

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ФЕРРОМАГНИТНОЙ ПЛЕНКИ, ПОМЕЩЕННОЙ
МЕЖДУ ТОКОПРОВОДЯЩИМИ ПЛАСТИНАМИ

А.П. Сухоруков

I. В в е д е н и е

Тонкие ферромагнитные пленки достаточно полно изучены в статике. В [1] рассмотрено магнитное поле пленки, представленной сфероидом с однородной намагниченностью. Предполагается, что сфероид хорошо описывает тонкую цилиндрическую пленку. Однако определенный практический интерес имеет изучение магнитного поля непосредственно цилиндрической пленки.

Вместе с этим большой интерес представляет изучение динамического поведения пленки, компоненты вектора намагниченности которой изменяются во времени. Если такую пленку поместить рядом с токопроводящими телами, то в последних наведутся вихревые токи, которые создадут свое магнитное поле.

В [2] рассматривается поведение тонкой цилиндрической пленки, расположенной посредине между двумя одинаковыми токопроводящими бесконечно большими пластинами. Вектор намагниченности пленки изменяется известным образом во времени. Чтобы получить выражение для магнитного поля, необходимо задать конкретное изменение вектора намагниченности во времени и сделать обратное преобразование Лапласа.

Наряду с такой постановкой задачи заслуживает внимания несимметричное расположение пластин и, в частности, наличие

только одной пластины. С другой стороны, если ограничиться гармоническим изменением вектора намагниченности, то преобразование Лапласа не потребуется. Именно этот случай и рассматривается в данной статье.

2. Постановка задачи. Основные соотношения

Рассмотрим ферромагнитную пленку (рис. 1), которая представляет собой цилиндр

$$x^2 + y^2 \leq R^2, \quad |z| \leq \frac{D}{2}. \quad (I)$$

Намагниченность пленки принимается однородной. Если толщина пленки D мала по сравнению с ее радиусом R , то можно считать, что вектор намагниченности лежит в плоскости пленки, т.е. $M_z = 0$. Вектор намагниченности пленки вращается или колеблется в плоскости пленки. В обоих случаях компоненты вектора намагниченности гармонически изменяются во времени. Таким образом, вектор намагниченности пленки описывается как

$$\vec{M}(t) = \begin{cases} (M_x, M_y, 0)e^{i\omega t} & \text{при } x^2 + y^2 \leq R^2, \\ (0, 0, 0) & \text{при } x^2 + y^2 > R^2, \end{cases} \quad (2)$$

где M_x, M_y - комплексные величины.

Пленка помещена между двумя токопроводящими бесконечно большими пластинами, положение которых задается в виде:

$$\frac{D}{2} < a_1 < z < b_1; \quad -\frac{D}{2} > -a_2 > z > -b_2. \quad (3)$$

Задача заключается в нахождении магнитного поля в описанной системе и исследовании влияния на него различных параметров.

Исходными уравнениями являются уравнения Максвелла в различных областях.

Для ферромагнитной среды тонкой пленки, пренебрегая вихревыми токами в ней, имеем

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{H} = 0, \\ \text{div}(\vec{H} + \vec{M}) = 0 \end{cases} \quad \text{при } |z| \leq \frac{D}{2}, \quad (4)$$

где $\vec{M}$ задан как известная функция координат и времени (2).

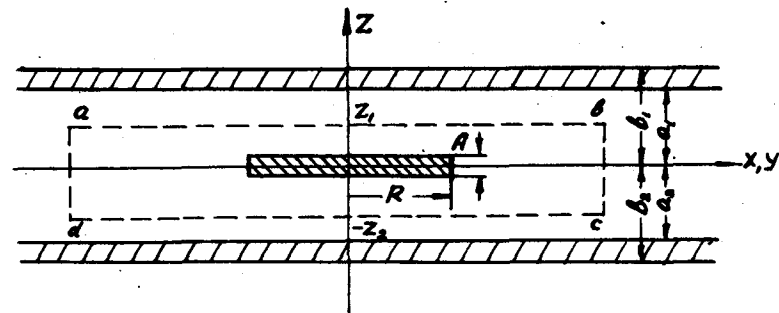


Рис. 1. Поперечное сечение проводящих пластин и помещенной между ними цилиндрической ферромагнитной пленки.

