

РАЗРЫВНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ДИНАМИЧЕСКОМ
МНОГОУСТОЙЧИВОМ ЭЛЕМЕНТЕ

Б.М. Фомель

В вычислительных устройствах, предназначенных для передачи, обработки и хранения информации, широкое применение находят динамические импульсные элементы. Схемная реализация этих элементов весьма разнообразна, среди последних вариантов наиболее интересными и перспективными являются схемы со многими устойчивыми состояниями, динамические триггеры и ряд других схем. В настоящей работе исследуется динамика хронотрона [1], входящего в класс многоустойчивых элементов. Ставится задача определить вид возможных в элементе движений, получить условия возбуждения полезных режимов с расчетом параметров управляющих и тактовых импульсов. К решению поставленной задачи привлекается качественная теория нелинейных колебаний в сочетании с разрывной трактовкой стационарных процессов.

§ 1. Дифференциальные уравнения элемента

Рассматривается динамический многоустойчивый элемент хронотрон [1], схема которого представлена на рис. 1. На вход хронотрона подается напряжение ступенчатой формы, запускающее триггер-формирователь на лампах $\Lambda 1$ и $\Lambda 2$. Прямоугольные импульсы с анода $\Lambda 2$ создают на выходе интегрирующего звена ($R_4 C_2$) постоянный сигнал, который через сопротивление R_7 по-

ступают на сетку Π . Длительность прямоугольных импульсов триггера является признаком состояния элемента и может принимать зависимости от величины суммарного сигнала на сетке Π одно из устойчивых значений в дискретном ряду. Схема осуществляет стабилизацию длительности прямоугольных импульсов в области устойчивости каждого состояния.

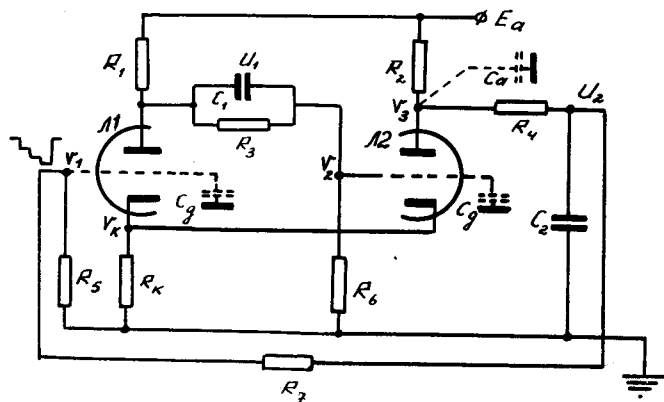


Рис. 1. Схема динамического многоустойчивого элемента.

На основании законов Кирхгофа составим дифференциальные уравнения хронотрона при отсутствии входных сигналов. При этом будем учитывать малые паразитные емкости ламп (C_a, C_g), пренебрегать анодной реакцией и считать, что сеточный ток зависит только от напряжения на сетке. В результате получаем следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{E_a - U_1 - \bar{v}_2}{R_1} &= i_{a1}(\bar{v}_1) + C_1 \frac{dU_1}{dt'} + \frac{U_1}{R_3}, \\ C_1 \frac{dU_1}{dt'} + \frac{U_1}{R_3} &= \frac{\bar{v}_2}{R_6} + i_{g2}(\bar{v}_2) + C_g \frac{d\bar{v}_2}{dt'}, \\ \frac{E_a - \bar{v}_3}{R_2} &= i_{a2}(\bar{v}_2) + \frac{\bar{v}_3 - U_2}{R_4} + C_a \frac{d\bar{v}_3}{dt'}, \\ \frac{\bar{v}_3 - U_2}{R_4} &= C_2 \frac{dU_2}{dt'} + \frac{U_2 - \bar{v}_1}{R_7}, \\ \frac{U_2 - \bar{v}_1}{R_7} &= \frac{\bar{v}_1}{R_5} + i_{g1}(\bar{v}_1) + C_g \frac{d\bar{v}_1}{dt'}, \\ \frac{\bar{v}_k}{R_k} &= i_{a1}(\bar{v}_1) + i_{a2}(\bar{v}_2) + i_{g1}(\bar{v}_1) + i_{g2}(\bar{v}_2) \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

Характеристики анодного и сеточного токов представим в виде кусочно-линейных функций (рис. 2).

