ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Сборник трудов

1964 г. Института математики СО АН СССР Выпуск I3

ПИКОВАЯ НАДЕЖНОСТЬ ОДНОТАКТНЫХ СХЕМ

С.В. Макаров

Введение

В предыдущих работах [I],[2] анализ надежности логических схем производился в постановке задачи, которая может быть сформулирована следующим образом. Дана однотактная схема $\mathfrak{S}$, составленная из булевых переключательных элементов, имеющая несколько входов и один выход, на которых реализуется некоторая функция алгебры логики. На входы поступают случайные сигналы (наборы нулей и единиц) с известным распределением вероятностей. Для каждого из переключательных элементов схемы $\mathfrak{S}$ заданы вероятности наличия неисправностей известных типов. Требуется найти вероятность $P(\mathfrak{S})$ ошибки на выходе схемы в произвольном отдельно взятом такте. Величину $R(\mathfrak{S}) = 1 - P(\mathfrak{S})$ удобно называть *локальной надежностью* (ЛН) однотактной схемы $\mathfrak{S}$, а если, в частности, все входы схемы независимы и на каждом входе вероятность единицы есть I/2, то *локальной средней надежностью* (ЛСН).

Данная постановка задачи, а вместе с ней и определение надежности легко обобщаются для многотактных схем (см. [3],[4]).

Серьезным ограничением указанного подхода является требование достаточно полного задания вероятностных свойств входного потока, которое далеко не всегда можно выполнить при проектировании схем. Для потребностей проектирования логических схем целесообразно искать такие критерии надежности, какие можно было бы применять, не располагая достаточной информацией о входных потоках. Один из таких критериев ("пиковая надежность") предлагается ниже.

§ I. Основные предпосылки и определения

Пусть задана однотактная логическая схема $\mathfrak{S}$, состоящая из элементов a_i $(i=1,\ldots,m)$, каждый из которых реализует одну из логических операций: конъюнкцию $\&$, дизъюнкцию $\vee$ или отрицание $\neg$. Входы $\mathfrak{S}$ суть $x_1 \ldots x_n$. На выходе z схемы $\mathfrak{S}$ реализуется булева функция $f(x_1,\ldots,x_n)$.

Мы предполагаем, что возможностью наличия неисправности одновременно более чем в одном элементе можно пренебречь. Эта гипотеза справедлива, если вероятность неисправности в отдельном элементе мала и количество элементов схемы не слишком велико.

Следуя [I], будем называть ошибкой первого рода на выходе элемента a_i событие, состоящее в появлении на выходе a_i нуля, если при идеальной работе на том же выходе должна быть единица. Вероятность этого события обозначим ε_i. Аналогично, ошибка второго рода на выходе a_i есть появление на выходе a_i единицы вместо нуля. Вероятность этого события обозначим δ_i. Введем λ_i в качестве общего символа для ε_i и δ_i (так что в каждом конкретном случае λ_i равна либо ε_i, либо δ_i). Ошибку на выходе элемента a_i будем называть также сбоем в элементе a_i.

Пусть на входы $\mathfrak{S}$ подано слово $\tau = (\tau_1,\ldots,\tau_n)$. Тогда, как нетрудно видеть, в схеме $\mathfrak{S}$ всегда существует некоторое непустое множество элементов $S'(\tau)$, обладающее следующим свойством: сбой в любом из элементов $a_i \in S'(\tau)$ влечет за собой ошибку на выходе z схемы $\mathfrak{S}$ (z - ошибку). Последний элемент схемы всегда принадлежит $S'(\tau)$. Максимальное по количеству элементов (при фиксированном τ) множество $S'(\tau)$ обозначим $S(\tau)$. Тогда, очевидно, вероятность на выходе z равна:

$$P_\tau(\mathfrak{S}) = \sum_{a_i \in S(\tau)} \lambda_i \,, \tag{I}$$

причем λ_i равна либо ε_i, либо δ_i, в зависимости от того, какого рода ошибка на выходе элемента a_i возможна при данном τ. (Например, если $a_i = 0$, то $\lambda_i = \delta_i$, поскольку ошибка первого рода в этом случае невозможна).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Величина

$$T(\mathfrak{S}) = \max_{\tau} P_{\tau}(\mathfrak{S}) \qquad (2)$$

есть локальная пиковая ненадежность схемы $\mathfrak{S}$ (ЛПН).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Величина $\widetilde{R}(\mathfrak{S}) = 1 - \max_{\tau} P_{\tau}(\mathfrak{S}) = 1 - T(\mathfrak{S})$ есть локальная пиковая надежность (ЛПН) схемы $\mathfrak{S}$.

