ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Сборник трудов
1965 г. Института математики СО АН СССР Выпуск I9

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА МНОГОМЕРНЫХ СПЕКТРОВ

Г.Я. Волошин

Кратное преобразование Фурье, хорошо известное в математике, оптике и рентгеноструктурном анализе, в последнее время все шире используется при исследованиях в области связи и автоматического распознавания образов (см., например, [I,2]). В связи с этим представляется целесообразным рассмотреть те из свойств m -мерного интеграла Фурье, которые могут оказаться полезными при решении ряда важных практических задач,в частности таких, как выбор системы параметров для опознавания образов произвольной мерности, моделирование на ЭВМ многомерных фильтров с целью устранения помех, приближенное вычисление кратного интеграла Фурье и т.д.

Из перечисляемых ниже свойств многомерных спектров приведём доказательства только двух из них (5^0 и 6^0), поскольку эти свойства наиболее важны для решения задач автоматического распознавания образов (строгое изложение ряда свойств кратного преобразования Фурье имеется, например, в [3,4]).

I^0. Спектры производных

а) Спектр частной производной

Если $f(x_1,\dots,x_m)$ имеет спектр $S(\omega_1,\dots,\omega_m)$, то спектр функции $\dfrac{\partial}{\partial x_p} f(x_1,\dots,x_m)$ равен $j\omega_p S(\omega_1,\dots,\omega_m)$; $(j^2=-1)$.

б) Спектр смешанной производной

Смешанная производная L -го порядка функции $f(x_1,\dots,x_m)$ имеет спектр

$$S^{(L)}(\omega_1,\dots,\omega_m)=\prod_{p=1}^{m}(j\omega_p)^{\ell_p}S(\omega_1,\dots,\omega_m)$$

при условии, что по p -му направлению функция

$$\frac{\partial^{L-\ell_p}}{(\partial x_1)^{\ell_1}\dots(\partial x_{p-1})^{\ell_{p-1}}(\partial x_{p+1})^{\ell_{p+1}}\dots(\partial x_m)^{\ell_m}}f(x_1,\dots,x_m)$$

и все её производные до (ℓ_p-1) -го порядка включительно обращаются в нуль при $x_p\to\pm\infty$ и любых значениях других переменных.

Здесь $$L=\sum_{p=1}^{m}\ell_p \; .$$

2⁰. Спектр интеграла

Если $f(x_1,\dots,x_m)$ имеет спектр $S(\omega_1,\dots,\omega_m)$, то при удовлетворении условий

а) $\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,\dots,x_{p-1},\eta_p,x_{p+1},\dots,x_m)\,d\eta_p=0$,

б) $f(x_1,\dots,x_m)$ – всюду непрерывна,

спектр функции $\int_{-\infty}^{x_p}f(x_1,\dots,x_{p-1},\eta_p,x_{p+1},\dots,x_m)\,d\eta_p$

равен $S_p^{(-1)}(\omega_1,\dots,\omega_m)=\frac{1}{j\omega_p}S(\omega_1,\dots,\omega_m)$.

Другой случай: если

а) $\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int f(x_1,\dots,x_m)\,dx_1\dots dx_m=0$,

б) $f(x_1,\dots,x_m)$ – всюду непрерывна,

то спектр $S^{(-m)}(\omega_1,\dots,\omega_m)$ функции $\int_{-\infty}^{x_1}\dots\int_{-\infty}^{x_m}f(\eta_1,\dots,\eta_m)\,d\eta_1\dots d\eta_m$

равен $\prod_{p=1}^{m}\frac{1}{j\omega_p}S(\omega_1,\dots,\omega_m)$.

3⁰. Спектр свертки двух функций

Если

$$f_0(x_1,\dots,x_m)=\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int f_1(x_1',\dots,x_m')f_2(x_1-x_1',\dots,x_m-x_m')\,dx_1'\dots dx_m', \quad (\text{I})$$

то спектр $S_0(\omega_1,\dots,\omega_m)$ выражается через спектры свертываемых функций следующим образом:

$$S_0(\omega_1,\dots,\omega_m)=S_1(\omega_1,\dots,\omega_m)\cdot S_2(\omega_1,\dots,\omega_m)\ ;$$

и обратно: спектром

$$S_0(\omega_1,\dots,\omega_m)=\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int S_1(\omega_1',\dots,\omega_m')\cdot S_2(\omega_1-\omega_1',\dots,\omega_m-\omega_m')\,d\omega_1'\dots d\omega_m'$$

обладает функция $f_0(x_1,\dots,x_m)=f_1(x_1,\dots,x_m)\cdot f_2(x_1,\dots,x_m)$.

