

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ
ДЛЯ НЕЗАМКНУТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ

О.Ф. Антоненко

§ I. Постановка задачи

I. Если проводник в пустоте получает определенный заряд, то в состоянии равновесия этот заряд распределяется по поверхности проводника таким образом, что внутри проводника электрическое поле отсутствует. При этом во всех точках проводника электростатический потенциал принимает одно и то же значение.

Требуется найти распределение потенциала электростатического поля во внешности проводника, если значение потенциала на проводнике известно. Эту задачу будем называть задачей Д.

Рассмотрим незамкнутую проводящую поверхность S , толщина которой ничтожна по сравнению с другими ее размерами (рис. I). Обозначим через σ_1 и σ_2 плотности поверхностных

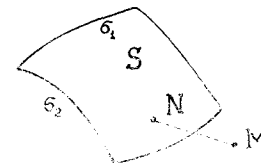


Рис. I

зарядов, расположенных на обеих сторонах поверхности. Потенциал $U(M)$ в любой точке M пространства складывается из потенциалов, происходящих от зарядов, расположенных на элементах ds проводящей поверхности, и дается интегралом:

$$U(M) = \iint_S \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{r} ds, \quad r = |MN|, \quad N \in S. \quad (1)$$

При этом $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$ удовлетворяет интегральному уравнению:

$$Q = \iint_S \frac{\epsilon}{r} ds, \quad (2)$$

где Q - заданное значение потенциала на поверхности S .

2. Будем рассматривать поле с осевой симметрией. Для его описания целесообразно ввести цилиндрические координаты ρ, φ, z , совместив ось z с осью симметрии поля. Пусть незамкнутые проводящие поверхности $S_i, i = 1, 2, \dots, m$, образованы вращением вокруг оси z незамкнутых кривых $L_i, i = 1, 2, \dots, m$. Потенциал на каждой поверхности S_i принимает своё постоянное значение Q_i :

$$U|_{S_i} = Q_i = \text{const}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Для нахождения плотностей $\epsilon_i = \epsilon_{1i} + \epsilon_{2i}$ поверхностных слоёв имеем интегральное уравнение:

$$\sum_{i=1}^m \iint_{S_i} \frac{\epsilon_i(N)}{r} ds_i = Q_k(M), \quad \text{где } M \in S_k, N \in S_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Или

$$\iint_S \frac{\epsilon(N)}{r} ds = Q(M) \quad \begin{cases} Q(M) = Q_k, \text{ когда } M \in S_k, \quad k = 1, \dots, m \\ \epsilon(N) = \epsilon_i \text{ когда } N \in S_i, \quad i = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (3)$$

В случае осевой симметрии поля уравнение (3) после известных преобразований (см. [1]) приводится к виду:

$$\int_L \epsilon(\rho', z') \frac{4\rho'}{\sqrt{(\rho + \rho')^2 + (z - z')^2}} K(\kappa) d\ell = Q, \quad (4)$$

где $(\rho', z') \in L = \bigcup_{i=1}^m L_i, (\rho, z) \in L,$

$d\ell$ - элемент длины контура L ,

$$\kappa^2 = \frac{4\rho\rho'}{(\rho + \rho')^2 + (z - z')^2}, \quad K(\kappa) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\lambda}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \lambda}}$$

- эллиптический интеграл I-го рода. Для него ниже используется аппроксимация [3]:

$$K(\kappa) \approx (\alpha_0 + \alpha_1 \eta + \alpha_2 \eta^2 + \alpha_3 \eta^3) + (\beta_0 + \beta_1 \eta + \beta_2 \eta^2 + \beta_3 \eta^3) \ln \frac{1}{\eta}, \quad (5)$$

где $\eta = 1 - \kappa^2 = \frac{(\rho - \rho')^2 + (z - z')^2}{(\rho + \rho')^2 + (z - z')^2}, \quad 0 < \eta \leq 1,$

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 1,386294361, & \beta_0 &= 0,5, \\ \alpha_1 &= 0,097932891, & \beta_1 &= 0,124750742, \\ \alpha_2 &= 0,054544409, & \beta_2 &= 0,060118519, \\ \alpha_3 &= 0,032024666, & \beta_3 &= 0,010944912. \end{aligned}$$

Максимальная погрешность этой аппроксимации

$$\epsilon_{\max} = 6 \cdot 10^{-7}.$$

Для краткости, обозначим

$$K \approx A(\eta) + B(\eta) \ln \frac{1}{\eta},$$

где $A(\eta)$ и $B(\eta)$ - указанные в формуле (5) многочлены.

Таким образом, уравнение (4) приведено к приближенному одномерному интегральному уравнению:

$$\int_L \epsilon(\rho', z') \frac{4\rho'}{\sqrt{(\rho + \rho')^2 + (z - z')^2}} (A + B \ln \frac{1}{\eta}) d\ell = Q. \quad (6)$$

Выделив сингулярный член, запишем уравнение (6) в виде:

$$\int_L \left[\varphi + \psi \ln \frac{1}{\sqrt{(\rho - \rho')^2 + (z - z')^2}} \right] d\ell = Q, \quad (7)$$

где φ и ψ - заданные непрерывные на L функции.

