В Ы Ч И С Л И Т Е Л Ь Н Ы Е   С И С Т Е М Ы

Сборник трудов
1964 г. Института математики СО АН СССР Выпуск I4

О ЧАСТОТЕ ОТСЧЁТОВ СЛУЧАЙНОЙ ФУНКЦИИ ПРИ КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНОМ АНАЛИЗЕ

Г.Я. Воломин

При корреляционном и спектральном анализе случайных функций (в частности, речевых сигналов) на ЭВМ весьма существенное значение имеет правильный выбор частоты квантования. С точки зрения экономии памяти и сокращения машинного времени анализа выгодно уменьшать частоту отсчетов. Но при этом возрастают погрешности анализа.

В некоторых работах (например, [I], стр. 453, [2], стр.56I) рекомендуется выбирать частоту отсчетов так, чтобы на полный период самой высокочастотной гармоники в составе случайной функции приходилось 5-I0 точек. Однако, в ряде частных случаев такая цифра может оказаться завышенной.

Строго говоря, частота отсчетов определяется не только характеристиками случайной функции и допустимой погрешностью [3], но и методом обработки этой функции [4]. В тех случаях, когда заранее известны характеристики случайной функции и методы её обработки, можно выбрать минимально допустимую частоту квантования при заданной погрешности анализа. Покажем это на примере речевых сигналов.

Согласно теореме Котельникова для функций с ограниченным спектром частота квантования должна быть по крайней мере равна удвоенной верхней частоте спектра исследуемого сигнала.Теоретически не существует функций с ограниченным спектром. Поэтому при любой частоте квантования исходная функция будет восстановлена при помощи ряда Котельникова с некоторой погрешностью [3]. В работе [4] дается формула для частоты квантования случайной функции, подвергаемой корреляционно-спектральному анализу на ЭВМ

$$f_{кв} \geqslant 2F_{max} + \frac{0{,}07}{\tau_0 |\varepsilon_в|}, \qquad (\mathrm{I})$$

где $f_{кв}$ – частота квантования,
F_{max} – максимальная частота спектра случайной функции,
τ_0 – время наблюдения случайного сигнала,
$\varepsilon_в$ – допустимая среднеквадратическая погрешность восстановления исходной функции по дискретным отсчетам при помощи ряда Котельникова.

Для простоты рассуждений допустим, что $f_{кв} = 2F_{max}$. Пусть при спектральном анализе мы восстанавливаем функцию прямоугольниками, а не рядом Котельникова. Какова при этом будет погрешность расчета спектра? Наибольшие погрешности будут иметь место при нахождении спектральной плотности на максимальной частоте F_m, так как на один период этой составляющей приходится только два отсчета.

Пусть $f(t) = \sin\omega_m t$, где $\omega_m = 2\pi F_m$. Для упрощения рассуждений предположим, что на анализируемом участке τ_0 укладывается целое число n периодов функции $f(t)$. Тогда $B(\tau) \sim \cos\omega_m\tau$ и $\theta(\omega_n) \int_0^{\tau} \cos^2\omega_m \tau\, d\tau =$

$$= \int_0^{2n\pi} \cos^2\omega_m\tau\, d\tau \qquad (2)$$

Здесь $B(\tau)$ – автокорреляционная функция, $\theta(\omega_m)$ – энергия сигнала, приходящаяся на максимальную частоту.
Таким образом, интегрируемая функция имеет вид:

$$\varphi(x) = \cos^2\omega_m\tau.$$

На один период функции $\varphi(x)$ приходится один отсчет, так как период этой функции вдвое меньше периода $T = \frac{1}{F_m}$. Расстояние между отсчетами равно $\frac{1}{2}T = \frac{1}{2F_m} = T\varphi(x) = \pi$, где $T\varphi(x)$ – период функции $\varphi(x)$. В этом случае

$$\int_0^{2n\pi} \cos^2 x\, dx \simeq \pi \sum_{k=1}^{2n} \cos^2 x_k, \qquad (3)$$

где x_k – моменты отсчета функций $\sin^2 x$. Одно слагаемое выражения (3) может изменяться в пределах от 0 до π, в то время как истинное значение интеграла (2) при $n=1$ равно $\frac{\pi}{2}$. Таким образом, погрешность R каждого слагаемого в выражении (3) заключена в пределах от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$.

