

**ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ОСНОВНЫХ ПЛОСКИХ СТАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ
ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ С УГЛАМИ**

В.Г. Романов

В статье рассматривается численное решение интегральных уравнений, полученных в книге [19], в предположении, что контур области, для которой решается плоская задача, имеет угловые точки, а заданные граничные функции содержат разрывы более сильные, по сравнению с рассмотренными в [19]. Разработан алгоритм приближенного решения интегральных уравнений, основанный на их приведении к системе конечного числа линейных алгебраических уравнений. Этот алгоритм позволяет практически построить стандартную программу для численного решения плоских задач на электронных машинах. В качестве примера приводится решение первой основной задачи для прямоугольной области.

Статья построена по следующему плану. В § I дается постановка плоской задачи теории упругости, приводится интегральное уравнение для первой и второй задач (терминология Н.И. Мусхелишвили) теории упругости. В § 2 исследуется поведение правой части этого интегрального уравнения при больших значениях аргумента. Основным результатом § 3 является получение асимптотического решения интегрального уравнения при больших значениях аргумента. Аналогичный вопрос был рассмотрен в книге [19], в этой статье он решается при более общих предположениях относительно граничных условий. Численное решение интег-

ральных уравнений первой и второй задач теории упругости сводится в § 4 к решению системы линейных алгебраических уравнений. В § 5 рассмотрены два примера численного решения интегрального уравнения первой задачи теории упругости для прямоугольной области. Результаты расчетов представлены в виде графиков. В § 6 исследуется задача о температурных деформациях пластинки, на которую напыляется тонкая пленка. Эта задача возникла в связи с разработкой технологии производства элементов новых вычислительных систем высокой производительности. Ее решение оказывается возможным по численному методу, разработанному в данной статье.

**§ I. Постановка задачи плоской теории упругости.
Приведение к интегральному уравнению**

Следуя Н.И. Мусхелишвили [22], будем искать функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, аналитические внутри области D комплексного переменного $z = x + iy$ и на контуре L удовлетворяющие условию:

$$z\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} = g(z). \quad (I, I)$$

Здесь z — некоторая постоянная. Если решается первая основная задача теории упругости, когда на площадках контура с нормалью n заданы напряжения $X_n(t)$ и $Y_n(t)$ как функции длины дуги t , то $z = -i$ и

$$g(t) = -i \int_0^t [X_n(t) + iY_n(t)] dt.$$

Для второй основной задачи, когда на контуре L заданы проекции перемещения точек контура $u(t)$ и $v(t)$ на оси x и y соответственно, то $z = 3 - 4\nu$, а

$$g(t) = 2\mu[u(t) + i v(t)],$$

где ν — постоянная Пуассона и μ — модуль сдвига, известные для каждого конкретного материала. Будем предполагать, что известна функция $z = \omega(s)$, отображающая область D на правую полуплоскость плоскости комплексного переменного $s = \sigma + i\tau$.

Пусть граница области D имеет n угловых точек z_k , $k = 1, 2, \dots, n$, соответственно с величиной угла $\pi\alpha_k$, а положение каждой угловой точки относительно координатных осей определяется углом γ_k между осью абсцисс и биссектрисой угла в точке z_k . При отображении области D на правую по-

луплоскость точки контура z_k переходят в некоторые точки мнимой оси $s_k = i\tau_k$. Отображающая функция $\omega(s)$ вблизи точки s_k может быть представлена в виде:

$$\omega(s) = z_k + (s - s_k)^{m_k} [\alpha_0 e^{i\gamma_k} + \beta_k(s)], \quad (I,2)$$

где α_0 — некоторое действительное число и

$$\frac{\beta_k(s)}{(s - s_k)^{m_k}} \xrightarrow{s \rightarrow s_k} 0.$$

Для областей, ограниченных кусочно-прямолинейным контуром, $\omega(s)$ при $s \rightarrow s_k$ имеет вид:

$$\omega(s) = z_k + (s - s_k)^m \left[\alpha_0 e^{i\gamma_k} + \sum_{j=1}^{\infty} b_j (s - s_k)^j \right]. \quad (I,3)$$

Поместим начало координат в плоскости z на контуре области D в неугловой точке и пусть отображающая функция переводит начало координат в точку $s = \infty$. Граничное условие, (I,1) переходит при отображении в условие на мнимой оси:

$$x \Phi(i\tau) - \alpha(\tau) \overline{\Phi'(i\tau)} - \overline{\Psi(i\tau)} = f(\tau), \quad (I,4)$$

где введены следующие обозначения:

$$\Phi(s) = \varphi(\omega(s)), \quad \Psi(s) = \psi(\omega(s)) + \frac{\gamma(s)}{\omega'(s)} \Phi'(s) + g(\omega(\infty)),$$

$$f(\tau) = g(\omega(i\tau)) - g(\omega(\infty)), \quad \alpha(\tau) = \frac{\omega(i\tau) - \overline{\gamma(i\tau)}}{\omega'(i\tau)}. \quad (I,5)$$

Функция $\gamma(s)$ предполагается регулярной в правой полуплоскости и такой, что $\alpha(\tau)$ есть непрерывная, дифференцируемая функция и, кроме того [19]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\alpha(\tau)|^2 d\tau < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\alpha'(\tau)|^2 d\tau < \infty$$

Пусть $\Phi(\infty) = 0$. Так как $\Phi(s)$ — функция регулярная в правой полуплоскости, то её можно представить интегралом Лапласа

$$\Phi(s) = \int_0^{\infty} u(x) e^{-sx} dx.$$

При приведенных выше предположениях, в работе [19] для

функции $u(x)$ получено и исследовано следующее интегральное уравнение:

$$x u(x) + \int_0^{\infty} K(x+y) \overline{u(y)} dy = F(x), \quad (I,6)$$

где

$$K(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\tau) e^{i\tau t} d\tau, \quad F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{i\tau x} d\tau.$$

Это интегральное уравнение при наличии у контура L угловых точек не является уравнением Фредгольма, а принадлежит к уравнениям типа Карлемана. Однако при отсутствии угловых точек оно становится уравнением Фредгольма второго рода. В работе [19] выяснено, что при определенных условиях для уравнения (I,6) справедлива альтернатива Фредгольма.

§ 2. О поведении функции $F(x)$ при $x \rightarrow \infty$.

В этом параграфе рассматривается вопрос о поведении функции $F(x)$ при больших значениях аргумента в зависимости от конкретного вида особенностей, которыми может обладать заданная на границе области функция $g(z)$. При этом используются известные сведения о поведении интегралов Фурье при $x \rightarrow \infty$ [25].

Функция $F(x)$ является преобразованием Фурье функции $f(\tau)$. Как известно, преобразование Фурье обладает тем свойством, что все нарушения регулярности функции $f(\tau)$ в некоторой конечной точке $\tau = \tau_\lambda$ сказываются на поведении функции $F(x)$ при $x \rightarrow \infty$. Допустим, например, что мы имеем первую основную задачу теории упругости. Тогда

$$g(t) = -i \int_0^t [X_n(t) + iY_n(t)] dt.$$

Если заданные на площадках контура L компоненты напряжения $X_n(t)$ и $Y_n(t)$ имеют разрыв первого рода в некоторой неугловой точке контура z_λ , то функция $f(\tau)$ в соответствующей точке $\tau = \tau_\lambda$ имеет разрыв первого рода в производной. Если $X_n(t)$ и $Y_n(t)$ имеют в этой точке разрыв второго рода вида $b_\lambda (t - t_\lambda)^{-\mu_\lambda}$, то производная функции $f(\tau)$ при $\tau \rightarrow \tau_\lambda$ будет иметь вид: $c_\lambda (\tau - \tau_\lambda)^{-\mu_\lambda}$ (b_λ и c_λ — постоянные). Преобразование Фурье функции $f(\tau)$, как нетрудно убедиться, будет иметь при $x \rightarrow \infty$ вид соответственно: в первом слу-

чае $a_\lambda x^2 e^{i\tau_\lambda x}$, во втором $d_\lambda x^{-(1+\lambda)} e^{i\tau_\lambda x}$ (a_λ и d_λ постоянные). Вообще, если функция $f(\tau)$ имеет в некоторой точке τ_λ конечный разрыв в производной $l-1$ порядка, а все производные до порядка $l-2$ включительно непрерывны, то функция $F(x) \rightarrow f_\lambda x^{-l} e^{i\tau_\lambda x}$ при $x \rightarrow \infty$.

До сих пор мы предполагали точку z_λ неугловой точкой контура. Однако, если напряжения на контуре или перемещения точек контура заданы вплоть до угловых точек так, что в окрестности угловой точки они отличны от нуля, то функция $f(\tau)$ имеет в точках τ_k , соответствующих угловым точкам, нарушение регулярности и, следовательно, функция $F(x)$ при $x \rightarrow \infty$ будет иметь ещё слагаемые вида $\frac{c_k e^{i\tau_k x}}{x^{1+\beta_k}}$, где $\beta_k \geq 0$. В первой основной задаче представляет также интерес случай, когда на контуре области в некоторой точке z_λ , которая может быть и угловой точкой, действует сосредоточенная сила $P e^{i\tau_\lambda}$, где τ_λ — угол между прямой, по которой действует сила, и осью абсцисс. Тогда функция $f(\tau)$ при $\tau \rightarrow \tau_\lambda$ будет иметь вид:

$$f(\tau) = \begin{cases} f(\tau_\lambda) + P e^{i(\tau_\lambda - \frac{\pi}{2})} & , \tau \geq \tau_\lambda \\ f(\tau_\lambda) + \beta(\tau) & , \tau < \tau_\lambda \end{cases}$$

где $\beta(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \tau_\lambda$. В этом случае

$$F(x) \sim \frac{P}{2\pi} \frac{e^{i(\tau_\lambda x + \frac{\pi}{2})}}{x}$$

Во второй основной задаче функция $f(\tau)$ не может иметь разрыва, так как это означало бы, что смещения точек контура испытывают разрыв, а это противоречит основному положению теории упругости о сплошности материала. Следовательно, разрыв могут иметь только некоторые производные функции $f(\tau)$. Поведение функции $F(x)$ при больших значениях аргумента определяется аналогично случаю первой задачи.

§ 3. Асимптотическое решение уравнения (I,6) при больших значениях аргумента

Целью настоящего параграфа является получение асимптотического решения интегрального уравнения (I,6) при больших значениях аргумента. Для этого используются асимптотическая фор-

мула для ядра интегрального уравнения и результаты предыдущего параграфа о поведении правой части уравнения при наличии у функции $f(\tau)$ точек нарушения регулярности. Функция $f(\tau)$ допускает разрывы производной первого и второго рода в конечном числе точек, среди которых могут быть и угловые точки τ_k .

В работе [19] показано, что функция $K(t)$, входящая в ядро интегрального уравнения при наличии n угловых точек имеет асимптотику

$$K(t) \sim -\frac{1}{t^2} \sum_{k=1}^n \frac{\sin \pi m_k}{\pi m_k} e^{i(\tau_k t + \frac{\pi}{2} m_k)} \quad (3,1)$$

и, следовательно, состоит из сумм n колеблющихся функций. Решать интегральное уравнение (I,6) непосредственно, получившим широкое распространение методами итераций или путем сведения к системе линейных алгебраических уравнений, получающихся при замене интеграла некоторой квадратурной суммой, нецелесообразно. Метод итераций приводит к необходимости вычислять большое количество интегралов, так как уравнение имеет бесконечный верхний предел и колеблющееся решение. При этом, чтобы получить удовлетворительную точность, необходимо заменить бесконечный предел интегрирования достаточно большим числом α , исходя из того, что ошибка, получающаяся при отбрасывании интеграла по интервалу (α, ∞) , как показано в работе [19], будет порядка $\frac{1}{\alpha}$. По аналогичным причинам нельзя воспользоваться и методом сведения к системе линейных алгебраических уравнений, так как система при этом получилась бы большого порядка.