Данное свойство может быть использовано для численной фильтрации многомерных сигналов. Действительно, для того чтобы сигнал $f_1(x_1,\dots,x_m)$ пропустить через фильтр с частотной характеристикой $S_2(\omega_1,\dots,\omega_m)$, достаточно составить свертку типа (I), в которой в качестве $f_2(\eta_1,\dots,\eta_m)$ необходимо использовать следующую функцию

$$f_2(\eta_1,\dots,\eta_m)=(2\pi)^{-m}\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int S_2(\omega_1,\dots,\omega_m)\exp\left\{j\sum_{k=1}^{m}\omega_k\eta_k\right\}d\omega_1\dots d\omega_m,$$

представляющую собой отклик m -мерного фильтра на единичный импульс.

4⁰. Спектр многомерной функции, представимой в виде произведения одномерных функций

Если многомерная функция может быть представлена произведением одномерных функций, то и её спектр представим в виде произведения одномерных спектров соответствующих функций.

При расчете многомерных спектров на ЭВМ весьма целесообразно (в тех случаях, когда это возможно) предварительно представить многомерную функцию в виде произведения одномерных функций, так как при этом значительно сокращаются затраты памяти и машинного времени, необходимые для расчёта спектра.

5^0. Спектр функции, подвергающейся параллельному переносу

Пусть некоторая функция $f(x_1,\dots,x_m)$ имеет спектр $S(\omega_1,\dots,\omega_m)$. Вычислим спектр $S'(\omega_1,\dots,\omega_m)$ функции $f(x_1+\Delta x_1,\dots,x_m+\Delta x_m)$.

$$S'(\omega_1,\dots,\omega_m)=\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int f(x_1+\Delta x_1,\dots,x_m+\Delta x_m)\exp\left\{-j\sum_{K=1}^{m}\omega_K x_K\right\}dx_1\dots dx_m=$$
$$=\exp\left\{j\sum_{K=1}^{m}\omega_K\Delta x_K\right\}\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int f(\varkappa_1,\dots,\varkappa_m)\cdot\exp\left\{-j\sum_{K=1}^{m}\omega_K\varkappa_K\right\}d\varkappa_1\dots d\varkappa_m=$$
$$=\exp\left\{j\sum_{K=1}^{m}\omega_K\Delta x_K\right\}\cdot S(\omega_1,\dots,\omega_m),$$

а

$$|S'(\omega_1,\dots,\omega_m)|=|S(\omega_1,\dots,\omega_m)|.$$

Таким образом, модуль спектра не изменяется при параллельном переносе функции. Это свойство представляет большой интерес при автоматическом распознавании образов, поскольку оно обеспечивает инвариантность по отношению к местоположению объекта в поле (пространстве) наблюдения.

6^0. Спектр функции, пространство переменных которой подверглось линейному преобразованию (линейной деформации)

Для решения задач распознавания образов с использованием многомерных спектров полезно выяснить следующий вопрос: как изменится спектр функции $f(x_1,\dots,x_m)$, если область ее существования подвергнуть произвольному линейному преобразованию с сохранением начала координат?

Пусть функция $f(x_1,\dots,x_m)$, заданная в системе координат с базисом $\{g_m\}$, имеет спектр $S(\omega_1,\dots,\omega_m)$. Преобразуем исходную систему координат в систему с базисом $\{e_m\}$, предполагая, что $\{g_m\}$ и $\{e_m\}$ имеют общее начало координат и связаны линейной зависимостью

$$g_1=\sum_{i=1}^{m}a_i^{(1)}e_i,\quad g_2=\sum_{i=1}^{m}a_i^{(2)}e_i,\dots,g_m=\sum_{i=1}^{m}a_i^{(m)}e_i.$$

Коэффициенты $a_n^{(i)}$ образуют матрицу A перехода от базиса $\{e_m\}$ к базису $\{g_m\}$

$$A=|a_n^{(i)}|=\begin{vmatrix} a_1^{(1)} & a_1^{(2)} & \dots & a_1^{(m)}\\ a_2^{(1)} & a_2^{(2)} & \dots & a_2^{(m)}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_m^{(1)} & a_m^{(2)} & \dots & a_m^{(m)}\end{vmatrix}$$

Выразим теперь $f(\eta_1,\dots,\eta_m)$ через первоначальные переменные (т.е. в исходном базисе $\{g_m\}$).