Слово τ, на котором достигаются экстремумы (2) и (3), (таких слов может быть несколько) есть критическое слово (КС), или наихудший режим однотактной схемы $\mathfrak{S}$.

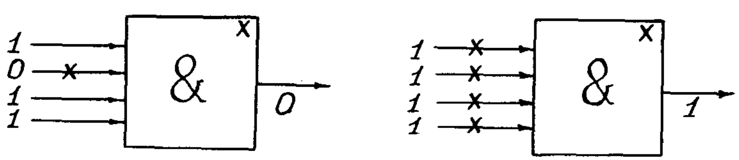
Предположим, проектировщик имеет перед собой несколько одинаковых по стоимости вариантов схемы $\mathfrak{S}$: $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_N$, реализующих одну и ту же булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$. Если о вероятностных свойствах входных потоков, какие будут иметь место при практическом использовании схем, ничего неизвестно, то мы предлагаем принять к изготовлению тот вариант $\mathfrak{S}_i$, для которого ЛПН максимальна. ("Принцип наилучшей работы в наихудшем режиме").

Сравнивая критерии $\widetilde{R}(\mathfrak{S})$ и $R(\mathfrak{S})$, мы видим, что $\widetilde{R}(\mathfrak{S})$ является нижней оценкой для $R(\mathfrak{S})$.

§ 2. Алгоритм отыскания $S(\tau)$

При фиксированном τ множество $S(\tau)$ отыскивается следующим образом. Схему $\mathfrak{S}$ упорядочим по ярусам [I]. Единственный элемент последнего яруса a_z отметим крестиком. Дальше поступаем в зависимости от того, каков этот элемент ($\&$, $\vee$ или $\neg$), и от того, какие сигналы поданы на его входы.

I. a_z - конъюнкция



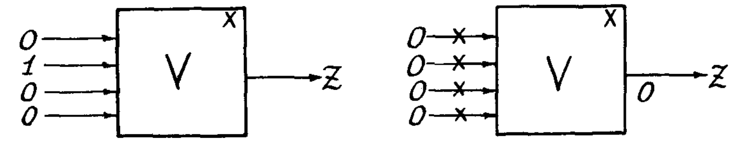
а б

Рис. I

Если на входы a_z подан только один нуль, то соответствующий входной канал отмечаем крестиком (рис. I,а). Если на входы a_z поступают только единицы, то все входные каналы отмечаем крестиками (Рис. I,б).

Во всех остальных случаях никаких каналов не отмечаем. Ясно, что для возникновения ошибки на выходе a_z достаточно единственного сбоя в каком-нибудь одном отмеченном канале. Неотмеченные каналы таким свойством не обладают. (Напомним, что кратными неисправностями мы условились пренебрегать).

2. a_z - дизъюнкция



а Рис. 2 б

Если на входы a_z подана только одна единица, то канал, по которому она подается, отмечаем крестиком. Если по всем входным каналам подаются нули, то отмечаем все входы a_z (рис. 2а и б). В остальных случаях никаких входов не отмечаем.

3. a_z - инвертор

Вход a_z отмечаем крестиком. Отмеченные таким образом каналы назовем существенными, причем будем пользоваться этим понятием при рассмотрении любого элемента схемы (а не только последнего). Существенный вход элемента, по определению, обладает тем свойством, что сбой только на этом входе (при правильных сигналах на других входах) приводит к ошибке на входе элемента.

Предположим, что мы отметили один или несколько каналов. Тогда отмечаем крестиками все элементы схемы $\mathfrak{S}$, из которых выходят отмеченные каналы. Затем рассматриваем каждый отмеченный элемент и аналогичным образом, руководствуясь правилами I-3, поступаем с каждым из его входных каналов. Эту процедуру надлежит повторять до тех пор, пока окажется невозможным, действуя, как указано выше, расширить множество отмеченных элементов $S^*(\tau)$.