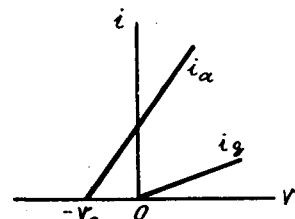


Рис. 2. Характеристики анодного и сеточного токов.

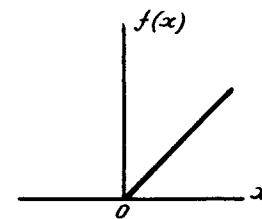


Рис. 3. Функция $f(x)$.

Для сокращения записи введем вспомогательную функцию (рис. 3)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ x & \text{при } x > 0. \end{cases} \quad (2)$$

Тогда токи ламп выразятся следующим образом:

$$\begin{aligned} i_a &= S_a f(\bar{v} - \bar{v}_k + \bar{v}_0) = \bar{v}_0 S_a f\left(\frac{\bar{v} - \bar{v}_k}{\bar{v}_0} + 1\right), \\ i_g &= S_g f(\bar{v} - \bar{v}_k) = \bar{v}_0 S_g f\left(\frac{\bar{v} - \bar{v}_k}{\bar{v}_0}\right). \end{aligned}$$

Выберем $\bar{v}_0, \bar{T}_0$ в качестве масштабов для приведения к безразмерным переменным, а в качестве последних — безразмерные переменные $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, t$, связанные со старыми переменными $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, U_1, U_2, t'$ следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 &= \bar{v}_0 x_1 + \bar{v}_k, & U_1 &= \bar{v}_0 x_4, \\ \bar{v}_2 &= \bar{v}_0 x_2 + \bar{v}_k, & U_2 &= \bar{v}_0 x_5, \\ \bar{v}_3 &= \bar{v}_0 x_3, & t' &= \bar{T}_0 t. \end{aligned}$$

Соответственно

$$\begin{aligned} E_a &= \bar{v}_0 E_a, \\ i_g &= \bar{v}_0 S_g f(x), \\ i_a &= \bar{v}_0 S_a f(x+1). \end{aligned}$$

Обозначая дифференцирование по безразмерному времени t точ-

кой сверху, получаем уравнения (I) в виде:

$$\mu_s \dot{x}_s = \sum_{r=1}^5 \alpha_{sr} x_r + \sum_{i=1}^2 \beta_{si} f(x_i+1) + \sum_{i=1}^2 \gamma_{si} f(x_i) + \rho_s, \quad (4)$$

$$s=1, \dots, 5.$$

Коэффициенты уравнений с учетом обозначений:

$$q_1 = 1 + \frac{R_1}{R_6}; \quad q_2 = \frac{R_2}{R_4}; \quad q_3 = \frac{R_4}{R_7}; \quad q_4 = 1 + \frac{R_1}{R_3};$$

$$q_5 = \frac{R_1}{R_9}; \quad q_6 = \frac{R_1}{R_7}; \quad R_9 = \frac{R_5 \cdot R_7}{R_5 + R_7};$$

$$\theta = \frac{R_4 C_2}{R_1 C_1} = \frac{\varepsilon \varphi}{T_0}; \quad T_0 = R_1 C_1;$$

$$\kappa_1 = R_K [S_a f'(x_1+1) + S_g f'(x_1)];$$

$$\kappa_2 = R_K [S_a f'(x_2+1) + S_g f'(x_2)]$$

представлены в таблицах I, 2, 3, 4, 5.

