О ВЫЧИСЛЕНИИ ИНТЕГРАЛОВ ТИПА ФУРЬЕ

В.Г. Романов

Для вычисления интегралов вида

$$F(u)=\int_a^b f(x)e^{iux}\,dx \tag{I}$$

использовать обычные квадратурные формулы, основанные на интерполяции всей подынтегральной функции, неудобно, так как подынтегральная функция при достаточно больших значениях параметра u становится сильно колеблющейся. В связи с этим возникла потребность в получении специальных квадратурных формул, пригодных для вычисления интегралов типа Фурье. Такие формулы были предложены различными авторами. Из них, по-видимому, наиболее удобной для практических целей является квадратурная формула Filon'a [27]. Идея её получения состоит в следующем: функция $f(x)$ на некотором отрезке длиной $2h$ заменяется полиномом второй степени, в результате интеграл берётся в явном виде и получается квадратурная формула, по которой на этом отрезке можно считать интеграл достаточно эффективно. Ниже приводится квадратурная формула, которая перед другими, в частности перед формулой Filon'a, имеет некоторые преимущества. Для её получения была использована интерполяция функции $f(x)$, предложенная J.Griffin'ом [26]. Ввиду того, что в указанной статье интерполяционные формулы даны только для равноотстоящих узлов, рассмотрим идею, предложенную Griffin'ом, в общем случае неравноотстоящих узлов.

Пусть функция $f(x)$ задана в некоторых точках x_i отрезка $[a,b]$. Рассмотрим, как производится интерполяция функции $f(x)$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$. Введём на этом отрезке вместо переменной x переменную

$$\Theta_i=\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}$$

и обозначим

$$f(x_i)=Y_i\ ,\qquad \alpha_i=\frac{x_{i-1}-x_i}{x_{i+1}-x_i}\ ,\qquad \beta_i=\frac{x_{i+2}-x_i}{x_{i+1}-x_i}$$

По значениям функции $f(x)$ в узлах x_{i-1}, x_i, x_{i+1} строим параболу:

$$\varphi_i(\Theta_i)=\frac{\Theta_i(1-\Theta_i)}{\alpha_i(1-\alpha_i)}Y_{i-1}+\left[\frac{1}{\alpha_i}\Theta_i^2-\left(1+\frac{1}{\alpha_i}\right)\Theta_i+1\right]Y_i+\frac{\Theta_i(\Theta_i-\alpha_i)}{1-\alpha_i}Y_{i+1}$$

Аналогично по значениям функции $f(x)$ в узлах x_i, x_{i+1}, x_{i+2} строим другую параболу:

$$\varphi_{i+1}(\Theta_i)=\left[\frac{1}{\beta_i}\Theta_i^2-\left(1+\frac{1}{\beta_i}\right)\Theta_i+1\right]Y_i+\frac{\Theta_i(\Theta_i-\beta_i)}{1-\beta_i}Y_{i+1}+\frac{\Theta_i(1-\Theta_i)}{\beta_i(1-\beta_i)}Y_{i+2}$$

Составив комбинацию из функций $\varphi_i(\Theta_i)$ и $\varphi_{i+1}(\Theta_i)$

$$F_i(\Theta_i)=(A\Theta_i+B)\varphi_i(\Theta_i)+(C\Theta_i+D)\varphi_{i+1}(\Theta_i)\ ,$$

подберём постоянные A, B, C, D так, чтобы функция $F_i(\Theta_i)$ принимала в узлах x_i, x_{i+1} значения $f(x_i)$, $f(x_{i+1})$ и, кроме того, выполнялось условие:

$$\frac{d}{dx}F_i(\Theta)_i\Big|_{\Theta_i=1}=\frac{d}{dx}F_{i+1}(\Theta_{i+1})\Big|_{\Theta_{i+1}=0}\ ,$$