§ 2. Связь с плоской задачей электростатики

1. Пусть в плоскости (p, z) плоское электростатическое поле создается зарядами, распределенными на тонком незамкнутом проводнике L с линейными плотностями μ_1 и μ_2 на краях проводника. Потенциал проводника постоянный: $U|_L = Q = \text{const}$

Для линейной плотности $\mu = \mu_1 + \mu_2$ логарифмического потенциала простого слоя имеем уравнение:

$$\int_L \mu \ln \frac{1}{\sqrt{(p-p')^2 + (z-z')^2}} dl = Q. \quad (8)$$

Интеграл в уравнении (8) с точностью до непрерывной функции ψ совпадает с сингулярной частью интеграла в уравнении (7). Это сравнение позволяет для изучения некоторых особенностей b в уравнении (7) привлечь результаты соответствующих задач плоской электростатики.

2. В плоском случае потенциальную функцию можно рассматривать как вещественную или мнимую часть комплексной аналитической функции $F(\omega)$, $\omega = z + ip$. При этом величина $\frac{1}{4\pi} \left| \frac{dF}{d\omega} \right|$ в точке на поверхности проводника равна плотности заряда в этой точке [14], т.е.

$$\mu(\omega) = \frac{1}{4\pi} \left| \frac{dF}{d\omega} \right|_L. \quad (9)$$

С помощью конформного преобразования $\xi = \xi(\omega)$ или $\omega = f(\xi)$ ($\xi = \zeta + ih$) можно перейти от данной задачи теории потенциала с граничными условиями Дирихле на заданном контуре к другой задаче с аналогичными условиями на контуре, отличающемся своим видом от первого. Тогда новый потенциал будет вещественной или мнимой частью аналитической функции $F(\omega(\xi))$, а плотность заряда μ^* на преобразованном проводнике L^* будет равна

$$\mu^*(\xi) = \frac{1}{4\pi} \left| \frac{dF}{d\omega} \right| \cdot \left| \frac{d\omega}{d\xi} \right|_{L^*}. \quad (9^*)$$

3. Конформное отображение, связанное с аналитической функцией $\xi = \omega^{\frac{1}{\alpha}}$, где α — вещественное число, удовлетворяющее неравенствам $0 < \alpha < 2$, преобразует угол $\alpha\pi$ с вершиной в начале плоскости ω в полуплоскость $\text{Im } \xi > 0$ (рис. 2).

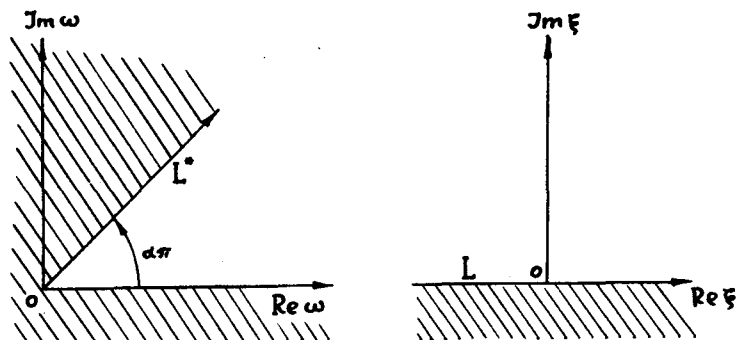


Рис. 2

Пусть комплексная функция $F(\xi)$ решает задачу Дирихле для полуплоскости $\text{Im } \xi \geq 0$. Плотность μ в точках контура L дается формулой:

$$\mu = \frac{1}{4\pi} \left| \frac{dF}{d\xi} \right|_{\text{Im } \xi = 0}$$

Естественно предположить, что в точке $\xi = 0$ $\mu(\xi)$ не имеет особенности. Для плотности $\mu^*(\omega)$ на сторонах, образующих угол $\alpha\pi$, получаем выражение:

$$\mu^* = \frac{1}{4\pi} \left| \frac{dF(\xi(\omega))}{d\omega} \right|_{L^*} = \frac{1}{4\pi\alpha} \left| \frac{dF}{d\xi} \right| \cdot \left| \omega^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \right|_{L^*}$$

Таким образом, в угловой точке $\omega = 0$ при $0 < \alpha < 1$ плотность μ^* равна нулю (экранирование), а при $1 < \alpha < 2$ плотность обращается в бесконечность порядка $\frac{\alpha-1}{\alpha}$ (действие острия).

Пусть проводник имеет вид, изображенный на рис. 3, причём $0 < \alpha \leq 1$. Тогда μ_1 в угловой точке особенности не име-

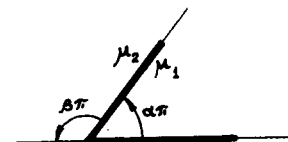


Рис. 3

ет и равна нулю, а μ_2 обращается в бесконечность порядка $\frac{\beta}{1+\beta}$, где $\beta = 1 - \alpha$. Такую же особенность имеет плотность $\mu = \mu_1 + \mu_2$.

Если тонкий проводник L занимает отрезок $[-a, a]$ оси z , то уравнение (8) принимает вид:

$$\int_{-a}^a \mu(t) \ln \frac{1}{|z-t|} dt = Q \quad -a < z < a.$$

Это уравнение подробно изучено в связи с контактными задачами теории упругости [15] и имеет единственное решение:

$$\mu(z) = \frac{Q}{\pi \ln \frac{2}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - z^2}}.$$

Таким образом, на концах незамкнутого проводника $\mu(z)$ обращается в бесконечность порядка $\frac{1}{2}$.

При решении уравнения (7) осесимметричной задачи мы будем предполагать, что ϕ на концах и в угловых точках L имеет особенности, аналогичные соответствующим особенностям плоской задачи.