В силу изложенного, чтобы предложить метод численного решения уравнения (I,6), мы рассмотрим вопрос о приближенном решении этого уравнения при больших значениях аргумента. Это позволит нам в дальнейшем получить для определения функции $u(x)$ систему линейных алгебраических уравнений сравнительно невысокого порядка. Полученная система будет давать решение с достаточно высокой для задач теории упругости точностью. Вопрос о приближенном решении уравнения (I,6) был рассмотрен в книге [19] в предположении, что производная функции $f(\tau)$ имеет разрывы второго рода в неугловых точках контура. Мы здесь рассмотрим случай, когда производная функции $f(\tau)$ имеет разрывы первого и второго рода в некоторых точках τ_λ , причём разрыв допускается и в угловой точке.

Как было выяснено в § 2, правая часть $F(x)$ при $x \rightarrow \infty$

имеет слагаемые вида $A_j e^{i\tau_j x} x^{-(1+\mu_j)}$, где $\mu_j \neq 0$, во-первых, за счёт наличия у контура области угловых точек и, во-вторых, за счёт нарушения регулярности в неугловых точках функции $f(\tau)$. Естественно, что решение интегрального уравнения будет содержать при $x \rightarrow \infty$ подобные же слагаемые. Поэтому уравнение (I,6) относительно функции $u(x)$ полезно заменить уравнением:

$$x u(x) + \int_0^\infty K(x+y) \overline{v(y)} dy = f(x), \quad (3,2)$$

где

$$v(x) = u(x) - \frac{1}{x} F(x), \\ f(x) = -\frac{1}{x} \int_0^\infty y K(x+y) \overline{F(y)} dy.$$

При такой замене асимптотическая формула для функции $f(x)$ при $x \rightarrow \infty$ будет иметь слагаемые вышеуказанного типа только за счёт наличия у контура L угловых точек. Действительно, пусть при $x \rightarrow \infty$ функция $F(x)$ имеет вид:

$$F(x) \sim \sum_{j=1}^m \frac{A_j e^{i\tau_j x}}{x^{1+\mu_j}} + \frac{1}{x^2} \sum_{\ell=1}^M B_\ell e^{i\tau_\ell x}. \quad (3,3)$$

($0 < \mu_j < 1$)

При решении первой основной задачи некоторые из μ_j могут быть равными нулю (Этот случай будет рассмотрен в дальнейшем на конкретном примере (см. § 5)). Будем предполагать, что некоторые из τ_j могут совпадать с τ_k (т.е. с точками, соответствующими угловым точкам контура), а $\tau_\ell \neq \tau_k$ ни при каких ℓ и k . Последнее ограничение, как будет показано ниже, не является существенным. Найдем в этом предположении асимптотическую формулу для функции $f(x)$. При больших x мы можем воспользоваться формулой (3,1) для функции $K(x+y)$. Получаем, при $x \rightarrow \infty$:

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^n \frac{\sin \pi \mu_k}{\pi \mu_k} e^{i(\tau_k x + 2\delta_k)} \int_0^\infty \frac{y e^{i\tau_k y}}{(x+y)^2} \overline{F(y)} dy = \\ = \sum_{k=1}^n \frac{\sin \pi \mu_k}{\pi \mu_k} e^{i(\tau_k x + 2\delta_k)} \left[\overline{A_k} \int_0^\infty \frac{dy}{(x+y)^2 y^{\mu_k}} + \int_0^\infty \frac{y e^{i\tau_k y}}{(x+y)^2} \left[\overline{F(y)} - \frac{\overline{A_k} e^{i\tau_k y}}{y^{1+\mu_k}} \right] dy \right].$$

Первый из интегралов, стоящих в квадратных скобках, вычисляется в явном виде. Он равен $\frac{\pi \mu_k}{\sin \pi \mu_k} x^{-(1+\mu_k)}$. Во втором интеграле вынесем из-под знака интеграла множитель $\frac{1}{x^2}$ и пе-

рейдём в интеграле к пределу при $x \rightarrow \infty$

$$\int_0^\infty \frac{y e^{i\tau_k y}}{(x+y)^2} \left[\overline{F(y)} - \frac{\overline{A_k} e^{i\tau_k y}}{y^{1+\mu_k}} \right] dy \sim \frac{1}{x^2} \int_0^\infty y e^{i\tau_k y} \left[\overline{F(y)} - \frac{\overline{A_k} e^{i\tau_k y}}{y^{1+\mu_k}} \right] dy$$

Итак, для функции $f(x)$ имеем следующую асимптотику:

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^n \frac{\sin \pi \mu_k}{\pi \mu_k} e^{i(\tau_k x + 2\delta_k)} \left[\frac{\overline{A_k}}{x^{1+\mu_k}} \frac{\pi \mu_k}{\sin \pi \mu_k} + \frac{1}{x^2} \int_0^\infty y e^{i\tau_k y} \left[\overline{F(y)} - \frac{\overline{A_k} e^{i\tau_k y}}{y^{1+\mu_k}} \right] dy \right], \quad (3,4)$$

Вернемся теперь к случаю, когда некоторые из τ_ℓ могут совпадать с τ_k . Пусть

$$F(x) = F_1(x) + \frac{1}{x^2} \sum_{k=1}^n B_k e^{i\tau_k x}, \quad (3,5)$$

$x \rightarrow \infty$

причём функция $F_1(x)$ имеет вид (3,3). Введём, вместо функции $u(x)$, функцию

$$u_1(x) = u(x) - \sum_{j=1}^n c_j e^{-\delta_j x}, \quad (3,6)$$

где δ_j — любые положительные числа, не равные между собой, а c_j — некоторые неизвестные постоянные, которые мы подберём так, чтобы в правой части интегрального уравнения относительно функции $u_1(x)$ не было членов вида $\frac{1}{x^2} e^{i\tau_k x}$. Подставив выражение для $u(x)$ из формулы (3,6) в уравнение (I,6), получим:

$$x u_1(x) + \int_0^\infty y K(x+y) \overline{u_1(y)} dy = F_2(x), \quad (3,7)$$

где

$$F_2(x) = F(x) - x \sum_{j=1}^n c_j e^{-\delta_j x} - \sum_{j=1}^n \overline{c_j} \int_0^\infty y e^{-\delta_j y} K(x+y) dy.$$

Воспользуемся при $x \rightarrow \infty$ формулой (3,1). Тогда функцию $F_2(x)$ можно записать так:

$$F_2(x) = F_1(x) - x \sum_{j=1}^n c_j e^{-\delta_j x} + \frac{1}{x^2} \sum_{k=1}^n B_k e^{i\tau_k x} + \sum_{k=1}^n \frac{\sin \pi \mu_k}{\pi \mu_k} e^{i(\tau_k x + 2\delta_k)} \sum_{j=1}^n \overline{c_j} \int_0^\infty \frac{y e^{-(\delta_j + i\tau_k)y}}{(x+y)^2} dy.$$

Нетрудно убедиться, что последние два члена в этом выражении одного порядка. Действительно,

$$\int_0^\infty \frac{y e^{-(\tau_k - \delta_j)y}}{(x+y)^2} dy \sim \frac{1}{x^2} \int_0^\infty y e^{-(\delta_j + i\tau_k)y} dy = \frac{1}{x^2} \frac{1}{(-\delta_j + i\tau_k)^2}.$$

$x \rightarrow \infty$

Для определения постоянных C_j получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^n \bar{C}_j \frac{1}{(-\delta_j + i\tau_k)^2} = B_k e^{-2i\delta_k} \frac{\pi m_k}{\sin \pi m_k} \quad (\kappa = 1, 2, 3, \dots, n)$$

Определитель этой системы отличен от нуля, поэтому из нее можно найти все C_j . Определив таким образом C_j , мы получим, что $F_2(x)$ при $x \rightarrow \infty$ будет иметь вид (3,3). Как видно из формулы (3,6), при $x \rightarrow \infty$ функция $u_1(x)$ будет очень близка к функции $u(x)$.

Рассмотрим теперь вопрос о приближенном решении уравнения (3,2) при больших значениях x . Для этого, как и в работе [19] зададим большое положительное число a и будем считать, что функция $v(x)$ при $0 \leq x \leq a$ известна. Воспользуемся при $x \geq a$ формулой (3,1). Для определения функции $v(x)$ при $x \geq a$ получаем интегральное уравнение

$$x v(x) - \sum_{k=1}^n \frac{\sin \pi m_k}{\pi m_k} \int_a^\infty \frac{y e^{i[\tau_k(x+y)+2\delta_k]}}{(x+y)^2} \bar{v}(y) dy = \\ = \sum_{k=1}^n \frac{\sin \pi m_k}{\pi m_k} \left[x^{-1} \int_0^\infty \frac{y e^{i[\tau_k(x+y)+2\delta_k]}}{(x+y)^2} F(y) dy + \int_0^a \frac{y e^{i[\tau_k(x+y)+2\delta_k]}}{(x+y)^2} \bar{v}(y) dy \right]. \quad (3,8)$$

Функцию $v(x)$ при $x \geq a$ представим в виде:

$$v(x) = \sum_{j=1}^n e^{i(\tau_j x + \delta_j)} v_j(x), \quad a \leq x < \infty. \quad (3,9)$$

Обозначим

$$\frac{\sin \pi m_k}{\pi m_k} = b_k.$$

Из уравнения (3,8) получаем относительно функций $v_j(x)$ систему интегральных уравнений

$$v_k(x) - b_k \sum_{j=1}^n e^{i(\tau_k - \tau_j)x} \int_a^\infty \frac{y e^{i(\tau_k - \tau_j)y}}{(x+y)^2} \bar{v}_j(y) dy = f_k(x), \quad (3,10)$$

$$(\kappa = 1, 2, \dots, n) \quad a \leq x < \infty$$

где

$$f_k(x) = b_k e^{2i\delta_k} \left[\frac{1}{x} \int_0^\infty \frac{y e^{i\tau_k y}}{(x+y)^2} F(y) dy + \int_0^a \frac{y e^{i\tau_k y}}{(x+y)^2} \bar{v}(y) dy \right].$$

Оценим порядок каждого из интегралов, входящих в систему уравнений (3,10), предполагая, что при больших x функция $v_k \sim \frac{C_k}{x^{1+\alpha_k}}$, где $0 < \alpha_k < 1$. Из дальнейшего будет видно, что это предположение вполне оправдано. При $x \rightarrow \infty$, если $\tau_k \neq \tau_j$:

$$\int_a^\infty \frac{y \bar{v}_j(y) e^{i(\tau_k - \tau_j)y}}{(x+y)^2} dy \sim \bar{C}_j \int_a^\infty \frac{e^{i(\tau_k - \tau_j)y}}{(x+y)^2 y^{\alpha_j}} dy \sim \frac{\bar{C}_j}{x^2} \int_a^\infty \frac{e^{i(\tau_k - \tau_j)y}}{y^{\alpha_j}} dy.$$

Для последнего интеграла получаем, интегрируя по частям, следующее соотношение:

$$\left| \int_a^\infty \frac{e^{i(\tau_k - \tau_j)y}}{y^{\alpha_j}} dy \right| = \left| \frac{e^{i(\tau_k - \tau_j)a}}{-i(\tau_k - \tau_j)a^{\alpha_j}} + \frac{\alpha_j}{i(\tau_k - \tau_j)} \int_a^\infty \frac{e^{i(\tau_k - \tau_j)y}}{y^{1+\alpha_j}} dy \right| \leq \\ \leq \frac{1}{|\tau_k - \tau_j| a^{\alpha_j}} + \frac{\alpha_j}{|\tau_k - \tau_j|} \int_a^\infty \frac{dy}{y^{1+\alpha_j}} = \frac{2}{|\tau_k - \tau_j| a^{\alpha_j}}.$$

При $\tau_j = \tau_k$ получаем:

$$\int_a^\infty \frac{y \bar{v}_k(y)}{(x+y)^2} dy \sim \bar{C}_k \int_a^\infty \frac{dy}{(x+y)^2 y^{\alpha_k}} = \bar{C}_k \left[\int_0^\infty \frac{dy}{(x+y)^2 y^{\alpha_k}} - \int_0^a \frac{dy}{(x+y)^2 y^{\alpha_k}} \right] \sim \\ \sim \bar{C}_k \left[\frac{1}{x^{1+\alpha_k}} \frac{\pi \alpha_k}{\sin \pi \alpha_k} - \frac{1}{x^2} \frac{\alpha^{1-\alpha_k}}{1-\alpha_k} \right].$$