Таблица I

	I	2 (α)	3	4	5
I	$-\frac{1+K_2}{1+K_1+K_2} q_5$	$\frac{K_2}{1+K_1+K_2} q_1$	0	$\frac{K_2}{1+K_2+K_1}$	$\frac{1+K_2}{1+K_1+K_2} q_6$
2	$\frac{K_1}{1+K_1+K_2} q_5$	$-\frac{1+K_1}{1+K_1+K_2} q_1$	0	$-\frac{1+K_1}{1+K_1+K_2}$	$-\frac{K_1}{1+K_1+K_2} q_6$
3	0	0	$-(1+q_2)$	0	q_2
4	0	-1	0	$-q_4$	0
5	$\frac{q_3}{\theta}$	0	$\frac{1}{\theta}$	0	$-\frac{1+q_4}{\theta}$

Таблица 2

(μ)

1	$\frac{R_1 C_q}{T_0}$
2	$\frac{R_1 C_q}{T_0}$
3	$\frac{R_2 C_a}{T_0}$
4	1
5	1

Таблица 3

(ρ)

1	$-\frac{K_2}{1+K_1+K_2} \varepsilon a$
2	$\frac{1+K_1}{1+K_1+K_2} \varepsilon a$
3	εa
4	εa
5	0

§ 2. Фазовые траектории

В системе (4) первые три уравнения содержат малые множители при производных ($C_a, C_g \ll C_r$). Это дает возможность воспользоваться теоремой А.Н. Тихонова о решении задачи Коши для систем дифференциальных уравнений с малыми параметрами при производных [2] и изучать полную систему (4) с помощью двух вспомогательных: вырожденной системы

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} \dot{x}_1 + \alpha_{12} \dot{x}_2 + \alpha_{14} \dot{x}_4 + \alpha_{15} \dot{x}_5 + \beta_{11} f(x_1+1) + \beta_{12} f(x_2+1) + \gamma_{11} f(x_1) + \gamma_{12} f(x_2) + \rho_1 &= 0, \\ \alpha_{21} \dot{x}_1 + \alpha_{22} \dot{x}_2 + \alpha_{24} \dot{x}_4 + \alpha_{25} \dot{x}_5 + \beta_{21} f(x_1+1) + \beta_{22} f(x_2+1) + \gamma_{21} f(x_1) + \gamma_{22} f(x_2) + \rho_2 &= 0, \\ \alpha_{33} \dot{x}_3 + \alpha_{35} \dot{x}_5 + \beta_{32} f(x_2+1) + \rho_3 &= 0, \\ \dot{x}_4 &= \alpha_{42} x_2 + \alpha_{44} x_4 + \beta_{41} f(x_1+1) + \beta_{42} f(x_2+1) + \gamma_{41} f(x_1) + \gamma_{42} f(x_2) + \rho_4, \\ \dot{x}_5 &= \alpha_{51} x_1 + \alpha_{53} x_3 + \alpha_{55} x_5 + \beta_{51} f(x_1+1) + \beta_{52} f(x_2+1) + \gamma_{51} f(x_1) + \gamma_{52} f(x_2) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

и присоединенной системы

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 \dot{x}_1 &= \alpha_{11} \dot{x}_1 + \alpha_{12} \dot{x}_2 + \alpha_{14} \dot{x}_4 + \alpha_{15} \dot{x}_5 + \beta_{11} f(x_1+1) + \beta_{12} f(x_2+1) + \gamma_{11} f(x_1) + \gamma_{12} f(x_2) + \rho_1, \\ \mu_2 \dot{x}_2 &= \alpha_{21} \dot{x}_1 + \alpha_{22} \dot{x}_2 + \alpha_{24} \dot{x}_4 + \alpha_{25} \dot{x}_5 + \beta_{21} f(x_1+1) + \beta_{22} f(x_2+1) + \gamma_{21} f(x_1) + \gamma_{22} f(x_2) + \rho_2, \\ \mu_3 \dot{x}_3 &= \alpha_{33} \dot{x}_3 + \alpha_{35} \dot{x}_5 + \beta_{32} f(x_2+1) + \rho_3, \\ x_4 &= X_4 = \text{const}, \\ x_5 &= X_5 = \text{const}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

С точки зрения динамики элемента рассмотрение двух вспомогательных систем уравнений означает, что все движения в элементе можно разделить по порядку скоростей на два типа.

