ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

1965 г. Сборник трудов Института математики СО АН СССР Выпуск I8

О ПОСТРОЕНИИ КРАТЧАЙШИХ СОЕДИНЕНИЙ

В.А. Тюренков

Введение

Известно, что при проектировании монтажных схем радиоэлектронной аппаратуры, при создании вычислительных систем [I], при настройке вычислительной среды [2] и т.д. возникают задачи, в которых требуется найти оптимальное (в каком-либо смысле) расположение заданных объектов и путей между этими объектами в некотором метрическом пространстве. Такие задачи обычно называются *задачами раскладки*. Наиболее простая задача раскладки - построение трассы[x)] между двумя подграфами некоторого графа. Методы её решения, удобные для машинизации, описаны, например, в [3] и [4]. Одна из наиболее сложных задач раскладки - размещение элементов и проводящих путей на ячейке, панели и стойке ЦВМ при проектировании монтажных схем[xx)]. Сложность её объясняется обилием и

x) *Трассой* между подграфами $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ графа $\mathcal{G}$ называется путь в графе $\mathcal{G}$ между подграфами $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$, имеющий минимальное количество рёбер.

xx) Монтажные схемы принадлежат к классу сложных систем. Предлагаемый в настоящем введении путь решения задачи размещения элементов и проводников вытекает из общей методики разработки сложных систем [5].

противоречивостью[x)] требований, предъявляемых к монтажным схемам современных универсальных ЦВМ. В отечественных [6], [7, 8] и зарубежных [9 - I3] работах предлагаются некоторые методы решения на ЦВМ задачи размещения элементов и проводящих путей. Как правило, в этих работах изложение в значительной степени основано на содержательных представлениях. Такой подход на первых порах разработки методов для решения сложных задач раскладки является естественным. Но для разработки эффективных и в то же время достаточно общих методов требуется более широкое применение математического аппарата. Отсюда возникает необходимость формализации задачи размещения элементов и проводящих путей. В настоящее время не представляется возможным полностью формализовать её в силу сложности такой задачи. Однако существуют связанные с нею частные задачи, легко поддающиеся формализации. Формализовав эти частные задачи и разработав методы их решения, можно будет подойти к формализации и эффективным методам решения задачи в целом.

В настоящей статье на основе математизации понятия "элементарная монтажная схема" разработан один метод построения кратчайших соединений на плате печатного монтажа. В дальнейшем планируется публикация других статей по вопросам математизации задач раскладки, связанных с размещением элементов и проводящих путей.

§ I. Описательная постановка задачи

Содержательный смысл нематематического понятия *монтажная схема*[xx)] предполагается общеизвестным.

x) При разработке монтажных схем эти требования диктуются необходимостью [6]:

I) уменьшить возможность сбоев при работе устройства,
2) уменьшить стоимость устройства,
3) увеличить срок службы элементов,
4) использовать более простую технологию монтажа,
5) сделать более удобной эксплуатацию самого устройства.

Нетрудно видеть, что эти цели противоречивы.

xx) В дальнейшем речь идет только о *плоских печатных* монтажных схемах.

При постановке задачи размещения печатных проводников на монтажной схеме необходимо задать:

I. конечное множество $Q=\{P_1, P_2, \ldots\}$ конфигураций (под к о н ф и г у р а ц и я м и можно понимать клеммы, печатные проводники или некоторые совокупности клемм и печатных проводников, уже размещенных раньше);

2. конечное множество Q_0 "запретных" зон;

3. разбиение множества Q на классы:
$Q=\bigcup\limits_{q=1}^{k} Q_q$, $Q_q \cap Q_j = \Lambda$, где $1 \leq q < j \leq k$ и Λ – символ пустого множества;

4. множество положительных чисел $d_{qj} (1 \leq q < j \leq k)$ таких, что расстояние между конфигурациями классов Q_q и Q_j не меньше числа d_{qj} ;

5. множество положительных чисел d_{0j} $(1 \leq j \leq k)$ таких, что расстояние между запретными зонами множества Q_0 и конфигурациями класса Q_j не меньше числа d_{0j} .

Недостающие печатные проводники необходимо провести так, чтобы I) все конфигурации, относящиеся к классу $Q_q (1 \leq q \leq k)$, были соединены между собой (непосредственно или через другие конфигурации этого же класса) и 2) для каждых двух различных классов Q_q и Q_j $(0 \leq q < j \leq k)$ расстояние между конфигурациями класса Q_q и соединяющими их проводниками (или между запретными зонами , если $q=0$) с одной стороны , и между конфигурациями класса Q_j и соединяющими их проводниками – с другой стороны , было бы не меньше числа d_{qj}.

Обозначим через b_q и $b_j (1 \leq q < j \leq k)$ толщину реальных проводников. Так как последнюю и минимальное допустимое расстояние ρ_{qj} между проводниками можно учесть путем надлежащего подбора чисел d_{qj} , полагая $d_{qj} = \frac{b_q}{2} + \rho_{qj} + \frac{b_j}{2}$, то в дальнейшем под проводниками будем понимать линии, не имеющие толщины, а под клеммами – точки.

В качестве примера приведем монтажную схему $\mathcal{E}_1$ (см. рис. I). На ней три класса конфигураций обозначены римскими цифрами I, II и III, клеммы – точками (черными кружочками), проводники – жирными линиями. Каждый класс конфигураций схемы $\mathcal{E}_1$ состоит из трех конфигураций. Например, к конфигурациям I класса относятся печатный проводник a вместе с тремя клеммами, соединяемыми этим проводником, клемма $б$ и клемма $в$. Заштрихована и покрыта пунктирными линиями та часть плоскости, на которой можно располагать проводники. Таким образом,

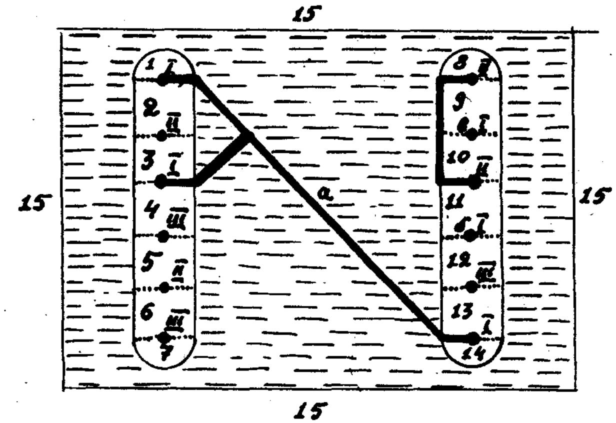

Рис. I. Монтажная схема $\mathcal{E}_1$.

монтажная схема $\mathcal{E}_1$ имеет I5 запретных зон: I4 внутренних, обозначенных цифрами I,2,...,I4, и одну внешнюю – всю плоскость, кроме заштрихованной части и зон I ÷ I4 (для простоты мы в этом примере считаем, что $d_{01} = d_{02} = d_{03} = 0$).

Всю плоскость, кроме запретных зон, будем называть п л а т о й монтажной схемы. Например, платой монтажной схемы $\mathcal{E}_1$ является вся часть плоскости, покрытая на рис. I штрихами, пунктирами и жирными линиями.

Монтажную схему будем называть э л е м е н т а р н о й (э.м. схемой), если множество её конфигураций состоит из одного класса (т.е. $k=1$) и $d_{01}=0$.

