquad (2,5)$$

Здесь $Q_{m-\frac{1}{2}}(X)$ – функция Лежандра второго рода полуцелого значка $m-\frac{1}{2}$. Наиболее полное изложение свойств этой функции содержится в монографии Гобсона [2]. Для интересующих нас

***) Ограничения, наложенные в § I на контур L, вращением которого образована поверхность S, в данном пункте можно ослабить. Поверхность S должна быть поверхностью Ляпунова.**

значения $X>1$ существуют подробные таблицы $Q_{m-\frac{1}{2}}(X)$ [4] ж).

б) Представим искомое решение потенциалом двойного слоя $\mu(s)\,e^{i\theta}$, распределенного по поверхности S:

$$V(r,z)e^{im\varphi}=\int_L \mu(s)\int_0^{2\pi} e^{im\theta}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)d\theta\, ds. \qquad (2,6)$$

Здесь $R=\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\varphi-\theta)+(z-\zeta)^2}$, $\vec{n}$ – внешняя нормаль к поверхности S (а значит, и к контуру L). Выпишем явное выражение для $\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)$:

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)=\left(grad\frac{1}{R},\vec{n}\right)=\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{R}\right)\cos(\vec{n},\vec{i}_1)+$$

$$+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{R}\right)\cos(\vec{n},\vec{i}_2)+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{1}{R}\right)\cos(\vec{n},\vec{i}_3),$$

где $\vec{i}_1,\vec{i}_2,\vec{i}_3$ – единичные орты в цилиндрической системе координат. Для тела вращения

$$\cos(\vec{n},\vec{i}_1)=\frac{d\zeta}{ds},\quad \cos(\vec{n},\vec{i}_2)=0,\quad \cos(\vec{n},\vec{i}_3)=-\frac{d\rho}{ds},$$

поэтому

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)=\frac{d\zeta}{ds}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{R}\right)+\frac{d\rho}{ds}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R}\right).$$

Из (2,6) теперь получаем:

$$V(r,z)=2\int_L\mu(s)\left\{\left(\frac{d\zeta}{ds}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{d\rho}{ds}\frac{\partial}{\partial z}\right)\int_0^{\pi}\frac{\cos m\lambda\, d\lambda}{\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\varphi-\theta)+(z-\zeta)^2}}\right\}ds=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{r}}\int_L\mu(s)\left\{\left(\frac{d\zeta}{ds}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{d\rho}{ds}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left[\frac{1}{\sqrt{\rho}}Q_{m-\frac{1}{2}}\left(\frac{r^2+\rho^2+(z-\zeta)^2}{2r\rho}\right)\right]\right\}ds \qquad (2,7)$$

Произведя дифференцирование, запишем последнюю формулу в следующем виде:

$$V(r,z)=\frac{2}{\sqrt{r}}\int\frac{\mu(s)}{\sqrt{\rho}}\left\{Q'_{m-\frac{1}{2}}(X)\left[\frac{d\zeta}{ds}\frac{\partial X}{\partial\rho}+\frac{d\rho}{ds}\frac{\partial X}{\partial z}\right]-\frac{d\zeta}{ds}\frac{1}{2\rho}Q_{m-\frac{1}{2}}(X)\right\}ds. \qquad (2,8)$$

ж) Кроме того, отметим, что в книге [3] содержится довольно простая аппроксимация функции $Q_{-\frac{1}{2}}(X)$.

Здесь $X=\frac{r^2+\rho^2+(z-\zeta)^2}{2r\rho}$, $\mu(s)$ – произвольная функция.

2. Обратимся к уравнению

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\frac{2m+1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}=0 \qquad (2,9)$$

и рассмотрим его решения, аналитические в области $D+\bar{D}$ (рис. 2).

Пусть m – произвольное целое положительное число, а контур L удовлетворяет ограничениям, указанным в § I.

Если для вещественной функции $\psi(0,z)$ написать разложение в ряд Тейлора в окрестности некоторого значения

$$z=z_0 \quad (z(s_0)\le z_0\le z(s_1)),$$

$$\psi(0,z)=\sum_{j=0}^{\infty}c_j(z-z_0)^j,$$

то этот ряд определяет единственную функцию $F(\zeta)$ комплексной переменной $\zeta=r+iz$, аналитическую в некоторой окрестности точки $(0,z_0)$ и равную $\psi(0,z)$ при $r=0$:

$$F(\zeta)=\sum_{j=0}^{\infty}c_j\left(\frac{\zeta-z_0 i}{i}\right)^j.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что выражение (см. [5], стр. 251)

$$\psi_0(r,z)=\frac{m\Gamma(m)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{1}{2}+m)}Re\int_0^{\pi}F(iz+r\cos\lambda)\sin^{2m}\lambda\, d\lambda$$