Из приведенных оценок видно, что $\int_a^\infty \frac{y e^{i(\tau_k - \tau_j)y}}{(x+y)^2} \bar{v}_j(y) dy$ при больших x , если только $\tau_k \neq \tau_j$, есть малая величина порядка $\frac{1}{x^2}$, причём коэффициент при $\frac{1}{x^2}$ представляет по отношению к другому коэффициенту при $\frac{1}{x^2}$, а именно к $\bar{C}_k \frac{\alpha^{1-\alpha_k}}{1-\alpha_k}$ величину порядка $\epsilon_{kj} = \frac{2|C_j|(1-\alpha_k)}{|C_k||\tau_j - \tau_k| \alpha^{1-\alpha_k+\alpha_j}}$. При достаточно большом значении параметра a можно пренебречь интегралом $\int_a^\infty \frac{y e^{i(\tau_k - \tau_j)y}}{(x+y)^2} \bar{v}_j(y) dy$, совершая относительную погрешность в членах порядка $\frac{1}{x^2}$, не превышающую ϵ_{kj} . Общая относительная погрешность для k -го уравнения в членах порядка $\frac{1}{x^2}$, получаемая при отбрасывании всех интегралов подобного вида, не превосходит $\epsilon_k = \sum_{j=1}^n \epsilon_{kj}$ ($j \neq k$). Следовательно, при $x \geq a$ можно приближенно вместо системы (3,10) рассматривать отдельно n не связанных между собой уравнений:

$$v_k(x) - b_k \int_a^\infty \frac{y \bar{v}_k(y)}{(x+y)^2} dy = f_k(x). \quad (3,11)$$

Правая часть k -го уравнения (3,11), как нетрудно видеть из

формулы (3,4), имеет при $x \rightarrow \infty$ вид:

$$\left. \begin{aligned} f_k(x) &\sim \frac{B_k}{x^{1+\mu_k}} + \frac{D_k}{x^2} \quad 0 < \mu_k < 1, \\ B_k &= \frac{\bar{A}_k e^{i\gamma_k}}{2} \frac{\pi \mu_k}{\sin \pi \mu_k} \zeta_k, \end{aligned} \right\} (3,12)$$

$$D_k = \zeta_k e^{i\gamma_k} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty y e^{i\gamma_k y} \left[\bar{F}(y) - \frac{A_k e^{i\gamma_k y}}{y^{1+\mu_k}} \right] dy + \int_0^a y \bar{v}(y) e^{i\gamma_k y} dy \right\}$$

Задача решения интегрального уравнения (3,11), как указано в работе [19], приводится к решению неоднородной задачи Римана-Гильберта. Там же показано следующее: если правая часть уравнения (3,11) имеет порядок $\frac{1}{x^2}$, то $v_k(x) \sim \frac{C_k}{x^{1+\beta_k}}$ при $x \rightarrow \infty$ где β_k - наименьший корень уравнения

$$\frac{\sin \pi \beta}{\pi \beta} = |\zeta_k|, \quad (3,13)$$

а C_k - некоторая комплексная постоянная. В нашем случае $f_k(x) \sim \frac{B_k}{x^{1+\mu_k}}$, поэтому аналогичный вывод был бы несправедлив. Введём вместо функции $v_k(x)$ следующие две функции:

$$\chi_k(x) = \frac{1}{2} [v_k(x) + \bar{v}_k(x) \operatorname{sgn} \zeta_k], \quad (3,14)$$

$$\zeta_k(x) = \frac{1}{2} [v_k(x) - \bar{v}_k(x) \operatorname{sgn} \zeta_k].$$

Отсюда

$$v_k(x) = \chi_k(x) + \zeta_k(x). \quad (3,15)$$

Для функций $\chi_k(x)$ и $\zeta_k(x)$ получаем интегральные уравнения:

$$\chi_k(x) - |\zeta_k| \int_a^\infty \frac{y \chi_k(y)}{(x+y)^2} dy = \frac{1}{2} [f_k(x) + \bar{f}_k(x) \operatorname{sgn} \zeta_k], \quad (3,16)$$

$$\zeta_k(x) + |\zeta_k| \int_a^\infty \frac{y \zeta_k(y)}{(x+y)^2} dy = \frac{1}{2} [f_k(x) - \bar{f}_k(x) \operatorname{sgn} \zeta_k]. \quad (3,17)$$

Будем искать приближенное решение уравнения (3,17) в виде:

$$\zeta_k(x) = \frac{b_k}{x^{1+\mu_k}} \quad (3,18)$$

Подставим выражение для $\zeta_k(x)$ в уравнения (3,17) и приравняем в правой и левой части коэффициенты при $\frac{1}{x^{1+\mu_k}}$. Тогда

для определения постоянной b_k получаем:

$$b_k \left(1 + |\zeta_k| \frac{\pi \mu_k}{\sin \pi \mu_k} \right) = \frac{1}{2} (B_k - \bar{B}_k \operatorname{sgn} \zeta_k).$$

Так как выражение $1 + |\zeta_k| \frac{\pi \mu_k}{\sin \pi \mu_k}$ не равно нулю ни при каких $0 < \mu_k < 1$, то

$$b_k = \frac{B_k - \bar{B}_k \operatorname{sgn} \zeta_k}{2 \left(1 + |\zeta_k| \frac{\pi \mu_k}{\sin \pi \mu_k} \right)}. \quad (3,19)$$

При отыскании приближенного решения уравнения (3,16) важно знать, является ли μ_k корнем уравнения (3,13). Будем обозначать корень этого уравнения β_k . Рассмотрим вначале случай $\mu_k \neq \beta_k$. В этом случае приближенное решение уравнения (3,16) будем искать в виде:

$$\chi_k(x) = \frac{C_k}{x^{1+\beta_k}} + \frac{d_k}{x^{1+\mu_k}} \quad (0 < \beta_k < 1). \quad (3,20)$$

Подставляя в уравнение (3,16), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{C_k}{x^{1+\beta_k}} + \frac{d_k}{x^{1+\mu_k}} - |\zeta_k| \left[\frac{C_k}{x^{1+\beta_k}} \frac{\pi \beta_k}{\sin \pi \beta_k} + \frac{d_k}{x^{1+\mu_k}} \frac{\pi \mu_k}{\sin \pi \mu_k} \right] + \\ + |\zeta_k| \left[C_k \int_0^a \frac{dy}{(x+y)^2 y^{\beta_k}} + d_k \int_0^a \frac{dy}{(x+y)^2 y^{\mu_k}} \right] = \frac{1}{2} [f_k(x) + \bar{f}_k(x) \operatorname{sgn} \zeta_k]. \end{aligned} \quad (3,21)$$

Отсюда, приравнявая коэффициенты при $\frac{1}{x^{1+\mu_k}}$, получаем

$$d_k = \frac{B_k + \bar{B}_k \operatorname{sgn} \zeta_k}{2 \left[1 - |\zeta_k| \frac{\pi \mu_k}{\sin \pi \mu_k} \right]}. \quad (3,22)$$

Коэффициент при $\frac{1}{x^{1+\beta_k}}$ обращается в нуль, так как β_k - корень уравнения (3,13).

Для определения постоянной C_k воспользуемся методом моментов [18]. Для этого умножим обе части равенства (3,21) на $2x^{\beta_k}$ и проинтегрируем по x от a до $+\infty$. Тогда получаем:

$$2C_k |\zeta_k| R_k = \int_a^\infty x^{\beta_k} \left[f_k(x) - \frac{B_k}{x^{1+\mu_k}} + \left(\bar{f}_k(x) - \frac{\bar{B}_k}{x^{1+\mu_k}} \right) \operatorname{sgn} \zeta_k \right] dx - |\zeta_k| Q_k, \quad (3,23)$$

здесь

$$R_k = \int_a^\infty x^{\beta_k} \int_0^a \frac{dy}{(x+y)^2 y^{\beta_k}} dx = \int_0^a \frac{1}{y^{\beta_k}} \int_1^\infty \frac{x^{\beta_k} dx}{(x+y)^2} dy,$$

$$Q_k = \frac{B_k + \bar{B}_k \operatorname{sgn} \zeta_k}{1 - |\zeta_k| \frac{\pi \mu_k}{\sin \pi \mu_k}} \cdot \int_a^\infty x^{\beta_k} \int_0^a \frac{dy}{(x+y)^2 y^{\mu_k}} dx. \quad (3,24)$$

Из формулы (3,23) видно, что постоянная c_k является действительной или чисто мнимой в зависимости от того, является b_k положительным или отрицательным числом. Пусть теперь $\mu_k = \rho_k$. В этом случае будем искать приближенное решение уравнения (3,16) в виде:

$$\chi_k(x) = \frac{c_k + d_k \ln x}{x^{1+\rho_k}}.$$

Тогда, подставляя это выражение в (3,16), получаем

$$\begin{aligned} & \frac{c_k + d_k \ln x}{x^{1+\rho_k}} - |b_k| \left[\frac{c_k}{x^{1+\rho_k}} \frac{\pi \rho_k}{\sin \pi \rho_k} - d_k \frac{d}{d\rho_k} \left(\frac{1}{x^{1+\rho_k}} \frac{\pi \rho_k}{\sin \pi \rho_k} \right) \right] + \\ & + |b_k| \int_0^a \frac{c_k + d_k \ln y}{(x+y)^2 y^{\rho_k}} dy = \frac{1}{2} \left[f_k(x) + \overline{f_k(x)} \operatorname{sgn} \eta_k \right]. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при $\frac{1}{x^{1+\rho_k}}$, находим постоянную d_k . Так как выражение $\frac{d}{d\rho_k} \left(\frac{\pi \rho_k}{\sin \pi \rho_k} \right)$ не обращается в нуль ни при каких $0 < \rho_k < 1$,

$$d_k = \frac{b_k + \overline{b_k} \operatorname{sgn} \eta_k}{2 |b_k| \frac{d}{d\rho_k} \left(\frac{\pi \rho_k}{\sin \pi \rho_k} \right)}. \quad (3,25)$$

Коэффициент при $\frac{\ln x}{x^{1+\rho_k}}$ обращается в нуль. Для определения постоянной c_k получаем, аналогично предыдущему, выражение (3,23), в котором Q_k вычисляется по формуле

$$Q_k = \frac{b_k + \overline{b_k} \operatorname{sgn} \eta_k}{|b_k| \frac{d}{d\rho_k} \left(\frac{\pi \rho_k}{\sin \pi \rho_k} \right)} \int_a^\infty \int_0^a \frac{\ln y dy}{(x+y)^2 y^{\rho_k}} dx \quad (3,26)$$

Из формулы (3,15) находим приближенное решение для функции

$$v_k(x) = \frac{b_k + d_k}{x^{1+\mu_k}} + \frac{c_k}{x^{1+\rho_k}}, \quad (3,27)$$

если $\mu_k \neq \rho_k$; при этом постоянная d_k находится по формуле (3,22), а постоянная c_k по формулам (3,23) и (3,24). Если $\mu_k = \rho_k$, то приближенное решение определяется формулой:

$$v_k(x) = \frac{b_k + c_k}{x^{1+\rho_k}} + \frac{d_k \ln x}{x^{1+\rho_k}}, \quad (3,28)$$

причём, постоянная d_k определяется формулой (3,25), а постоянная c_k формулами (3,23) и (3,26).