т.е. чтобы при переходе от отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ к отрезку $[x_{i+1}, x_{i+2}]$ производная по x оставалась непрерывной. Эти условия будут выполнены, если положить $-A=B=C=1$, $D=0$. Таким образом,

$$F_i(\Theta_i)=(1-\Theta_i)\varphi_i(\Theta_i)+\Theta_i\varphi_{i+1}(\Theta_i)=$$

$$=\frac{\Theta_i(1-\Theta_i)^2}{\alpha_i(1-\alpha_i)}Y_{i-1}+\left[\left(\frac{1}{\beta_i}-\frac{1}{\alpha_i}\right)\Theta_i^3+\left(\frac{2}{\alpha_i}-\frac{1}{\beta_i}\right)\Theta_i^2-\left(1+\frac{1}{\alpha_i}\right)\Theta_i+1\right]Y_i+ \tag{2}$$

$$+\Theta_i\left[\left(\frac{1}{1-\beta_i}-\frac{1}{1-\alpha_i}\right)\Theta_i^2+\left(\frac{2}{1-\alpha_i}-\frac{1}{1-\beta_i}\right)\Theta_i-\frac{\alpha_i}{1-\alpha_i}\right]Y_{i+1}+\frac{\Theta_i^2(1-\Theta_i)}{\beta_i(1-\beta_i)}Y_{i+2}.$$

Из этой формулы видно, что при $\theta_i \to 0$, $F_i(\theta_i) \sim \varphi_i(\theta_i)$, а при $\theta_i \to 1$, $F_i(\theta_i) \sim \varphi_{i+1}(\theta_i)$. Но известно, что каждая из парабол лучше всего аппроксимирует функцию $f(x)$ в своей средней части, следовательно, функция $F_i(\theta_i)$ хорошо аппроксимирует функцию $f(x)$ на концах интервала $[x_i, x_{i+1}]$ и, естественно, не хуже любой из парабол в средней части. Интерполяционная формула (2) обладает ещё одним важным свойством: при переходе от функции $F_i(\theta_i)$ к функции $F_{i+1}(\theta_{i+1})$ сохраняется непрерывность по x производной на стыке отрезков интегрирования, что для интегралов типа Фурье имеет существенное значение. Выведем теперь квадратурную формулу для вычисления интегралов типа Фурье. Для этого рассмотрим интеграл вида (I) по отрезку $[x_i, x_i+h]$. Применим к функции на этом отрезке интерполяционную формулу (2).

$$\int_{x_i}^{x_i+h} f(x)e^{iux}dx = h\int_0^1 F_i(\theta_i)e^{iu(\theta_i h+x_i)}d\theta_i =$$

$$= he^{iux_i}\left\{\frac{1}{hu}e^{-i\frac{\pi}{2}}\left[F_i(1)e^{ihu}-F_i(0)\right]+\frac{1}{(hu)^2}\left[F_i'(1)e^{ihu}-F_i'(0)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{(hu)^3}\left[F_i''(1)e^{ihu}-F_i''(0)\right]-\frac{1}{(hu)^4}\left[F_i'''(1)e^{ihu}-F_i'''(0)\right]\right\}.$$

Вычисляя соответствующие производные функции $F_i(\theta_i)$ в точках $\theta_i=0$ и $\theta_i=1$ и группируя некоторые члены, получим:

$$\int_{x_i}^{x_i+h} f(x)e^{iux}dx = he^{ix_iu}\left\{\left[\frac{1}{\alpha_i}\left(Y_{i-1}-Y_i\right)+\frac{1}{1-\alpha_i}\left(Y_{i-1}-Y_{i+1}\right)\right]\cdot\right.$$

$$\cdot\left[e^{i\frac{\pi}{2}}\alpha_1(\vartheta)+\alpha_2(\vartheta)\right]+\left[\frac{1}{\beta_i}\left(Y_{i+2}-Y_i\right)+\frac{1}{1-\beta_i}\left(Y_{i+2}-Y_{i+1}\right)\right]\cdot$$

$$\cdot\left[e^{i\frac{\pi}{2}}\beta_1(\vartheta)+\beta_2(\vartheta)\right]+\left(Y_{i+1}-Y_i\right)\left[e^{i\frac{\pi}{2}}\gamma_1(\vartheta)+\gamma_2(\vartheta)\right]+$$

$$\left.+Y_i\left[e^{i\frac{\pi}{2}}\eta_1(\vartheta)+\eta_2(\vartheta)\right]\right\}.$$