удовлетворяет уравнению (2,9) и на оси z обращается в $\psi(0,z)$. На основании теоремы, доказанной в § I, $\psi_0(r,z)\equiv\psi(r,z)$. Далее, можно доказать, что $F(\zeta)$ регулярна в той же области $D+\bar{D}$, что и $\psi(r,z)$. Если соотношение (2,10) переписать в виде

$$\psi(r,z)=\frac{2m\Gamma(m)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{1}{2}+m)}\int_0^r Re F(\xi+iz)\left[1-\left(\frac{\xi}{r}\right)^2\right]^{m-\frac{1}{2}}\frac{d\xi}{r}, \qquad (2,11)$$

то мы получим интегральное уравнение Вольтерра первого рода относительно неизвестной $Re F(\xi+iz)$; z в этом уравнении играет роль параметра. Благодаря тому, что ядро уравнения (2,11) зависит только от $\frac{\xi}{r}$, оно может быть решено в квадратурах с помощью интегрального преобразования Римана-Меллина. Исходя из этого явного решения, нетрудно убедиться в регулярности функции $F(\zeta)$ области $D+\bar{D}$.

Преобразуя m раз по частям интеграл (2,10), получаем формулу

$$V(r,z)=r^m\psi(r,z)=Re\int_0^{\pi}\Phi(r\cos\lambda+iz)\cos m\lambda\,d\lambda, \qquad (2,12)$$

где

$$\Phi^{(m)}(\zeta)=\frac{m\Gamma(m)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{1}{2}+m)}F(\zeta). \qquad (2,13)$$

$\Phi(\zeta)$ регулярна в области $D+\bar{D}$ и определена с точностью до полинома $P_m(\zeta)=iq_m\zeta^m+\sum_{k=0}^{m-1}(p_k+iq_k)\zeta^k$ с произвольными коэффициентами $p_0,p_1,\dots,p_{m-1},q_0,q_1,\dots,q_{m-1},q_m$.

Положим

$$\Phi(\zeta)=\Phi_0(\zeta)+P_m(\zeta),$$

где $\Phi_0(\zeta)$ - некоторая функция, регулярная в $D+\bar{D}$ и однозначно определенная через $V(r,z)$.

Формулой (2,12) можно пользоваться в более широком классе решений $V(r,z)$ уравнения (2,3) по сравнению с классом $V(r,z)$, охватываемым формулой (2,10). Пусть на контуре L непрерывны все частные производные функции $V(r,z)$ порядков $0,1,\dots,k-1$, но в какой-то точке $\tau\equiv r+iz=\tau_0$ производная $\frac{\partial^k V}{\partial r^{k-j}\partial z^j}$ неограниченно велика. Тогда в силу (2,12) функция $\frac{\partial^k\Phi(\tau)}{\partial\tau^k}$ должна в точке τ_0 иметь неинтегрируемую особенность. В силу (2,13) функция $\frac{d^{k-m}F(\tau)}{d\tau^{k-m}}$ имеет неинтегрируемую особенность при $\tau=\tau_0$. По формуле (2,12) можно вычислить производные функции $V(r,z)$ в точке τ_0 порядка $(k-1)$, а по формуле (2,10) - только производные $(k-1-m)$-го порядка.

3. Докажем, что при любой функции $V(r,z)$, удовлетворяющей уравнению (2,3) в области D, функция $\Phi(r+iz)$, определяемая из соотношения (2,12), регулярна в области $D+\bar{D}$.

В силу леммы, доказанной в § I, имеем при $r=0$ условия:

$$\left.\frac{\partial^{2k}V}{\partial r^{2k}}\right|_{r=0}=Re\,\Phi^{(2k)}(iz)\int_0^{\pi}\cos m\lambda\cos^{2k}\lambda\,d\lambda=0,\quad k=0,1,\dots \qquad m\text{ -нечетное};$$

$$\left.\frac{\partial^{2k+1}V}{\partial r^{2k+1}}\right|_{r=0}=Re\,\Phi^{(2k+1)}(iz)\int_0^{\pi}\cos m\lambda\cos^{2k+1}\lambda\,d\lambda=0,\quad k=0,1,\dots \qquad m\text{ -четное}.$$

Отсюда очевидно, что $Re\,\Phi(\xi+iz)$ является нечетной функцией от ξ при m -нечетном и четной по ξ при четном m.