Таким образом, объединяя все результаты в один, мы приходим к следующему заключению: если решение интегрального уравнения (3,2) известно на отрезке $0 \leq x \leq a$, то приближен-

ное решение при $x \geq a$ может быть найдено в виде:

$$v(x) = \sum_{k=1}^n e^{i(\tau_k x + \delta_k)} \left[\frac{c_k}{x^{1+\rho_k}} + \frac{f_k}{x^{1+\mu_k}} + \frac{g_k \ln x}{x^{1+\rho_k}} \right], \quad (3,29)$$

где постоянные f_k, g_k не зависят от решения интегрального уравнения по отрезку $0 \leq x \leq a$, причем постоянные g_k отличны от нуля только в том случае, если $\mu_k = \rho_k$. Постоянные c_k связаны с решением уравнения (3,2) на отрезке $0 \leq x \leq a$ по формуле (3,23). В этой формуле постоянная Q_k вычисляется по формуле (3,24), если $\mu_k \neq \rho_k$, или по формуле (3,26), если $\mu_k = \rho_k$.

§ 4. Приведение интегрального уравнения (3,2) к системе линейных алгебраических уравнений

Перейдем теперь к вопросу численного решения уравнения (3,2). Используя результаты § 3, можно вместо этого уравнения построить приближенное уравнение для функции $v(x)$. Для этого разобьем интеграл по отрезку $0 \leq x \leq \infty$ на два интеграла: один по отрезку $0 \leq x \leq a$ и второй по полубесконечному промежутку $a \leq x < \infty$. Во втором интеграле функцию $v(x)$ заменим приближенным выражением по формуле (3,29). Так как постоянные f_k и g_k не зависят от функции $v(x)$, то интеграл

$$\int_a^\infty K(x+y) e^{-i(\tau_k y + \delta_k)} \left[\frac{f_k}{y^{\mu_k}} + \frac{g_k \ln y}{y^{\rho_k}} \right] dy$$

известен и мы отнесём его в правую часть уравнения (3,2).

Вновь получившуюся таким образом функцию обозначим через $f_1(x)$.

$$f_1(x) = f(x) - \sum_{k=1}^n \int_a^\infty K(x+y) e^{-i(\tau_k y + \delta_k)} \left[\frac{f_k}{y^{\mu_k}} + \frac{g_k \ln y}{y^{\rho_k}} \right] dy.$$

Из уравнения (3,2) получаем на отрезке $0 \leq x \leq a$ приближенное уравнение с точностью до $\frac{1}{a^2}$:

$$x v(x) + \int_0^a y K(x+y) \overline{v(y)} dy + \sum_{k=1}^n \overline{c_k} \int_a^\infty K(x+y) e^{-i(\tau_k y + \delta_k)} \frac{dy}{y^{\rho_k}} = f_1(x). \quad (4,1)$$

Постоянные c_k выражаются через функцию $v(x)$ по формуле (3,23), поэтому уравнение (4,1) необходимо решать совместно с условиями (3,23).

Вспомнив, что

$$f_k(x) - \frac{b_k}{x^{1+\mu_k}} = b_k \left\{ \int_0^a \frac{y e^{i(\tau_k y + \delta_k)}}{(x+y)^2} \overline{v(y)} dy + \left[\frac{1}{x} \int_0^\infty \frac{y e^{i(\tau_k y + \delta_k)}}{(x+y)^2} \overline{F(y)} dy - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{b_k} \frac{b_k}{x^{1+\mu_k}} \right] \right\} = b_k \left\{ \int_0^a \frac{y e^{i(\tau_k y + \delta_k)}}{(x+y)^2} \overline{v(y)} dy + q_k(x) \right\},$$

где через $q_k(x)$ обозначено выражение, стоящее в квадратных скобках, условие (3,23) перепишем, переименовав порядок интегрирования, в следующем виде:

$$2c_k R_k = \int_0^a y \left[e^{i(\tau_k y + \delta_k)} \overline{v(y)} \operatorname{sgn} b_k + e^{-i(\tau_k y + \delta_k)} v(y) \right] \int_a^\infty \frac{x^{\beta_k} dx}{(x+y)^2} dy + \\ + \int_a^\infty x^{\beta_k} \left[q_k(x) \operatorname{sgn} b_k + \overline{q_k(x)} \right] dx - Q_k. \quad (4,2)$$

Для численного решения уравнения (4,1) разобьём отрезок $0 \leq x \leq a$ на $2m$ равных частей, точки деления обозначим x_j так, что $x_0 = 0, x_{2m} = a$. Интеграл по отрезку $0 \leq x \leq a$ заменим обобщённой квадратурной суммой Симпсона:

$$\int_0^a y K(x+y) \overline{v(y)} dy \approx \frac{a}{6m} \sum_{j=0}^{2m} \delta_j y_j K(x+y_j) \overline{v(y_j)}, \quad (4,3)$$

где

$$\delta_0 = \delta_{2m} = 1; \quad \delta_{2k-1} = 4 \quad (k=1, 2, \dots, m); \quad \delta_{2k} = 2 \quad (k=1, 2, \dots, m-1).$$

Подставим выражение (4,3) в уравнение (4,1) и потребуем, чтобы получившееся уравнение было точным в $2m+1$ точке $x_\ell \in [0, a]$. При этом получается система из $2m+1$ линейных алгебраических уравнений:

$$x v(x_\ell) + \frac{a}{6m} \sum_{j=0}^{2m} \delta_j y_j K(x_\ell + y_j) \overline{v(y_j)} + \sum_{k=1}^n c_k \int_a^\infty K(x_\ell + y) \frac{e^{-i(\tau_k y + \delta_k)}}{y^{\beta_k}} dy = \\ = f_1(x_\ell), \quad (\ell = 0, 1, \dots, 2m). \quad (4,4)$$

Для того чтобы получившаяся система была замкнутой относительно неизвестных $v(x_\ell)$ и c_k , необходимо к системе (4,4) добавить n условий для каждой из постоянных c_k . Для этого также заменим интеграл, входящий в условие (4,2), обобщённой

квадратурной суммой Симпсона. Тогда получаем:

$$\frac{a}{6m} \sum_{j=0}^{2m} \delta_j y_j \left[e^{i(\tau_k y_j + \delta_k)} \overline{v(y_j)} \operatorname{sgn} b_k + e^{-i(\tau_k y_j + \delta_k)} v(y_j) \right] \int_a^\infty \frac{x^{\beta_k} dx}{(x+y_j)^2} - \\ - 2c_k R_k = Q_k - \int_a^\infty x^{\beta_k} \left[q_k(x) \operatorname{sgn} b_k + \overline{q_k(x)} \right] dx \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (4,5)$$

Системы уравнений (4,4) и (4,5) образуют замкнутую систему линейных алгебраических уравнений. Заметим, что эта система получена из интегрального уравнения (3,2), но это уравнение при $|x| > 1$ не имеет собственных функций, следовательно, определитель системы при $|x| > 1$ и при достаточно большом числе m отличен от нуля, поэтому система может быть однозначно разрешена. В случае второй основной задачи теории упругости x всегда больше единицы, следовательно, решение её сводится к решению полученной системы.

По другому обстоит дело с первой основной задачей. В этом случае $x = -1$ и интегральное уравнение имеет собственную функцию $v_0(x)$, где C любое действительное число, а

$$v_0(x) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega(i\tau) e^{i\tau x} d\tau.$$

Определитель системы уравнений в этом случае будет близок к нулю. Однако при $x = -1$ оказывается возможным заменить уравнение (3,2) другим уравнением, которое не будет иметь собственной функции, но будет давать решение постоянной задачи.

Функция $v_0(x)$ удовлетворяет уравнению

$$-v_0(x) + \int_0^\infty y K(x+y) \overline{v_0(y)} dy = 0. \quad (4,6)$$

Рассмотрим наряду с уравнением (3,2) следующее интегральное уравнение:

$$-w(x) + \int_0^\infty y K(x+y) \overline{w(y)} dy + v_0(x) \operatorname{Re} \int_0^\infty v_0(y) \overline{w(y)} dy = f(x). \quad (4,7)$$

Докажем, что для него справедливо следующее утверждение: если главный момент всех внешних усилий, приложенных к контуру области, равен нулю, то

$$\operatorname{Re} \int_0^\infty v_0(y) \overline{w(y)} dy = 0 \quad (4,8)$$

Действительно, умножим уравнение (4,7) на $x \overline{v_0(x)}$, затем перейдем в этом уравнении к сопряженным значениям, умножим на $x v_0(x)$, сложим получившиеся результаты и проинтегрируем по x от 0 до ∞ . Получаем:

$$2 \operatorname{Re} \left[- \int_0^{\infty} v_0(y) \overline{w(y)} dy + \int_0^{\infty} x \overline{v_0(x)} \int_0^{\infty} y K(x+y) \overline{w(y)} dy dx \right] + \\ + 2 \int_0^{\infty} y v_0(y) \overline{v_0(y)} dy \cdot \operatorname{Re} \int_0^{\infty} v_0(y) w(y) dy = 2 \operatorname{Re} \int_0^{\infty} x v_0(x) \overline{f(x)} dx. \quad (4,9)$$

Рассмотрим в этом равенстве первые два слагаемые. Изменив в двойном интеграле порядок интегрирования и объединив два интеграла в один, получим

$$2 \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \overline{w(y)} \left[v_0(y) + \int_0^{\infty} x K(x+y) \overline{v_0(x)} dx \right] dy.$$

Так как функция $v_0(x)$ удовлетворяет уравнению (4,6), то выражение, стоящее в квадратных скобках, обращается в нуль и, следовательно, два первых интеграла в сумме дают нуль. Рассмотрим теперь интеграл, стоящий в правой части равенства. Вспомнив, что

$$f(x) = \int_0^{\infty} y K(x+y) \overline{F(y)} dy$$

и, изменив порядок интегрирования, получим:

$$2 \operatorname{Re} \int_0^{\infty} x v_0(x) \overline{f(x)} dx = 2 \operatorname{Re} \int_0^{\infty} y F(y) \int_0^{\infty} x K(x+y) \overline{v_0(x)} dx dy = \\ = 2 \operatorname{Re} \int_0^{\infty} y \overline{v_0(y)} F(y) dy.$$

При переходе к последнему выражению было использовано уравнение (4,6). Полученное выражение пропорционально главному моменту внешних усилий, заданных на контуре L . В самом деле, подставляя

$$v_0(x) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega(i\tau) e^{i\tau x} d\tau = -\frac{i}{2\pi x} \int_{-\infty}^{\infty} \omega'(i\tau) e^{i\tau x} d\tau$$

в это выражение, получаем:

$$2 \operatorname{Re} \int_0^{\infty} y \overline{v_0(y)} F(y) dy = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\omega'(i\tau)} \int_0^{\infty} F(y) e^{-i\tau y} dy d(i\tau) = \\ = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_L g(z) d\bar{z} = -\frac{1}{\pi} M,$$

где M — главный момент внешних усилий. Если главный момент равен нулю, то выражение, стоящее в правой части равенства (4,9), равно нулю и само равенство превращается в следующее:

$$\int_0^{\infty} y v_0(y) \overline{v_0(y)} dy \cdot \operatorname{Re} \int_0^{\infty} v_0(y) \overline{w(y)} dy = 0.$$

Отсюда, так как $\int_0^{\infty} y v_0(y) \overline{v_0(y)} dy \neq 0$, то должно быть выполнено равенство (4,8). Следовательно, высказанное утверждение справедливо.