Здесь введены обозначения:

$$uh = \vartheta$$

$$\alpha_1(\vartheta) = 2\frac{(2\cos\vartheta)\vartheta-3\sin\vartheta}{\vartheta^4}, \quad \alpha_2(\vartheta)=\frac{6(1-\cos\vartheta)-\vartheta(\vartheta+2\sin\vartheta)}{\vartheta^4},$$

$$\beta_1(\vartheta)=\frac{6\sin\vartheta-\vartheta\sin\vartheta-2\vartheta(1+2\cos\vartheta)}{\vartheta^4}, \quad \beta_2(\vartheta)=\frac{\vartheta(4\sin\vartheta-\vartheta\cos\vartheta)-6(1-\cos\vartheta)}{\vartheta^4},$$

$$\gamma_1(\vartheta)=\frac{\sin\vartheta-\vartheta\cos\vartheta}{\vartheta^2}, \qquad \gamma_2(\vartheta)=\frac{\vartheta\sin\vartheta-(1-\cos\vartheta)}{\vartheta^2}, \tag{4}$$

$$\eta_1(\vartheta)=\frac{1-\cos\vartheta}{\vartheta}, \qquad \eta_2(\vartheta)=\frac{\sin\vartheta}{\vartheta}.$$

При малых значениях ϑ удобнее использовать разложение в ряд этих выражений по степеням параметра ϑ. Разложив $\sin\vartheta$ и $\cos\vartheta$ в ряды, получим:

$$\alpha_1(\vartheta)=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n}{(2n+3)!}\vartheta^{2n-1}, \quad \alpha_2(\vartheta)=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{(2n+4)!}\vartheta^{2n},$$

$$\beta_1(\vartheta)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n(2n+1)}{(2n+3)!}\vartheta^{2n-1}, \quad \beta_2(\vartheta)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n+1)(2n+2)}{(2n+4)!}\vartheta^{2n}, \tag{5}$$

$$\gamma_1(\vartheta)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n}{(2n+1)!}\vartheta^{2n-1}, \quad \gamma_2(\vartheta)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{(2n+2)!}\vartheta^{2n},$$

$$\eta_1(\vartheta)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n)!}\vartheta^{2n-1}, \quad \eta_2(\vartheta)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\vartheta^{2n}.$$

Каждый из написанных рядов очень быстро сходится при малых ϑ. В приложении приведены таблицы значений этих рядов в зависимости от ϑ. Полагая в формуле (3) $u=0$, получим квадратурную формулу для вычисления интеграла от функции $f(x)$. Действительно, при $u=0$ имеем:

$$\int_{x_i}^{x_i+h} f(x)\,dx = h\left\{\frac{1}{12}\left[\frac{1}{\alpha_i}\left(Y_{i-1}-Y_i\right)+\frac{1}{1-\alpha_i}\left(Y_{i-1}-Y_{i+1}\right)\right]+\frac{1}{12}\left[\frac{1}{\beta_i}\left(Y_{i+2}-Y_i\right)+\frac{1}{1-\beta_i}\left(Y_{i+2}-Y_{i+1}\right)\right]+\frac{1}{2}\left(Y_i+Y_{i+1}\right)\right\}. \qquad (6)$$