Задача поиска соединений между конфигурациями монтажной схемы сводится к задаче поиска соединений между конфигурациями э.м. схемы. В самом деле, пусть на монтажной схеме $\mathcal{E}_1$ нам нужно соединить конфигурации II класса. Тогда конфигурации I и III классов, а также запретные зоны следует окружить дополнительными запретными зонами, толщина которых равна, соответственно, d_{12}, d_{23} и d_{02} . После этого мы получим э.м. схему $\mathcal{E}_2$, изображённую на рис. 2 (в рассматриваемом случае мы считаем, что $d_{12} = d_{23} = 4$ мм, $d_{02} = 0$). Э.м. схема $\mathcal{E}_2$ имеет 5 запретных зон. Штриховкой, пунктирами и жирными линиями на рис. 2 обозначена плата э.м. схемы $\mathcal{E}_2$ (проводник II–II также является частью платы). Очевидно, множество возможных соеди-

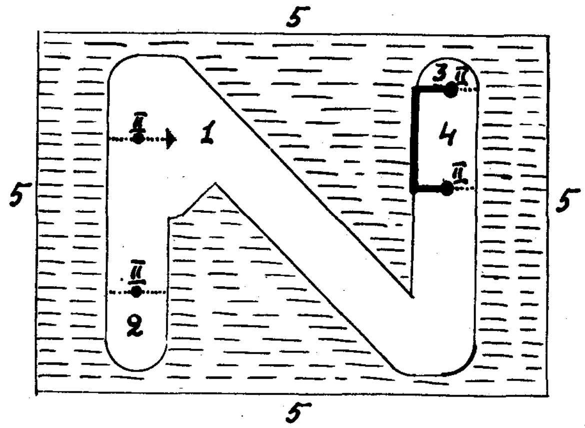

Рис. 2. Элементарная монтажная схема $\mathcal{E}_2$.

нений между конфигурациями э.м. схемы $\mathcal{E}_2$ совпадает со множеством возможных соединений между конфигурациями II класса монтажной схемы $\mathcal{E}_1$.

Ниже мы будем рассматривать только э.м. схемы. Задача, которая решается в настоящей статье, заключается в следующем: разработать эффективный (т.е. использующий ограниченную информацию) метод построения кратчайших соединений между конфигурациями э.м. схемы.

§ 2. Формализация задачи

Э.м. схемы, которые встречаются в реальных задачах размещения печатных проводников, будем называть р е а л ь н ы м и э.м. схемами. Кривые, обозначающие границы запретных зон, и проводники в реальных э.м. схемах довольно "просты". Они, например, не могут быть бесконечнозвенными ломаными линиями. Поэтому формализацию задачи следует начать с ограничения класса рассматриваемых кривых.

Компакт [I4] $M \subseteq R^2$ (здесь и ниже символом R^2 обозначается двумерное евклидово пространство) назовем п р о с т е й ш и м, если выполнено одно из следующих условий:

I. Компакт M состоит из единственной точки.

II. M - выпуклая дуга, имеющая кривизну в каждой своей точке, причем кривизна вдоль дуги M изменяется монотонно.

Компакт $M \subseteq R^2$ назовем п р о с т ы м, если он представим в виде теоретико-множественной суммы конечного числа простейших компактов.

Если $M \subseteq R^2$, то символом $\langle M \rangle$ будем обозначать множество всех внутренних (относительно R^2) точек множества M.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Последовательность

$$\mathcal{E} = [E ; P_1, P_2, \ldots, P_m] \qquad (I)$$

назовем м а т е м а т и ч е с к о й э. м. с х е м о й с п л а т о й E и и с х о д н ы м и к о н ф и г у р а ц и я м и P_i $(1 \leq i \leq m)$, если выполнены следующие условия:

а) E - компакт, расположенный в R^2 , причем множество $E \setminus \langle E \rangle$ является простым компактом,

б) P_i $(1 \leq i \leq m)$ - попарно непересекающиеся простые компакты, расположенные в E .

Взаимосвязь между понятиями реальная и математическая э. м. схема выражает следующий

ТЕЗИС. В с я к а я р е а л ь н а я э.м. с х е м а я в л я е т с я м а т е м а т и ч е с к о й э.м. с х е м о й.

Ниже везде (если не оговорено противное) под э. м. с х е м о й будем понимать м а т е м а т и ч е с к у ю э.м. схему. Через $\{x_i\}$ будем обозначать множество, состоящее из единственного элемента x_i ; множество, состоящее из элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, будем обозначать через $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Кроме того, ниже (в определении 2) примем следующие обозначения:

если $x \in M \subseteq R^2$, то через $M(x)$ обозначим компоненту точки x во множестве M ,

если $x \notin M$ и $x \cap M = \Lambda$, то $M(x) \overset{df}{=} \Lambda$,

если $N \subseteq R^2$, то $M(N) \overset{df}{=} \bigcup_{x \in N} M(x)$.

Множество $P = \bigcup_{i=1}^{m} P_i$ будем называть п р о в о д я щ и м м н о ж е с т в о м э.м. схемы (I).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Э.м. схему $\mathcal{E}'$

$$\mathcal{E}' = [E'; P'_1, P'_2, \ldots, P'_{m'}] \qquad (2)$$

с проводящим множеством $P' = \bigcup_{i=1}^{m'} P'_i$ назовем н а д с х е м о й э.м. схемы (I), если выполнены услови: а) $E' = E$, б) $P' \supseteq P$, в) $\bigcup_{i=1}^{m} \{P'(P_i)\} = \{P'_1, P'_2, \ldots, P'_{m'}\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Всякое множество, являющееся т.-м. суммой каких-либо исходных конфигураций э.м. схемы (I), будем называть конфигурацией этой схемы.

Пусть $M \subseteq P$. Наименьшую конфигурацию э.м. схемы (I), содержащую множество M, будем обозначать символом $\mathcal{K}(M,\mathcal{E})$. Если $M \subseteq R^2$, то символом $[M]$ в дальнейшем будем обозначать замыкание множества M в R^2.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Множество $[P_0]$ назовем соединением между конфигурациями K_1 и K_2 э.м. схемы (I), если $P \cap P_0 = \Lambda$ и для э.м. схемы (I) существует надсхема $\mathcal{E}'$ с проводящим множеством $P \cup P_0$ такая, что

$$\mathcal{K}(K_1,\mathcal{E}') \cap \mathcal{K}(K_2,\mathcal{E}') \neq \Lambda .$$

Нетрудно доказать, что всякое непустое соединение между конфигурациями является спрямляемой (т.е. такой, которая представима в виде теоретико-множественной суммы конечного числа спрямляемых простых дуг) элементарной (см. [I4]) кривой. Если M — спрямляемая элементарная кривая, то длиной $\ell(M)$ элементарной кривой M будем называть сумму длин компонент регулярности (см. [I4]) этой кривой; $\ell(\Lambda) \overset{def}{=} 0$.

Нас будет интересовать задача построения кратчайшего соединения между конфигурациями K_1 и K_2 э.м. схемы (I), т.е. задача построения такого соединения B_1 между K_1 и K_2, что $\ell(B_1) \leqslant \ell(B_2)$, каково бы ни было соединение B_2 между конфигурациями K_1 и K_2.

§ 3. Построение полного множества опорных отрезков

Чтобы построить кратчайшее соединение между конфигурациями, необходимо построить некоторые вспомогательные множества, элементами которых являются прямолинейные отрезки, расположенные на плате э.м. схемы. Построением таких вспомогательных множеств мы займемся в §§ 3,4 и 5.

Э.м. схему (I) назовем одномерной, если $\langle E \rangle = \Lambda$. В противном случае э.м. схему будем называть двумерной. Э.м. схему (I) назовем однородной, если выполнено одно из следующих условий:

I. $\mathcal{E}$ — двумерная э.м. схема и $[\langle E \rangle] = E$.

II. $\mathcal{E}$ — одномерная э.м. схема.

В §§ 3,4 и 5 будут рассматриваться только двумерные однородные э.м. схемы.

Прямую a назовем локально опорной ко множеству $M \subseteq R^2$ в точке $A \in a \cap M$, если для некоторых окрестности $S(A)$ точки A и компоненты связности R' множества $R^2 \setminus a$ имеет место включение:

$$S(A) \cap M \subseteq [R'] .$$

Ниже везде будем считать, что концы всякого прямолинейного отрезка принадлежат этому отрезку. Интервалом отрезка AB будем называть множество всех внутренних (относительно прямой, на которой расположен этот отрезок) точек отрезка AB.

Направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ назовем опорным отрезком ко множествам M_1 и M_2, если прямая AB является локально опорной ко множествам M_1 и M_2 в точках A и B, соответственно.

Отрезок AB назовем опорным отрезком э.м. схемы (I), если $AB \subseteq E$ и $\overrightarrow{AB}$ является опорным отрезком к $R^2 \setminus \langle E \rangle$ и $R^2 \setminus \langle E \rangle$.