Рассмотрим однородное уравнение

$$-w(x) + \int_0^{\infty} y K(x+y) \overline{w(y)} dy + v_0(x) \operatorname{Re} \int_0^{\infty} v_0(y) \overline{w(y)} dy = 0. \quad (4,10)$$

Правая часть этого уравнения удовлетворяет условию, при котором справедливо равенство (4,8), и уравнение (4,10) совпадает с уравнением (3,2) при $f(x) \equiv 0$. Решение уравнения (3,2) при $f(x) \equiv 0$ имеет вид $c v_0(x)$, где c — действительная постоянная. Значит, решение уравнения (4,10) будет иметь такой же вид. Определим постоянную c для этого уравнения. Подставляя $w(x) = c v_0(x)$ в условие (4,8), получим $c = 0$, так как интеграл $\int_0^{\infty} v_0(y) \overline{v_0(y)} dy$ отличен от нуля. Это означает, что однородное уравнение (4,10) имеет только нулевое решение. Если уравнение (4,7) является уравнением Фредгольма, то отсюда следует, в силу альтернативы Фредгольма, что это уравнение разрешимо при любой правой части. Как показано в работе [19], если односвязная область не имеет угловых точек, то уравнение (3,2) является уравнением Фредгольма. В этом случае уравнение (4,7) также является уравнением Фредгольма. При наличии у контура L угловых точек уравнение (4,7) уже не будет фредгольмовым, но при определенных условиях (см. [19]) для уравнения (3,2) и, следовательно, для уравнения (4,7) справедлива альтернатива Фредгольма, т.е. при выполнении этих условий уравнение будет разрешимо при любой функции $f(x)$. Если при этом главный момент усилий, приложенных к контуру L , равен нулю, то справедливо условие (4,8) и функция $w(x)$, являющаяся решением интегрального уравнения (4,7), дает решение уравнения (3,2). Для численного решения уравнения (4,7) поступаем так же, как и при решении уравнения (3,2): задаем большое положительное число a и разбиваем каждый из интегралов на два — один от 0 до a , другой от a до ∞ . Так как решение задачи обращает в нуль $\operatorname{Re} \int_0^{\infty} v_0(y) \overline{w(y)} dy$, то все выводы

о приближенном решении, сделанные в конце § 3 для функции $u(x)$ при $x \geq a$ полностью переносятся на функцию $w(x)$, т.е. для $w(x)$ имеет место формула (3,29). Заменяем, как и раньше, интегралы по отрезку $0 \leq x \leq a$ квадратурной суммой и потребуем, чтобы уравнение (4,7) после замены интегралов квадратурной суммой удовлетворялось в $2m+1$ точке $x_\ell \in [0, a]$. В результате получаем $2m+1$ уравнение относительно $w(x_\ell)$ и C_k :

$$-w(x_\ell) + \frac{a}{6m} \sum_{j=1}^{2m} \delta_j y_j K(x_\ell + y_j) \overline{w(y_j)} + v_0(x_\ell) \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{2m} \delta_j v_0(y_j) \overline{w(y_j)} + \sum_{k=1}^n \bar{C}_k \int_a^\infty K(x_\ell + y) \frac{e^{-i(\tau_k y + \gamma_k)}}{y^{\beta_k}} dy + v_0(x_\ell) \sum_{j=0}^{2m} \operatorname{Re} \left[\bar{C}_k \int_a^\infty \frac{e^{-i(\tau_k y + \gamma_k)}}{y^{1+\beta_k}} dy \right] = f_2(x_\ell), \quad (4,11)$$

$\ell = 0, 1, 2, \dots, 2m.$

где

$$f_2(x) = f(x) - \sum_{k=1}^n \int_a^\infty K(x+y) e^{-i(\tau_k y + \gamma_k)} \left[\frac{\bar{f}_k}{y^{\beta_k}} + \frac{\bar{g}_k \ln y}{y^{\beta_k}} \right] dy - \sum_{k=1}^n v_0(x) \operatorname{Re} \int_a^\infty v_0(y) e^{-i(\tau_k y + \gamma_k)} \left[\frac{\bar{f}_k}{y^{1+\beta_k}} + \frac{\bar{g}_k \ln y}{y^{1+\beta_k}} \right] dy.$$

Для того чтобы система была замкнутой, к уравнениям (4,11) необходимо добавить n уравнений (4,5), в которых неизвестные $u(x_\ell)$ должны быть заменены на $w(x_\ell)$. Полученная при этом система линейных алгебраических уравнений будет разрешимой, так как она получена из уравнения (4,7), которое разрешимо при любой правой части. Решив эту систему, найдем $w(x_\ell)$ и C_k , т.е. найдем приближенное решение интегрального уравнения (4,7).

Таким образом, в результате решения системы уравнений (4,4), (4,5) или системы (4,11), (4,5) мы получаем решение соответственно второй или первой основных задач теории упругости. Функция $\Phi(s)$ вычисляется после этого по формуле:

$$\Phi(s) = \int_0^\infty u(x) e^{-sx} dx \approx \frac{1}{s} \int_0^\infty F(x) e^{-sx} dx + \frac{a}{6m} \sum_{j=0}^{2m} \delta_j x_j v(x_j) e^{-sx_j} + \sum_{k=1}^n e^{i\gamma_k} \int_a^\infty \left[\frac{C_k + g_k \ln x}{x^{\beta_k+1}} + \frac{f_k}{x^{\beta_k+1}} \right] e^{-(s-i\tau_k)x} dx. \quad (4,12)$$

Для нахождения в какой-либо точке компонент напряжения необходимо знать также первую и вторую производные функции $\Phi(s)$.

Выпишем выражение для первой производной $\Phi'(s)$.

$$-\Phi'(s) = \int_0^\infty x u(x) e^{-sx} dx \approx \frac{1}{s} \int_0^\infty x F(x) e^{-sx} dx + \frac{a}{6m} \sum_{j=0}^{2m} \delta_j x_j v(x_j) e^{-sx_j} + \sum_{k=1}^n e^{i\gamma_k} \int_a^\infty \left[\frac{C_k + g_k \ln x}{x^{\beta_k}} + \frac{f_k}{x^{\beta_k}} \right] e^{-(s-i\tau_k)x} dx. \quad (4,13)$$

В последней формуле интегралы, имеющие бесконечный предел интегрирования, при некоторых значениях $s = \sigma + i\tau$ ($\sigma \geq 0$) расходятся. Так, например, последний интеграл в формуле (4,13) расходится при $s = i\tau_k$. Целесообразно поэтому выражение для $\Phi'(s)$ переписать в другом, более удобном для вычисления виде. Воспользуемся при $x \geq a$ формулой (3,3) и, кроме того, представим каждый интеграл типа $\int_a^\infty \frac{e^{-(s-i\tau_k)x}}{x^{\beta_k}} dx$ в виде разности двух интегралов, из которых первый вычисляется явно:

$$\int_a^\infty \frac{e^{-(s-i\tau_k)x}}{x^{\beta_k}} dx = (s-i\tau_k)^{\beta_k-1} \Gamma(\beta_k+1) - \int_0^a \frac{e^{-(s-i\tau_k)x}}{x^{\beta_k}} dx.$$

Для $\Phi'(s)$ получаем:

$$-\Phi'(s) = \frac{1}{s} \int_0^a x F(x) e^{-sx} dx - \frac{1}{s} \sum_{j=1}^m \left[A_j \int_0^a \frac{e^{-(s-i\tau_j)x}}{x^{\beta_j}} dx - A_j (s-i\tau_j)^{\beta_j-1} \Gamma(\beta_j+1) \right] + \frac{1}{s} \sum_{\ell=1}^M B_\ell \int_a^\infty \frac{e^{-(s-i\tau_\ell)x}}{x} dx + \frac{a}{6m} \sum_{j=0}^{2m} \delta_j x_j v(x_j) e^{-sx_j} + \sum_{k=1}^n e^{i\gamma_k} \left\{ C_k (s-i\tau_k)^{\beta_k-1} \Gamma(1-\beta_k) + \right. \\ \left. + i_j (s-i\tau_k)^{\beta_k-1} \Gamma(1-\beta_k) - g_k \frac{d}{d\beta_k} \left[(s-i\tau_k)^{\beta_k-1} \Gamma(1-\beta_k) \right] \right\} - \sum_{k=1}^n e^{i\gamma_k} \int_0^a \left[\frac{C_k + g_k \ln x}{x^{\beta_k}} + \frac{f_k}{x^{\beta_k}} \right] e^{-(s-i\tau_k)x} dx. \quad (4,14)$$

В этой формуле имеются расходящиеся интегралы только в одной сумме, а именно интегралы $\int_0^a \frac{e^{-(s-i\tau_k)x}}{x^{\beta_k}} dx$. Каждый такой интеграл расходится при $s = i\tau_k$. Рассмотрим, как он ведет себя при $s \rightarrow +0 + i\tau_k$. Для выяснения этого достаточно изучить поведение производной от этого интеграла в окрестности точки $i\tau_k$. При $\sigma > 0$ справедливо следующее равенство:

$$\frac{d}{ds} \int_0^a \frac{e^{-(s-i\tau_k)x}}{x^{\beta_k}} dx = - \int_0^a e^{-(s-i\tau_k)x} dx = - \frac{e^{-(s-i\tau_k)a}}{s-i\tau_k}.$$

Устремив в этом равенстве $s \rightarrow +0 + i\tau_k$, получаем:

$$\frac{d}{ds} \int_0^a \frac{e^{-(s-i\tau_k)x}}{x^{\beta_k}} dx \underset{s \rightarrow +0 + i\tau_k}{\sim} - \frac{1}{s-i\tau_k}.$$

Отсюда следует, что сам интеграл при $s \rightarrow +0 + i\tau_e$ имеет логарифмическую особенность. Используя формулу (3,14), находим $\Phi''(s)$:

$$\begin{aligned} \Phi''(s) = & \frac{1}{\pi} \int_0^a x^2 F(x) e^{-sx} dx + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^m A_j \left[(2-\mu_j)(s-s_j)^{-2\mu_j} - \int_0^a x^{\mu_j} e^{-(s-i\tau_j)x} dx \right] + \\ & + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^M B_k e^{\frac{(s-i\tau_k)a}{s-i\tau_k}} + \frac{a}{6m} \sum_{j=0}^{2m} \delta_j x_j^2 v(x_j) e^{-sx_j} + \\ & + \sum_{k=1}^n e^{i\tau_k} \left\{ c_k \int_0^a (2-\mu_k)(s-i\tau_k)^{\mu_k-2} + f_k \int_0^a (2-\mu_k)(s-i\tau_k)^{\mu_k-2} g_k \frac{d}{dx} \left[(s-i\tau_k)^{\mu_k-2} \Gamma(2-\mu_k) \right] \right\} - \\ & - \sum_{k=1}^n e^{i\tau_k} \int_0^a \left[(c_k + g_k \rho_k x) x^{1-\mu_k} + f_k x^{1-\mu_k} \right] e^{-(s-i\tau_k)x} dx. \end{aligned} \quad (4,15)$$

Для нахождения функции $\Psi(s)$ рассмотрим граничное условие (I,4) и перейдем в нём к сопряженным значениям

$$\pi \overline{\Phi(i\tau)} - \overline{\alpha(\tau)} \Phi'(i\tau) - \Psi(i\tau) = \overline{f(\tau)} \quad (4,16)$$

Так как функция $\Psi(s)$ регулярна в правой полуплоскости, то её можно представить в этой полуплоскости интегралом Лапласа

$$\Psi(s) = \int_0^\infty \eta(x) e^{-sx} dx. \quad (4,17)$$

Умножим граничное условие (4,16) на $\frac{1}{2\pi} e^{i\tau x}$ и проинтегрируем по τ в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Получаем:

$$-\eta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \left[\overline{f(\tau)} + \overline{\alpha(\tau)} \Phi'(i\tau) \right] e^{i\tau x} d\tau$$

Под знаком интеграла стоят только известные функции, поэтому отсюда можно найти функцию $\eta(x)$, затем по формуле (4,17) определить $\Psi(s)$. Производная функции $\Psi(s)$ находится по формуле:

$$\Psi'(s) = - \int_0^\infty x \eta(x) e^{-sx} dx.$$

Зная функции $\Phi(s)$, $\Phi'(s)$, $\Phi''(s)$, $\Psi(s)$, $\Psi'(s)$, можно найти, используя (I,5), функции $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$, $\varphi''(z)$, $\psi(z)$, $\psi'(z)$, а затем по формулам Колосова-Мусхелишвили [4] определить напряжения или смещения в любой точке области D.