Формулу (2,12) можно записать в виде:

$$V(r,z)=2Re\int_0^{\pi/2}\Phi(r\cos\lambda+iz)\cos m\lambda\,d\lambda=$$

$$=2Re\int_0^{r}\Phi(\xi+iz)\frac{\cos m\arccos(\frac{\xi}{r})}{\sqrt{1-(\frac{\xi}{r})^2}}\frac{d\xi}{r}. \qquad (2,12)'$$

Применим преобразование Римана-Меллина, полагая:

$$f(\xi,z)=Re\,\Phi(\xi+iz),$$

$$F(\mu,z)=\int_0^{\infty}f(\xi,z)\xi^{\mu}d\xi,\quad G(\mu,z)=\int_0^{\infty}V(r,z)r^{\mu}dr.$$

В последнем интеграле заданная функция $V(r,z)$ предполагается произвольно продолженной за пределы области D так, что $\frac{\partial V}{\partial r}$ всюду непрерывна и при $r\to\infty$ $V(r,z)$ убывает не медленнее чем $\frac{const}{r^{4-m}}$. Кроме того, при $m=0$ потребуем, чтобы $G(1,z)=\int_0^{\infty}rV(r,z)\,dr=0$. Функция $G(\mu,z)$ регулярна по μ в полосе $-1-m<Re\,\mu<3-m$.

Умножив обе части уравнения (2,12)' на $r^{\mu}dr$ и проинтегрировав в пределах $(0,\infty)$, получаем при $-1-m<Re\,\mu<3-m$ регулярную функцию $F(\mu,z)$:

$$F(\mu,z)=-\frac{1}{\pi}2^{-\mu-1}\mu B\left(\frac{m+1-\mu}{2},\frac{1-\mu-m}{2}\right)G(\mu,z),$$

здесь B - эйлеров интеграл первого рода, выражающийся через Γ -функции. Поведение $\Gamma(z)$ при больших $|z|$ и $Re\,z>0$ определяется формулой Стирлинга [5]:

$$\Gamma(z)=z^{z-\frac{1}{2}}e^{-z}\sqrt{2\pi}\left[1+\frac{1}{12z}+\frac{1}{288z^2}-\dots\right].$$

В сочетании с формулой $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}$ формула Стирлинга позволяет оценить поведение гамма-функции для больших $|z|$ при любом $\arg z$.

Функция $f(\xi,z)$ находится с помощью обратного преобразования Меллина:

$$f(\xi,z)=\frac{1}{4\pi^2 i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\xi^{-\mu-1}2^{-\mu}\mu B\left(\frac{m+1-\mu}{2},\frac{1-\mu-m}{2}\right)G(\mu,z)\,d\mu.$$

$$(-1-m<\sigma<3-m)$$

При $\mathrm{Re}\,\mu<0$ и больших $|\mu|$ $2^{-\mu}\mu B\left(\frac{m+1-\mu}{2},\frac{1-\mu-m}{2}\right)\approx\sqrt{2\pi\mu}$ и $G(\mu,z)$ убывает при $\mathrm{Im}\,\mu\to\pm\infty$ не медленнее, чем $\frac{const}{\mu^2}$. Последний интеграл сходится и дает решение уравнения (2,I2). Преобразуем его интегрированием по частям:

$$f(\xi,z)=\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{d\left[G(\mu,z)\xi^{-\mu-1}\right]}{d\mu}Q(\mu)d\mu ,$$

$$Q(\mu)=-\frac{1}{4\pi^2 i}\int\mu 2^{-\mu}B\left(\frac{1-\mu+m}{2},\frac{1-\mu-m}{2}\right)d\mu$$ - функция,

регулярная в полуплоскости $\mathrm{Re}\,\mu<3-m$. При $|\mu|\to\infty$

$$Q(\mu)\sim\frac{2}{3}\mu\sqrt{-2\pi\mu} .$$

Далее имеем

$$\frac{d}{d\mu}\left[G(\mu,z)\xi^{-\mu-1}\right]=\int_0^\infty V(t\xi,z)t^{\mu}\ln t\,dt$$ - эта

функция регулярна в полосе $-1-m<\mathrm{Re}\,\mu<3-m$ и на бесконечности убывает как $\frac{const}{\mu^3}$. Разобьем ее на два слагаемых:

$$G_1(\mu,z,\xi)=\int_0^1 V(t\xi,z)t^{\mu}\ln t\,dt,$$

$$G_2(\mu,z,\xi)=\int_1^\infty V(t\xi,z)t^{\mu}\ln t\,dt .$$

$G_2(\mu,z,\xi)$ регулярна по μ в полуплоскости $\mathrm{Re}\,\mu<3-m$, поэтому

$$f(\xi,z)=\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}G_1(\mu,z,\xi)Q(\mu)d\mu$$

$$(-1-m<\sigma<3-m) .$$

Вычислим теперь $\Delta f(\xi,z)=\frac{\partial^2 f}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, приняв во внимание уравнение (2,3). Мы имеем

$$\frac{\partial^2 G_1(\mu,z,\xi)}{\partial z^2}=-\int_0^1 t^{\mu}\ln t\left[\frac{\partial^2 V(t\xi,z)}{t^2\partial\xi^2}+\frac{1}{t^2\xi}\frac{\partial V(t\xi,z)}{\partial\xi}-\right.$$

$$\left.-\frac{m^2}{t^2\xi^2}V(t\xi,z)\right]dt=-\left[\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}-\frac{m^2}{\xi^2}\right]G_1(\mu-2,z,\xi),$$