В связи с тем, что частота отсчетов и F_m, строго говоря, не кратны (см. формулу (I)), а также учитывая, что частота и фаза речевого сигнала флуктуируют, можно считать положение точки отсчета относительно фазы исходной функции случайным с равномерным распределением. В процессе суммирования при большом n результат усредняется, вследствие чего ошибка R будет уменьшаться. Использование этого эффекта в целях уменьшения числа отсчетов при определении общей энергии сигналов описано в работе [5] x)

Итак, задача ставится следующим образом:
Имеется функция $\varphi(x) = \cos^2 x$, существующая в интервале значений x от 0 до $2n\pi$, где $2n$ – число отсчетов, приходящееся на участок, протяжённостью τ_0. На каждый период функции $\varphi(x)$ приходится один отсчет. Положение точки отсчета относительно фазы сигнала $\varphi(x)$ случайно (распределение равномерное). Требуется определить погрешность расчета определенного интеграла (I) по приближённой формуле (3).

Эту задачу можно поставить в несколько изменённом виде. Функция $\varphi(x)$ задана на участке от 0 до $2n$. На этом участке производится $2n$ случайных отсчетов функции $\varphi(x)$ (закон распределения точек отсчетов по оси x – равномерный). Затем величины $2n$ отсчетов усредняются, и результат используется для приближённого расчета определенного интеграла. Требуется определить погрешность этого расчета.

К такой постановке задачи можно прийти, разделив левую и правую части соотношения (3) на $2n$. Действительно,

$$\frac{\int_0^{2n\pi} \cos^2 x\, dx}{2n} = \int_0^{\pi} \cos^2 x\, dx = \frac{\sum_{k=1}^{2n} \cos^2 x_k}{2n}$$

Характеристики исходной случайной функции нам известны:

I) математическое ожидание $M[X] = m = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}$;

2) дисперсия $D[X] = M[(X-m)^2] = \frac{1}{4}\int_0^{\pi} (\cos^2 x - \frac{1}{2})^2 dx = \frac{1}{8}$.

Математическое ожидание явилось бы тем значением отсчета функции, при котором интеграл (I) был бы вычислен без погреш-

x) Исправляя опечатку, в формулах для определения n в работе [5] стр. 45 следует вместо n читать $\sqrt{n}$.

ностей. В результате $2\cdot n$ испытаний мы получаем оценку для математического ожидания

$$\tilde{m} = \frac{\sum\limits_{K=1}^{2n} X_i}{2n}.$$

Требуется построить доверительный интервал, соответствующий доверительной вероятности β, для математического ожидания m величины X.

В связи с тем, что величина $\tilde{m}$ представляет собой сумму $2n$ независимых одинаково распределённых случайных величин X_i, то, согласно центральной предельной теореме, при достаточно большом $2n$ её закон распределения близок к нормальному. Характеристики этого закона – математическое ожидание и дисперсия – равны соответственно (см. [I])

$$M[\tilde{m}] = m = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad D[\tilde{m}] = \frac{D[X]}{2n} = \frac{1}{8\cdot 2n}. \qquad [I]$$

Определим вероятность того, что $\tilde{m}$ будет отличаться от m не больше чем на δ:

$$P(|\tilde{m} - m| < \delta) = \beta \qquad (4)$$

Для нормального закона вероятность (4) выражается через функцию Лапласа:

$$P(|\tilde{m} - m| < \delta) = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma[\tilde{m}]\sqrt{2}}\right)$$

Из уравнения $\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma[\tilde{m}]\sqrt{2}}\right) = \beta$ находим $\delta = \sigma[\tilde{m}]\sqrt{2}\,\Phi^{-1}(\beta)$,

где $\sigma[\tilde{m}] = \sqrt{D[\tilde{m}]}$, $\Phi^{-1}(\beta)$ – функция, обратная функции Лапласа, т.е. такое значение аргумента, для которого функция Лапласа равна β. Обозначим $2n$ через h.

Тогда

$$\delta = \sigma[\tilde{m}]\sqrt{2} \quad \Phi^{-1}(\beta) = \frac{\Phi^{-1}(\beta)}{2\sqrt{h}}. \qquad (5)$$

Речевой сигнал имеет максимальную частоту $F_m \approx 10$ кгц. Время интегрирования τ_0 для речевых сигналов выбирать меньше 8 мсек нецелесообразно, так как инфразвуковая часть спектра звуков речи ограничивается верхней частото ~(50–60) гц (см. [5]). Согласно формуле (I), при $|\mathcal{E}_6| = 0{,}0I$ $f_{кв}$ = 2I кгц.