Магнитное поле в воздухе описывается уравнениями магнитостатики:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= 0 & \frac{D}{2} < z < a_1, \quad z > b_1, \\ \text{div } \vec{H} &= 0 & \text{при } -\frac{D}{2} > z > -a_2, \quad z < -b_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнения для плотности токов Фуко $\vec{G}$ и магнитного поля в проводящих пластинах:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= \vec{G}, & \text{div } \vec{H} &= 0, & a_1 < z < b_1, \\ \text{rot } \vec{G} &= -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, & \text{div } \vec{G} &= 0 & \text{при } -a_2 > z > -b_2, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$, σ - электрическая проводимость.

Граничные условия на плоскостях раздела сред требуют:

1) непрерывности нормальной составляющей

$$B_n = \mu_0 (H_n + M_n); \quad (7)$$

2) непрерывности тангенциальной составляющей H_t ;

3) отсутствия нормальной составляющей G_n на поверхности проводника.

При больших $|z|$ поле должно исчезать:

$$\text{lim } \vec{H} = 0 \quad \text{при } |z| \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Для решения уравнений (4 - 6) воспользуемся преобразованием Фурье пространственных координат:

$$(\vec{h}, \vec{m}, \vec{g}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\vec{H}, \vec{M}, \vec{G}) e^{-i\alpha x - i\beta y} d\alpha d\beta, \quad (9)$$

$$(\vec{H}, \vec{M}, \vec{G}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\vec{h}, \vec{m}, \vec{g}) e^{i\alpha x + i\beta y} d\alpha d\beta. \quad (10)$$

Из (10) видно, что дифференцирование $\vec{H}, \vec{M}, \vec{G}$ по x и y сводится к умножению на $i\alpha$ и $i\beta$. Это позволяет перейти от уравнений в частных производных относительно $\vec{H}, \vec{M}, \vec{G}$ к обыкновенным дифференциальным уравнениям для $\vec{h}, \vec{m}, \vec{g}$, которые при введении символического вектора $\vec{f} = (i\alpha, i\beta, \frac{\partial}{\partial z})$ записываются следующим образом:

$$[\vec{f} \times \vec{h}] = 0, (\vec{f}, \vec{h} + \vec{m}) = 0 \quad \text{при } |z| < \frac{D}{2}; \quad (11)$$

$$[\vec{f} \times \vec{h}] = 0, (\vec{f}, \vec{h}) = 0 \quad \text{при } \left. \begin{array}{l} \frac{D}{2} < z < a_1, z > b_1, \\ -\frac{D}{2} > z > -a_2, z < -b_2; \end{array} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{array}{l} [\vec{f} \times \vec{h}] = \vec{g}, (\vec{f}, \vec{h}) = 0, a_1 < z < b_1, \\ [\vec{f} \times \vec{g}] = -\mu_0 \omega_0 \vec{h}, (\vec{f}, \vec{g}) = 0 \quad \text{при} \\ -a_2 > z > -b_2. \end{array} \right\} \quad (13)$$

Граничные условия остаются прежними. $\vec{m}$ — известная функция α, β .

Решая уравнения (11-13), получаем в различных областях:

$$\left\{ \begin{array}{l} (h_x, h_y) = \frac{i}{f}(\alpha, \beta) [\alpha_1 \text{sh} f z + \alpha_2 \text{ch} f z + \frac{i}{f}(\alpha m_x + \beta m_y)], \\ h_z = \alpha_1 \text{ch} f z + \alpha_2 \text{sh} f z. \end{array} \right. \quad \text{при } |z| < \frac{D}{2} \quad (14)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (h_x, h_y) = \frac{i}{f}(\alpha, \beta) (\lambda_1 \text{sh} f z + \lambda_2 \text{ch} f z) \quad \text{при } \frac{D}{2} < z < a_1, \\ h_z = \lambda_1 \text{ch} f z + \lambda_2 \text{sh} f z \quad \text{при } -\frac{D}{2} > z > -a_2. \end{array} \right. \quad (15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (h_x, h_y) = \frac{i}{f}(\alpha, \beta) \frac{f}{k} (\mu_1 \text{sh} k z + \mu_2 \text{ch} k z), \\ h_z = \mu_1 \text{ch} k z + \mu_2 \text{sh} k z, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} a_1 < z < b_1, \\ \text{при} \end{array} \quad (16)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g_z = 0, \quad -a_2 > z > -b_2; \\ (g_x, g_y) = \frac{i}{f}(-\beta, \alpha) \frac{i f_0^2}{f} (\mu_1 \text{ch} k z + \mu_2 \text{sh} k z) \\ (h_x, h_y) = \frac{i}{f}(\alpha, \beta) (\nu_1 \text{sh} f z + \nu_2 \text{ch} f z), \\ h_z = \nu_1 \text{ch} f z + \nu_2 \text{sh} f z. \end{array} \right. \quad \text{при } z > b_1, z < -b_2. \quad (17)$$