Дадим оценку погрешности квадратурной формулы (3) для случая равноотстоящих узлов. Для упрощения выкладок будем предполагать, что параметр ϑ мал по сравнению с единицей настолько, что можно пренебречь членами порядка ϑ^2. Так как узлы x_i равноотстоят друг от друга, то $\alpha_i=-1$, $\beta_i=2$ и интеграл по отрезку $[x_i, x_i+h]$ может быть в первом приближении вычислен по формуле:

$$I_1=\frac{1}{120}h e^{iux_i}\left[e^{i\frac{\pi}{2}}\vartheta\left(-2Y_{i-1}+21Y_i+44Y_{i+1}-3Y_{i+2}\right)+5\left(-Y_{i-1}+13Y_i+13Y_{i+1}-Y_{i+2}\right)\right]. \qquad (7)$$

Разобьем теперь отрезок $[x_i, x_i+h]$ на два равных отрезка и к каждому из них применим формулу (7). Обозначим

$$f(x_i+kh)=Y_{i+k}.$$

Для интеграла получим в этом случае более точное выражение:

$$I_2=\frac{h}{240}e^{ix_iu}\left\{e^{i\frac{\pi}{2}}\left(-2Y_{i-\frac12}+21Y_i+44Y_{i+\frac12}-3Y_{i+1}\right)\frac{\vartheta}{2}+5\left(-Y_{i-\frac12}+13Y_i+13Y_{i+\frac12}-Y_{i+1}\right)+e^{i\frac{\vartheta}{2}}\left[e^{i\frac{\pi}{2}}\left(-2Y_i+21Y_{i+\frac12}+44Y_{i+1}-3Y_{i+\frac32}\right)\frac{\vartheta}{2}+5\left(-Y_i+13Y_{i+\frac12}+13Y_{i+1}-Y_{i+\frac32}\right)\right]\right\}.$$

Разложив в последней формуле $e^{i\frac{\vartheta}{2}}$ в ряд, получим с точностью до ϑ^2:

$$I_2=\frac{h}{240}e^{iux_i}\left[e^{i\frac{\pi}{2}}\left(-Y_{i-\frac12}+7Y_i+65Y_{i+\frac12}+53Y_{i+1}-4Y_{i+\frac32}\right)\vartheta+5\left(-Y_{i-\frac12}+12Y_i+26Y_{i+\frac12}+12Y_{i+1}-Y_{i+\frac32}\right)\right]. \qquad (8)$$

Оценим разность между двумя приближенными выражениями для определения интеграла, даваемыми формулами (5) и (8). Вычитая из равенства (8) равенство (5), получаем:

$$I_2-I_1=\frac{h}{240}e^{iux_i}\left[e^{i\frac{\pi}{2}}\left(4Y_{i-1}-Y_{i-\frac12}-35Y_i+65Y_{i+\frac12}-35Y_{i+1}-44Y_{i+\frac32}-6Y_{i+2}\right)\vartheta+5\left(2Y_{i-1}-Y_{i-\frac12}-14Y_i+26Y_{i+\frac12}+14Y_{i+1}-Y_{i+\frac32}+2Y_{i+2}\right)\right]. \qquad (9)$$

Введем в рассмотрение центральные разности:

$$\Delta^n_{\frac12}Y_i=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k Y_{i-\frac{k}{2}}.$$

Тогда выражение (9) можно записать в виде:

$$I_1-I_2=\frac{h}{240}e^{iux_i}\left[e^{i\frac{\pi}{2}}\vartheta\left(5\Delta^3_{\frac12}Y_{i+\frac32}+25\Delta^4_{\frac12}Y_{i+\frac32}+2\Delta^5_{\frac12}Y_{i+\frac32}+4\Delta^6_{\frac12}Y_{i+\frac32}\right)+5\left(11\Delta^4_{\frac12}Y_{i+\frac32}+2\Delta^6_{\frac12}Y_{i+\frac32}\right)\right].$$

Пусть разности четвёртого порядка малы по сравнению с разностями третьего порядка, а разности шестого порядка малы по сравнению с разностями четвёртого порядка. Тогда, оставив в первой скобке разности только третьего порядка, а во второй только четвёртого порядка, получим:

$$\left|I_2-I_1\right|\approx\frac{h}{48}\left[\left|\Delta^3_{\frac12}Y_{i+\frac32}\right|\cdot\left|\vartheta\right|+11\left|\Delta^4_{\frac12}Y_{i+\frac32}\right|\right]. \qquad (10)$$