На этом первый этап алгоритма заканчивается.

На втором этапе рассматриваем элементы, принадлежащие предыстории $\mathfrak{M}(S^*)$ множества $S^*(\tau)$, т.е. элементы, предшествующие хотя бы одному элементу из $S^*(\tau)$ и не принадлежащие $S^*(\tau)$. (Определение предыстории см. в [I]).Сначала возьмем такие элементы $b_j \in \mathfrak{M}(S^*)$, какие непосредственно предшествуют элементам из $S^*(\tau)$. Фиксируем один из них,например, b_1. Поскольку τ задано, то этим предопределено значение на выходе b_1. Изменяем это значение на противоположное и непосредственной проверкой устанавливаем, приводит ли это изменение к ошибке на выходе z схемы G. Если z - ошибка возникает, то элемент отмечаем крестиком и применяем к нему (и, если окажется возможным, к предшествующим ему элементам из $\mathfrak{M}(S^*)$) процедуру первого этапа. Если z - ошибки нет, то элемент b_1 не отмечаем. Так исследуем все элементы b_j. Все вновь отмеченные элементы из $\mathfrak{M}(S^*)$ (если они есть) присоединяем к S^* и для расширенного таким образом множества S^* повторяем процудуру второго этапа. Если при исследовании элементов b_j не появилось дополнительных отмеченных элементов, то образуем объединение множеств

$$\tilde{S}^* = \{b_j\} \cup S^* \qquad (4)$$

и предысторию этого объединения обозначим $\mathfrak{M}(\tilde{S}^*)$. Пусть $\{c_j\}$ есть множество элементов из $\mathfrak{M}(\tilde{S}^*)$, непосредственно предшествующих элементам из $\tilde{S}^*$. Исследуем c_j точно так же, как были исследованы b_j. При этом могут появиться вновь отмеченные элементы. Присоединим их к S^* и к расширенному таким образом множеству S^* применим процедуру второго этапа. Если вновь отмеченных элементов не появилось, образуем объединение

$$\{c_j\} \cup \{b_j\} \cup S^* \qquad (5)$$

и далее поступаем совершенно аналогично (как и после образования $\tilde{S}^*$). Процесс заканчивается в двух случаях: I) если после очередного шага окажется, что S^* совпадает с G; 2) если не останется ни одного элемента $a_i \in G$, к которому не применялась бы процедура первого этапа. В силу конечности схемы G описанный алгоритм всегда имеет конец.Очевидно,что S^* после окончания алгоритма должно совпадать с $S(\tau)$.

Необходимость (в общем случае) второго этапа вызвана тем, что одиночный сбой в каком-либо элементе схемы может привести к появлению ошибочных значений сразу в нескольких шкалах,входящих в некоторый последующий элемент схемы, что, в свою очередь, может стать причиной z -ошибки.

§ 3. Алгоритмы отыскания наихудшего режима

I. Тривиальный алгоритм состоит в построении множеств $S(\tau)$ для всех τ с последующим нахождением экстремальной оценки $\tilde{R}(G)$. Порядок перебора возрастает пропорционально 2^n (n - число независимых переменных функции $f(x_1,\dots, x_n)$).

II. Метод Монте-Карло; множества $S(\tau)$ отыскиваются для случайной выборки слов τ.

Для частных случаев можно указать более эффективные способы поиска наихудшего режима. Кратко опишем два из них.

III. $\varepsilon_i = \varepsilon = const$, $\delta_i = 0 (i=1,2,\dots,m)$, ε - малая величина.

На выходе каждого элемента $a_i \in G$ (до разветвлений) ставим фиктивную конъюнкцию с двумя входами (Рис. 3,а,б). Один из входов есть выход a_i, другой есть новый вход схемы в целом, описываемый новой независимой булевой переменной e_i, для которой ε есть вероятность обращения в нуль.