$$\Delta f(\xi,z)=\frac{\partial^2 f(\xi,z)}{\partial\xi^2}-\left[\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}-\frac{m^2}{\xi^2}\right]\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{d}{d\mu}\left[G(\mu-2,z)\xi^{-\mu+1}\right]Q(\mu)d\mu=$$

$$=\frac{\partial^2 f(\xi,z)}{\partial\xi^2}-\left[\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}-\frac{m^2}{\xi^2}\right]\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{d}{d\mu}\left[\xi^{-\mu-1}G(\mu,z)\right]Q(\mu+2)d\mu=$$

$$=\frac{\partial^2 f(\xi,z)}{\partial\xi^2}-\frac{1}{16\pi^2 i}\left[\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}-\frac{m^2}{\xi^2}\right]\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\xi^{-\mu-1}G(\mu,z)2^{-\mu}(2+\mu)B\left(\frac{1+\mu+m}{2},\frac{m-\mu-1}{2}\right)d\mu=$$

$$=\frac{1}{4\pi^2 i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\xi^{-\mu-3}G(\mu,z)\left\{(\mu+1)(\mu+2)\mu B\left(\frac{m+1-\mu}{2},\frac{1-\mu-m}{2}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{2+\mu}{4}B\left(-\frac{1+\mu+m}{2},\frac{m-\mu-1}{2}\right)\left[(\mu+1)(\mu+2)-(\mu+1)-m^2\right]\right\}2^{-\mu}d\mu .$$

Нетрудно убедиться, что выражение в фигурных скобках тождественно равно нулю и, следовательно, $f(\xi,z)$ является гармонической во всей области D, а $\Phi(\xi+iz)$ регулярна в $D+\bar{D}$.

4. Исходя из формулы (2,I2), дадим другое интегральное представление решений уравнения (2,3). Как известно [6], всякую функцию $\Phi(\xi+iz)$, регулярную в области $D+\bar{D}$, можно единственным образом представить интегралом типа Коши с вещественной плотностью $\varphi(t)$:

$$\Phi(\zeta)=\frac{1}{4\pi i}\int_{L+\bar{L}}\frac{\varphi(t)dt}{t-\zeta}+Ci . \qquad (2,I4)$$

Здесь C - вещественная постоянная, t - комплексная координата точки на $L+\bar{L}$, $\zeta\in D+\bar{D}$. Представление (2,I4) справедживо, если $\mathrm{Re}\,\Phi(\zeta)$ непрерывно продолжима на L. При этом $\varphi(t)$ также непрерывна.

В силу (2,I2) - (2,I4) получаем:

$$V(r,z)=\mathrm{Re}\left\{i\int\limits_{L+\bar L}\varphi(t)\frac{\left[\frac{t-iz}{r}-\sqrt{\left(\frac{t-iz}{r}\right)^2-1}\right]^m}{\sqrt{(t-iz)^2-r^2}}\,dt\right\}. \qquad (2,I5)$$

Здесь радикалы считаются положительными при $t-iz>r$. Обозначим

$$\tau=r+iz,\quad \sqrt{(t-iz)^2-r^2}=\sqrt{(t-\tau)(t+\bar\tau)},$$

$$M(t,z)=i\,\frac{\left[t-iz-\sqrt{(t-\tau)(t+\bar\tau)}\right]^m}{\sqrt{(t-\tau)(t+\bar\tau)}}.$$

Выражение (2,I5) перепишем в виде

$$V(r,z)=r^{-m}\,\mathrm{Re}\left\{\int\limits_{L+\bar L}\varphi(t)M(t,\tau)\,dt\right\}.$$

Заметим, что $M(-\bar t,\tau)=(-1)^m\overline{M(t,\tau)}$, поэтому

$$V(r,z)=r^{-m}\int\limits_{L}\left[\varphi(t)-(-1)^m\varphi(-\bar t)\right]\mathrm{Re}\left\{M(t,\tau)\,dt\right\}.$$

Обозначив

$$\nu(t)=\varphi(t)-(-1)^m\varphi(-\bar t)\,, \qquad (2,I6)$$

имеем

$$V(r,z)=r^{-m}\int\limits_{L}\nu(t)\,\mathrm{Re}\left\{M(t,\tau)\right\}dt. \qquad (2,I7)$$

В соответствии с (2,I4) функция $\nu(t)$ определяется через $V(r,z)$ при $m>0$ неоднозначно. Произвольные вещественные постоянные (коэффициенты полинома $P_m(\zeta)$, входящие в $\nu(t)$), можно выбрать из дополнительных условий так, чтобы в точках A и B пересечения контура L с осью oz функция $\nu(t)$ и ее производные по дуге S до порядка $(m-1)$ включительно обращались в нуль:

$$\left.\frac{\partial^k\nu}{\partial s^k}\right|_{A,B}=0 \qquad (k=0,1,\dots,m-1). \qquad (2,I8)$$