При этом $h = f_{кв}\cdot\tau_0 = 170$

Допустим, что β = 0,9. По таблице [I] определяем δ = 0,044. Истинное значение искомого отсчёта равно $\frac{1}{2}$. Следовательно, от-

носительная погрешность $\varepsilon = \frac{\delta}{1/2} = 0{,}088$

Для

$$\beta = 0{,}95 \quad \varepsilon = 0{,}106\ ; \text{ для } \quad \beta = 0{,}99 \quad \varepsilon = 0{,}139$$

Таким образом, при расчете спектральной плотности речевого сигнала на максимальной частоте 10 кгц при $\tau_0 = 8$ мсек и $f_{кв} = 21$ кгц погрешность более 8,8% встретится в I0 случаях из I00, более I0,6% – в 5 случаях из I00, более I3,9% – в I случае из I00. На более низких частотах погрешность будет меньше, так как число отсчетов остается тем же самым, а пределы изменения погрешности и ее дисперсия уменьшаются.

В таблице и на рис. I приведены результаты расчета погрешностей корреляционно-спектрального анализа на разных частотах при $\tau = 8$ мсек, $F_m = 10$ кгц и $f_{кв} = 21$ кгц. Для численного интегрирования использованы формулы прямоугольников.

Т а б л и ц а.

β \ f кгц	I0	9	8	7	6	5	4	3	2	I
0,9	8,3	6,8	5,6	3,9	0	0,07	0,07	0	0	0
0,95	9,9	8,0	6,7	4,7	0	0,I5	0,I5	0	0	0
0,99	I4,0	II,4	9,2	6,5	0	0,3	0,3	0	0	0
0,997	I5,5	I3,0	I0,5	7,5	0	0,45	0,45	0	0	0

Строки соответствуют разным β, столбцы–различным частотам, в клетках записаны величины погрешностей в %.

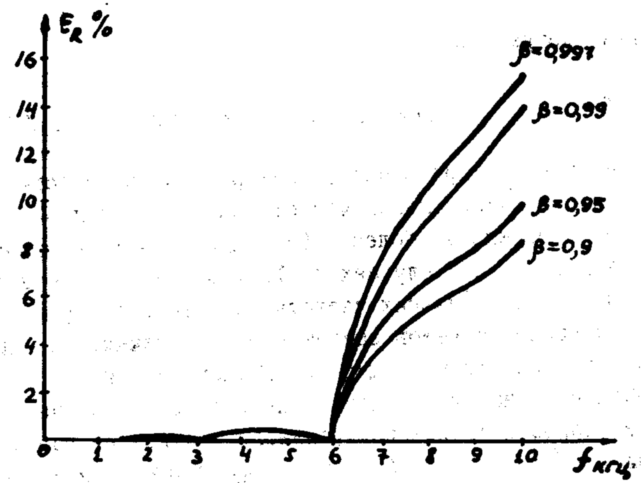

Рис. I

Таким образом, при корреляционно-спектральном анализе речевых сигналов достаточно иметь ~ 2 отсчета на период самой высокочастотной составляющей. Погрешность уменьшается при уменьшении частоты исследуемого сигнала и возрастании h (см. (5)). Увеличить h можно двумя способами:

а) увеличением частоты квантования и

б) увеличением времени наблюдения сигнала τ_0 .

Литература

I. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. ФМ, Москва, 1962.
2. Пугачёв В.С. Теория случайных функций. ФМ, Москва, 1962.
3. Турбович И.Т. Метод близких систем и его применение для создания инженерных методов расчета линейных и нелинейных радиотехнических систем. АН СССР, 1961.
4. Волошин Г.Я. Спектральный анализ речевых сигналов с помощью ЭВМ. Сб. тр. "Вычислительные системы", вып. 10, г. Новосибирск, 1964.
5. Загоруйко Н.Г. Погрешности вычисления энергии и огибающей речевого сигнала на ЭВМ. Сб. тр. "Вычислительные системы", вып. 10, г. Новосибирск, 1964.
6. Волошин Г.Я. К вопросу об инфразвуковом анализе речевых сигналов. Проблемы автоматического распознавания образов (материалы научного семинара). КВАИУ, Киев, 1964.