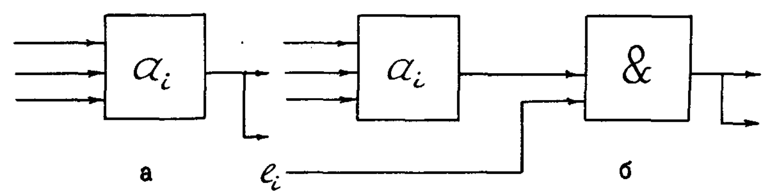


Рис. 3

Добавив фиктивные конъюнкции, мы получим некоторую новую схему G' с булевой функцией $\mathcal{F}(x_1,\dots,x_n, e_1,\dots, e_m)$. Функцию $\mathcal{F}$ мы назовем и м и т а ц и е й неидеальной схемы G.

Пусть при некотором входном слове выполняется $f(x_1,\dots,x_n) = 1$, а имитация $\mathcal{F}$ обращается (точно или приближенно, с точностью до пренебрежимо малых вероятностей) в терм вида:

$$e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k} \qquad (6)$$

Среди всех τ, обладающих указанными свойствами, выберем такое, для которого терм вида (6) содержит максимальное количество букв. Для практического осуществления этого выбора иногда полезно разложить имитацию в дизъюнктивную нормальную форму (ДНФ) относительно термов вида (6) с коэффициентами, зависящими от $x_1,\dots, x_n$. Максимальное количество букв в выделенном терме вида (6) обозначим через ν_1, а выделяющее его слово через $\{\tau_1\}$. Затем ищем слово $\{\tau_2\}$, при котором $f(x_1,\dots x_n)=0$, а имитация $\mathcal{F}$ обращается (точно или с точностью до пренебрежимо малых вероятностей) в терм.

$$y_1 y_2 \cdots y_k \qquad (7)$$

(черта сверху означает отрицание) с максимально возможным количеством букв ν_2. Найдем $\nu = max(\nu_2, \nu_2)$ и будем говорить, что *схема* $\mathcal{G}$ *имеет слабости не более чем* ν *-порядка*, причем *максимальный порядок слабости* ν достигается при $KC=\{\tau\}$, равно τ_1 или τ_2, смотря по тому, выполняется ли $\nu=\nu_1$ или $\nu=\nu_2$; (возможно также, что $\nu_1=\nu_2$ и $\tau_1=\tau_2=\tau$). Как $\{\tau_1\}$, так и $\{\tau_2\}$ могут иметь несколько значений. Терм вида (6) или (7) с ν буквами назовем *максимальным термом ошибок*.

Множество элементов, номера которых входят в качестве индексов в максимальный терм ошибок, обладает очевидным свойством: сбой первого рода в любом из элементов этого множества влечет z -ошибку. Ясно, что справедливы следующие равенства:

$$T(\mathcal{G}) = \nu\,\varepsilon \;, \qquad (8)$$

$$\tilde{R}(\mathcal{G}) = 1 - \nu\,\varepsilon \;. \qquad (9)$$

Наибольшей пиковой надежностью среди эквивалентных схем обладают схемы с минимальным ν.

ПРИМЕР. На рис. 4 изображена схема с булевой функцией

$$f = \overline{A(BD \vee \bar{B}C\bar{D})}\;\overline{\bar{A}(BC \vee \bar{B}\bar{C}D)}\,,$$

ее имитация

$$\mathcal{F} = \overline{A(BDe_6 \vee \bar{B}C\bar{D}e_2e_5e_7)e_9e_{11}}\;\overline{\bar{A}e_1(BCe_3 \vee \bar{B}\bar{C}De_2e_4e_8)e_{10}e_{12}}\,e_{13}e_{14}e_{15}$$

(индексы I-I5 суть номера элементов и в то же время номера фиктивных конъюнкций).