Продолжив процесс разбиения на части, разобьём каждый из половинных отрезков на два равных отрезка. После применения к каждому из них формулы (5) получим для интеграла по отрезку $[x_i, x_i+h]$ ещё более точное выражение. Обозначим его через I_3. При этом, согласно формуле (10), имеем:

$$\left|I_3-I_2\right|\approx\frac{h}{48}\left[\left|\Delta^3_{\frac14}Y_{i+\frac32}\right|\cdot\left|\frac{\vartheta}{2}\right|+11\left|\Delta^4_{\frac14}Y_{i+\frac32}\right|\right]. \qquad (11)$$

Нетрудно проверить, что справедливы следующие формулы:

$$\Delta^3_{\frac12}Y_{i+\frac32}=8\Delta^3_{\frac14}Y_{i+\frac32}-12\Delta^4_{\frac14}Y_{i+\frac32}+6\Delta^5_{\frac14}Y_{i+\frac32}-\Delta^6_{\frac14}Y_{i+\frac32},$$

$$\Delta^4_{\frac12}Y_{i+\frac32}=16\Delta^4_{\frac14}Y_{i+\frac32}-32\Delta^5_{\frac14}Y_{i+\frac32}+24\Delta^6_{\frac14}Y_{i+\frac32}-8\Delta^7_{\frac14}Y_{i+\frac32}+\Delta^8_{\frac14}Y_{i+\frac32}.$$

Отсюда, пренебрегая в первом равенстве разностями выше третьего порядка, а во втором – выше четвертого порядка, получим:

$$\Delta^3_{\frac{1}{4}} Y_{i+\frac{3}{2}} \approx \frac{1}{8}\Delta^3_{\frac{1}{2}} Y_{i+\frac{3}{2}}, \qquad \Delta^4_{\frac{1}{4}} \approx \frac{1}{16}\Delta^4_{\frac{1}{2}} Y_{i+\frac{3}{2}}.$$

Подставляя выражения для $\Delta^3_{\frac{1}{4}} Y_{i+\frac{3}{2}}$ и $\Delta^4_{\frac{1}{4}} Y_{i+\frac{3}{2}}$ в (II), находим:

$$\left|I_3 - I_2\right| \approx \frac{h}{48\cdot 16}\left[\left|\Delta^3_{\frac{1}{2}} Y_{i+\frac{3}{2}}\right|\cdot|\vartheta| + 11\left|\Delta^4_{\frac{1}{2}} Y_{i+\frac{3}{2}}\right|\right].$$

Вообще, разность между приближённым значением интеграла I_n, получаемым при разбиении отрезка $[x_i, x_i+h]$ на 2^n равных частей, и значением интеграла I_{n+1}, получаемым при разбиении этого же отрезка на 2^{n+1} равных частей, удовлетворяет равенству:

$$\left|I_{n+1} - I_n\right| \approx \frac{h}{48\cdot 16^{n-1}}\left[\left|\Delta^3_{\frac{1}{2}} Y_{i+\frac{3}{2}}\right|\cdot|\vartheta| + 11\left|\Delta^4_{\frac{1}{2}} Y_{i+\frac{3}{2}}\right|\right].$$

Точное значение интеграла по отрезку $[x_i, x_i+h]$ равно

$$I = \lim_{n\to\infty} I_n .$$

Отсюда для разности между точным значением интеграла и приближённым, вычисляемым по формуле (3), получаем:

$$\left|I - I_1\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\left|I_{n+1} - I_n\right| \approx \frac{h}{48}\left[\left|\Delta^3_{\frac{1}{2}} Y_{i+\frac{3}{2}}\right|\cdot|\vartheta| + 11\left|\Delta^4_{\frac{1}{2}} Y_{i+\frac{3}{2}}\right|\right]\cdot$$

$$\cdot\left[1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{16^2} + \dots\right] = \frac{h}{45}\left[\left|\Delta^3_{\frac{1}{2}} Y_{i+\frac{3}{2}}\right|\cdot|\vartheta| + 11\left|\Delta^4_{\frac{1}{2}} Y_{i+\frac{3}{2}}\right|\right].$$