§ 3. Расчёт поля цилиндра конечной длины

1. Пусть требуется решить задачу Д для случая полого цилиндра конечной длины $2a$ с радиусом основания R и с потенциалом на цилиндре, равным единице (рис. 4).

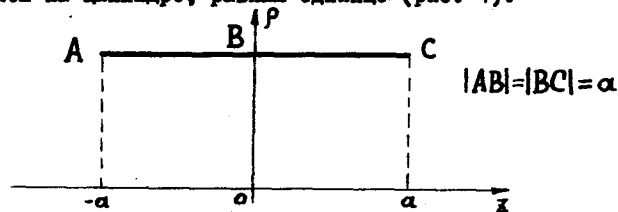


Рис. 4

Плотность ϕ потенциала простого слоя на цилиндре будем искать в виде

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - z^2}} f(z), \quad (10)$$

где $f(z)$ — подлежащая определению непрерывная на отрезке $[-a, a]$ функция.

Для $f(z)$ имеем интегральное уравнение:

$$4R \int_{-a}^a \frac{f(z')}{\sqrt{4R^2 + (z-z')^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - z'^2}} (A + B \ln \frac{1}{\eta}) dz' = 1 \quad (11)$$

Заменим уравнение (11) конечной системой линейных алгебраических уравнений.* Для этого разделим отрезок AC на $2N$ равных частей точками деления:

$$z_k = \frac{a}{N} k - a, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 2N.$$

Представим $f(z')$ на каждом отрезке деления линейной функцией:

$$f(z') = f_n + (f_{n+1} - f_n)t; \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$z' = \frac{a}{N}(n+t) - a, \quad n = 0, 1, \dots, 2N-1, \quad (12)$$

где $f_n = f(z_n)$ — значение функции f в точках деления.

С учетом (12), левая часть уравнения (11) представится в виде суммы:

$$\frac{4Ra}{N} \sum_{n=0}^{2N-1} \int_0^1 [f_n + (f_{n+1} - f_n)t] \varphi_n(z, z') dt, \quad (13)$$

где

$$\varphi_n(z, z') = \frac{A + B \ln \frac{1}{\eta}}{\sqrt{4R^2 + (z-z')^2} \cdot \sqrt{\alpha^2 - z'^2}}.$$

Вычисляя сумму (13) последовательно в $2N+1$ точках деления и подставляя в уравнение (11), получим для $f_0, f_1, \dots, f_{2N}$ линейную алгебраическую систему $2N+1$ уравнений.

Введя обозначения

$$\varphi_n^k = \varphi_n(z_k, z'), \quad \ell_n^k = \int_0^1 \varphi_n^k dt, \quad \bar{\ell}_n^k = \int_0^1 \varphi_n^k t dt, \quad (14)$$

запишем систему в виде:

$$1 = \frac{4aR}{N} \sum_{n=0}^{2N} A_n^k f_n \quad (k = 0, 1, \dots, 2N), \quad (15)$$

* Интегральное уравнение, соответствующее приближенному уравнению (11), рассматривалось в работе [16]. Путем представления потенциала на поверхности цилиндра и плотности заряда в виде соответствующих рядов задача сводится к регулярной бесконечной системе линейных уравнений. Систему рекомендуется решать методом итераций. Численные результаты по этому методу, насколько нам известно, пока не опубликованы.

где A_n^k вычисляются по формулам:

$$A_0^k = \ell_0^k - \bar{\ell}_0^k,$$

$$A_i^k = \ell_i^k - \bar{\ell}_i^k + \bar{\ell}_{i-1}^k, \quad i = 1, 2, \dots, 2N-1;$$

$$A_{2N}^k = \bar{\ell}_{2N-1}^k.$$

Ввиду симметрии, b — функция, чётная относительно z , а тогда чётна и $f(z)$, что следует из (10), т.е. имеем

$$f_n = f_{2N-n}, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

В таком случае достаточно взять лишь точки на отрезке AB и решить систему $N+1$ уравнений. Она имеет вид:

$$1 = \frac{4aR}{N} \sum_{n=0}^N B_n^k f_n, \quad \text{где } B_n^k = A_n^k + A_{2N-n}^k, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (16)$$

$$B_N^k = A_N^k.$$

2. Вычисление интегралов ℓ_n^k и $\bar{\ell}_n^k$.

Напомним, что

$$z_k = \frac{a}{N} \cdot k - a, \quad k = 0, 1, \dots, N,$$

$$z' = \frac{a}{N}(n+t) - a; \quad n = 0, 1, \dots, 2N-1; \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$h = \frac{(z_k - z')^2}{4R^2 + (z_k - z')^2}.$$

а) Пусть $n = 1, 2, \dots, 2N-2$. При $k=n$ получаем $|z' - z_k| = \frac{a}{N}t$ и при $t=0$ h обращается в нуль, а подынтегральные функции в интегралах ℓ_n^k и $\bar{\ell}_n^k$ обращаются в бесконечность. То же самое имеет место при $k=n+1$ и $t=1$. Введем обозначение:

$$\frac{1}{\sqrt{4R^2 + (z_k - z')^2} \sqrt{a^2 - z'^2}} = M(z_k, z').$$

Несобственные интегралы будем вычислять по формулам:

$$\ell_n^k = \int_0^1 \left\{ M \left[A + B \ln \left(\frac{4R^2 + (z_k - z')^2}{a^2} N^2 \right) \right] - 2 \left[MB - (BM) \right]_{t=0} \right\} \ln t \, dt + \quad (17)$$

$$+ 2(MB) \Big|_{t=0},$$

где

$$2(MB) \Big|_{t=0} = \frac{N}{2aR\sqrt{n(2N-n)}} = \text{const}$$

$$\ell_n^{k+1} = \int_0^1 \left\{ M \left[A + B \ln \left(\frac{4R^2 + (z_k - z')^2}{a^2} N^2 \right) \right] - 2 \left[MB - (MB) \right]_{t=1} \right\} \ln(t-1) \, dt + 2(MB) \Big|_{t=1}, \quad (18)$$