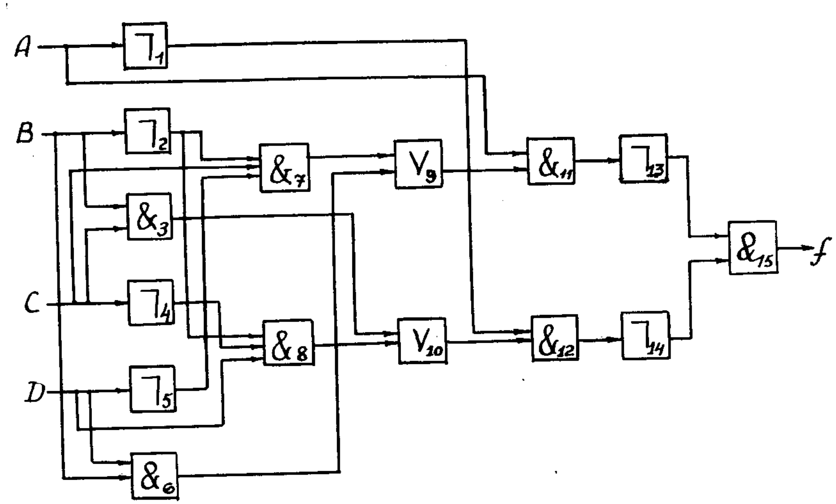


Рис. 4

Легко видеть, что $\nu_1 = 3$ (достигается, например, на слове (0, 0, 0, 0)), а $\nu_2 = 6$ (достигается на слове (0,0,0,I)). Максимальный порядок слабости $\nu = 6$.

IУ. $\varepsilon_i = \delta_i = \varepsilon$ (Сбои первого и второго рода в каждом элементе равновероятны).

Предварительно найдем для каждого элемента $a_i \in \mathcal{G}$ вес предыстории ϑ_i (т.е. количество элементов, предшествующих данному, включая сам элемент a_i (см. [I]). Тот же вес,по определению, имеет канал, выходящий из a_i.

Алгоритм состоит из двух частей.

Первая часть. Полагаем $z=0$. Последний элемент a_z схемы отмечаем крестиком. Проверим допустимость этой гипотезы, т.е. установим, имеет ли уравнение

$$a_z = f(x_1, \dots, x_n) = 0 \qquad (I0)$$

хотя бы одно решение. (Находить решение для наших целей не обязательно). Для проверки (I0) можно указать разные методы, на которых мы не будем останавливаться. Отметим лишь,что представление функции f в дизъюнктивной нормальной форме (ДНФ) может быть полезным, поскольку по ДНФ нетрудно усмотреть, обращается ли она в тождественный нуль. Близкий круг вопросов изучен в [5].

Если (I0) не приемлемо, переходим ко второй части алгоритма. Если же (I0) приемлемо, то исследуем входы $\ell_1, \ldots, \ell_s$ элемента α_z. Пусть $(\tau_1', \ldots, \tau_s')$ есть набор нулей и единиц на соответствующих входах. Рассмотрим уравнение

$$\ell_1^{\tau_1'} \ell_2^{\tau_2'} \ldots \ell_s^{\tau_s'} \cup \mathcal{H} = 1 . \qquad (II)$$

Символ $\mathcal{H}$ обозначает логическую функцию, эквивалентную совместному выполнению всех ранее принятых гипотез. На данном шаге $\mathcal{H} \sim (\alpha_z = 1)$.

Пусть θ есть множество наборов $(\tau_1', \ldots, \tau_s')$, для которых справедливо (II). Для каждого набора из θ некоторое количество входов может оказаться существенными (в смысле определения из § 2). Выбираем среди наборов θ такой, для которого вес предыстории объединения существенных входов максимален – $(\tilde{\tau}_1' \tilde{\tau}_2', \ldots, \tilde{\tau}_s')$ (Если существует несколько таких наборов, то выбираем любой из них).

Соответствующие существенные выходы отмечаем крестиками, а равенство (II) при $\tau_i' = \tilde{\tau}_i'$ $(i = 1, \ldots, s)$ принимаем в качестве новой гипотезы. Значения, составляющие набор $\{\tilde{\tau}_i\}$, назовем в ы н у ж д е н н ы м и. Отметим крестиками все элементы, из которых выходят отмеченные каналы. (Входы схемы $\mathcal{G}$ не отмечаем). Множество отмеченных элементов обозначим S'. (На первом шаге оно состоит только из α_z). Если на очередном шаге не появляется новых отмеченных элементов, то переходим ко второму этапу. Если есть новые отмеченные элементы, то присоединяем их к S' и переходим к рассмотрению совокупности $(\ell_1, \ldots, \ell_s)$ каналов, являющихся входными по отношению к элементам из S'. Повторяем все операции данного этапа применительно к новому набору $(\ell_1, \ldots, \ell_s)$. Исследуем условие вида (II), причем теперь $\mathcal{H}$ должно включать все до сих пор сделанные предположения о значении отдельных каналов. Отмечаем, если возможно, новые каналы и элементы и присоединяем отмеченные элементы к S'. Если на очередном шаге не появилось новых отмеченных элементов, переходим ко второму этапу.