Здесь

$$k^2 = f^2 + i f_0^2, f^2 = \alpha^2 + \beta^2, f_0^2 = \mu_0 \omega_0. \quad (18)$$

Далее, для $z > 0$ введем верхний индекс "+" и для $z < 0$ индекс "-".

Коэффициенты $\alpha, \lambda, \mu, \nu$ в выражениях (14-17) находятся из условий (7,8). Условие (8), требующее исчезновения поля $\vec{H}$ при больших $|z|$, дает:

$$\nu_1^+ + \nu_2^+ = 0, \quad \nu_1^- - \nu_2^- = 0. \quad (19)$$

Используя граничные условия (7), окончательно получаем:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 = -\mu_0 (A_2 B_1 - A_1 B_2) \text{sh} \frac{f D}{2}, \\ \alpha_2 = -\mu_0 (A_2 B_1 + A_1 B_2) \text{ch} \frac{f D}{2} + 2\mu_0 A_1 A_2 \text{sh} \frac{f D}{2}, \\ \lambda_1^+ = -2\mu_0 A_2 B_1 \text{sh} \frac{f D}{2}, \\ \lambda_2^+ = 2\mu_0 A_1 A_2 \text{sh} \frac{f D}{2}, \\ \lambda_1^- = 2\mu_0 A_1 B_2 \text{sh} \frac{f D}{2}, \\ \lambda_2^- = 2\mu_0 A_1 A_2 \text{sh} \frac{f D}{2}, \\ \mu_1^+ = -2\mu_0 A_2 (\text{ch} k b_1 + \frac{f}{k} \text{sh} k b_1) \text{sh} \frac{f D}{2}, \\ \mu_2^+ = 2\mu_0 A_2 (\text{sh} k b_1 + \frac{f}{k} \text{ch} k b_1) \text{sh} \frac{f D}{2}, \\ \mu_1^- = 2\mu_0 A_1 (\text{ch} k b_2 + \frac{f}{k} \text{sh} k b_2) \text{sh} \frac{f D}{2}, \\ \mu_2^- = 2\mu_0 A_1 (\text{sh} k b_2 + \frac{f}{k} \text{ch} k b_2) \text{sh} \frac{f D}{2}, \\ \nu_1^+ = -2\mu_0 A_2 e^{\delta b_1} \text{sh} \frac{f D}{2}, \\ \nu_2^+ = -\nu_1^+, \\ \nu_1^- = 2\mu_0 A_1 e^{\delta b_2} \text{sh} \frac{f D}{2}, \\ \nu_2^- = \nu_1^-. \end{array} \right\} \quad (20)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} A &= [e^{\delta a} \operatorname{ch} \kappa(\beta-a) + \frac{\kappa}{\delta} \operatorname{ch} \gamma a \operatorname{sh} \kappa(\beta-a) + \frac{\delta}{\kappa} \operatorname{sh} \gamma a \operatorname{sh} \kappa(\beta-a)], \\ B &= [e^{\delta a} \operatorname{ch} \kappa(\beta-a) + \frac{\kappa}{\delta} \operatorname{sh} \gamma a \operatorname{sh} \kappa(\beta-a) + \frac{\delta}{\kappa} \operatorname{ch} \gamma a \operatorname{sh} \kappa(\beta-a)], \\ m_0 &= \frac{i(\alpha m_x + \beta m_y)}{\delta(A_2 B_1 + A_1 B_2)}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

3. Интегральное выражение для напряженности магнитного поля

Напряженность магнитного поля $\vec{H}$ выражается через свое изображение $\vec{h}(\alpha, \beta)$ двойным интегралом Фурье

$$\vec{H} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{h}(\alpha, \beta) e^{i\alpha x + i\beta y} d\alpha d\beta. \quad (22)$$