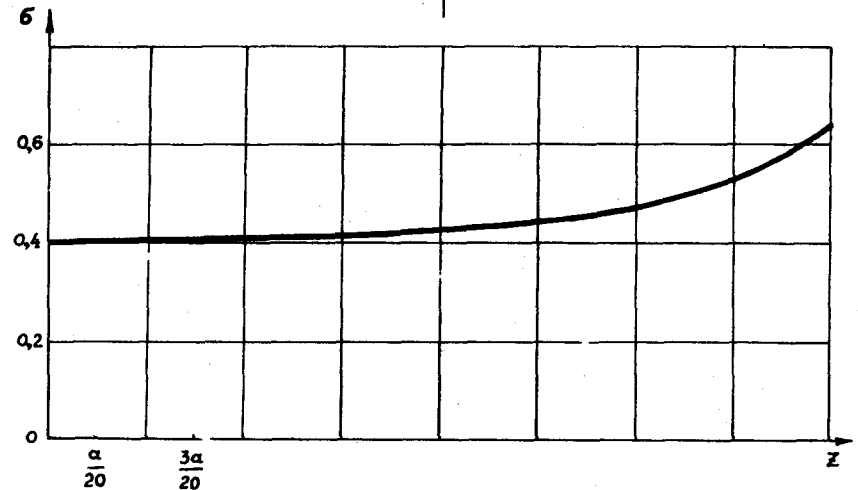
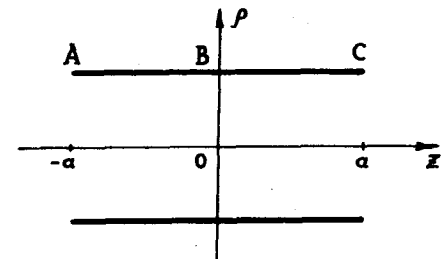


Рис. 5

Плотность b потенциала простого слоя на поверхности цилиндра.

P	C																				a
	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	
9996	9996	9995	9995	9994	9992	9990	9988	9984	9980	9975	9967	9958	9945	9928	9904	9870	9819	9732	9562	9169	z
9991	9991	9990	9989	9986	9984	9980	9974	9968	9959	9948	9933	9913	9888	9853	9807	9742	9648	9505	9280	8935	a
9986	9986	9985	9982	9979	9975	9969	9961	9951	9938	9920	9898	9870	9832	9782	9716	9627	9504	9333	9098	8789	
9982	9981	9979	9977	9972	9966	9958	9948	9934	9917	9895	9866	9828	9780	9717	9635	9528	9388	9205	8972	8688	
9977	9977	9975	9971	9966	9958	9949	9936	9919	9898	9871	9836	9791	9734	9661	9567	9448	9298	9110	8882	8615	
9973	9973	9970	9966	9960	9952	9940	9925	9906	9882	9850	9810	9760	9695	9614	9512	9385	9229	9040	8816	8561	
9970	9969	9967	9962	9955	9946	9933	9917	9896	9868	9834	9790	9735	9665	9578	9470	9338	9179	8989	8770	8522	
9968	9967	9964	9959	9952	9942	9928	9910	9888	9859	9822	9775	9716	9643	9552	9441	9306	9144	8955	8738	8496	
9966	9965	9962	9957	9950	9939	9925	9906	9883	9853	9814	9766	9705	9630	9537	9423	9286	9124	8935	8720	8481	
9966	9965	9962	9957	9949	9938	9924	9905	9881	9850	9812	9763	9701	9625	9532	9417	9280	9117	8929	8714	8476	

Рис. 6

Распределение потенциала в поле цилиндра.

$$\text{где } z(MB) \Big|_{t=1} = \frac{N}{2\alpha R \sqrt{(n+1)[2N-(n+1)]}} = \text{const}.$$

Для интегралов $\bar{e}_n^n$, $\bar{e}_n^{n+1}$ легко выписать формулы, аналогичные формулам (17) и (18).

в) При $n=0$ и $n=2N-1$ особенность при всех k даёт множитель $\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - z'^2}}$. От этой особенности легко избавиться с помощью подстановок:

$$\text{при } n=0 \quad \tau = \sqrt{t},$$

$$\text{при } n=2N-1 \quad \tau = \sqrt{1-t}.$$

Получаем:

$$\bar{e}_0^n = 2 \frac{N}{\alpha} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4R^2 + (z_k - z')^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2N - \tau^2}} \left[A + B \ln \frac{1}{\tau} \right] d\tau, \quad (19)$$

$$\bar{e}_0^n = 2 \frac{N}{\alpha} \int_0^1 \frac{\tau^2}{\sqrt{4R^2 + (z_k - z')^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2N - \tau^2}} \left[A + B \ln \frac{1}{\tau} \right] d\tau, \quad (20)$$

$$\text{где } h = h(\tau), \quad \tau = \sqrt{t} \quad \text{или} \quad t = \tau^2.$$

При $k=0$ и $k=1$ особенности подынтегральных функций в (19) и (20) выделяются аналогично (17) и (18). Решая систему (15), получаем значения f_n ($n=0, 1, \dots, 2N$) функции f в точках деления. Из формулы (10) имеем значения плотности b_n .