§ 5. Первая основная задача для прямоугольной пластинки

В этом параграфе в качестве иллюстрации метода численного решения интегрального уравнения приведены два примера первой основной задачи для прямоугольной области. Рассмотрены задачи о действии на пластинку двух равных и противоположно направленных сил, приложенных по нормали к сторонам пластинки, и равномерной нагрузки, приложенной на части противоположных сторон. Выписана формула для ядра интегрального уравнения. Численные расчёты проводились на электронной машине. Приведены в виде графиков результаты расчёта ядра, правой части и решения интегрального уравнения. Для вычисления интегралов Фурье была применена квадратурная формула, предложенная автором в статье "О вычислении интегралов типа Фурье", публикуемой в настоящем сборнике. Известно [24], что функция

$$z = \omega(s) = ib - \int_0^{is} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-\kappa^2 u^2)}},$$

где κ - любое действительное число, удовлетворяющее условию $0 < \kappa < 1$, даёт отображение прямоугольника со стороны a и b

$$a = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-\kappa^2 u^2)}}, \quad b = \int_1^{\frac{1}{\kappa}} \frac{du}{\sqrt{(u^2-1)(1-\kappa^2 u^2)}}$$

на правую полуплоскость плоскости $S = b + i\tau$, причем точка $z = 0$ переходит в точку $S = \infty$. Положение прямоугольника относительно координатных осей в плоскости $z = x + iy$ определяется координатами его углов. В данном случае углы расположены в точках a , $a+ib$, $-a+ib$, $-a$. При отображении эти угловые точки переходят в точки на мнимой оси, соответственно:

$i\frac{1}{\kappa}$, i , $-i$, $-i\frac{1}{\kappa}$. Запишем отображающую функцию в более развернутом виде:

$$\omega(i\tau) = \begin{cases} ib - \int_0^{-\tau} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-\kappa^2 u^2)}}, & -1 \leq \tau \leq 1; \\ a - i \int_{\frac{1}{\kappa}}^{-\tau} \frac{du}{\sqrt{(u^2-1)(1-\kappa^2 u^2)}}, & 1 \leq \tau \leq \frac{1}{\kappa}; \\ -a - i \int_{\frac{1}{\kappa}}^{-\tau} \frac{du}{\sqrt{(u^2-1)(1-\kappa^2 u^2)}}, & -\frac{1}{\kappa} \leq \tau \leq -1; \\ -a + \int_{i/\kappa}^{-\tau} \frac{du}{\sqrt{(u^2-1)(\kappa^2 u^2-1)}}, & -\infty < \tau \leq -\frac{1}{\kappa}. \end{cases} \quad (5,1)$$

Приняв за функцию $\gamma(s)$ функцию $\omega(s)$, имеем:

$$\alpha(\tau) = \frac{\omega(i\tau) - \overline{\omega(i\tau)}}{\omega'(i\tau)} = 2 \begin{cases} 6\sqrt{(1-\tau^2)(1-\kappa^2\tau^2)}, & -1 \leq \tau \leq 1; \\ i\sqrt{(\tau^2-1)(1-\kappa^2\tau^2)} \int_{\frac{1}{\kappa}}^{\tau} \frac{du}{\sqrt{(u^2-1)(1-\kappa^2u^2)}}, & 1 \leq \tau \leq \frac{1}{\kappa}; \\ -i\sqrt{(\tau^2-1)(1-\kappa^2\tau^2)} \int_{\frac{1}{\kappa}}^{-\tau} \frac{du}{\sqrt{(u^2-1)(1-\kappa^2u^2)}}, & -\frac{1}{\kappa} \leq \tau \leq -1; \\ 0, & \frac{1}{\kappa} \leq \tau < \infty, -\infty < \tau \leq -\frac{1}{\kappa}. \end{cases}$$

Таким образом, мы получили, что функция $\alpha(\tau)$ отлична от нуля только на отрезке $(-\frac{1}{\kappa}, \frac{1}{\kappa})$. Заметим теперь, что функция $\alpha(\tau)$ на отрезке $(-1, 1)$ является четной функцией τ , а на остальном отрезке — нечетной функцией. Воспользуемся этим при вычислении функции $K(t)$, входящей в ядро интегрального уравнения.

$$K(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\tau) e^{i\tau t} d\tau = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^1 \sqrt{(1-\tau^2)(1-\kappa^2\tau^2)} \cos t\tau d\tau + \int_1^{\frac{1}{\kappa}} \sqrt{(1-\tau^2)(\kappa^2\tau^2-1)} \int_{\frac{1}{\kappa}}^{\tau} \frac{du}{\sqrt{(u^2-1)(1-\kappa^2u^2)}} \sin t\tau d\tau \right]. \quad (5,2)$$

Так как мы имеем первую основную задачу, то $\alpha = -1$ и интегральное уравнение (3,2) имеет собственную функцию $Cv_0(x)$, где C — произвольная постоянная, а

$$v_0(x) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega(i\tau) e^{i\tau x} d\tau.$$

Для вычисления функции $v_0(x)$ воспользуемся тем, что функция $\omega(s)$ есть функция, регулярная в правой полуплоскости и при $s \rightarrow \infty$ убывающая, как $\frac{1}{s}$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\omega(i\tau)} e^{i\tau x} d\tau = 0,$$

поэтому получаем

$$\begin{aligned} v_0(x) &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\omega(i\tau) - \overline{\omega(i\tau)}] e^{i\tau x} d\tau = \\ &= -\frac{2}{\pi} \left[\int_0^1 \cos \tau x d\tau - \int_1^{\frac{1}{\kappa}} \int_{\frac{1}{\kappa}}^{\tau} \frac{du}{\sqrt{(u^2-1)(1-\kappa^2u^2)}} \cos \tau x d\tau \right] = \\ &= -\frac{2}{\pi} \left[\int_0^1 \cos \tau x d\tau + \int_1^{\frac{1}{\kappa}} \int_{\frac{1}{\kappa}}^{\tau} \frac{du}{\sqrt{(u^2-1)(1-\kappa^2u^2)}} \cos \tau x d\tau \right]. \end{aligned} \quad (5,3)$$

Из формул (5,2) и (5,3) видно, что ядро интегрального уравнения $y K(x+y)$ и собственная функция $v_0(x)$ являются вещественными, поэтому уравнение (4,7), которым мы должны пользоваться при численных расчетах, распадается на два независимых друг от друга уравнения: отдельно для мнимой и действительных частей функции $w(x) = w_1(x) + i w_2(x)$. Для $w_1(x)$ и $w_2(x)$ получаем следующие интегральные уравнения:

$$-w_1(x) + \int_0^{\infty} y K(x+y) w_1(y) dy + v_0(x) \int_0^{\infty} v_0(y) w_1(y) dy = f_1(x), \quad (5,4)$$

$$w_2(x) + \int_0^{\infty} y K(x+y) w_2(y) dy = f_2(x), \quad (5,5)$$

где

$$f_1(x) = \operatorname{Re} f(x), \quad f_2(x) = -\operatorname{Im} f(x).$$

Рассмотрим теперь задачу о действии на прямоугольную пластинку двух равных и противоположно направленных сил $(P, 0)$ и $(-P, 0)$ (в скобках указаны проекции сил на оси x и y , соответственно), приложенных в точках $z_1 = \alpha + i y_\lambda$ и $z_2 = -\alpha + i y_\lambda$. При отображении области D на правую полуплоскость, точки z_1 и z_2 перейдут в точки $i\tau_\lambda$ и $-i\tau_\lambda$, причем $1 < \tau_\lambda < \frac{1}{\kappa}$. Тогда

$$f(\tau) = \begin{cases} -Pi, & -\tau_\lambda \leq \tau \leq \tau_\lambda, \\ 0, & \tau_\lambda < \tau < \infty, -\infty < \tau < -\tau_\lambda \end{cases}$$

и, следовательно,

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{i\tau x} d\tau = -\frac{Pi}{\pi} \frac{\sin \tau_\lambda x}{x}.$$

Так как

$$f(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} y K(x+y) \overline{F(y)} dy,$$

получаем

$$f_1(x) \equiv 0$$

$$f_2(x) = -\frac{P}{\pi} \int_0^{\infty} K(x+y) \sin \tau_\lambda y dy.$$

Решением уравнения (5,4) при $f_1(x) \equiv 0$, очевидно, является тривиальное решение $w_1(x) \equiv 0$, и остается решить только

уравнение (5,5). Произведём в этом уравнении следующую замену:

$$w_2(x) = -\frac{p}{\pi} w_3(x).$$

Тогда для определения функции $w_3(x)$ получим уравнение:

$$w_3(x) + \int_0^{\infty} y K(x+y) w_3(y) dy = f_3(x), \quad (5,6)$$

где

$$f_3(x) = \int_0^{\infty} K(x+y) \sin \tau_\lambda y dy.$$

При больших значениях аргумента функции $K(t)$, согласно (3,1), имеет асимптотику

$$K(t) \sim \frac{4}{t^2} \frac{\sin t - \sin \frac{1}{k} t}{t^2}.$$

Найдем асимптотику функции $f_3(x)$. Имеем при $x \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(x+y) - \sin \frac{1}{k}(x+y)}{(x+y)^2} \sin \tau_\lambda y dy = \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\sin x \int_0^{\infty} \frac{\sin(\tau_\lambda + 1)y + \sin(\tau_\lambda - \frac{1}{k})y}{(x+y)^2} dy + \cos x \int_0^{\infty} \frac{\cos(1 - \tau_\lambda)y - \cos(1 + \tau_\lambda)y}{(x+y)^2} dy - \right. \\ &\quad \left. - \sin \frac{1}{k} x \int_0^{\infty} \frac{\sin(\tau_\lambda + \frac{1}{k})y + \sin(\tau_\lambda - \frac{1}{k})y}{(x+y)^2} dy - \cos \frac{1}{k} x \int_0^{\infty} \frac{\cos(\frac{1}{k} - \tau_\lambda)y - \cos(\frac{1}{k} + \tau_\lambda)y}{(x+y)^2} dy \right]. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, получаем

$$f_3(x) \sim \frac{2}{\pi x^2} \left[\left(\frac{1}{\tau_\lambda + \frac{1}{k}} + \frac{1}{\tau_\lambda - \frac{1}{k}} \right) \sin \frac{1}{k} x - \left(\frac{1}{\tau_\lambda + 1} + \frac{1}{\tau_\lambda - 1} \right) \sin x \right].$$

Итак, при $x \rightarrow \infty$ функция $f_3(x)$ имеет порядок $\frac{1}{x^2}$. В § 3 было показано, что в этом случае члены порядка $\frac{1}{x^2}$ легко могут быть уничтожены заменой функции $w_3(x)$ на функцию

$$w_4(x) = w_3(x) - \sum_{k=1}^4 c_k e^{-\sigma_k x}$$

при специальном выборе постоянных c_k . Так как члены $e^{-\sigma_k x}$ убывают очень быстро при $x \rightarrow \infty$, то при больших значениях x функция $w_3(x)$ будет очень близкой к функции $w_4(x)$. В то же время нетрудно показать, что функция $w_4(x)$ при $x \rightarrow \infty$ будет

иметь порядок $\frac{1}{x^2}$, где α — действительная часть β , являющегося наименьшим корнем уравнения:

$$\frac{\sin \pi \beta}{\pi \beta} = -\frac{2}{\pi} \quad (\beta \approx 2,37 + i 1,76).$$

Для доказательства этого утверждения необходимо проделать выкладки, аналогичные выкладкам § 3; при этом получается уравнение типа (3,17), которое имеет приближенное решение вида

$$\frac{c_k}{x^{\beta_k}}, \quad \text{где } \beta_k \text{ — наименьший корень уравнения}$$

$$\frac{\sin \pi \beta}{\pi \beta} = -|z_k|.$$

Так как решение $w_3(x)$ убывает при $x \rightarrow \infty$ достаточно быстро (как $\frac{1}{x^{2,37}}$), то для получения хорошей точности нет необходимости брать очень большое значение параметра α . Для численного решения выберем конкретные значения τ_λ , k и воспользуемся результатами § 4.

Для электронной вычислительной машины автором была составлена программа вычисления ядра интегрального уравнения и правой части. Результаты вычислений при $k = \frac{1}{2}$ и $\tau_\lambda = \frac{3}{2}$ приведены на рис. I и 2.