Далее будем рассматривать только две компоненты магнитного поля H_x и H_y . Изображения Фурье этих компонент в матричной записи имеют следующий вид:

$$(h_x, h_y) = -\frac{h(r)}{r^2} \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \end{pmatrix}, \quad (23)$$

где функция $h(r)$ определяется формулами (15-21), а изображения Фурье компонент вектора намагниченности

$$(m_x, m_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (M_x, M_y) e^{-i\alpha\xi - i\beta\eta} d\xi d\eta.$$

Подставляя (23) в (22), получаем интегральное выражение для напряженности магнитного поля:

$$(H_x, H_y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha d\beta \frac{h(r)}{r^2} e^{i\alpha(x-\xi) + i\beta(y-\eta)} \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Введем полярные координаты:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= r \cos \varphi, & \beta &= r \sin \varphi; \\ \xi &= s \cos \chi, & \eta &= s \sin \chi; \\ x &= r \cos \varphi, & y &= r \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Сделав замену переменных в (24) по формулам (25), приходим к выражению

$$(H_x, H_y) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty r h(r) dr \int_0^{2\pi} s ds \int_0^{2\pi} e^{-i r s \cos(\varphi-\chi)} d\chi \int_0^{2\pi} e^{i r s \cos(\varphi-\varphi)} d\varphi \times \\ \times \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \end{pmatrix} d\varphi. \quad (26)$$

Здесь при интегрировании по s учтено распределение намагниченности в пленке (2).

Используя известные интегральные выражения Бесселевых функций [3,4], находим выражение для напряженности магнитного поля в виде:

$$(H_x, H_y) = -\frac{R}{2} \int_0^\infty h(r) J_0(rR) \left[J_0(rR) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - J_2(rR) \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \end{pmatrix} dr. \quad (27)$$

Здесь r и φ — полярные координаты точки наблюдения.

Функция $h(r)$ в общем случае является настолько сложной, что интегрирование (27) практически невозможно. Однако в некоторых частных случаях, которые будут рассмотрены ниже, функция $h(r)$ упрощается и выражение (27) можно проинтегрировать.

4. Магнитное поле одиночной пленки

В работе [1] рассмотрено магнитное поле одиночной пленки в форме сфероида. Формулы, полученные в предыдущих разделах, позволяют найти выражение для магнитного поля цилиндрической пленки. Для этой цели положим $a_1 = b_1$ и $a_2 = b_2$, что соответствует отсутствию проводящих пластин. При этих условиях из (21) следует, что $A=B$. Используя последнее соотношение, из (14) и (20) находим функцию $h(r)$ для магнитного поля пленки:

$$h_m(r) = 1 - e^{-\frac{rD}{2}} \operatorname{ch} \gamma z \quad \text{при } |z| \leq \frac{D}{2}, \quad (28)$$

$$h_m(r) = e^{-r^2} \operatorname{sh} \frac{rD}{2} \quad \text{при } z > \frac{D}{2}, \quad (29)$$

$$h_m(r) = e^{r^2} \operatorname{sh} \frac{rD}{2} \quad \text{при } z < -\frac{D}{2}. \quad (30)$$

Полный анализ зависимости напряженности от координат весьма затруднителен, так как выражение (27) с учетом (28-30) интегрируется в виде бесконечного ряда по степеням $(\frac{r}{R})^2$ для $r < R$ или по степеням $(\frac{R}{r})^2$ для $r > R$. Ряд плохо сходится при $r \sim R$.

Исследуем убывание магнитного поля по оси Z при $r=0$ (по центру пленки). Так как $J_0(0)=1$ и $J_2(0)=0$, то

$$(H_x, H_y) = -\frac{D}{2} \int_0^\infty h(r) J_1(rR) dr (M_x, M_y). \quad (31)$$

Подставляя в (31) вместо $h(r)$ его выражения из (28-30) и интегрируя, можно показать, что напряженность магнитного поля пленки для любого значения Z выражается одной формулой

$$(H_x, H_y) = -\frac{1}{4} \left(\frac{z + \frac{D}{2}}{\sqrt{(z + \frac{D}{2})^2 + R^2}} - \frac{z - \frac{D}{2}}{\sqrt{(z - \frac{D}{2})^2 + R^2}} \right) (M_x, M_y), \quad (32)$$