Численные результаты по расчёту поля цилиндра иллюстрируются рисунками (5) и (6).

§ 4. Более общий случай

Поверхность $S = S_1 \cup S_2$ образована вращением вокруг оси Z двух ломаных OAB и CDE (конфигурация и размеры указаны на рис. 7). На поверхности S_1 потенциал равен нулю, на поверхности S_2 - единице. Меняя параметры $a, b, c, d, l, R, \varphi_1, \varphi_2$, получаем решение для разных случаев: диск с цилиндром, диск с конусом, "стаканчики" [18] и т.д.

Решение $U(\rho, z)$ ищем в виде (1), причем для b , как и прежде, имеем интегральное уравнение (6). Относительно плотности b предполагаем, что она непрерывна всюду, кроме угловых точек A, D и концевых точек B, C, E , где имеет особенности, рассмотренные в § 2.

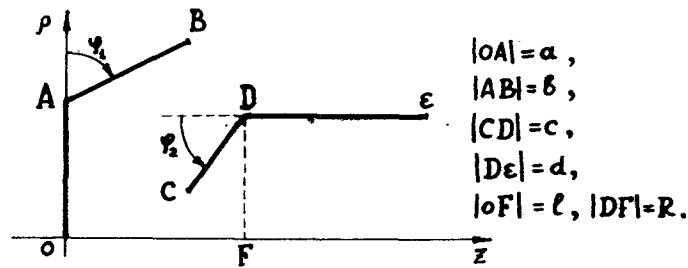


Рис. 7

Для численного решения уравнения (6) разделим отрезок OA на n_1 , AB на n_2 , CD на n_3 и DE на n_4 равных частей. Координаты точек деления обозначим через ρ_k, z_k , $k = 0, 1, 2, \dots, n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 1$. Они вычисляются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \rho_k &= \frac{a}{n_1} k \\ z_k &= 0 \end{aligned} \right\} k = 0, 1, \dots, n_1 - 1; \quad (21)$$

$$\left. \begin{aligned} \rho_k &= a + \frac{b}{n_2} (k - n_1) \cos \varphi_1 \\ z_k &= \frac{b}{n_2} (k - n_1) \sin \varphi_1 \end{aligned} \right\} k = n_1, n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2;$$

$$\left. \begin{aligned} \rho_k &= R + \left\{ \frac{c}{n_3} [k - (n_1 + n_2 + 1)] - c \right\} \sin \varphi_2 \\ z_k &= l + \left\{ \frac{c}{n_3} [k - (n_1 + n_2 + 1)] - c \right\} \cos \varphi_2 \end{aligned} \right\} k = n_1 + n_2 + 1, \dots, n_1 + n_2 + n_3;$$

$$\left. \begin{aligned} \rho_k &= R \\ z_k &= l + \frac{d}{n_4} [k - (n_1 + n_2 + n_3 + 1)] \end{aligned} \right\} k = n_1 + n_2 + n_3 + 1, \dots, n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 1.$$

Переменная точка интегрирования в зависимости от номера n ($n = 0, 1, \dots, n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 1$) отрезка деления кон-

тура L имеет координаты ρ' , z' , вычисляемые по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \rho' &= \frac{a}{n_1} (n + 1) \\ z' &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} n &= 0, 1, \dots, n_1 - 2, \\ 0 &\leq t \leq 1, \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \rho' &= \frac{a}{n_1} [n + (1 - t)] \\ z' &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} n &= n_1 - 1, \\ 0 &\leq t \leq 1, \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \rho' &= a + \frac{b}{n_2} (n - n_1 + t) \cos \varphi_1 \\ z' &= \frac{b}{n_2} (n - n_1 + t) \sin \varphi_1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} n &= n_1, n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2 - 2, \\ 0 &\leq t \leq 1, \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \rho' &= a + \frac{b}{n_2} [n - n_1 + (1 - t)] \cos \varphi_1 \\ z' &= \frac{b}{n_2} [n - n_1 + (1 - t)] \sin \varphi_1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} n &= n_1 + n_2 - 1, \\ 0 &\leq t \leq 1, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\left. \begin{aligned} \rho' &= R + \left\{ \frac{c}{n_3} [n - (n_1 + n_2 + 1) + t] - c \right\} \sin \varphi_2 \\ z' &= l + \left\{ \frac{c}{n_3} [n - (n_1 + n_2 + 1) + t] - c \right\} \cos \varphi_2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} n &= n_1 + n_2, \dots, n_1 + n_2 + n_3 - 2, \\ 0 &\leq t \leq 1, \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \rho' &= R + \left\{ \frac{c}{n_3} [n - (n_1 + n_2 + 1) + (1 - t)] - c \right\} \sin \varphi_2 \\ z' &= l + \left\{ \frac{c}{n_3} [n - (n_1 + n_2 + 1) + (1 - t)] - c \right\} \cos \varphi_2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} n &= n_1 + n_2 + n_3 - 1, \\ 0 &\leq t \leq 1, \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \rho' &= R \\ z' &= l + \frac{d}{n_4} [n - (n_1 + n_2 + n_3 + 1) + t] \end{aligned} \right\} \begin{aligned} n &= \sum_{i=1}^3 n_i, \dots, \sum_{i=1}^4 n_i - 2, \\ 0 &\leq t \leq 1, \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \rho' &= R \\ z' &= l + \frac{d}{n_4} [n - (n_1 + n_2 + n_3 + 1) + (1 - t)] \end{aligned} \right\} \begin{aligned} n &= \sum_{i=1}^4 n_i - 1, \\ 0 &\leq t \leq 1. \end{aligned}$$