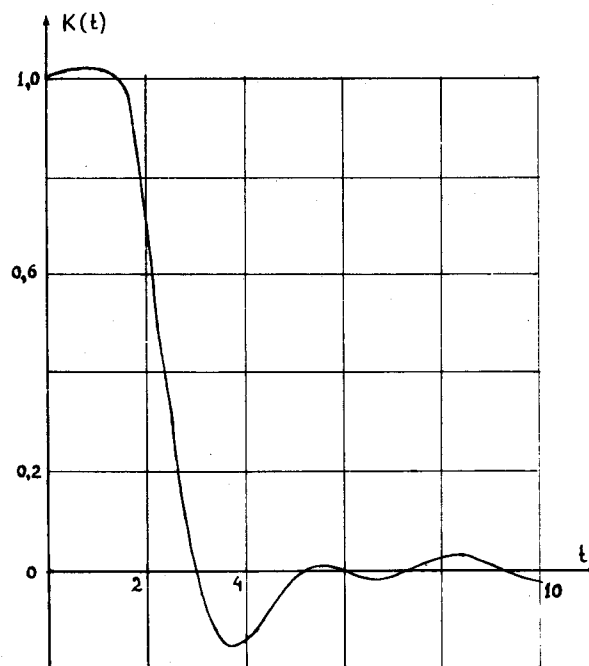


Рис. I

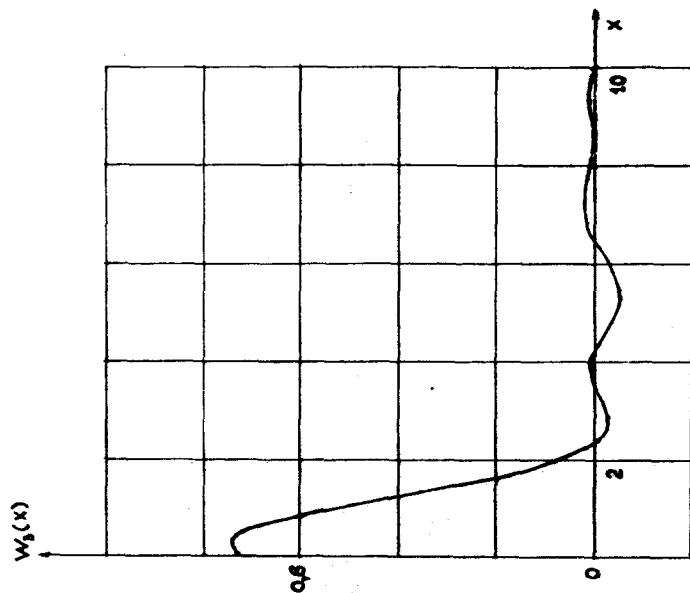


Рис. 3

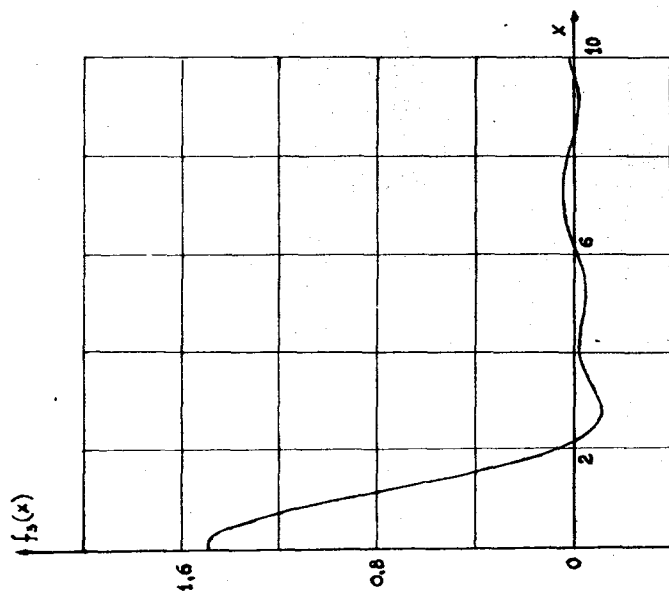


Рис. 2

Также была составлена программа приближенного решения интегрального уравнения по методу, изложенному в § 4. Результаты вычисления функции $W_2(x)$ приведены на рис. 3. Результаты получены с точностью 0,001, что, по-видимому, достаточно для задач теории упругости.

Рассмотрим теперь задачу о действии на прямоугольную пластинку постоянной нагрузки, приложенной на противоположных сторонах. Пусть нагрузка с постоянной интенсивностью P приложена по нормали на отрезках противоположных сторон, заключенных в полосе $y_1 \leq y \leq y_2$. При отображении точки $a + iy_1$, $a + iy_2$, $-a + iy_2$, $-a + iy_1$ перейдут соответственно в точки $i\tau_1$, $i\tau_2$, $-i\tau_2$, $-i\tau_1$, причём $1 < \tau_2 < \tau_1 < \frac{1}{\kappa}$. Функция $f(\tau)$ будет в этом случае иметь вид:

$$f(\tau) = -P_i \begin{cases} \int_{\tau}^{\tau_1} \frac{du}{\sqrt{(u^2-1)(1-\kappa^2 u^2)}}, & \tau_2 \leq \tau \leq \tau_1; \\ \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{du}{\sqrt{(u^2-1)(1-\kappa^2 u^2)}}, & -\tau_2 \leq \tau \leq \tau_2; \\ \int_{\tau}^{\tau_1} \frac{du}{\sqrt{(u^2-1)(1-\kappa^2 u^2)}}, & -\tau_1 \leq \tau \leq -\tau_2; \\ 0, & \tau_1 \leq \tau < \infty, -\infty < \tau \leq -\tau_1. \end{cases}$$

Замечая, что функция $f(\tau)$ чётная, имеем:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{i\tau x} d\tau = \\ &= -\frac{P_i}{\pi} \left[\int_0^{\tau_1} \int_{\tau}^{\tau_1} \frac{du}{\sqrt{(u^2-1)(1-\kappa^2 u^2)}} \cos \tau x d\tau + \int_{\tau_2}^{\tau_1} \int_{\tau}^{\tau_1} \frac{du}{\sqrt{(u^2-1)(1-\kappa^2 u^2)}} \cos \tau x d\tau \right] = \\ &= -\frac{P_i}{\pi} \left[\frac{\sin \tau_2 x}{x} \int_{\tau_2}^{\tau_1} \frac{du}{\sqrt{(u^2-1)(1-\kappa^2 u^2)}} + \int_{\tau_2}^{\tau_1} \int_{\tau}^{\tau_1} \frac{du}{\sqrt{(u^2-1)(1-\kappa^2 u^2)}} \cos \tau x d\tau \right] = -\frac{P_i}{\pi} F_1(x). \end{aligned}$$

Через $F_1(x)$ здесь обозначено выражение, заключённое в квад-

ратные скобки. Отсюда:

$$f_1(x) \equiv 0, \\ f_2(x) = -\frac{\rho}{\pi} \int_0^{\infty} y K(x+y) F_1(y) dy.$$

Следовательно, $w_1(x) \equiv 0$. В уравнении (5,5), аналогично предыдущему, проведем замену

$$w_2(x) = -\frac{\rho}{\pi} w_3(x).$$

Тогда получим для определения $w_3(x)$ уравнение

$$w_3(x) + \int_0^{\infty} y K(x+y) w_3(y) dy = f_3(x), \quad (5,7)$$

где

$$f_3(x) = \int_0^{\infty} y K(x+y) F_1(y) dy.$$

Нетрудно видеть, что функция $f_3(x)$ при больших x имеет порядок $\frac{1}{x^2}$. Действительно, при $x > 0$:

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{i\tau x} d\tau = -\frac{1}{2\pi i x} \int_{-\infty}^{\infty} f'(\tau) e^{i\tau x} d\tau = \\ = -\frac{1}{2\pi (ix)^2} \left\{ e^{-i\tau_1 x} [f'(-\tau_1 - 0) - f'(-\tau_1 + 0)] + e^{-i\tau_2 x} [f'(-\tau_2 - 0) - f'(-\tau_2 + 0)] + \right. \\ \left. + e^{i\tau_2 x} [f'(\tau_2 - 0) - f'(\tau_2 + 0)] + e^{i\tau_1 x} [f'(\tau_1 - 0) - f'(\tau_1 + 0)] \right\} + \frac{1}{2\pi (ix)^2} \int_{-\infty}^{\infty} f''(\tau) e^{i\tau x} d\tau.$$

Если теперь устремим $x \rightarrow \infty$, то, так как последний интеграл стремится к нулю, получим:

$$F(x) \sim -\frac{\rho i}{\pi x^2} \left[\frac{\cos \tau_2 x}{\sqrt{(\tau_2^2 - 1)(1 - k^2 \tau_2^2)}} - \frac{\cos \tau_1 x}{\sqrt{(\tau_1^2 - 1)(1 - k^2 \tau_1^2)}} \right].$$

Отсюда, используя результаты § 3, сразу получаем, что $f_3(x)$ имеет при $x \rightarrow \infty$ порядок $\frac{1}{x^2}$. Поэтому относительно порядка убывания решения уравнения (5,7) при $x \rightarrow \infty$ можно сделать такой же вывод, что и для уравнения (5,6). Для численного решения необходимо выбрать конкретные значения τ_1 и τ_2 и произвести расчет.

На рис. 4. приведены результаты расчета функции $F_1(x)$ при значениях параметров $\tau_1 = 1,7$; $\tau_2 = 1,3$; $k = 0,5$. На рис. 5 приведены результаты расчета при тех же значениях параметров функции $\nu(x) = F_1(x) - w_3(x)$.

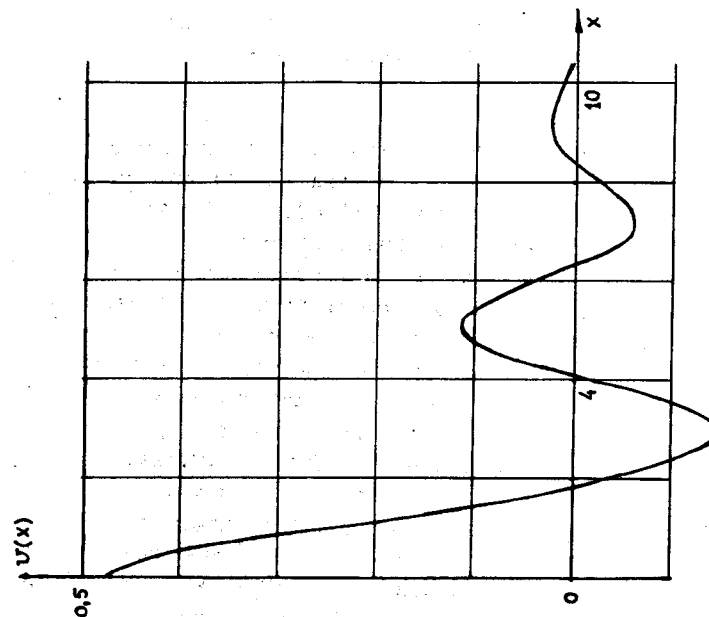


Рис. 5

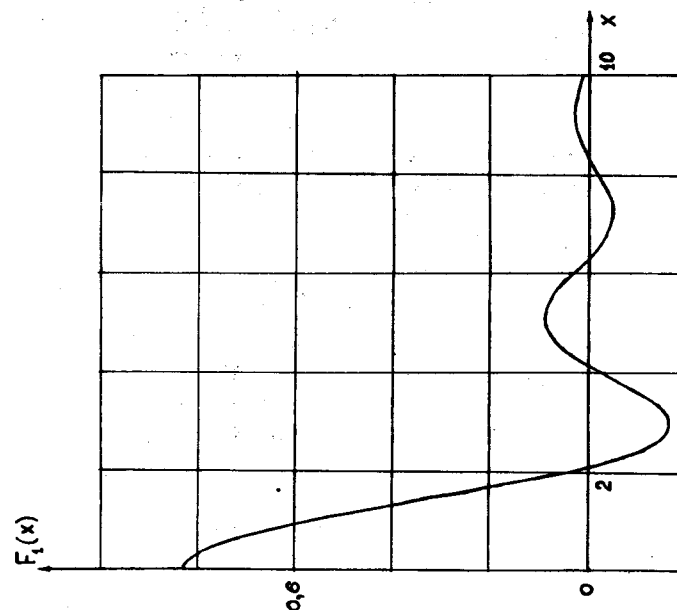


Рис. 4

§ 6. Температурные деформации тонкой пленки на пластиночной подложке.