Сравнивая оценку для погрешности квадратурной формулы Filon'а и формулы (3), можно убедиться, что формула (3) значительно точнее формулы Filon'а. Формула (3) очень удобна для вычисления интегралов типа Фурье с помощью быстродействующих вычислительных машин. Автором была составлена программа вычисления интегралов типа Фурье для электронной вычислительной машины. Программа работает с автоматическим выбором шага интегрирования. Идея автоматического выбора шага состоит в следующем. Интеграл на элементарном отрезке интегрирования считается дважды: сначала с шагом h, а затем с шагом $\frac{1}{2}h$; если при этом разность между этими двумя значениями находится в пределах заданной точности, то на следующем этапе вычислений делается попытка удвоить шаг, в противном случае шаг вдвое уменьшается. Счёт при этом происходит с максимальным при заданной точности шагом. Аналогичная программа была составлена автором по методу, предложенному Filon'ом. Сравнение работы этих программ показало, что программа счёта интегралов по методу Filon'а работает примерно вдвое медленнее, несмотря на то, что времени на вычисление коэффициентов этой квадратурной формулы на каждом этапе интегрирования затрачивается значительно меньше. Это говорит о том, что счёт по формуле (3) идет с гораздо более крупным шагом. В заключение отметим, что по этой формуле можно вычислять и интегралы типа Лапласа

$$\Phi(s) = \int_a^b \varphi(x)e^{-sx}dx ,$$

где $s = \sigma + i\tau$, так как можно положить

$$f(x) = \varphi(x)e^{-\sigma x}$$

и далее вычислять интеграл вида (I).

Приложение

ϑ	$\alpha_1(\vartheta)$	$\alpha_2(\vartheta)$	$\beta_1(\vartheta)$	$\beta_2(\vartheta)$	$\gamma_1(\vartheta)$	$\gamma_2(\vartheta)$	$\eta_1(\vartheta)$	$\eta_2(\vartheta)$
0,00	0,0000000	0,0833333	0,0000000	0,0833333	0,0000000	0,5000000	0,0000000	I,0000000
0,0I	0,0003333	0,0833325	0,0005000	0,08333I7	0,0033333	0,4999875	0,0050000	0,9999833
0,02	0,0006667	0,0833300	0,00I0000	0,0833267	0,0066664	0,4999500	0,0099997	0,9999333
0,03	0,00I0000	0,0833258	0,00I4999	0,0833I83	0,009999I	0,4998875	0,0I49989	0,9998500
0,04	0,00I3332	0,0833200	0,00I9997	0,0833067	0,0I333I2	0,4998000	0,0I99973	0,9997334
0,05	0,00I6665	0,0833I25	0,0024995	0,08329I7	0,0I66625	0,4996875	0,0249948	0,9995834
0,06	0,00I9997	0,0833033	0,002999I	0,0832733	0,0I99928	0,4995500	0,02999I0	0,999400I
0,07	0,0023328	0,0832925	0,0034986	0,08325I7	0,02332I9	0,4993877	0,0349857	0,999I835
0,08	0,0026659	0,0832800	0,0039980	0,0832267	0,0266496	0,4992003	0,0399787	0,9989337
0,09	0,0029988	0,0832658	0,004497I	0,083I984	0,0299757	0,4989880	0,0449696	0,9986505
0,I0	0,00333I7	0,0832300	0,0049960	0,083I667	0,0333000	0,4987507	0,0499583	0,9983342
0,I2	0,0039973	0,0832I34	0,005993I	0,0830935	0,0399424	0,49820I4	0,0599280	0,99760I7
0,I4	0,0046623	0,083I70I	0,006989I	0,0830070	0,0465753	0,4975527	0,0698857	0,9967365
0,I6	0,0053268	0,083I202	0,0079838	0,0829072	0,053I969	0,4968045	0,0798295	0,9957388
0,I8	0,0059907	0,0830636	0,0089769	0,082794I	0,0598058	0,4959573	0,0897573	0,9946087
0,20	0,0066540	0,0830004	0,0099683	0,0826679	0,0664004	0,4950III	0,099667I	0,9933467
0,22	0,0073I64	0,0829306	0,0I09578	0,0825284	0,0729790	0,4939662	0,I095570	0,99I9528
0,24	0,007978I	0,0828542	0,0II9452	0,0823758	0,079540I	0,4928230	0,II9425I	0,9904276
0,26	0,0086388	0,082771I	0,0I29304	0,08222I0I	0,0860822	0,49I58I7	0,I292693	0,98877I4
0,28	0,0092986	0,08268I5	0,0I39I3I	0,08203I2	0,0926036	0,4902426	0,I390877	0,9869845