Множество M опорных отрезков э.м. схемы (I) назовем полным множеством опорных отрезков, если оно содержит все опорные отрезки э.м. схемы (I), интервалы которых не пересекаются со множеством $P \cup (R^2 \setminus \langle E \rangle)$.

Легко доказать следующие утверждения:

1. Множество всех прямых, каждая из которых является локально опорной к $R^2 \setminus \langle E \rangle$ не менее чем в двух различных точках, конечно.

2. На каждой прямой, локально опорной к $R^2 \setminus \langle E \rangle$, расположено не более конечного числа опорных к $R^2 \setminus \langle E \rangle$ и $R^2 \setminus \langle E \rangle$ отрезков, интервалы которых не пересекаются со множеством $P \cup (R^2 \setminus \langle E \rangle)$.

Для реальных э.м. схем каждое из двух чисел, конечность которых устанавливается утверждениями I и 2, обычно невелико. Если мы умеем находить все прямые, локально опорные к $R^2 \setminus \langle E \rangle$ не менее чем в двух точках, а на каждой локально опорной к $R^2 \setminus \langle E \rangle$ прямой умеем находить все опорные к $R^2 \setminus \langle E \rangle$ и $R^2 \setminus \langle E \rangle$ отрезки, интервалы которых не пересекаются со множеством $P \cup (R^2 \setminus \langle E \rangle)$, то мы сможем найти полное множество опорных отрезков э.м. схемы (I). На задаче построения полного множества опорных отрезков, более подробно не будем останавливаться.

§ 4. Построение полного множества нормальных отрезков

Отрезок AB назовем *нормальным отрезком* ко множеству M в точке A, являющейся концом этого отрезка, если существует прямая, локально опорная ко множеству M в точке A и перпендикулярная отрезку AB.

Направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ назовем *нормальным отрезком ко множествам* M_1 и M_2, если AB является нормальным отрезком к этим множествам, соответственно в точках A и B.

Отрезок AB назовем *нормальным отрезком э.м. схемы* (I), если $AB \subseteq E$ и $\overrightarrow{AB}$ является нормальным отрезком к двум исходным конфигурациям P_i и P_j $(1 \le i < j \le m)$ этой схемы.

Пусть $\vec{\mathcal{L}}(P_i, P_j)$ - множество всех направленных простых дуг, соединяющих на плате E исходные конфигурации P_i и P_j $(1 \le i < j \le m)$ э.м. схемы (I). Иначе говоря, $\vec{\mathcal{L}}(P_i, P_j)$ есть множество всех направленных простых дуг $\vec{x}$, удовлетворяющих условиям:

а) $x \subseteq E$,

б) начало дуги $\vec{x}$ принадлежит множеству P_i, а конец - множеству P_j.

Пусть $\vec{\mathcal{L}}_0(P_i, P_j)$ - множество всех кратчайших дуг из множества $\vec{\mathcal{L}}(P_i, P_j)$, $\vec{\mathcal{N}}(P_i, P_j)$ - множество всех тех дуг из $\vec{\mathcal{L}}_0(P_i, P_j)$, которые являются нормальными отрезками к P_i и P_j, $\mathcal{N}^\circ(P_i, P_j)$ - соответствующее множеству $\vec{\mathcal{N}}(P_i, P_j)$ множество редуцированных дуг (*редуцированной дугой* для направленной дуги $\vec{x}$ мы называем множество x, составленное из всех точек, принадлежащих направленной дуге $\vec{x}$). Множество $\mathcal{N}^\circ(P_i, P_j)$ назовем *правильным*, если интервалы всех отрезков из $\mathcal{N}(P_i, P_j)$ не пересекаются со множеством $P \cup (R^2 \setminus \langle E \rangle)$. Множество N, элементами которого являются нормальные отрезки э.м. схемы (I), назовем *полным множеством нормальных отрезков*, если N пересекается со всеми непустыми правильными множествами $\mathcal{N}^\circ(P_i, P_j)$ $(1 \le i < j \le m)$.

Если при любых $i, j\ (1 \le i < j \le m)$ множество нормальных отрезков к P_i и P_j конечно, то полное множество нормальных отрезков э.м. схемы (I) можно построить следующим образом.

Для каждых двух индексов i и $j\ (1 \le i < j \le m)$ перебираем последовательно (в порядке неубывания длины) все нормальные отрезки к P_i и P_j, пока не найдем отрезок $\vec{n}_{ij}$, лежащий во множестве E (и тогда полагаем $N_{ij} = \{n_{ij}\}$), или же пока не убедимся в отсутствии лежащих в E нормальных отрезков к P_i и P_j (и тогда полагаем $N_{ij} = \Lambda$). Очевидно, множество $N = \bigcup_{1 \le i < j \le m} N_{ij}$ является полным множеством нормальных отрезков э.м. схемы (I).

Однако, как правило, множество отрезков, нормальных к P_i и P_j, бесконечно, и для построения полного множества нормальных отрезков э.м. схемы (I) необходимо применять другие методы. На одном из таких методов мы сейчас и остановимся.

Будем считать, что для каждого простого компакта M зафиксировано некоторое представление этого компакта в виде теоретико-множественной суммы конечного числа простейших компактов: $M = \bigcup x,\ x \in \mathfrak{M}(M)$, $\mathfrak{M}(M)$ - конечное множество простейших компактов.

Множество M, элементами которого являются нормальные отрезки к P_i и P_j $(1 \le i < j \le m)$, назовем *зоной нормальных отрезков к* P_i и P_j, если множество начал отрезков из M является связным подмножеством некоторого элемента из $\mathfrak{M}(P)$ и множество концов отрезков из M является связным подмножеством некоторого элемента из $\mathfrak{M}(P)$. Зону нормальных отрезков, не содержащуюся ни в какой другой зоне нормальных отрезков, будем называть *максимальной зоной нормальных отрезков*. Очевидно, всякий нормальный отрезок к P_i и P_j $(1 \le i < j \le m)$ расположен в некоторой максимальной зоне нормальных отрезков.

Предлагаемый ниже способ построения полного множества нормальных отрезков применим ко всякой э.м. схеме $\mathcal{E}$, удовлетворяющей условию:

А. Множество максимальных зон нормальных отрезков э.м. схемы $\mathcal{E}$ конечно.

Представляет интерес следующая задача: для всякой ли э.м. схемы выполнено условие А?

Если проводящее множество P э.м. схемы $\mathcal{E}$ представимо в виде теоретико-множественной суммы конечного числа дуг окружностей, прямолинейных отрезков и точек, то эта схема удовлетворяет условию А. Очевидно, условию А удовлетворяет также всякая *реальная* э.м. схема.

Пусть $m>1$ (в противном случае полное множество нормальных отрезков э.м. схемы (I) строится тривиально: $N=\Lambda$). Пусть T_{ij} – множество всех нормальных отрезков к P_i и P_j $(1\le i<j\le m)$, $T=\bigcup_{1\le i<j\le m} T_{ij}$ и $\mathcal{T}$ – покрытие множества T конечным числом зон нормальных отрезков (такое покрытие существует тогда и только тогда, когда выполнено условие А).

Построение полного множества нормальных отрезков э.м. схемы (I) проводим по этапам:

I *шаг*. В произвольном порядке упорядочиваем пары $(P_i,P_j)(1\le i<j\le m)$ исходных конфигураций.

2 *шаг*. Выбираем очередную пару (P_i,P_j) исходных конфигураций. Если очередной пары нет, то переходим к 8-му шагу.

3 *шаг*. Упорядочиваем множество $\mathcal{T}_{ij}$ всех входящих в $\mathcal{T}$ зон нормальных отрезков к P_i и P_j по неубыванию длины отрезков, входящих в зону (см. ниже лемму I.I).

4 *шаг*. Выбираем очередную зону нормальных отрезков из $\mathcal{T}_{ij}$. Если очередной зоны в $\mathcal{T}_{ij}$ нет, то полагаем $N_{ij}=\Lambda$ и переходим ко 2-му шагу.

5 *шаг*. В определенной на предыдущем шаге зоне выбираем один из нормальных отрезков.

6 *шаг*. Проверяем, пересекается ли интервал отрезка, выбранного на предыдущем шаге, со множеством $PU(R^2\setminus\langle E\rangle)$. Если пересекается, то переходим к 4-му шагу.