которая при принятом нами условии $D \ll R$ приобретает вид

$$(H_x, H_y) = -\frac{DR^2}{4(R^2 + z^2)^{3/2}} (M_x, M_y). \quad (33)$$

Зависимость H от координаты Z показана на рис. 2. Отрицательный знак показывает, что поле направлено против вектора намагниченности. Напряженность размагничивающего поля в центре пленки (при $x=y=z=0$) равна

$$(H_x, H_y) = -\frac{D}{4R} (M_x, M_y). \quad (34)$$

В случае пленки, представленной сплюснутым сфероидом с полуосями $\frac{D}{2}$ и R , напряженность равна [1]

$$(H_x, H_y) = -\frac{\pi D}{8R} (M_x, M_y). \quad (35)$$

Таким образом, размагничивающее поле в центре сфероидальной пленки в $\frac{\pi}{2} \approx 1,5$ раза больше, чем в цилиндрической пленке. При этом следует помнить, что магнитное поле внутри сфероидальной пленки однородное, а внутри цилиндрической неоднородное.

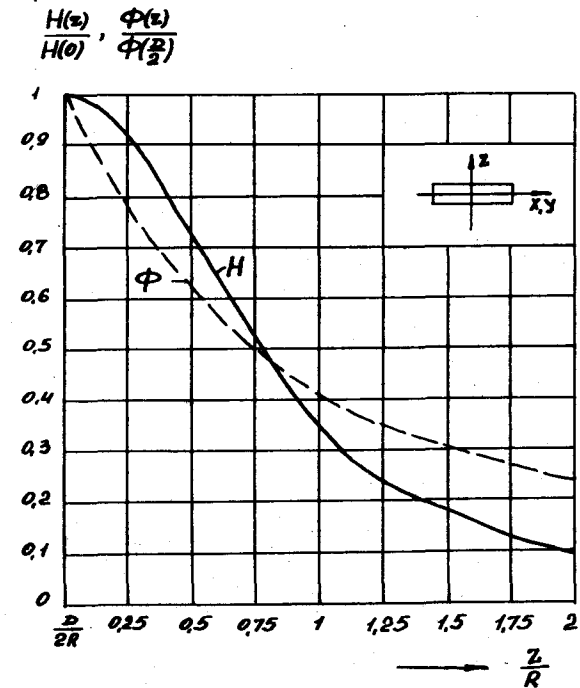


рис. 2. Зависимость составляющей напряженности магнитного поля пленки H_x (или H_y) при $x=0, y=0$ и потока Φ_x (или Φ_y) через симметричный контур от координаты z .

Вычислим магнитный поток, который пронизывает контур $abcd$ (рис. 1), лежащий в плоскости zoy . Стороны ad и bc достаточно удалены от пленки, так что их можно считать лежащими в бесконечности.

В плоскости zoy компонента напряженности магнитного поля H_x создается только компонентой вектора намагниченности M_x , причем H_x направлена против M_x .

Поток Φ_x выражается поверхностным интегралом от индукции B_x по площади контура:

$$\Phi_x = \iint_S B_x dy dz. \quad (36)$$

Так как индукция

$$B_x = \mu_0 (H_x + M_x),$$

то

$$\Phi_x = \mu_0 \iint_S H_x dy dz + \mu_0 \iint_S M_x dy dz. \quad (37)$$

Поток, создаваемый самим вектором намагниченности M_x , равен

$$\Phi_0 = 2\mu_0 D R M_x. \quad (38)$$

Поток размагничивающего поля H_x можно представить в виде

$$\Phi_{раз} = 2\mu_0 \int_0^\infty dr \int_{-z_2}^{z_1} H_x dz. \quad (39)$$

Здесь выражение для H_x нужно взять из (27) при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ с функцией $h(r)$, полученной из формул (28-30).

Соответствующие вычисления приводят к следующему выражению для магнитного потока при $D \ll R$:

$$\Phi(z_1, z_2) = \frac{1}{2} [\Phi(z_1) + \Phi(z_2)], \quad (40)$$

где

$$\Phi(z) = \frac{R}{z + \sqrt{z^2 + R^2}} \Phi_0, \quad z > \frac{D}{2}. \quad (41)$$

При симметричном расположении контура ($z_1 = z_2$) поток контура равен

$$\Phi(z, z) = \Phi(z)$$

и графически представлен на рис. 2.