В вычислительной технике используют в качестве элементов вычислительных систем тонкие плёнки. Их получают путём равномерного напыления в вакууме на пластину. Напыление происходит при высокой температуре порядка $300^{\circ}-400^{\circ}$ С. При этом пластинка, являющаяся подложкой для плёнки, испытывает температурные деформации, которые зависят от характера распределения температуры по пластине. После образования плёнки, подложка охлаждается в вакууме за счёт излучения с её поверхности, при этом края пластины обычно соприкасаются с массивной металлической рамой, которая медленно остывает по заданному закону. В результате этого подложка остывает неравномерно, в ней возникают температурные напряжения. Плёнка при этом неравномерно деформируется, меняется её плотность и при достаточно толстой плёнке (например, многослойной) происходит отрыв пленки от подложки. Для каждого заданного закона остывания рамы существует критическая толщина плёнки, при которой происходит отрыв плёнки. Для того чтобы решить вопрос о распределении плотности плёнки и нахождении её критической толщины, необходимо решить задачу теории упругости о температурных деформациях подложки. Эта задача, при известном распределении температур по пластине, сводится к решению основных задач плоской теории упругости [20], [21], [23], [19]. Действительно, напряжения в этом случае линейно выражаются через бигармоническую функцию и температурный потенциал перемещений $\Phi(x, y)$, связанный с температурой соотношением

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = (1+\nu) \beta T(x, y), \quad (6,1)$$

где β — линейный коэффициент расширения, а ν — коэффициент Пуассона. Если распределение температур по пластине известно, то достаточно найти частное решение уравнения (6,1) и вопрос о нахождении бигармонической функции сводится к рассмотренной задаче о нахождении двух гармонических функций $\varphi(z)$ и $\bar{\varphi}(\bar{z})$, удовлетворяющих на контуре области условию (I,1). Функция $g(z)$ выражается при этом через функцию $\varphi(x, y)$.

Найдем уравнение распределения тепла по пластине, в предположении, что температура по толщине пластинки не меняется.

Поместим прямоугольную систему координат x, y, z так, чтобы плоскость x, y находилась в плоскости пластинки, а ось z направим перпендикулярно плоскости пластинки. Так как различные точки пластинки имеют разную температуру $T(x, y, t)$, то в пластине будет происходить движение тепла от более нагретых частей к менее нагретым. Кроме того, происходит излучение тепла в вакуум. Вырежем из пластинки цилиндрическую поверхность S с образующими параллельными оси z и подсчитаем поток тепла, проходящий через поверхность S за время dt . Возьмем на поверхности S элемент ds . В теории теплопроводности принимается, что количество тепла ΔQ , проходящего через элемент ds за время dt , пропорционально $ds \cdot dt$ и нормальной производной температуры $\frac{\partial T}{\partial n}$, т.е.

$$\Delta Q = \kappa dt \cdot ds \cdot \left| \frac{\partial T}{\partial n} \right|,$$

где κ — коэффициент внутренней теплопроводности; а n — направление нормали к ds . Будем обозначать тепло вытекающее знаком (+), а втекающее — знаком (-). Тогда количество тепла, уходящее через поверхность S за время dt , вследствие теплопередачи, будет равно

$$Q_1 = -dt \int_S \kappa \frac{\partial T}{\partial n} ds. \quad (6,2)$$

Через верхнюю и нижнюю стороны пластинки в вакуум излучается тепло по закону Стефана-Больцмана. За время dt весь объём V_s , ограниченный поверхностью S , потеряет вследствие излучения количество тепла

$$Q_2 = \frac{2 A \sigma}{h} dt \int_{V_s} T^4(x, y, t) dV, \quad (6,3)$$

где σ — постоянная Стефана-Больцмана, A — коэффициент теплопоглощения, равный единице для абсолютно чёрного тела; h — толщина пластинки. Заметим, что температура $T(x, y, t)$ считается выраженной в абсолютной шкале температур.

Подсчитаем теперь то же количество тепла иначе, следя за изменением температуры внутри объема. Для того, чтобы увеличить температуру какого-либо элементарного объема dV на величину dT за время dt , необходимо затратить количество

тепла

$$\Delta Q = \gamma \frac{\partial T}{\partial n} dt \cdot p \cdot dv,$$

где p — плотность вещества, а γ — коэффициент теплоёмкости вещества. Таким образом, отдаваемое всем объемом V_s , тепло равно

$$Q = -dt \int_{V_s} \gamma p \frac{\partial T}{\partial n} dv. \quad (6,4)$$

Так как $Q = Q_1 + Q_2$, то, подставляя сюда вместо Q_1 , Q_2 и их выражения по формулам (6,2), (6,3), (6,4), получим

$$-\int_{V_s} \gamma p \frac{\partial T}{\partial n} dv = -\int_S \kappa \frac{\partial T}{\partial n} ds + \frac{2A\sigma}{h} \int_{V_s} T^4 dv.$$

Применим к интегралу по поверхности формулу Остроградского. Тогда предыдущее равенство можно переписать в следующем виде:

$$\int_{V_s} \left[\gamma p \frac{\partial T}{\partial n} - \frac{\partial^2(\kappa T)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2(\kappa T)}{\partial y^2} + \frac{2A\sigma}{h} T^4 \right] dv = 0$$

Это уравнение должно выполняться при произвольной поверхности S , откуда следует

$$\gamma p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2(\kappa T)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\kappa T)}{\partial y^2} - \frac{2A\sigma}{h} T^4. \quad (6,5)$$

Если пластина однородная, то γ, p, κ являются постоянными и это уравнение можно записать в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a_1^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) - a_2^2 T^4, \quad (6,6)$$

$$a_1 = \sqrt{\frac{\kappa}{\gamma p}}, \quad a_2 = \sqrt{\frac{2A\sigma}{\gamma p h}}.$$

В этом случае, когда температура краёв подложки меняется со временем медленно, что фактически имеет место, можно считать процесс распространения тепла квазистационарным, т.е. $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$. Итак, приходим к такой задаче: найти непрерывную вместе с производными до второго порядка функцию, удовлетворяющую внутри области D уравнению

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = a^2 T^4, \quad a = \sqrt{\frac{2A\sigma}{\kappa h}}, \quad (6,7)$$

а на контуре L условием

$$T|_L = \varphi(s, t), \quad (6,8)$$

где $\varphi(s, t)$ — заданная функция длины дуги s и времени t , равная температуре окружающей подложку рамы. Будем считать, что функция $\varphi(s)$ непрерывна на контуре L . Для того, чтобы решение задачи имело физический смысл, необходимо требовать выполнение условия $T(x, y, t) \geq 0$.

Пусть функция $f(x, y, t)$ является решением задачи Дирихле для уравнения Лапласа при условии (6,8). Тогда поставленная задача эквивалентна отысканию непрерывного решения интегрального уравнения

$$T(x, y, t) = -a^2 \iint_D G(x, y, \xi, \eta) T^4(\xi, \eta, t) d\xi d\eta + f(x, y, t). \quad (6,9)$$

Здесь $G(x, y, \xi, \eta)$ — функция Грина задачи Дирихле для оператора Лапласа в области D . Для конечной односвязной области D функция Грина, как известно [1], связана с функцией конформно отображающей область D на единичный круг. Если $w = w(z)$ — функция, отображающая область D на круг $|w| \leq 1$, причём некоторая внутренняя точка области $z_0 = \xi_0 + i\eta_0$ переходит в центр единичного круга, то

$$G(x, y, \xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi} \ln |w(z, z_0)|.$$

Для функции Грина, если точки (x, y) , (ξ, η) находятся внутри области D , известно следующее неравенство:

$$0 < G(x, y, \xi, \eta) < -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}{d}, \quad (6,10)$$

где d — диаметр области, т.е. наибольшее расстояние между двумя точками области. Из этого неравенства следует, что интеграл от функции Грина по конечной области ограничен некоторым положительным числом, т.е.

$$\iint_D G(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta \leq K \quad (6,11)$$

Постоянная K может быть оценена с помощью неравенства (6,10) через диаметр области. Действительно:

$$\iint_D G(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta \leq -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{d/2} \rho \ln \frac{\rho}{d} d\rho d\varphi = \frac{d^2}{16} (1 + 2 \ln 2).$$

Функция $\varphi(s, t)$ непрерывна на замкнутом ограниченном мно-

кестве, поэтому она принимает на нём свои наибольшее и наименьшее значения и, следовательно, ограничена

$$m(t) \leq \varphi(s, t) \leq M(t), \quad (6,12)$$

где $m(t) = \inf \varphi(s, t)$, $M(t) = \sup \varphi(s, t)$; $(s \in L)$. Используя принцип максимума и минимума для гармонической функции $f(x, y, t)$ получим, что она ограничена теми же константами $m(t)$ и $M(t)$. Из уравнения (6,9) нетрудно получить, что $T(x, y, t) \leq M(t)$. Построим для уравнения (6,9) процесс последовательных приближений по формулам

$$T_{n+1}(x, y, t) = -\alpha^2 \iint_D G(x, y, \xi, \eta) T_n^4(\xi, \eta, t) d\xi d\eta + f(x, y, t), \quad (6,13)$$

$$T_0(x, y, t) = f(x, y, t), \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Из написанных формул видно, что $T_n(x, y, t) \leq M(t)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Построенный процесс последовательных приближений будет сходиться к единственному непрерывному решению уравнения (6,9), если оператор

$$\alpha^2 \iint_D G(x, y, \xi, \eta) T^4(\xi, \eta, t) d\xi d\eta \quad (6,14)$$

будет оператором сжатия. В книге [29] доказано, что в том случае, когда функция $u(T)$ удовлетворяет условию Липшица с константой C , оператор

$$\lambda \iint_D G(x, y, \xi, \eta) u(T(\xi, \eta)) d\xi d\eta$$

будет оператором сжатия при

$$|\lambda| < \frac{1}{C \cdot \max_{(x, y) \in D} \iint_D G(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta}$$

В нашем случае $u(T) = T^4$ и

$$|u(T) - u(T')| \leq 4M^3 |T - T'|,$$

поэтому оператор (6,14) будет оператором сжатия при выполнении условия

$$\alpha^2 K \cdot 4M^3(t) < 1. \quad (6,15)$$

Из уравнения (6,9), находим

$$T(x, y, t) \geq m(t) - \alpha^2 K M^4(t)$$

и условие $T(x, y, t) \geq 0$ будет выполнено, если потребовать

$$m(t) - \alpha^2 K M^4(t) \geq 0 \quad (6,16)$$

Неравенства (6,15) и (6,16) накладывают ограничения на величину области D , для которой можно получить решение поставленной задачи методом последовательных приближений. Указанные неравенства будут выполнены, если

$$K < \min \left(\frac{1}{4\alpha^2 M^3(t)}, \frac{m(t)}{\alpha^2 M^4(t)} \right).$$

Или, воспользовавшись оценкой для константы K через диаметр области, получим, что методом последовательных приближений можно в некоторый фиксированный момент времени t заведомо пользоваться для областей достаточно малого диаметра:

$$d^2 < \frac{16}{(1+2\ln 2)\alpha^2} \min \left(\frac{1}{4M^3(t)}, \frac{m(t)}{M^4(t)} \right) \quad (6,17)$$

Отметим, что в вычислительной технике в основном встречаются области, для которых неравенство (6,17) выполнено и, следовательно, вопрос о распределении температур может быть решен указанным методом. После того как распределение температуры найдено, температурный потенциал находится по формулам

$$\Phi(x, y, t) = -(1+\nu)\beta \iint_D G(x, y, \xi, \eta) T(\xi, \eta, t) d\xi d\eta. \quad (6,18)$$

Решая затем задачу теории упругости, найдем функции Гурса $\varphi(z, t)$ и $\psi(z, t)$. Температурные напряжения и деформации выражаются через функции Гурса и температурный потенциал перемещений $\Phi(x, y, t)$.