7 *шаг*. Полагаем $N_{ij}=\{n_{ij}\}$, где $\vec{n}_{ij}$ – отрезок, выбранный на 5-ом шаге, и переходим ко 2-му шагу.

8 *шаг*. Полагаем:

$$N=\bigcup_{1\le i<j\le m} N_{ij}.$$

ТЕОРЕМА I. *Множество N является полным множеством нормальных отрезков э.м. схемы (I).*

Доказательству этой теоремы предпошлём следующие леммы.

ЛЕММА I.I. *Все отрезки, принадлежащие одной и той же зоне нормальных отрезков, равны между собой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{E}$ – зона нормальных отрезков, τ_1 – множество начал отрезков из $\mathcal{E}$, τ_2 – множество концов отрезков из $\mathcal{E}$. Очевидно, множества нормалей к кривым τ_1 и τ_2 совпадают. Следовательно, кривые τ_1 и τ_2 имеют общую эволюту. Пусть $\vec{AB}$ – нормальный отрезок к τ_1 и τ_2. Так

как кривые τ_1 и τ_2 имеют общую эволюту, то центр кривизны кривой τ_1 в точке A совпадает с центром кривизны кривой τ_2 в точке B. Поэтому

$$\ell(AB)=|\rho(A)-\rho(B)|, \qquad (3)$$

где $\rho(A)$ – радиус кривизны кривой τ_1 в точке A и $\rho(B)$ – радиус кривизны кривой τ_2 в точке B (если точки A и B расположены по разные стороны от центра кривизны, то один из радиусов в равенстве (3) следует считать отрицательным). Так как при монотонном изменении радиуса кривизны приращение радиуса кривизны равно пути, пройденному центром кривизны по эволюте, то из совпадения эволют для τ_1 и τ_2 следует: $\ell(AB)=\ell(A'B')$, каковы бы ни были отрезки $\vec{AB}\in\mathcal{E}$ и $\vec{A'B'}\in\mathcal{E}$.

Лемма I.I доказана.

Очевидной является следующая

ЛЕММА 2.I. *Если зона нормальных отрезков э.м. схемы (I) содержит отрезок, интервал которого пересекается со множеством $PU(R^2\setminus\langle E\rangle)$, и отрезок, интервал которого не пересекается со множеством $PU(R^2\setminus\langle E\rangle)$, то эта зона содержит также и лежащий в E отрезок, интервал которого пересекается со множеством $PU(R^2\setminus\langle E\rangle)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы I. Очевидно, N – множество нормальных отрезков э.м. схемы (I). Пусть $\mathcal{N}(P_i,P_j)$ – правильное множество, $\mathcal{E}\in\mathcal{T}$ и $\mathcal{E}\cap\mathcal{N}(P_i,P_j)\ne\Lambda$. Тогда из лемм I.I и 2.I следует, что все отрезки зоны $\mathcal{E}$ не пересекаются со множеством $PU(R^2\setminus\langle E\rangle)$. Поэтому из построения множеств N_{ij} следует, что $N_{ij}\ne\Lambda$, и отрезок n_{ij}, из которого состоит множество N_{ij}, не длиннее отрезков множества $\mathcal{N}(P_i,P_j)$. Следовательно, $n_{ij}\in\mathcal{N}(P_i,P_j)$.

Теорема I доказана.

§ 5. Построение полного множества нормально-опорных отрезков

Направленный отрезок $\vec{AB}$ назовем *нормально-опорным отрезком ко множествам* M_1

и M_2, если отрезок AB - нормальный отрезок ко множеству M_1 в точке A и прямая AB - локально опорная прямая ко множеству M_2 в точке B.

Отрезок AB назовем **нормально-опорным отрезком э.м. схемы** (I), если $AB \subseteq E$ и $\vec{AB}$ является нормально-опорным отрезком к некоторой исходной конфигурации э.м. схемы (I) и ко множеству $R^2 \setminus \langle E \rangle$.

Пусть $\vec{\mathcal{L}}(P_i, x)$ - множество всех направленных простых дуг, соединяющих на плате E исходную конфигурацию P_i с точкой $x \in E \setminus P_i$, $\vec{\mathcal{L}}_o(P_i, x)$ - множество всех кратчайших дуг из множества $\vec{\mathcal{L}}(P_i, x)$, $\vec{O}(P_i, x)$ - множество всех нормально-опорных к P_i и $R^2 \setminus \langle E \rangle$ отрезков, удовлетворяющих условию: если $\vec{AB} \in \vec{O}(P_i, x)$, то $\vec{AB}$ является упорядоченным подмножеством некоторой дуги из $\vec{\mathcal{L}}_o(P_i, x)$, начало которой совпадает с началом направленного отрезка $\vec{AB}$. Пусть $O(P_i, x)$ - соответствующее множеству $\vec{O}(P_i, x)$ множество редуцированных отрезков. Множество $O(P_i, x)$ назовем **правильным**, если длины отрезков из $O(P_i, x)$ ограничены снизу положительным числом и интервалы всех отрезков из $O(P_i, x)$ не пересекаются со множеством $P \cup (R^2 \setminus \langle E \rangle)$. Множество M, элементами которого являются нормально-опорные отрезки э.м. схемы (I), назовем **полным множеством нормально-опорных отрезков**, если M пересекается со всеми непустыми правильными множествами $O(P_i, x)$ $(1 \leqslant i \leqslant m,\ x \in E \setminus P_i)$.

Множество M, элементами которого являются нормально-опорные отрезки к P и $R^2 \setminus \langle E \rangle$, назовем **зоной нормально-опорных отрезков**, если множество начал отрезков из M является связным подмножеством некоторого элемента из $\mathfrak{M}(P)$, а множество концов отрезков из M является связным подмножеством некоторого элемента из $\mathfrak{M}(E \setminus \langle E \rangle)$. Зону нормально-опорных отрезков, не содержащуюся ни в какой другой зоне нормально-опорных отрезков, будем называть **максимальной зоной нормально-опорных отрезков**. Очевидно, всякий нормально-опорный отрезок к P и $R^2 \setminus \langle E \rangle$ расположен в некоторой максимальной зоне нормально-опорных отрезков.

Предлагаемый ниже способ построения полного множества нормально-опорных отрезков применим ко всякой э.м. схеме $\mathcal{E}$, удовлетворяющей условию:

В. Множество максимальных зон нормально-опорных отрезков э.м. схемы $\mathcal{E}$ конечно.

Представляет интерес следующая задача: для всякой ли э.м. схемы выполнено условие В?

Если проводящее множество P э.м. схемы $\mathcal{E}$ и граница платы E представимы в виде теоретико-множественной суммы конечного числа дуг окружностей, прямолинейных отрезков и точек, то э.м. схема $\mathcal{E}$ удовлетворяет условию В. Очевидно, что условию В удовлетворяет также всякая **реальная** э.м. схема.

Пусть T - множество всех нормально-опорных отрезков к P и $R^2 \setminus \langle E \rangle$ и $\mathcal{T} = \{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p\}$ - покрытие множества T конечным числом зон нормально-опорных отрезков (такое покрытие существует тогда и только тогда, когда выполнено условие В).

Способ построения полного множества нормально-опорных отрезков э.м. схемы (I) заключается в следующем:

I **шаг**. В произвольном порядке упорядочиваем множество $\mathcal{T}$.

2 **шаг**. Выбираем очередную зону из $\mathcal{T}$. Если очередной зоны в $\mathcal{T}$ нет, то переходим к 5-му шагу.

3 **шаг**. В выбранной на предыдущем шаге зоне τ_i выбираем один из кратчайших (относительно отрезков, принадлежащих этой зоне) нормально-опорных отрезков. Если в выбранной зоне такого отрезка нет или интервал выбранного отрезка пересекается со множеством $P \cup (R^2 \setminus \langle E \rangle)$, то полагаем $O_i = \Lambda$ и переходим ко 2-му шагу.

4 **шаг**. Полагаем $O_i = \{n_i\}$ (где $\vec{n}_i$ - отрезок, выбранный на предыдущем шаге) и переходим ко 2-му шагу.