Будем называть "быстрыми" движениями решения присоединенной системы, а "медленными" — решения вырожденной системы, которые являются равновесными состояниями "быстрых" движений, в той области, где эти состояния устойчивы по Ляпунову. Определим условия устойчивости "быстрых" движений и тем самым найдем область существования "медленных" движений.

Таблица 4

	1	2
1	$\frac{S_g}{1+k_1+k_2} [k_2(R_1+(q_1-q_5)R_k - q_5 R_k)]$	$\frac{S_a}{1+k_1+k_2} [k_2(q_1-q_5)R_k - q_5 R_k]$
2	$-\frac{S_g}{1+k_1+k_2} [k_1(R_1+(q_1-q_5)R_k) + (R_1+q_1 R_k)]$	$-\frac{S_a}{1+k_1+k_2} [k_1(q_1-q_5)R_k + q_1 R_k]$
3	0	$-R_2 S_a$
4	$-(R_1+R_k) S_a$	$-R_k S_a$
5	$\frac{q_3}{\theta} R_k S_a$	$\frac{q_3}{\theta} R_k S_a$

Таблица 5

	1	2
1	$\frac{S_g}{1+k_1+k_2} [k_2((q_1-q_5)R_k - R_k) - (R_1+q_5 R_k)]$	$\frac{S_g}{1+k_1+k_2} [k_2(R_1+(q_1-q_5)R_k) - q_5 R_k]$
2	$-\frac{S_g}{1+k_1+k_2} [k_1(q_1-q_5)R_k - R_k) + q_5 R_k]$	$-\frac{S_g}{1+k_1+k_2} [k_1(R_1+(q_1-q_5)R_k) + R_1+q_1 R_k]$
3	0	0
4	$-R_k S_g$	$-R_k S_g$
5	$\frac{q_3}{\theta} R_k S_g$	$\frac{q_3}{\theta} R_k S_g$

Характеристическое уравнение системы (6)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial x_1} - \lambda & \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial x_2} - \lambda & \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \bar{F}_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \bar{F}_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \bar{F}_3}{\partial x_3} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

после подстановки вместо $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$ правых частей уравнений системы (6) приобретает вид:

$$\lambda^3 - (\alpha + \alpha_{33}) \lambda^2 + (\alpha_{33} \alpha + \beta) \lambda - \alpha_{33} \beta = 0, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_{11} + \alpha_{22} + \beta_{11} f'(x_1+1) + \beta_{21} f'(x_2+1) + \gamma_{11} f'(x_1) + \gamma_{22} f'(x_2), \\ \beta &= \alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{12} \alpha_{21} + (\alpha_{22} \beta_{11} - \alpha_{12} \beta_{21}) f'(x_1+1) + \\ &+ (\alpha_{11} \beta_{22} - \alpha_{21} \beta_{12}) f'(x_2+1) + (\alpha_{22} \gamma_{11} - \alpha_{12} \gamma_{21}) f'(x_1) + \\ &+ (\alpha_{11} \gamma_{22} - \alpha_{21} \gamma_{12}) f'(x_2) + (\beta_{11} \gamma_{22} - \beta_{21} \gamma_{12}) f'(x_1+1) f'(x_2) + \\ &+ (\beta_{22} \gamma_{11} - \beta_{12} \gamma_{21}) f'(x_2+1) f'(x_1) + (\beta_{11} \beta_{22} - \beta_{12} \beta_{21}) f'(x_1+1) f'(x_2+1) + \\ &+ (\gamma_{11} \gamma_{22} - \gamma_{12} \gamma_{21}) f'(x_1) f'(x_2). \end{aligned}$$