Значение функции σ в K -й точке деления обозначим через σ_K , то есть $\sigma_K = \sigma(\rho_K, \bar{x}_K)$. На всех отрезках деления, кроме тех, которые примыкают к угловым или конечным точкам, σ аппроксимируем линейной функцией:

$$\sigma = \sigma_n + (\sigma_{n+1} - \sigma_n)t, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

На остальных отрезках представляем σ с учетом особенностей в угловых и конечных точках:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{t\sigma_{n_1-1} + \sigma_{n_1}(1-t)}{t^{\frac{1}{1+\alpha}}}, \quad n = n_1 - 1; \\ \sigma &= \frac{\sigma_{n_1}(1-t) + \sigma_{n_1+1}t}{t^{\frac{1}{1+\alpha}}}, \quad n = n_1 \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} &\text{Соответствующие от-} \\ &\text{резки примыкают к уг-} \\ &\text{ловой точке } A. \\ &\alpha = \frac{|\psi_1|}{\pi}. \end{aligned}$$

$$\sigma = \frac{t\sigma_{n_1+n_2-1} + (1-t)\sigma_{n_1+n_2}}{t^{\frac{1}{2}}}, \quad n = n_1 + n_2 - 1; \quad (23)$$

$$\sigma = \frac{\sigma_{n_1+n_2+1}(1-t) + \sigma_{n_1+n_2+2}t}{t^{\frac{1}{2}}}, \quad n = n_1 + n_2;$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{\sigma_{n_1+n_2+n_3}t + \sigma_{n_1+n_2+n_3+1}(1-t)}{t^{\frac{1}{1+\beta}}}, \quad n = n_1 + n_2 + n_3 - 1; \\ \sigma &= \frac{\sigma_{n_1+n_2+n_3+1}(1-t) + \sigma_{n_1+n_2+n_3+2}t}{t^{\frac{1}{1+\beta}}}, \quad n = n_1 + n_2 + n_3 \end{aligned} \right\} \quad \beta = \frac{|\psi_2|}{\pi}$$

$$\sigma = \frac{\sigma_{n_1+n_2+n_3+n_4}t + \sigma_{n_1+n_2+n_3+n_4+1}(1-t)}{t^{\frac{1}{2}}}, \quad n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 - 1.$$

В угловых и конечных точках плотность σ обращается в бесконечность. Смысл σ_K в этих точках виден из приведенных выражений (23). Если в угловых точках A и D особенность не учитывать, т.е. предположить, что плотность и там непрерывна и конечна, то в выписанных формулах (23) нужно считать $\alpha = \beta = 0$. Тогда соответствующие аппроксимации превращаются в линейные, а σ_K при $K = n_1, n_1 + n_2 + n_3 + 1$ будут означать предполагаемые значения σ в угловых точках. Аналогичное замечание справедливо и для конечных точек.

С учетом указанной аппроксимации левая часть уравнения (6) представится в виде суммы интегралов по каждому участ-

ку деления контура L , что можно записать в виде:

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{n_1-2} \{ \sigma_n \ell_n + (\sigma_{n+1} - \sigma_n) \bar{\ell}_n \} + \sigma_{n_1} \ell_{n_1-1} + (\sigma_{n_1-1} - \sigma_{n_1}) \bar{\ell}_{n_1-1} + \\ &+ \sum_{n=n_1}^{n_1+n_2-2} \{ \sigma_n \ell_n + (\sigma_{n+1} - \sigma_n) \bar{\ell}_n \} + \sigma_{n_1+n_2} \ell_{n_1+n_2-1} + (\sigma_{n_1+n_2-1} - \sigma_{n_1+n_2}) \bar{\ell}_{n_1+n_2-1} + \\ &+ \sum_{n=n_1+n_2+1}^{n_1+n_2+n_3-1} \{ \sigma_n \ell_n + (\sigma_{n+1} - \sigma_n) \bar{\ell}_n \} + \sigma_{n_1+n_2+n_3} \ell_{n_1+n_2+n_3-1} + \\ &+ (\sigma_{n_1+n_2+n_3-1} - \sigma_{n_1+n_2+n_3}) \bar{\ell}_{n_1+n_2+n_3-1} + \sum_{n=n_1+n_2+n_3+1}^{n_1+n_2+n_3+n_4-1} \{ \sigma_n \ell_n + (\sigma_{n+1} - \sigma_n) \bar{\ell}_n \} + \\ &+ \sigma_{n_1+n_2+n_3+n_4} \ell_{n_1+n_2+n_3+n_4-1} + (\sigma_{n_1+n_2+n_3+n_4-1} - \sigma_{n_1+n_2+n_3+n_4}) \bar{\ell}_{n_1+n_2+n_3+n_4-1}, \end{aligned} \quad (24)$$

где ℓ_n и $\bar{\ell}_n$ - интегралы вида:

$$\nu \int_0^1 \frac{4\rho'}{\sqrt{(\rho+\rho')^2 + (z-z')^2}} (A + B \ln \frac{t}{\eta}) t^{\mathcal{X}} dt. \quad (25)$$