5 **шаг**. Определяем множество O так:

$$O = \bigcup_{i=1}^{p} O_i .$$

ТЕОРЕМА II. *Множество O является полным множеством нормально-опорных отрезков э.м. схемы* (I).

Очевидно, O - множество нормально-опорных отрезков э.м. схемы (I). Пусть $O(P_i, x)$ (где $1 \leqslant i \leqslant m, x \in E \setminus P_i$) - правильное множество и пусть $\inf \ell(n) = \ell$ (где $\inf$ берется по всем нормально-опорным отрезкам $n \in O(P_i, x)$). Нетрудно доказать, что во множестве $O(P_i, x)$ существует отрезок n°, длина которого в точности равна ℓ. Пусть $\vec{n}^{\circ}$ принадлежит некоторой зоне $\tau \in \mathcal{T}$, τ_1 - множество начал отрезков из τ,

τ_2 - множество концов отрезков из τ

Введем некоторые вспомогательные обозначения.

Если множество τ_1 состоит из единственной точки, то обозначим последнюю символом $f_1(0)$.

Пусть множество τ_1 содержит более одной точки. Так как радиус кривизны вдоль кривой τ_1 изменяется монотонно, то в одном из концов кривой $[\tau_1]$, например в точке A_1, достигается точная нижняя грань радиуса кривизны кривой τ_1. Символом $f_1(0)$ обозначим точку A_1, а символом $f_1(s)$ (где $s>0$) обозначим такую точку кривой τ_1, что длина дуги этой кривой с концами A_1 и $f_1(s)$ равна s.

Если множество τ_2 состоит из единственной точки, то обозначим последнюю символом $f_2(0)$.

Пусть множество τ_2 содержит более одной точки и пусть A_2 - центр кривизны кривой $[\tau_1]$ в точке A_1. Так как кривая $[\tau_2]$ как огибающая нормалей кривой $[\tau_1]$ является эволютой для $[\tau_1]$, то $A_2 \in [\tau_2]$. Символом $f_2(0)$ обозначим точку A_2, а символом $f_2(s)$ (где $s>0$) обозначим такую точку кривой τ_2, что длина дуги этой кривой с концами A_2 и $f_2(s)$ равна s.

Если $\vec{n} \in \tau$, то символом $s(\vec{n})$ будем обозначать такое значение параметра s, что точка $f_2(s(\vec{n}))$ является концом отрезка $\vec{n}$.

Доказательство теоремы II сводится к доказательству ряда почти очевидных лемм.

В формулировке леммы I.П символ $[A,B]$ обозначает длину прямолинейного отрезка с концами A и B, символ $\widehat{A,B}$, где A и B - точки кривой τ_2, обозначает длину дуги этой кривой с концами A и B; $[A,A] \overset{df}{=} \widehat{A,A} \overset{df}{=} 0$.

ЛЕММА I.П. Пусть $f_1(s_1')$ и $f_2(s_2')$, соответственно, начало и конец некоторого отрезка из τ, $f_1(s_1'')$ и $f_2(s_2'')$ - тоже начало и конец некоторого отрезка из τ. Если $0 \leq s_2' \leq s_2''$, то

$$[f_1(s_1'), f_2(s_2')] + \widehat{f_2(s_2'), f_2(s_2'')} = [f_1(s_1''), f_2(s_2'')].$$

Лемма I.П очевидным образом вытекает из свойств эволюты.

Из леммы I.П следует

ЛЕММА 2.П.

$$\{n / \vec{n} \in \tau \,\&\, s(\vec{n}) \leq s(\vec{n^o})\} = \{n / \vec{n} \in \tau \,\&\, \ell(n) \leq \ell(n^o)\}.$$

Легко доказывается следующая

ЛЕММА 3.П. Пусть $\vec{n_1} \in \tau$, $\vec{n_2} \in \tau$ и пусть $s(\vec{n_1}) \leq s(\vec{n_2})$. Если интервал одного из отрезков n_1 и n_2 пересекается со множеством $\rho U(R^2 \setminus \langle E \rangle)$, а интервал другого из этих отрезков не пересекается со множеством $\rho U(R^2 \setminus \langle E \rangle)$, то во множестве $\{n / \vec{n} \in \tau \,\&\, s(\vec{n_1}) \leq s(\vec{n}) \leq s(\vec{n_2})\}$ существует лежащий в E отрезок, интервал которого пересекается со множеством $\rho U(R^2 \setminus \langle E \rangle)$.

Из лемм I.П и 2.П следует

ЛЕММА 4.П. Если $\vec{n} \in \tau$, $\ell(n) \leq \ell(n^o)$ и $n \subseteq E$, то $n \in O(P_i, x)$.

Так как $O(P_i, x)$ - правильное множество, то из лемм 3.П и 4.П следует

ЛЕММА 5.П. Если $\vec{n} \in \tau$ и $\ell(n) \leq \ell(n^o)$, то интервал отрезка n не пересекается с $\rho U(R^2 \setminus \langle E \rangle)$.

Из лемм 4.П и 5.П сразу следует

ЛЕММА 6.П. Если $\vec{n} \in \tau$ и $\ell(n) \leq \ell(n^o)$, то $n \in O(P_i, x)$.

Так как n^o - кратчайший отрезок из $O(P_i, x)$, то из леммы 6.П следует

ЛЕММА 7.П. Если $\vec{n} \in \tau$ и $\ell(n) \leq \ell(n^o)$, то $\ell(n) = \ell(n^o)$.

Из лемм 6.П и 7.П следует

ЛЕММА 8.П. Множество кратчайших отрезков зоны τ не пусто и является подмножеством множества $O(P_i, x)$.

Из леммы 8.П и из построения множества O непосредственно вытекает справедливость теоремы II.

§ 6. Сетка э.м. схемы

Здесь и всюду графом мы будем называть последовательность

$$\mathcal{G} = [X, \mathcal{U}, \varphi, \ell],$$

где X и $\mathcal{U}$ - конечные множества, φ - отображение множества $\mathcal{U}$ во множество неупорядоченных пар вида (x, y) (здесь

$x \in X$, $y \in Y$), ℓ – положительная функция, заданная на множестве $\mathcal{U}$. Элементы множества X называются **в е р ш и н а м и** графа, элементы множества $\mathcal{U}$ – **р е б р а м и** графа. Если $u \in \mathcal{U}$ и $\varphi(u) = (x, y)$, то вершины x и y называются **к о н ц а м и** ребра u; число $\ell(u)$ называется **д л и н о й** ребра u.

Пусть $\mathcal{E} = [E; P_1, P_2, \dots, P_m]$ – одномерная э.м. схема. Обозначим через:

X' – множество всех изолированных точек компактов E и P;

X'' – множество всех концевых и особых (см.[14]) точек элементарных кривых $[E \setminus X']$ и $[P \setminus X']$;

X''' – множество, составленное из точек, выбранных по одной из каждой исходной конфигурации P_i ($1 \le i \le m$), не пересекающейся с $X' \cup X''$;

$$X = X' \cup X'' \cup X''';$$

$\mathcal{U}$ – множество всех лежащих в E простых дуг, которые не содержат внутри себя точек множества X и оба конца которых принадлежат множеству X;

$\varphi(u) = (x, y)$, где x и y – концы простой дуги $u \in \mathcal{U}$;

$\ell(u)$ – длина простой дуги u в метрике пространства R^2.

Граф $\mathcal{Y} = [X, \mathcal{U}, \varphi, \ell]$ назовем **с е т к о й о д н о м е р н о й э.м. с х е м ы** $\mathcal{E}$.

Пусть теперь $\mathcal{E} = [E; P_1, P_2, \dots, P_m]$ – двумерная однородная э.м. схема и $P = \bigcup_{i=1}^{m} P_i$.

Обозначим через X_o множество особых точек кривой $E \setminus \langle E \rangle$.