В соответствии с критерием Гурвица корни уравнения (7) будут отрицательными, если выполняется следующая система неравенств:

$$\left. \begin{aligned} \alpha + \alpha_{33} &< 0; \\ \alpha_{33} \alpha + \beta &> 0; \\ \alpha_{33} \beta &< 0; \\ -\alpha (\alpha_{33} \alpha + \alpha_{33}^2 + \beta) &> 0. \end{aligned} \right\}$$

Отсюда, поскольку $\alpha_{33} < 0$ (см. таблицу I), следует

$$\left. \begin{aligned} \alpha &< 0, \\ \beta &> 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Кусочно-линейные функции $f(x_i)$ и $f(x_i+1)$ зависят от переменных x_1 и x_2 , в плоскости которых можно выделить области линейности (рис. 4). В каждой из девяти областей функ-

ции приобретают одно из двух возможных значений.

$$f(x_1) = \begin{cases} 0 & \text{в } 1, 2, 4, 5, 7, 8; \\ x_1 & \text{в } 3, 6, 9; \end{cases}$$

$$f(x_2) = \begin{cases} 0 & \text{в } 4, 5, 6, 7, 8, 9; \\ x_2 & \text{в } 1, 2, 3; \end{cases}$$

$$f(x_1+1) = \begin{cases} 0 & \text{в } 1, 4, 7; \\ x_1+1 & \text{в } 2, 3, 5, 6, 8, 9; \end{cases}$$

$$f(x_2+1) = \begin{cases} 0 & \text{в } 7, 8, 9; \\ x_2+1 & \text{в } 1, 2, 3, 4, 5, 6. \end{cases}$$

Условия устойчивости (8) не зависят от переменной x_3 и на плоскости x_1, x_2 приводят к следующим выводам:

1) В областях 1, 4, 7, 8, 9 равновесные состояния "быстрых" движений устойчивы (особые точки типа узла). Следовательно, траектории "медленных" движений могут проходить только в этих областях.

2) В областях 2, 3, 5, 6 равновесные состояния "быстрых" движений неустойчивы (особые точки типа седла). Здесь возможны только "быстрые" движения.

3) Границы указанных областей представляют собой для системы (6) сложные особые точки типа седло-узел. Как показано в работах [3, 4] при строгом рассмотрении перехода от "медленных" движений к "быстрым" необходимо учитывать малую μ - окрестность этих границ.

Физически условие (8) означает, что устойчивые состояния равновесия "быстрых" движений будут в областях, где заперта по анодному току хотя бы одна из ламп.

Остается убедиться в том, что траектории быстрых движений непременно переходят в траектории "медленных" движений, т.е. что не существует замкнутых траекторий, составленных целиком из траекторий "быстрых" движений. Критерий Бендиксона [5] позволяет установить этот факт путем исследования на знак постоянства суммы

$$\frac{\partial \bar{F}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{F}_3}{\partial x_3}.$$

Рассмотрим теперь "медленные" движения и соответствующую

им вырожденную систему уравнений (5), которую запишем в общем виде:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(x_1, x_2, x_4, x_5) &= 0, \\ \Phi_2(x_1, x_2, x_4, x_5) &= 0, \\ \Phi_3(x_2, x_3, x_5) &= 0, \\ \dot{x}_4 &= \Phi_4(x_1, x_2, x_4), \\ \dot{x}_5 &= \Phi_5(x_1, x_2, x_3, x_5). \end{aligned} \right\} \quad (5')$$

Будем изучать фазовое подпространство "медленных" движений в проекции на плоскость переменных x_1, x_2 . Однозначность этой проекции следует из неравенства нулю якобианов:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} &\neq 0, \\ \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2)}{\partial(x_4, x_5)} &\neq 0. \end{aligned}$$

Уравнения вырожденной системы (5) на плоскости x_1, x_2 приобретают вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha_{11}^* x_1 + \alpha_{12}^* x_2 + \beta_{11}^* f(x_1+1) + \beta_{12}^* f(x_2+1) + \gamma_{11}^* f(x_1) + \gamma_{12}^* f(x_2) + \rho_{11}^*, \\ \dot{x}_2 &= \alpha_{21}^* x_1 + \alpha_{22}^* x_2 + \beta_{21}^* f(x_1+1) + \beta_{22}^* f(x_2+1) + \gamma_{21}^* f(x_1) + \gamma_{22}^* f(x_2) + \rho_{21}^*. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

При этом постоянные коэффициенты определяются из таблиц 6, 7, 8, 9, 10.