Известно [5], что

$$\eta_K=\sum_{i=1}^{m}b_K^{(i)}x_i,$$

где $|b_K^{(i)}|$ – матрица, транспонированная с матрицей, обратной к $|a_n^{(i)}|$, т.е.

$$|b_K^{(i)}|=(|a_n^{(i)}|^{-1})'. \qquad (2)$$

Найдем спектр функции $f(\eta_1,\dots,\eta_m)$, записав ее значения в исходном базисе $\{g_m\}$:

$$S(\omega_1,\dots\omega_m)=\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int f\left(\sum_{i=1}^{m}b_1^{(i)}x_i,\dots\sum_{i=1}^{m}b_m^{(i)}x_i\right)\exp\left\{-j\sum_{K=1}^{m}\omega_K x_K\right\}dx_1\dots dx_m. \qquad (3)$$

После замены переменных по формулам:

$$y_1=\sum_{i=1}^{m}b_1^{(i)}x_i;\quad y_2=\sum_{i=1}^{m}b_2^{(i)}x_i;\dots y_m=\sum_{i=1}^{m}b_m^{(i)}x_i$$

получим

$$S_1(\omega_1,\dots,\omega_m)=\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int f(y_1,\dots y_m)\exp\left\{-j\sum_{K=1}^{m}\omega_K\left[\sum_{i=1}^{m}C_K^{(i)}y_i\right]\right\}|D|\cdot dy_1\dots dy_m, \qquad (4)$$

где $|C_K^{(i)}|$ – матрица, обратная к $|b_K^{(i)}|$;

$|D|$ – якобиан преобразования, вычисляемый как определитель матрицы:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial y_m}\\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial y_m}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial x_m}{\partial y_1} & \frac{\partial x_m}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial x_m}{\partial y_m}\end{vmatrix} \qquad (5)$$

При линейном преобразовании координат якобиан преобразования равен постоянной величине $|D|_{Const}$, поэтому его можно вынести за знак интеграла.

Рассмотрим выражение под знаком exp в (4)

$$-j\sum_{k=1}^{m}\omega_k\left[\sum_{i=1}^{m}C_k^{(i)}y_i\right]. \qquad (6)$$

В (6) коэффициенты $C_k^{(i)}$ образуют матрицу, у которой

i - номер столбца,

k - номер строки.

Преобразуем (6) следующим образом:

$$-j\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\omega_k C_k^{(i)}y_i=-j\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\omega_k C_k^{(i)}y_i=-j\sum_{i=1}^{m}y_i\left[\sum_{k=1}^{m}C_k^{(i)}\omega_k\right]. \qquad (7)$$

В окончательной записи преобразования (7) коэффициенты $C_k^{(i)}$ образуют матрицу, транспонированную с $\|C_k^{(i)}\|$, поскольку здесь

i - номер строки,

k - номер столбца.

Так как коэффициенты $C_k^{(i)}$ в правой части выражения (7) составляют матрицу, транспонированную с $\|C_k^{(i)}\|$, которая в свою очередь обратна к матрице $\|b_k^{(i)}\|$, то, основываясь на соотношении (2), для выражения под знаком exp можно записать

$$-j\sum_{n=1}^{m}y_n\left[\sum_{p=1}^{m}a_n^{(p)}\omega_p\right], \qquad (8)$$

где коэффициенты $a_n^{(p)}$ образуют матрицу, совпадающую с матрицей A.

Итак, из (4) и (8) можно заключить, что если функция $f(x_1,...,x_m)$ имеет спектр $S(\omega_1,...,\omega_m)$, то спектр функции

$$f\left(\sum_{i=1}^{m}b_1^{(i)}x_i;\ ...\sum_{i=1}^{m}b_m^{(i)}x_i\right) \text{ равен } |D|_{Const}\cdot S\left(\sum_{p=1}^{m}a_1^{(p)}\omega_p;...\sum_{p=1}^{m}a_m^{(p)}\omega_p\right),$$

где коэффициенты $b_k^{(i)}$ и $a_n^{(p)}$ образуют матрицы, связанные соотношением

$$\|b_k^{(i)}\|=\left(\|a_n^{(p)}\|^{-1}\right)', \qquad (9)$$

а $|D|_{Const}$ определяется из (5).

Рассмотрим два частных случая.