Пусть $R_1, R_2, \dots, R_n$ (где $n \ge 0$) попарно различные одноточечные множества такие, что

$$\bigcup_{i=1}^{n} R_i = X_o \setminus P;$$

O – полное множество опорных отрезков э.м. схемы

$$\mathcal{E}' = [E; P_1, P_2, \dots, P_m, R_1, R_2, \dots, R_n];$$

$X(O)$ – множество всех концов отрезков из O;

N – полное множество нормальных отрезков э.м. схемы $\mathcal{E}'$;

$X(N)$ – множество всех концов отрезков из N;

O' – полное множество нормально-опорных отрезков э.м. схемы $\mathcal{E}'$;

$X(O')$ – множество всех концов отрезков из O'.

Обозначим через:

$$X' = X(O) \cup X(N) \cup X(O');$$

X'' – множество, составленное из точек, выбранных по одной из каждой исходной конфигурации P_i ($1 \le i \le m$), не пересекающейся с X';

$$X = X' \cup X'';$$

$\mathcal{U}_o$ – множество всех простых дуг u, обладающих одновременно следующими свойствами:

а) $u \subseteq E \setminus \langle E \rangle$,

б) концы дуги u принадлежат множеству X,

в) дуга u не содержит внутри себя точек множества X,

г) u – выпуклая дуга, обращенная выпуклостью внутрь множества E (точнее u – часть границы некоторого выпуклого подмножества множества $R^2 \setminus \langle E \rangle$);

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_o \cup O \cup N \cup O';$$

$\varphi(u) = (x, y)$, где x и y – концы простой дуги $u \in \mathcal{U}$;

$\ell(u)$ – длина простой дуги u в метрике пространства R^2.

Граф $\mathcal{Y} = [X, \mathcal{U}, \varphi, \ell]$ назовем **с е т к о й д в у м е р н о й о д н о р о д н о й э.м. с х е м ы** $\mathcal{E}$.

Наконец, пусть $\mathcal{E} = [E; P_1, P_2, \dots, P_m]$ – неоднородная э.м. схема.

Обозначим через:

$$E'' = [\langle E \rangle], \quad E' = [E \setminus E''],$$

$\{P_1'', P_2'', \dots, P_{m''}''\}$ (где $m'' \ge 0$) – множество всех непустых пересечений $P_i \cap E''$ ($1 \le i \le m$),

$\{P_1', P_2', \dots, P_{m'}'\}$ (где $m' \ge 0$) – множество всех непустых пересечений $P_i \cap E'$ ($1 \le i \le m$).

Пусть $\{R_1'', R_2'', \dots, R_{n''}''\}$ (где $n'' \ge 0$) – такая совокупность попарно различных одноточечных множеств, что

$$\bigcup_{i=1}^{n''} R_i'' = (E' \cap E'') \setminus \bigcup_{j=1}^{m''} P_j'';$$

$\{R_1', R_2', \dots, R_{n'}'\}$ (где $n' \ge 0$) – такая совокупность попарно-различных одноточечных множеств, что

$$\bigcup_{i=1}^{n'} R_i' = (E' \cap E'') \setminus \bigcup_{j=1}^{m'} P_j'.$$

Пусть $\mathcal{G}'' = [X'', \mathcal{U}'', \varphi'', \ell'']$ – сетка двумерной однородной э.м. схемы

$$\mathcal{E}'' = [E''; \rho_1'', \rho_2'', \ldots, \rho_{m''}'', R_1'', R_2'', \ldots, R_{n''}'']$$

и $\mathcal{G}' = [X', \mathcal{U}', \varphi', \ell']$ – сетка одномерной э.м. схемы

$$\mathcal{E}' = [E'; \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_{m'}', R_1', R_2', \ldots, R_{n'}'].$$

Сеткой э.м. схемы $\mathcal{E}$ назовем граф

$$\mathcal{G} = [X' \cup X'', \mathcal{U}' \cup \mathcal{U}'', \varphi' \cup \varphi'', \ell' \cup \ell'']$$

Пусть $\mathcal{G} = [X, \mathcal{U}, \varphi, \ell]$ – сетка э.м. схемы (I). Граф $\mathcal{G}(\mathcal{E})$, полученный из графа $\mathcal{G}$ последовательным стягиванием [I5] множеств $X \cap \rho_1, X \cap \rho_2, \ldots, X \cap \rho_m$, назовем **приведенной сеткой** э.м. схемы (I). Вершину графа $\mathcal{G}(\mathcal{E})$, полученную в результате стягивания множества $X \cap \rho_i$ $(1 \leq i \leq m)$, будем обозначать символом r_i.

Путь L в графе $\mathcal{G}$, проходящий последовательно через ребра $u_1, u_2, \ldots, u_n$ и имеющий начало x_0, будем обозначать так:

$$L = [x_0; u_1, u_2, \ldots, u_n].$$

Кроме того, путем в графе $\mathcal{G}$ будем называть также пустую последовательность: $L = \Lambda$.

Путь L называется путем между частичными подграфами (см. [I5]) $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ (с непустыми множествами вершин) графа $\mathcal{G}$ в каждом из следующих двух случаев:

I. L – путь в графе $\mathcal{G}$, начало которого является вершиной графа $\mathcal{G}_1$, а конец – вершиной графа $\mathcal{G}_2$.

II. Графы $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ имеют хотя бы одну общую вершину и L – пустая последовательность $(L = \Lambda)$.

Легко видеть, что задача построения кратчайшего соединения между конфигурациями э.м. схемы (I) сводится к задаче построения кратчайшего пути между двумя частичными подграфами приведенной сетки $\mathcal{G}(\mathcal{E})$. В самом деле, пусть $\mathcal{I} \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$ и $\mathcal{J} \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$. Тогда очевидно, что теоретико-множественная сумма рёбер, входящих в кратчайший путь между частичными подграфами

$$\mathcal{G}_1 = [\bigcup_{i \in \mathcal{I}} \{r_i\}, \Lambda, \Lambda, \Lambda] \quad \text{и} \quad \mathcal{G}_2 = [\bigcup_{j \in \mathcal{J}} \{r_j\}, \Lambda, \Lambda, \Lambda]$$

графа $\mathcal{G}(\mathcal{E})$, является кратчайшим соединением между конфигурациями $K_1 = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} \rho_i$ и $K_2 = \bigcup_{j \in \mathcal{J}} \rho_j$. Очевидно также, что если существует соединение между конфигурациями K_1 и K_2 э.м. схемы (I), то в графе $\mathcal{G}(\mathcal{E})$ существует путь между частичными подграфами $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$.

§ 7. Указатель кратчайших путей в графе

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $\mathcal{Y}$ – множество всех двухрёберных путей в графе $\mathcal{G} = [X, \mathcal{U}, \varphi, \ell]$. Отображение f множества $\mathcal{Y}$ во множество всех подмножеств множества $\mathcal{U}$ назовем **указателем кратчайших путей** в графе $\mathcal{G}$, если выполнены следующие условия:

а) если $f([x_0; u_1]) \ni u_2$, то $[x_0; u_1, u_2]$ – путь в графе $\mathcal{G}$,

б) если $[x_0; u_1, u_2]$ – кратчайший путь в графе $\mathcal{G}$ между какими-либо вершинами, то $f([x_0; u_1]) \ni u_2$.

Для каждого указателя f кратчайших путей в графе $\mathcal{G}$ обозначим символом M_f множество всех таких двухреберных путей $[x_0; u_1, u_2]$, что $f([x_0; u_1]) \ni u_2$. Очевидно, задание указателя f кратчайших путей в графе $\mathcal{G}$ равносильно заданию множества M_f.

Отметим некоторые очевидные свойства указателя кратчайших путей.

СВОЙСТВО I. *Если отображения ψ и χ являются указателями кратчайших путей в графе $\mathcal{G}$, то указателем кратчайших путей в графе $\mathcal{G}$ является и отображение f, определенное так:*

$$M_f = M_\psi \cap M_\chi$$

Множество ребер $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}$ назовем **избыточным множеством ребер** графа $\mathcal{G}$, если расстояние (т.е. длина кратчайшего пути) между каждыми двумя вершинами частичного графа $\mathcal{G}'$, полученного из $\mathcal{G}$ удалением множества ребер $\mathcal{U}_1$, равно расстоянию между этими же вершинами в графе $\mathcal{G}$. Например, если u_1 и u_2 – два различных параллельных ребра графа $\mathcal{G}$ и $\ell(u_1) \leq \ell(u_2)$, то ребро u_2 является избыточным (ребро u мы называем **избыточным**, если избыточным является множество $\{u\}$). Избыточным ребром является всякая петля графа $\mathcal{G}$.