Пусть замкнутый контур $L+\bar L$ имеет во всех точках непрерывно изменяющуюся касательную. Представим полином

$$P_m(\zeta)=iq_m\zeta^m+\sum_{k=0}^{m-1}(p_k+iq_k)\zeta^k$$

интегралом типа Коши вида (2,I4):

$$P_m(\zeta)=\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{L+\bar L}\frac{q(t)\,dt}{t-\zeta}+Ci\,. \qquad (2,I4)'$$

Чтобы вычислить вещественную плотность $q(t)$, введем функции $\Omega_k(\zeta)$, $\Psi_k(\zeta)$, регулярные в бесконечной области вне $L+\bar L$ и на контуре $L+\bar L$ удовлетворяющие условию:

$$\mathrm{Re}\,\Omega_k=\mathrm{Re}\,\zeta^k\,,\quad \mathrm{Jm}\,\Psi_k=\mathrm{Jm}\,\zeta^k\,; \qquad (2,I9)$$

$$(k=1,2,\dots,m)\,;\quad \Omega_0(\zeta)\equiv\Psi_0(\zeta)\equiv 0.$$

Тогда

$$q(t)=\sum_{k=0}^{m-1}p_k\left[t^k-\Psi_k(t)\right]+q_k i\left[t^k-\Omega_k(t)\right]+q_m i\left[t^m-\Omega_m(t)\right].$$

Положим

$$\mu(t)=q(t)-(-1)^m q(-\bar t),$$
$$\nu_0(t)=\varphi_0(t)-(-1)^m\varphi_0(-\bar t), \qquad (2,20)$$

где $\varphi_0(t)$ - плотность интеграла типа Коши для функции $\Phi_0(\zeta)$. Условия (2,I8) приводят к системе алгебраических уравнений

$$\left.\frac{d^j\mu}{ds^j}\right|_{A,B}=-\left.\frac{d^j\nu_0}{ds^j}\right|_{A,B} \qquad (2,2I)$$

$$(j=0,1,\dots,m-1)\,.$$

Заметим, что при четных $(k+m)$ равенства (2,I8) выполняются автоматически, а соответствующие числа p_k, q_{k+1} в выражении (2,20) выпадают. Следовательно, система (2,2I) содержит m уравнений с m неизвестными при m четных и $(m+1)$ уравнений с $(m+1)$ неизвестными при m нечетных. Опуская доказательство разрешимости этой системы в общем случае, ограничимся конкретным примером.

Пусть контур $L+\bar L$ есть окружность единичного радиуса.

Тогда

$$\Psi_k(t) = -\frac{1}{t^k}, \quad Q_k(t)=\frac{1}{t^k}, \quad (k=1,2,\ldots,m),$$

$$t=e^{i\theta}, \quad t_A=e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad t_B=e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

При $m=1$ $\mu(t)=2p_0-4q_1\sin\theta$. Система (2,2I) разрешима относительно p_0, q_1.

При $m=2$ $\mu(t)=4p_1\cos\theta-4q_2\sin 2\theta$. Система (2,2I) разрешима относительно p_1, q_2.

5. Чтобы получить другие интегральные представления решений уравнения Лапласа, попытаемся удовлетворить уравнению (2,3) функциями вида:

$$V(r,z)=r^{\ell}Q(X), \tag{2,22}$$

где $X=\frac{t-iz}{r}$ (t -произвольное комплексное число, ℓ - некоторая постоянная). Подстановка (2,22) в (2,3) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(1-X^2)Q''(X)+(2\ell-1)XQ'(X)+(m^2-\ell^2)Q(X)=0. \tag{2,23}$$

Полагая $\ell=m-1$, получаем

$$Q(X)=\int_0^{\pi}\frac{\sin^{2m}\lambda\, d\lambda}{\cos\lambda - X}.$$

При $\ell=-\frac{1}{2}$

$$Q(X)=Q_{m-\frac{1}{2}}(X) \text{ - функция Лежандра.}$$

При $\ell=-\frac{3}{2}$

$$Q(X)=Q'_{m-\frac{1}{2}}(X).$$

При $\ell=-1$

$$Q(X)=\frac{(X-\sqrt{X^2-1})^m}{\sqrt{X^2-1}}.$$

При $\ell=0$

$$Q(X)=T_m(X)-iU_m(X) \text{ - функции Чебышева.}$$

Различные интегральные представления решений уравнения (2,3) в области D можно получить по формуле

$$V(r,z)=r^{\ell}\int_L \nu(t)\,Re\left\{a(t)Q\left(\frac{t-iz}{r}\right)dt\right\}+Cr^m, \tag{2,24}$$

где $a(t)$ - произвольно заданная комплексная функция, C - произвольная вещественная постоянная, $\nu(t)$- вещественная функция, определяемая из граничных условий на L.