Заметим, что на каждом шаге часть каналов из набора $(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_s)$ может иметь вынужденные значения, обусловленные более ранними гипотезами.

На втором этапе всем каналам схемы $\mathcal{G}$, которым на первом этапе не были приданы никакие значения, приписываем любые значения не противоречащие (в совокупности) ранее сделанным

гипотезам, и, таким образом, строим КС. Затем каждый из неотмеченных элементов исследуем так же, как на втором этапе алгоритма поиска наихудшего режима (§ 2), т.е. проверяем, не может ли одиночный сбой в неотмеченном элементе повлечь за собой кратную ошибку на входах некоторого последующего элемента и далее z -ошибку. Каждый элемент, для которого такое событие возможно, отмечаем крестиком, и к его предыстории применяем операции первого этапа. Все вновь отмеченные элементы тотчас же присоединяем к S'. Количество элементов S' после окончания первой части алгоритма обозначением ν_1 и будем называть м а к с и м а л ь н ы м п о р я д к о м с л а б о с т и с х е м ы $\mathcal{G}$ при $z = 0$, достигаемым на построенном нами КС.

<u>Вторая часть</u>. Полагаем $z = 1$ и с небольшими видоизменениями повторяем все операции первой части. Находим ν_2 – максимальный порядок слабости $\mathcal{G}$ при $z = 1$ (достигаемый на некотором другом КС).

Наконец, находим $\nu = max(\nu_1, \nu_2)$ и эту величину считаем м а к с и м а л ь н ы м п о р я д к о м с л а б о с т и с х е м ы $\mathcal{G}$. По формуле (9) находим пиковую надежность $\tilde{R}(\mathcal{G})$.

ПРИМЕЧАНИЕ. На втором этапе алгоритма расстановка нулей и единиц по невынужденным каналам может быть выполнена, вообще говоря, многими способами, которые могут приводить к различным наборам S', а значит, и к разным значениям ν. Для получения $\tilde{R}(\mathcal{G})$ следует брать максимальное ν.

Замечание о распространении метода пиковой надежности на многотактные схемы

Если дано несколько эквивалентных многотактных схем, имеющих мало рабочих состояний, то все вышеизложенное применимо к сравнительному анализу их надежности. Для этого надо вычислять ЛПН для каждого рабочего состояния и в качестве характеристики схемы брать минимальное значение ЛПН. Схема с максимальной характеристикой будет, в смысле пиковой надежности, предпочтительнее остальных.

Но при большом количестве состояний оценка ЛПН может потерять практический смысл, так как может оказаться, что состояние, дающее минимальное значение ЛПН, встречается весьма редко в процессе работы схемы при любом потоке на входах. Кроме того, объем вычислений возрастает пропорционально количеству состояний. Поэтому мы можем рекомендовать метод пиковой надежности только для сравнительного анализа надежности схем с малой памятью.

Литература

I. Макаров С.В. Вероятностные расчеты однотактных схем. Вычислительные системы. Сб. трудов, Новосибирск, 1962, вып. 4, 29-50 (Ин-т математики Сиб. отд. АН СССР).

2. Мерекин Ю.В. Решение задач вероятностного расчета однотактных схем методом ортогонализации. Вычислительные системы. Сб. трудов, Новосибирск, 1963, вып. 5, 10-21. (Ин-т математики Сиб. отд. АН СССР).

3. Макаров С.В. О надежности многотактных схем с малой памятью. Вычислительные системы. Сб. трудов, Новосибирск, 1963, вып. 5, 3-9. (Ин-т математики Сиб. отд. АН СССР).

4. Макаров С.В. Метод моментов для вероятностных расчетов многотактных схем. Вычислительные системы. Сб. трудов, Новосибирск, 1963, вып. 7, 3-12. (Ин-т математики Сиб. отд. АН СССР).

5. Базилевский Ю.Я. Преобразование и решение логических уравнений. В сб. "Вопросы теории математических машин", вып. 2, М., 1962.