Здесь ν принимает значения:

$$\nu = \begin{cases} \frac{a}{n_1}, & \text{для } 0 \leq n \leq n_1 - 1, \\ \frac{b}{n_2}, & \text{для } n_1 \leq n \leq n_1 + n_2 - 1, \\ \frac{c}{n_3}, & \text{для } n_1 + n_2 \leq n \leq n_1 + n_2 + n_3 - 1, \\ \frac{d}{n_4}, & \text{для } n_1 + n_2 + n_3 \leq n \leq n_1 + n_2 + n_3 + n_4 - 1; \end{cases}$$

показатель $\mathcal{X}$ в интегралах ℓ_n равен:

$$\mathcal{X} = \begin{cases} -\frac{a}{1+\alpha}, & \text{для } n = n_1 - 1, n = n_1, \\ -\frac{\beta}{1+\beta}, & \text{для } n = n_1 + n_2 + n_3 - 1, n = n_1 + n_2 + n_3, \\ -\frac{1}{2}, & \text{для } n = n_1 + n_2 - 1, n = n_1 + n_2, n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 - 1, \\ 0, & \text{для остальных } n. \end{cases} \quad (26)$$

В интегралах $\bar{\ell}_n$ показатель $\mathcal{L}$ на единицу больше, чем в формулах (26).

Вычисляя сумму (24) во всех точках деления последовательно и подставляя в уравнение (6), получаем для $\bar{b}_k$, $k=0,1,2,\dots, n_1+n_2+n_3+n_4+1$ линейную алгебраическую систему $n_1+n_2+n_3+n_4+2$ уравнений. Коэффициенты этой системы легко выписать, пользуясь выражением (24). Особенности в интегралах $\bar{\ell}_n$, $\bar{\ell}_n$ выделяются так же, как в § 3. Численные результаты иллюстрируются на рис. 8-12.

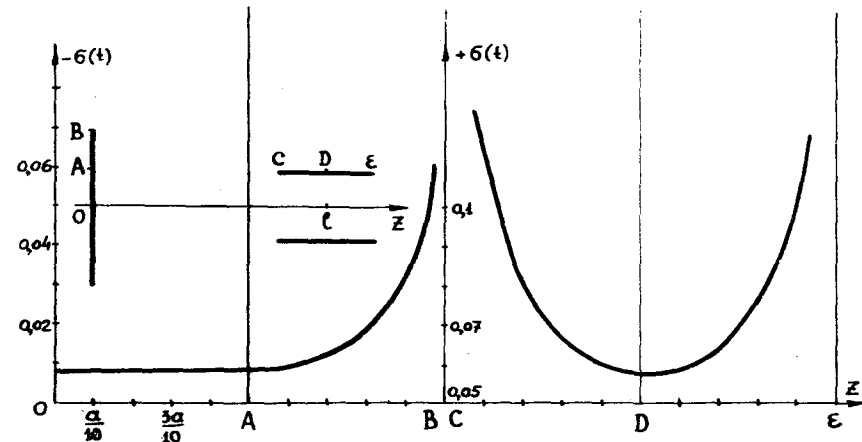


Рис. 8

Диск с цилиндром. Распределение плотности b .
 $R=1$, $a=b=c=d=1$, $\ell=8$, $\varphi_1=\varphi_2=0$, $\alpha=\beta=0$.

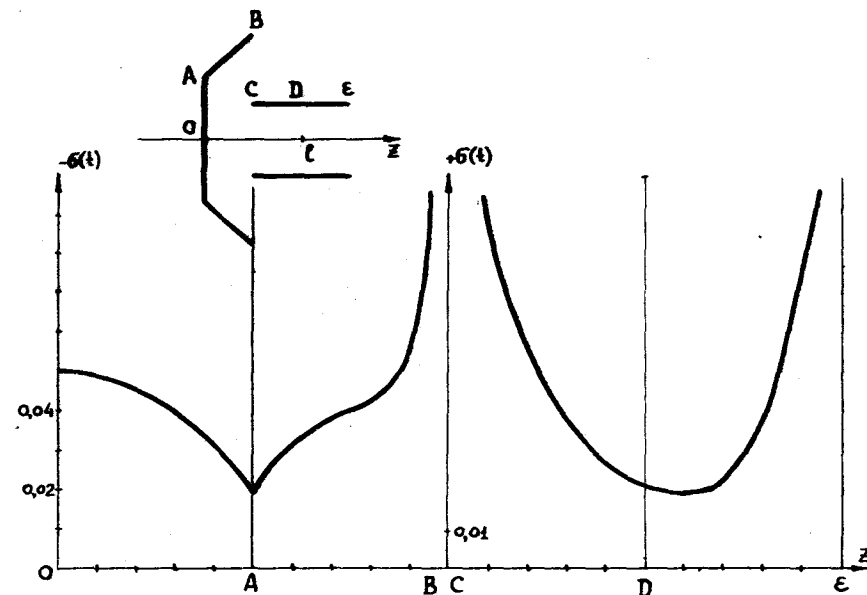


Рис. 9

Конус с цилиндром. Распределение плотности b .
 $a=b=c=d=1$, $\ell=2$, $R=\frac{1}{2}$, $\varphi_1=\frac{\pi}{4}$, $\varphi_2=0$, $\alpha=\beta=0$.