5. Магнитное поле пленки в присутствии одной токопроводящей пластины

Рассмотрим магнитное поле пленки, расположенной над токопроводящей пластиной. Так как в этом случае верхней пластины нет, то $a_1 = b_1$ и, следовательно, $A_1 = B_1$. Принимая во внимание это обстоятельство, находим для функции $h(r)$ над пластиной следующее выражение:

$$h_r(r) = h_{пл}(r) + \frac{(\kappa^2 - \gamma^2) e^{-(2a_2 + z)r} \operatorname{sh} \kappa(b_2 - a_2) \operatorname{sh} \frac{\delta D}{2}}{(\kappa^2 + \gamma^2) \operatorname{sh} \kappa(b_2 - a_2) + 2\kappa \gamma \operatorname{ch} \kappa(b_2 - a_2)} \quad \text{при } z > -a_2;$$

$$\kappa^2 = \gamma^2 + i\gamma_0^2, \quad \gamma_0^2 = \mu_0 \omega \sigma. \quad (42)$$

Здесь $h_{пл}(r)$ представляет поле пленки без проводящей пластины и определяется формулами (28-30). Второе слагаемое в (42) описывает магнитное поле токов Фуко, наведенных в пластине.

Если толщина скин-слоя $\delta = \sqrt{2}/\gamma_0$ много меньше толщины

пластины $(b_2 - a_2)$ и радиуса пленки R , то есть если выполняются неравенства

$$\gamma_0(b_2 - a_2) \gg 1, \quad \gamma_0 R \gg 1, \quad (43)$$

то вместо (42) можно приближенно написать

$$h_r(r) = h_{пл}(r) + e^{-(2a_2 + z)r} \operatorname{sh} \frac{\delta D}{2} \quad (z > -a_2). \quad (44)$$

Второе слагаемое представляет магнитное поле "отраженной" пленки, расположенной на расстоянии a_2 от границы пластины (рис. 3). Это становится очевидным после сравнения формулы (44) с (29).

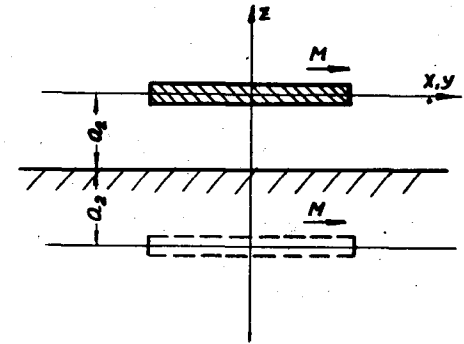


Рис. 3. "Отражение" пленки в проводящей пластине, толщина которой много больше толщины скин-слоя.

Таким образом, на больших частотах, при которых выполняются неравенства (43), для нахождения магнитного поля над пластиной можно пользоваться правилом отражения.

Согласно сказанному, напряженность магнитного поля равна

$$(H_x, H_y) = -\frac{DR^2}{4} \left\{ \frac{1}{(R^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{1}{[R^2 + (2a_2 + z)^2]^{3/2}} \right\} (M_x, M_y) \quad (z < -a_2). \quad (45)$$

Если $a_2 \ll R$, то

$$(H_x, H_y) = -\frac{DR^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} (M_x, M_y). \quad (46)$$

Из сравнения (46) с (33) следует, что размагничивающее поле в

пленке и ее внешнее поле в присутствии токопроводящей пластины почти удваивается.

Поток магнитного поля через контур $abcd$ (рис. 1) равен

$$\Phi(z_1, z_2) = \frac{1}{2} [\Phi(z_1) + \Phi(z_2) + \Phi(2a_2 + z_1) - \Phi(2a_2 - z_2)], \quad (47)$$

где

$$\Phi(z) = \frac{R}{z + \sqrt{z^2 + R^2}} \Phi_0, \quad z_1 > \frac{D}{2}, \quad z_2 < a_2.$$

6. Магнитное поле пленки в присутствии двух симметрично расположенных пластин

При симметричном расположении двух одинаковых пластин, когда $a_1 = a_2 = a$, $b_1 = b_2 = b$ и, следовательно, $A_1 = A_2$, $B_1 = B_2$, находим для области между пластинами

$$h_z(r) = h_m(r) + \frac{(k^2 r^2) e^{-ra} \operatorname{sh} k(b-a) \operatorname{sh} \frac{rD}{2} \operatorname{ch} rz}{k r e^{ra} \operatorname{ch} k(b-a) + k^2 \operatorname{sh} r a \operatorname{sh} k(b-a) + r^2 \operatorname{ch} r a \operatorname{sh} k(b-a)} \quad (48)$$

при $|z| < a$.