СВОЙСТВО 2. Пусть частичный граф $\mathcal{G}'$ получен из графа $\mathcal{G}$ удалением некоторого избыточного множества ребер $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}$ и пусть f - указатель кратчайших путей в графе $\mathcal{G}$. Если множество M_ψ получено из множества M_f удалением всех путей, проходящих хотя бы по одному ребру из множества $\mathcal{U}_1$, то ψ - указатель кратчайших путей в графе $\mathcal{G}'$.

СВОЙСТВО 3. Пусть граф $\mathcal{G}'$ получен из графа $\mathcal{G}=[X,\mathcal{U},\varphi,\ell]$ стягиванием множества $Z \subseteq X$ и пусть f - указатель кратчайших путей в графе $\mathcal{G}$. Тогда отображение ψ, построенное согласно нижеописанному алгоритму A_3, является указателем кратчайших путей в графе $\mathcal{G}'$.

Алгоритм A_3:

I шаг. Находим множество $\mathcal{U}_1^z$ (соответственно, $\mathcal{U}_2^z$) всех ребер графа $\mathcal{G}$, для которых один и только один из концов принадлежит (соответственно, оба конца принадлежат) множеству Z.

2 шаг. Удаляем из множества M_f все пути, проходящие хотя бы по одному ребру из множества $\mathcal{U}_2^z$, и все пути, которые ведут из множества Z в множество Z; множество оставшихся путей обозначаем через M_f'.

3 шаг. Для каждой упорядоченной пары $[u_1, u_2]$ ребер из $\mathcal{U}_1^z$ составляем последовательность $[x_0; u_1, u_2]$, где x_0- конец ребра u_1, не принадлежащий множеству Z; множество полученных последовательностей обозначаем символом M^z.

4 шаг. Заменяем во множестве M_f' каждую последовательность вида $[x_0, u_1, u_2]$, где $x_0 \in Z$, последовательностью $[z; u_1, u_2]$, где z - вершина графа $\mathcal{G}'$, образованная при стягивании множества Z. Множество, полученное из M_f' в результате такой замены, обозначаем символом M_f''.

5 шаг. Строим отображение ψ:

$$M_\psi = M_f'' \cup M^z.$$

Нахождение кратчайшего соединения между конфигурациями э.м. схемы сводится к нахождению кратчайшего пути между двумя вершинами графа $\mathcal{G}$ (см. § 6 и § 8), который получается из сетки в результате стягивания некоторых множеств вершин и удаления некоторых избыточных множеств ребер. Для нахождения пути в графе $\mathcal{G}$ нам понадобится указатель кратчайших путей. Однако указатель кратчайших путей в графе $\mathcal{G}$ легко может быть получен из указателя кратчайших путей в сетке э.м. схемы последовательным применением свойств 2 и 3. Поэтому достаточно показать, как строится указатель кратчайших путей в сетке.

Итак, пусть $\mathcal{G}$ - сетка э.м. схемы (I).

Для каждого однореберного пути $[x_0; u_1]$ графа $\mathcal{G}$ определим значение указателя $f([x_0; u_1])$ кратчайших путей:

I. Если u_1 - петля, то полагаем $f([x_0; u_1]) = \Lambda$.

П. Пусть x_1 - конец ребра u_1, отличный от вершины x_0 и $\mathcal{U}(x_1)$- множество ребер, инцидентных вершине x_1.

Пусть M - некоторое множество простых дуг, лежащих на $E \setminus \langle E \rangle$ и не имеющих попарно общих точек, кроме точки x_1, которая является общим концом всех этих дуг. Пусть множество M будет полным в том смысле, что всякая простая дуга с концом x_1, лежащая на $E \setminus \langle E \rangle$ и не имеющая с дугами множества M общих точек, кроме точки x_1, принадлежит множеству M. Пусть a_1 - полукасательная к кривой u_1 в точке x_1 (так как x_1 - концевая точка кривой u_1, то эта полукасательная определена однозначно), a - прямая, на которой расположена полукасательная a_1. Выбрав какое-либо направление обхода по границе достаточно малой окрестности точки x_1, установим циклический порядок во множестве $V = \mathcal{U}(x_1) \cup M \cup \{[a \setminus a_1]\}$ (причем, если какие-либо два элемента v_j и v_k множества V совпадают в достаточно малой окрестности точки x_1, то считаем: $v_j \longrightarrow v_k$ (то есть v_j непосредственно предшествует элементу v_k) и $v_k \longrightarrow v_j$ (то есть v_k непосредственно предшествует элементу v_j)).

Пусть $W = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$ - максимальная (то есть с максимальным количеством членов) последовательность попарно различных элементов множества V, удовлетворяющая условиям:

а) если $1 \leq j < n$, то $v_j \longrightarrow v_{j+1}$,

б) если $1 \leq j \leq n$, то элемент v_j отличен от ребра u_1 в каждой окрестности точки x_1,

в) $v_1 \in M \cup \{[a \setminus a_1]\}$ и $v_n \in M \cup \{[a \setminus a_1]\}$.

Тогда полагаем:

$$f([x_0;u_1])=\{u/u\in\mathcal{U}(x_1)\,\&\,u\in W\}.$$

§ 8. Алгоритм поиска кратчайшего пути между частичными подграфами

Поиск кратчайшего пути между частичными подграфами $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ графа $\mathcal{G}$ всегда можно свести к поиску кратчайшего пути между вершинами g_1 и g_2 некоторого графа $\mathcal{G}_0$, не имеющего петель и параллельных ребер:

I шаг. Стягивая в графе $\mathcal{G}$ множество вершин частичного подграфа $\mathcal{G}_1$, преобразуем графы $\mathcal{G}$ и $\mathcal{G}_2$ в $\mathcal{G}'$ и $\mathcal{G}_2'$.

2 шаг. Стягивая в графе $\mathcal{G}'$ множество вершин частичного подграфа $\mathcal{G}_2'$, преобразуем граф $\mathcal{G}'$ в граф $\mathcal{G}''=[X'',\mathcal{U}'',\varphi'',\ell'']$

3 шаг. Оставляя в каждой совокупности ребер $u\in\mathcal{U}''$(не петель!) с одинаковым значением функции $\varphi''(u)$ лишь одно из кратчайших и удаляя все остальные ребра (в том числе и петли), преобразуем граф $\mathcal{G}''$ в $\mathcal{G}_0$.

Таким образом, граф $\mathcal{G}_0$ получен из графа $\mathcal{G}$ стягиванием множества вершин частичного подграфа $\mathcal{G}_1$ и множества вершин частичного подграфа $\mathcal{G}_2$ и последующим удалением некоторого избыточного множества ребер. Пусть g_1 – вершина графа $\mathcal{G}'$, образованная при стягивании множества вершин частичного подграфа $\mathcal{G}_1$, g_2 – вершина графа $\mathcal{G}''$, образованная при стягивании множества вершин частичного подграфа $\mathcal{G}_2'$ (если g_1 – вершина графа $\mathcal{G}_2'$, то $g_2=g_1$). Очевидно, множество кратчайших путей между вершинами g_1 и g_2 в графе $\mathcal{G}_0$ совпадает со множеством кратчайших путей между частичными подграфами $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ в графе $\mathcal{G}$.