Заметим, что в формулах вида (2,24) $\nu(t)$ определяется по заданной функции $V(r,z)$, вообще говоря, не единственным образом.

При $\ell=m-1$ формулу (2,24) можно получить, полагая $a(t)=\frac{1}{t'(s)}$ и представляя в формуле (2,I0) $F(\zeta)$ интегралом типа Коши с плотностью $\frac{i\pi\Gamma(\frac{1}{2}+m)}{2\pi\Gamma(m)}\nu(t)$.

В случае $\ell=-1$ при $c=0,\ a(t)=\frac{dt}{ds}$ выражение (2,24) совпадает с (2,I7).

ЗАМЕЧАНИЕ. Интегральные представления решений уравнения (2,3) вида (2,24) можно использовать для решения краевых задач, когда контур L состоит из нескольких кривых и область D односвязна (рис. 4).

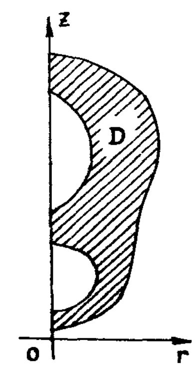

Рис. 4

§ 3. Интегральные представления решений уравнения Гельмгольца

I. Рассмотрим аналитические в области $D+\overline{D}$ решения дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\frac{2m+1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+k^2\psi=0$$

Пусть $F(\zeta)$ – функция, аналитическая в окрестности линии $r=0$ $(\zeta=z+ir)$ и равная $\psi(0,z)$ на этой линии. Непосредственной проверкой можно убедиться, что выражение [7]

$$\psi_0(r,z)=\frac{2^{m-\frac{1}{2}}\Gamma(m+1)}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\pi}F(z+ir\cos\lambda)\sin^{2m}\lambda\,\frac{J_{m-\frac{1}{2}}(kr\sin\lambda)d\lambda}{(kr\sin\lambda)^{m-\frac{1}{2}}} \qquad (3,1)$$

удовлетворяет уравнению (1,7) и на оси z обращается в $\psi(0,z)$. На основании теоремы первого параграфа $\psi_0(r,z)=\psi(r,z)$.
Полагая теперь

$$\frac{2^{m-\frac{1}{2}}\Gamma(m+1)}{\sqrt{\pi}}F(z+i\xi)=\frac{i}{4\pi}\int\limits_L\nu(t)\left[\frac{1}{t-\xi-iz}-\frac{1}{\bar{t}+\xi+iz}\right]ds+\frac{1}{2}C \qquad (3,2)$$

и обозначая

$$\mathcal{K}_1(t,\tau)=Re\left\{\frac{i}{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin^{2m}\lambda\,J_{m-\frac{1}{2}}(kr\sin\lambda)d\lambda}{(kr\sin\lambda)^{m-\frac{1}{2}}(t-r\cos\lambda-iz)}\right\}, \qquad (3,3)$$

получаем

$$\Psi(r,z)=\int\limits_L\nu(t)\mathcal{K}_1(t,\tau)ds+C\frac{J_m(kr)}{(kr)^m}. \qquad (3,4)$$

При $k=0$ формула (3,4) превращается в формулу (2,24) для случая $\ell=m-1$.

Интегральное представление (3,4) вследствие большой гладкости ядра $\mathcal{K}_1(t,\tau)$ неудобно для практического решения краевых задач. Применяя интегрирование по частям, можно получить для решения уравнения Гельмгольца интегральное представление, аналогичное (2,17) с вещественной плотностью $\nu(t)$, подчиненной условиям (2,18).

Представление решений уравнения Гельмгольца потенциалами простого или двойного слоя рассматривается в статье [3*].

Ядра всех указанных интегральных представлений зависят существенно от двух аргументов и поэтому решение краевых задач для уравнения Гельмгольца, по сравнению с уравнением Лапласа, оказывается более сложным.

§ 4. Интегральные уравнения краевых задач

В зависимости от применяемого интегрального представления решений уравнения (1,4) можно получить различные интегральные уравнения краевых задач.

I. Используя представление (2,5) общего решения уравнения Лапласа, получим для задачи Неймана интегральное уравнение второго рода. Это уравнение исследовано В.А.Цецохо в статье [2*]. В случае задачи Дирихле интегральная формула (2,5) дает уравнение первого рода с ядром, имеющим логарифмическую особенность.

В статье [4*] рассмотрен пример численного решения этого уравнения.

Интегральная формула (2,8) позволяет получить для задачи Дирихле в случае замкнутой поверхности вращения интегральное уравнение второго рода. Это уравнение во многих отношениях схоже с уравнением задачи Неймана и может быть изучено по аналогии со статьей [2*].

2. Сделаем несколько замечаний относительно интегральных уравнений первого рода, получающихся в результате применения формулы (2,24) к краевой задаче Дирихле для уравнения (2,3).