Приложение

ϑ	$\alpha_1(\vartheta)$	$\alpha_2(\vartheta)$	$\beta_1(\vartheta)$	$\beta_2(\vartheta)$	$\gamma_1(\vartheta)$	$\gamma_2(\vartheta)$	$\eta_1(\vartheta)$	$\eta_2(\vartheta)$
0,30	0,0099572	0,0825853	0,0I4893I	0,08I8393	0,099I029	0,488806I	0,I488784	0,9850673
0,35	0,0II5988	0,0823I62	0,0I73305	0,08I3028	0,II52537	0,48479I3	0,I732208	0,9797080
0,40	0,0I3232I	0,0820063	0,0I97472	0,0806857	0,I3I2I22	0,480I77I	0,I973475	0,9735459
0,45	0,0I48560	0,08I6560	0,022I405	0,0799887	0,I469844	0,4749708	0,22I2287	0,966590I
0,50	0,0I64693	0,08I2654	0,0245076	0,0792I29	0,I625370	0,469I8I3	0,2448349	0,95885II
0,55	0,0I80709	0,080835I	0,0268456	0,0783593	0,I77847I	0,4628I82	0,268I372	0,9503404
0,60	0,0I96597	0,0803653	0,029I5I8	0,0774290	0,I928920	0,45589I9	0,29II073	0,94I0708
0,65	0,02I2346	0,0798565	0,03I4236	0,0764233	0,2076496	0,4484I4I	0,3I37I72	0,93I0560
0,70	0,0227944	0,079309I	0,0336582	0,0753435	0,2220983	0,440397I	0,3359397	0,9203II0
0,75	0,0243382	0,0787236	0,035853I	0,074I9I0	0,2362I7I	0,43I884I	0,3577482	0,90885I7
0,80	0,0258647	0,078I006	0,0380058	0,0729674	0,2499855	0,4227993	0,379II66	0,896695I
0,85	0,027373I	0,0774405	0,040II38	0,07I6743	0,2633837	0,4I32477	0,4000I98	0,8838593
0,90	0,0288622	0,0767440	0,042I746	0,0703I34	0,2763925	0,4032I50	0,4204334	0,8703632
0,95	0,03033II	0,0760II7	0,044I860	0,0688865	0,2889934	0,3927I78	0,4403336	0,8562268
I,00	0,03I7787	0,0752442	0,046I457	0,0673955	0,30II687	0,38I7733	0,4596977	0,84I47I0
I,05	0,033204I	0,0744422	0,04805I5	0,0658423	0,3I290I2	0,3703995	0,4785038	0,826II74
I,I0	0,0346065	0,0736064	0,04990I2	0,064229I	0,324I749	0,35865I5I	0,4967308	0,8I0I885
I,I5	0,0359847	0,0727375	0,05I6928	0,0625579	0,3349742	0,3464393	0,5I43587	0,7937077
I,20	0,0373380	0,07I8363	0,0534245	0,0608309	0,3452846	0,333992I	0,53I3685	0,7766992