В случае сильного скин-эффекта, когда

$$\delta \ll (b-a) \ll R, \quad \delta \ll a, \quad (49)$$

функция $h_z(r)$ принимает вид:

$$h_z(r) = h_m(r) + \frac{D}{2a} e^{-ra} \operatorname{ch} rz \quad (|z| < a), \quad (50)$$

а в случае слабого скин-эффекта, когда

$$(b-a) \ll \delta \ll R, \quad (51)$$

имеем

$$h_z(r) = h_m(r) + \frac{i(b-a)D}{\delta^2} e^{-ra} \operatorname{ch} rz \quad (|z| < a). \quad (52)$$

Последнее выражение показывает, что при слабом скин-эффекте магнитное поле вихревых токов пластин сдвинуто по фазе на 90° относительно поля пленки. После интегрирования выражения (31) с учетом (52) получаем

$$(H_x, H_y) = \left\{ \frac{DR^2}{4(R^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{i(b-a)D}{4\delta^2} \left[2 \frac{a-z}{\sqrt{1-\frac{z^2}{R^2}}} - \frac{a+z}{\sqrt{(1-\frac{z^2}{R^2})^2 + \frac{z^2}{R^2}}} \right] \right\} (M_x, M_y) \quad (|z| < a). \quad (53)$$

Если $a \ll R$, то поле почти однородно вдоль оси z и напряженность

$$(H_x, H_y) = -\left(\frac{D}{4R} + \frac{i(b-a)D}{2\delta} \right) (M_x, M_y). \quad (54)$$

При сильном скин-эффекте имеем аналогичное выражение для напряженности размагничивающего поля:

$$(H_x, H_y) = -\left(\frac{D}{4R} + \frac{D}{4a} \right) (M_x, M_y). \quad (55)$$

Так как $a \ll R$, то второе слагаемое много больше первого, то есть размагничивающее поле в присутствии токопроводящих пластин увеличивается в $\left(\frac{R}{a} \right)$ раз. Например, при $a = 1,5D$ напряженность размагничивающего поля в пленке достигает огромной величины

$$(H_x, H_y) = -\frac{1}{6} (M_x, M_y). \quad (56)$$

Магнитный поток через симметричный контур считывания равен

$$\Phi(z, z) = \frac{R(a^2 - z^2)}{a^2 \sqrt{z^2 + R^2} + a z \sqrt{a^2 + R^2}} \Phi_0 \quad (z < a). \quad (57)$$

При $a \ll R$

$$\Phi(z, z) = \frac{a-z}{a} \Phi_0 \quad (z < a). \quad (58)$$

Заключение

Итак, размагничивающее поле одиночной цилиндрической пленки $\frac{DM}{4R}$.

При расположении одной толстой проводящей пластины вблизи от пленки с переменной намагниченностью размагничивающее поле возрастает не более чем в два раза, то есть остается того же порядка. При этом удваивается также внешнее поле пленки.

При расположении пленки между двумя толстыми пластинами размагничивающее поле настолько сильно концентрируется, что его напряженность становится порядка величины $\frac{DM}{4a}$ и при $a \sim D$ может достигать огромных значений. Последнее обстоятельство должно играть существенную роль в процессах перемагничивания пленки.

Л и т е р а т у р а

1. Chang H., IRE Trans. on El. Comp., 1959, vol. EC-8, N 4, pp. 458-465.
2. Von Martin C. Gutzwiller, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik (zamp), 1961, vol XII, S. 508-516.
3. Э.Т. Уиттекер, Дж.Н. Ватсон. Курс современного анализа, ч. 2. М., 1963 г.
4. Г.Н. Ватсон. Теория бесселевых функций. М., ИЛ, 1949.

Поступила в редакцию
7.5. 1964 г.