I) Положим

$$V_0(r,z,t)=\frac{i}{\sqrt{r}}\frac{d}{dt}Q_{m-\frac{1}{2}}\left(\frac{t-iz}{r}\right), \qquad (4,1)$$

где $Q_{m-\frac{1}{2}}(X)$ – функция Лежандра. При любом фиксированном комплексном t функция $e^{im\varphi}V_0(r,z,t)$ удовлетворяет уравнению Лапласа и при $\tau=r+iz\to t$

$$V_0(r,z,t)=\frac{1}{i\pi\sqrt{r}(\tau-t)}+F(t,\tau), \qquad (4,2)$$

где $F(t,\tau)=\frac{m^2-\frac{1}{4}}{2\pi ir\sqrt{r}}\ln\left(\frac{t-\tau}{r}\right)+F_0(t,\tau)$. $F_0(t,\tau)$ непрерывна при $t=\tau$ (см. [2] стр. 217).

Пусть t, t_1 – комплексные координаты двух точек контура L и $q(t,t_1)$ – некоторая вещественная функция двух аргументов, $\mu(s)$ – произвольная интегрируемая на L вещественная функция точки t, а $Q(X)$ определена формулой

$$Q(X)=\frac{(X-\sqrt{X^2-1})^m}{\sqrt{X^2-1}}.$$

Выражение

$$V(r,z)\int_L \mu(s)Re\left\{V_0(r,z,t)\frac{dt}{ds}+\frac{1}{r}\int_L q(t,t_1)Q\left(\frac{t_1-iz}{r}\right)dt_1\right\}ds, \quad (4,3)$$

очевидно, удовлетворяет в области D уравнению (2,3). Устремим точку τ к точке t_0, расположенной на контуре L. При этом интеграл типа Коши

$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\mu(t)}{t-\tau}dt$ в пределе примет значение $\mu(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\mu(t)dt}{t-t_0}$.

Обозначая $t-t_0=re^{i\vartheta}$, имеем $\frac{dt}{t-t_0}=\frac{dr}{r}+id\vartheta$.
Для функции $\mu(t)$ получаем интегральное уравнение второго рода:

$$\mu(t_0)+\int_L\mu(t)\left\{\frac{1}{\pi}\frac{d\vartheta}{ds}+\sqrt{r_0}\,ReF(t,t_0)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{r_0}}\int_L q(t,t_1)Re\left[Q\left(\frac{t_1-iz_0}{r_0}\right)dt_1\right]ds\right\}=\sqrt{r_0}f(t_0). \quad (4,4)$$

Здесь $f(t_0)$ – функция, которой равняется на L решение $V(r,z)$ уравнения (2,3), $r_0=Re\,t_0$. Выберем в качестве $q(t,t_1)$ решение уравнения

$$\frac{1}{r_0}\int_L q(t,t_1)Re\left[Q\left(\frac{t_1-iz_0}{r_0}\right)dt_1\right]+ReF(t,t_0)+\frac{1}{\pi\sqrt{r_0}}\frac{d\vartheta}{ds}=0. \quad (4,5)$$

Тогда получим

$$\mu(t_0)=\sqrt{r_0}f(t_0). \quad (4,6)$$

Уравнение (4,5) является частным случаем уравнения (2,17) и, следовательно, разрешимо.

Если $q(t,t_1)$ приближенно удовлетворяет уравнению (4,5), то для $\mu(t)$ получаем интегральное уравнение (4,4) с малым ядром.

Считая, что $q(t,t_1)$ точно удовлетворяет уравнению (4,4), обозначим

$$G(t,\tau)=Re\left[V_0(r,z,t)\frac{dt}{ds}+\frac{1}{r}\int_L q(t,t_1)Q\left(\frac{t_1-iz_0}{r_0}\right)dt_1\right]. \quad (4,7)$$

Решение задачи Дирихле для уравнения (2,3) дается формулой:

$$V(r,z)=\int_L\sqrt{\frac{t+\bar t}{2}}f(t)G(t,\tau)ds. \quad (4,8)$$

Функцию $G(t,\tau)$ будем называть функцией Грина задачи Дирихле для уравнения (2,3).

Обозначим второе слагаемое в выражении $G(t,\tau)$ через $G_1(t_0,\tau)$,

$$G_1(t,\tau)=\frac{1}{r}\int_L q(t,t_1)Re\left\{Q\left(\frac{t_1-iz}{r}\right)dt_1\right\}. \quad (4,9)$$

Полагая в (4,8) $V(r,z)=G_1(t_0,\tau)$, в силу (4,8) и (4,5), имеем уравнение:

$$G_1(t_0,\tau)=-\int_L G_1(t,\tau)\left\{\frac{1}{\pi}\frac{d\vartheta}{ds}+\sqrt{r}\,ReF(t_0,t)\right\}ds-$$

$$-Re\int_L\left\{\frac{1}{\pi}\frac{d\vartheta}{ds}+\sqrt{r}\,ReF(t_0,t)\right\}V_0(r,z,t)dt, \quad (4,10)$$

где $\vartheta=\arg(t_0-t)$.
Интегральное уравнение второго рода (4,10) наряду с интегральным уравнением (4,5), может служить для построения функции Грина.