I. Пусть пространство переменных функции $f(x_1,...,x_m)$ подвергается линейному растяжению вдоль i -го направления в

$a_i>0$ раз, ($a_i>1$ соответствует сжатию, $a_i<1$ - растяжению). Тогда

$$f(x_1,...,x_m)\to f(\eta_1,...\eta_m)=f(a_1x_1,...,a_mx_m),$$

то есть

$$\|b_k^{(i)}\|\equiv\begin{Vmatrix}a_1 & 0\dots 0\\ 0 & a_2\dots 0\\ \dots & \dots\\ 0 & 0\dots a_2\end{Vmatrix} \text{ и } \|a_n^{(p)}\|=\begin{Vmatrix}\frac{1}{a_1} & 0\dots 0\\ 0 & \frac{1}{a_2}\dots 0\\ \dots & \dots\\ 0 & 0\dots\frac{1}{a_m}\end{Vmatrix}$$

Учитывая, что $y_1=a_1x_1;\ y_2=a_2x_2;\ ...\ y_m=a_mx_m$, получим

$$|D|_{Const}=\prod_{k=1}^{m}\frac{1}{a_k},$$

а спектр преобразованной функции получается равным

$$S\left(\frac{\omega_1}{a_1};\frac{\omega_2}{a_2},...,\frac{\omega_m}{a_m}\right)\cdot\prod_{k=1}^{m}\frac{1}{a_k},$$

где $S(\omega_1,...\omega_m)$ - спектр исходной функции. В случае преобразования подобия ($a_1=a_2=...=a_m=a$) и $|D|_{Const}=(a)^{-m}$) спектр получается равным

$$(a)^{-m}\cdot S\left(\frac{\omega_1}{a},...,\frac{\omega_m}{a}\right).$$

Таким образом, растяжение (сжатие) исходного пространства переменных функции $f(x_1,...,x_m)$ вдоль i -го направления в a_i раз приводит к сжатию (растяжению) пространства переменных функции $S(\omega_1,...,\omega_m)$, также в a_i раз (при соответствующем изменении значений спектральной плотности).

2. Пусть линейные преобразования пространства переменных функции $f(x_1,...,x_m)$ таковы, что отображения происходят без "искажения" элемента площади. В этом случае [6] $|D|_{Const}=1$. К таким преобразованиям относятся повороты области существования функции $f(x_1,...,x_m)$ вокруг начала координат на произвольные фиксированные углы (функция рассматривается как твердое тело).

Известно [7], что если матрица $\|a_n^{(p)}\|$ описывает поворот

координатной сетки вокруг начала координат, то матрица,обра:
ная к $|a_n^{(p)}|$, транспонирована с ней, т.е.

$$|a_n^{(p)}|^{-1} = |a_n^{(p)}|' . \qquad (10$$

Из (9) и (10) заключаем, что

$$|b_k^{(i)}| = |a_n^{(p)}| ,$$

т.е. поворот функции $f(x_1,\dots,x_m)$ как твердого тела вокруг н
чала координат приводит к такому же повороту ее спектра во
круг начала координат.

В заключение отметим, что если $f(x_1,\dots,x_m)$ повернута в
круг произвольной оси или точки, то ее движение можно разл
жить на параллельный перенос и вращение вокруг начала коорд
нат. Аналогичным образом можно представить любое конечное г
ремещение функции $f(x_1,\dots,x_m)$. При этом спектр функции
поворачивается вокруг начала координат в соответствии с (
и получает дополнительный фазовый сдвиг согласно 4^0.

ЛИТЕРАТУРА

1. Игнатьев Н.К. Теория дискретизации и ее применение к з
дачам связи. М., 1962 г. МЭИС (докторская диссертац
2. Волошин Г.Я., Загоруйко Н.Г. Применение двумерных спе
ров для автоматического распознавания изображений.
(Данный сборник). Стр.3-11.
3. Бохнер С. Лекции об интегралах Фурье. ФМ, М., 1962 г.
4. Китайгородский А.И. Теория структурного анализа. Изд.
СССР, М., 1957 г.
5. Шилов Г.Е. Введение в теорию линейных пространств.ГИТ
М., 1956 г.
6. Бермант А.Ф. Отображения. Криволинейные координаты. П
образования. Формулы Грина. ФМ, М., 1958 г.
7. Кутилин Д.И. Теория конечных деформаций. ОГИЗ Гостех
дат, М-Л., 1947 г.

Поступила в редакц
25.VI.1965