Так как граф $\mathcal{G}_0=[X,\mathcal{U},\varphi,\ell]$ не содержит параллельных ребер, то всякое ребро u графа $\mathcal{G}_0$ однозначно определяется своими концами x_1 и x_2, и поэтому можно принять такое обозначение: $u=(x_1,x_2)$; всякий путь L в графе $\mathcal{G}_0$ однозначно определяется перечислением последовательности вершин, через которые проходит этот путь:

$$L=[x_1,x_2,\dots,x_n].$$

Поэтому в качестве значений указателя $f([x_1,x_2])$ кратчайших путей в графе $\mathcal{G}_0$ можно рассматривать не подмножества дуг,

а подмножества вершин, т.е. вместо $f([x_1,x_2])=\mathcal{U}_1\subseteq\mathcal{U}$ будем писать:

$$f([x_1,x_2])=\{x/(x_2,x)\in\mathcal{U}_1\}.$$

Пусть $f(\mathcal{Y})$ указатель кратчайших путей в графе $\mathcal{G}_0$. Опишем "волновой" алгоритм $\mathcal{A}$, который с помощью указателя $f(\mathcal{Y})$ находит кратчайший путь между произвольными вершинами a и b. Если $a=b$, то задача имеет тривиальное решение $(L(a,b)=\Lambda)$; поэтому будем считать, что $a\neq b$

Вершины графа $\mathcal{G}_0$ будем отождествлять с целыми положительными числами, нумерующими эти вершины. Символом $[\delta_t(x),\lambda_t(x),\text{пр}_t(x)]$ будем обозначать вектор $V_t(x)$, поставленный в соответствие алгоритмом $\mathcal{A}$ вершине $x\in X$. Содержательно символы $\delta_t(x),\lambda_t(x)$ и $\text{пр}_t(x)$ означают следующее:

символ $\delta_t(x)$ указывает, принадлежит ли вершина x t-му фронту волны ($\delta_t(x)=1$, если принадлежит, и $\delta_t(x)=0$ в противном случае);

$\lambda_t(x)$ – это длина пути $L_t(b,x)$ от b до x, найденного к моменту времени t;

$\text{пр}_t(x)$ – это предпоследняя вершина пути $L_t(b,x)$.

Будем использовать также такие обозначения:

$$X_0(x')=\{x/(x',x)\in\mathcal{U}\},$$

$$X_t(x')=\{x/x\in f([\text{пр}_t(x'),x'])\,\&\,\lambda_t(x')+\ell((x',x))<\lambda_t(x)\}$$

(при $t>0$);

$\text{пр}_t^i(x)=\text{пр}_t(\text{пр}_t(\text{пр}_t\cdots(\text{пр}_t(x))\cdots))$, где символ пр_t повторяется i раз.

Алгоритм $\mathcal{A}$ заключается в следующем:

I шаг. Вершине b ставим в соответствие вектор $V_0(x)=[1,0,0]$, вершинам $x\neq b$ ставим в соответствие вектор $V_0(x)=[0,\infty,0]$.

2 шаг. Полагаем $t=0$

3 шаг. Среди вершин x, принадлежащих t-му фронту волны($\delta_t(x)=1$), выбираем[x)] одну из вершин с минимальным значением величины $\lambda_t(x)$. Обозначим выбранную вершину символом x'.

---

x) Если окажется, что $\forall_{x\in X}\,\delta_t(x)=0$, то задача не имеет решения (путь из a в b не существует).

4 шаг. Если $x' = a$, то переходим к 7-му шагу.

5 шаг. Вершине x' ставим в соответствие вектор $V_{t+1}(x') = [0, \lambda_t(x'), \text{пр}_t(x')]$, вершине $x \neq x'$ ставим в соответствие вектор $V_{t+1}(x) = [1, \lambda_t(x') + \ell((x', x)), x']$, если $x \in X_t$, и вектор $V_{t+1}(x) = V_t(x)$, если $x \notin X_t$. (Заметим, что векторы $V_t(x)$ в дальнейшем не понадобятся и поэтому при решении задачи на ЭВМ можно место записи векторов $V_{t+1}(x)$ совместить с местом записи векторов $V_t(x)$.)

6 шаг. Увеличиваем t на единицу и переходим к 3-му шагу.

7 шаг. Конец работы алгоритма. Путь

$$L(a,b) = [a, \text{пр}_t(a), \text{пр}_t^2(a), \ldots, \text{пр}_t^t(a)]$$

и дает решение задачи; $\ell_t(a)$ – длина пути $L(a,b)$.

Выводы

1. Задача построения кратчайших соединений на плоской печатной монтажной схеме $\mathcal{E}$ сводится к задаче построения кратчайших путей в некотором графе $\mathcal{G}(\mathcal{E})$, имеющем небольшое количество ребер и вершин.

2. Методы, предлагаемые в статье, позволяют для *всякой реальной* э.м. схемы $\mathcal{E}$ эффективно построить граф $\mathcal{G}(\mathcal{E})$.

3. Чтобы выяснить, насколько применимы предлагаемые методы для *всякой* э.м. схемы, необходимо решить две поставленные в статье, но нерешенные задачи:

а) для всякой ли э.м. схемы множество максимальных зон нормальных отрезков конечно?

б) для всякой ли э.м. схемы множество максимальных зон нормально-опорных отрезков конечно?

4. По заданной монтажной схеме $\mathcal{E}$ и графу $\mathcal{G}(\mathcal{E})$ может быть построена функция $f(y)$, являющаяся указателем кратчайших путей в графе $\mathcal{G}(\mathcal{E})$, причем для вычисления значения функции $f(y)$ в точке y достаточно исследовать главную окрестность первого порядка [16] точки y.

5. Использование указателя во многих случаях позволяет сократить перебор при поиске кратчайших путей в графе $\mathcal{G}(\mathcal{E})$.

6. Предлагаемые в статье методы могут быть применены также для поиска кратчайших путей в навигации, при проектировании дорог по пересеченной местности и т.п.

В заключение автор благодарит А.Д. Закревского, Ю.Г. Косарева и Я.И. Фета за ряд советов при обсуждении и подготовке работы к печати.

Литература

1. Евреинов Э.В., Косарев Ю.Г. О возможности построения вычислительных систем высокой производительности. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1962.
2. Евреинов Э.В. Теоретические основы построения универсальных вычислительных сред. В сб.: "Вычислительные системы", Новосибирск, 1965, вып. 16, 3-72 (Сиб. отд. АН СССР, Ин-т математики).
3. Тюренков В.А. Алгоритм нахождения кратчайшего пути. В сб.: "Вычислительные системы", Новосибирск, 1963, вып.6, 41-44 (Сиб. отд. АН СССР, Ин-т математики).
4. Бутрименко А.В. О поиске кратчайших путей по графу при его изменениях. Изв. АН СССР, сер. технич. киберн., 1964, № 6, 55-58.
5. Евреинов Э.В., Косарев Ю.Г. О методике разработки вычислительных систем. В сб.: "Вычислительные системы", Новосибирск, 1963, вып. 6, 3-20 (Сиб. отд. АН СССР, Ин-т математики).
6. Линский В.С. Алгоритмическое проектирование вычислительных цифровых устройств, М., 1963 (АН СССР, Выч. центр).
7. Харченко В.Л. О машинном методе проектирования соединений. В сб.: "Вычислительные системы", Новосибирск, 1963, вып. 6, 32-40 (Сиб. отд. АН СССР, Ин-т математики).
8. Линский В.С. Об оптимальном размещении ячеек на стойке ЦВМ. Вопросы радиоэлектроники, сер. УП, 1961, вып.3, 17-26.
9. Altman G.W., De Campo L.A., Warburton C.R. Automation of computer panel wiring. Commun. and Electron., 1960, N 48, 118-125.

10. Leiner A.L.,Weinberger A.,Coleman C.,Loberman H. Using digital computers in the design and maintenance of new computers. IRE Trans. Electron. Comput., 1961, EC-10, N 4, 680-690.
11. Funk G.,Görling H. Über Funktionssimulation und automatische Erstellung von Verdrahtungslisten von Schaltnetzwerken. Elektron. Rechenanlag.,1962, 4,N 1,14-21.
12. Case P.W.,Graff H.H.,Griffith L.E.,Le Clercq A.R., Murley W.B.,Spence T.M. Solid logic design automation. IBM J. Res. and Dev.,1964, 8, N 2,127-140.
13. Wiseman N.E. Application of list-processing methods to the design of interconnections for a fast logic system. Comput.J.,1964, 6, N 4,321-327.
14. Александров П.С. Комбинаторная топология. М.-Л., ГИТТЛ, 1947.
15. Берж К. Теория графов и её применения. М.,ИЛ, 1962.
16. Журавлев Ю.И. Оценка сложности локальных алгоритмов для некоторых экстремальных задач на конечных множествах. Докл. АН СССР, 1964, 158, № 5, 1018-1021.

Ин-т математики СО АН СССР

Поступила в редакцию
14.VI.1965 г.