2) Интегральное уравнение задачи Дирихле, получающееся из формулы (2,17), имеет вид:

$$\int_L\frac{\nu(s)ds}{\sqrt{|s_0-s|}}=f(s_0)+\int_L\nu(s)k(s,s_0)ds, \quad (4,11)$$

где $k(s,s_0)$ – непрерывная функция.

Особенность ядра этого уравнения аналогична особенности ядра уравнения Абеля

$$\int_0^{s_0}\frac{\nu(s)ds}{\sqrt{s_0-s}}=F(s_0),$$

поэтому свойства гладкости решения $\nu(s)$ уравнения (4,II) соответствуют гладкости производной функции $f(s)$ половинного порядка $f^{1/2}(s)$. Отсюда следует при аналитическом контуре L, что при непрерывной производной $f^{(k)}(s)$ должна быть непрерывна производная решения $(k-1)$ порядка $\nu^{(k-1)}(s)$ во внутренних точках контура L.

Известно, что решение интегрального уравнения первого рода неустойчиво: малым изменениям непрерывной заданной функции $f(s_0)$ могут соответствовать большие вариации $\nu(s)$. При численном решении уравнения

$$A\nu \equiv \frac{1}{r_0}\int\limits_L \nu(s)\,Re\left\{Q\left(\frac{t-iz_0}{r_0}\right)dt\right\} = f(s_0)$$

эффект неустойчивости проявляется в том, что приближенное решение $\tilde{\nu}(s)$ может оказаться быстро осциллирующей функцией. При замене интеграла $A\nu$ квадратурной суммой с неизвестными значениями $\nu(s_k)$ в серии узловых точек $s_1, s_2, \dots, s_n$ при больших n некоторые точки на графике $\tilde{\nu}(s)$ могут оказаться выпавшими из плавной кривой. Сделанное выше замечание о непрерывности производных $f^{(k)}(s)$ и $\nu^{(k-1)}(s)$ позволяет при вычислениях обнаружить явление неустойчивости и прокорректировать результаты, руководствуясь указанной гладкостью $\nu(s)$.

При использовании алгоритма, основанного на применении квадратурных формул, мы приходим к линейной алгебраической системе. Так как ядро

$$Q(X) = \frac{(X-\sqrt{X^2-1})^m}{\sqrt{X^2-1}}$$

обращается в бесконечность на диагонали $t=\tau$, то матрица указанной системы оказывается близкой к диагональной: ее элементы на главной диагонали по величине значительно превосходят остальные элементы соответствующих строк и столбцов. Это свойство матрицы особенно четко выражено при невысоком ее порядке, т.е. при небольшом числе узлов квадратурной формулы. В этом случае матрица является хорошо обусловленной (ее определитель не мал) и при решении системы не происходит значительных погрешностей округления. При большом числе узлов квадратурной формулы элементы соседних строк и соседних столбцов матрицы сближаются между собой, матрица становится плохо обусловленной и точность вычисления $\nu(t)$ снижается.

В процессе вычислений полезно иметь критерий для оценки

максимального числа узлов квадратурной формулы, при котором не происходит практически заметной потери устойчивости решения. Это критическое число узлов $n_{кр}$ можно обнаружить, если производить вычисления с различным числом узлов n и на каждом этапе сравнивать осредненные по В.А.Стеклову функции $\nu_n^{ср}(s)$ с решениями для меньшего числа узлов. При $n < n_{кр}$ в рассматриваемом классе функций норма разности

$$\nu_n^{ср}(s) - \nu_{n-p}^{ср}(s)$$

убывает с возрастанием n, если положительное число p не велико. При $n > n_{кр}$

$$\left\|\nu_n^{ср}(s) - \nu_{n-p}^{ср}(s)\right\|$$

с возрастанием n начинает флюктуировать или же возрастать.

Все сказанное относительно гладкости и неустойчивости решения интегрального уравнения первого рода (4,II) справедливо и для уравнения, получающегося при решении задачи Дирихле методом потенциала простого слоя. В статьях [3*] и [4*] рассмотрены примеры, показывающие, что в ряде важных практических задач можно ограничиться весьма небольшим числом узлов квадратурных формул и вследствие этого явление неустойчивости решения в этих задачах практически не обнаруживается.

3). При решении краевых задач методом интегральных уравнений первого рода эффект неустойчивости плотности $\nu(t)$ практически будет проявляться при вычислении производных $V(r,z)$. Сама же функция $V(r,z)$ всегда может быть вычислена с той же точностью, что и ее граничные значения $f(s)$.