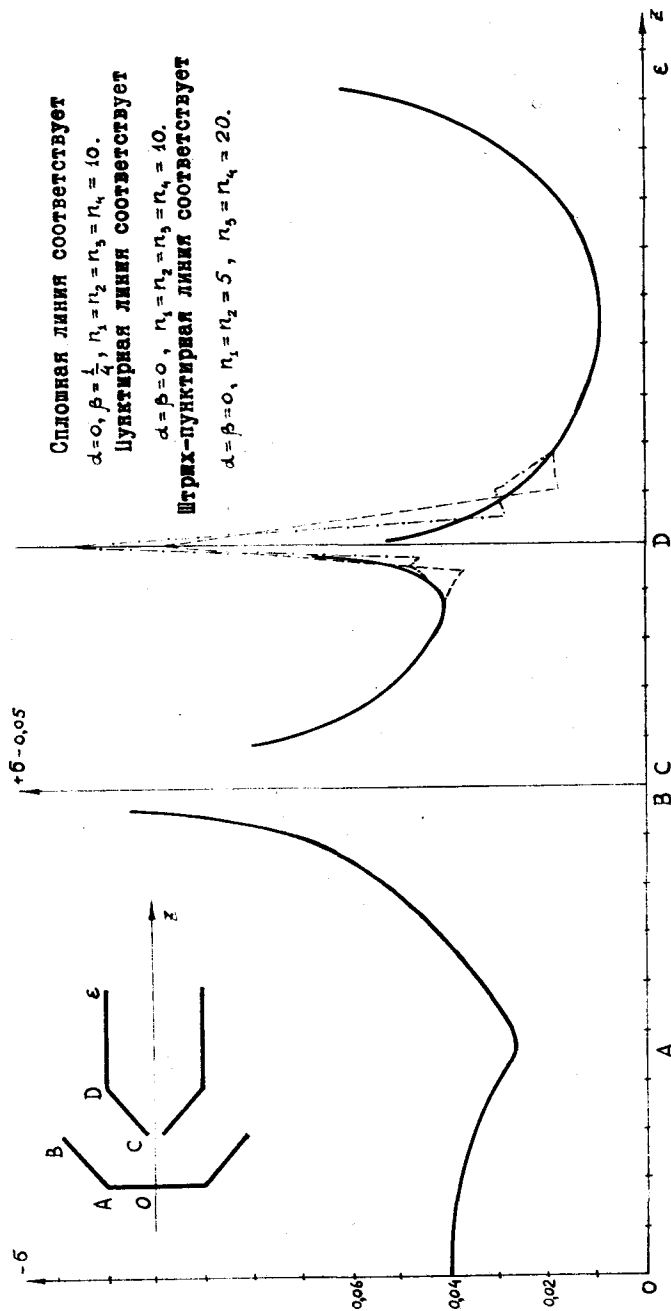


Рис. 10
 Два конуса. Распределение плотности ϵ .
 $R=1, \alpha=\beta=C=1, d=2, \ell=2, \varphi_1=\varphi_2=\frac{\pi}{4}$

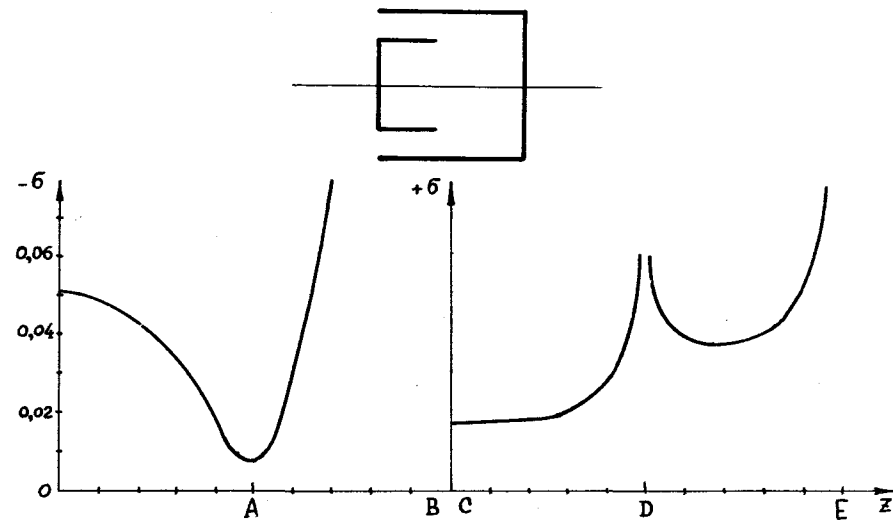


рис. 11

Плотность ϵ на поверхности "стаканчиков".

B												A
2720	2680	2679	2628	2448	2073	1556	1088	722	466	278	129	
5366	5824	5916	5858	5584	4717	3316	2214	1465	946	565	265	
D						ε 4917	3204	2128	1383	831	390	
I000	9905	9768	9519	8972	7619	5539	3843	2624	1732	1050	496	
I000	9816	9561	9138	8393	7182	5640	4158	2936	1973	1209	573	
I000	9788	9428	8919	8124	6998	5647	4293	3099	2110	1323	620	
I000	9734	9382	8849	8045	6944	5648	4330	3149	2159	1334	634	C

рис. 12

Распределение потенциала в поле "стаканчиков".

$$\alpha=7, \beta=12, c=4, d=5, \ell=-12, R=4, \varphi_1=-\frac{\pi}{2}, \varphi_2=\frac{\pi}{2}, \alpha=0, \beta=\frac{1}{4}.$$