В каждой из пяти областей (I, 4, 7, 8, 9) существования "медленных" движений на плоскости x_1, x_2 (рис. 4) уравнения (9) становятся линейными:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \xi_1 x_1 + \eta_1 x_2 + \zeta_1, \\ \dot{x}_2 &= \xi_2 x_1 + \eta_2 x_2 + \zeta_2 \end{aligned} \right\}, \quad (10)$$

где ξ_i, η_i, ζ_i - постоянные коэффициенты, определяемые для каждой области отдельно.

Таблица 6

α^*		β^*		γ^*		ρ^*
I	2	I	2	I	2	
1 $G_1 A_4 + H_1 A_5$	$G_1 B_4 + H_1 B_5$	$G_1 C_4 + H_1 C_5$	$G_1 D_4 + H_1 D_5$	$G_1 M_4 + H_1 M_5$	$G_1 N_4 + H_1 N_5$	$G_1 R_4 + H_1 R_5$
2 $G_2 A_4 + H_2 A_5$	$G_2 B_4 + H_2 B_5$	$G_2 C_4 + H_2 C_5$	$G_2 D_4 + H_2 D_5$	$G_2 M_4 + H_2 M_5$	$G_2 N_4 + H_2 N_5$	$G_2 R_4 + H_2 R_5$

Таблица 7

	G	H
I	$\frac{\alpha_{24} \gamma_1 - \alpha_{14} \gamma_2}{\sigma_1 \gamma_2 - \sigma_2 \gamma_1}$	$\frac{\alpha_{25} \gamma_1 - \alpha_{15} \gamma_2}{\sigma_1 \gamma_2 - \sigma_2 \gamma_1}$
2	$\frac{\alpha_{14} \sigma_2 - \alpha_{24} \sigma_1}{\sigma_1 \gamma_2 - \sigma_2 \gamma_1}$	$\frac{\alpha_{15} \sigma_2 - \alpha_{25} \sigma_1}{\sigma_1 \gamma_2 - \sigma_2 \gamma_1}$

Таблица 8

	σ	γ
I	$\alpha_{11} + \beta_{11} f'(x_1+1) + \gamma_{11} f'(x_1)$	$\alpha_{12} + \beta_{12} f'(x_2+1) + \gamma_{12} f'(x_2)$
2	$\alpha_{21} + \beta_{21} f'(x_1+1) + \gamma_{21} f'(x_1)$	$\alpha_{22} + \beta_{22} f'(x_2+1) + \gamma_{22} f'(x_2)$

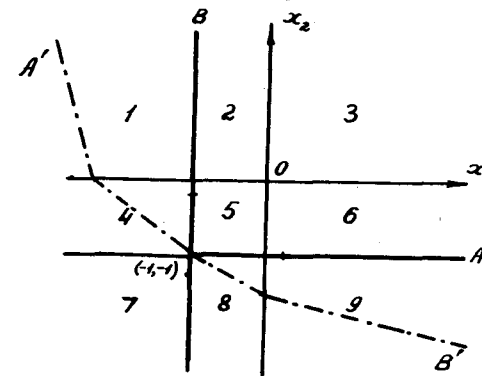


Рис. 4. Разбиение фазовой плоскости x_1, x_2 на области линейности.

Из уравнений (10) нетрудно найти координаты равновесных состояний

$$x_1^0 = \frac{\zeta_1 \zeta_2 - \zeta_2 \zeta_1}{\xi_1 \zeta_2 - \xi_2 \zeta_1}, \quad x_2^0 = \frac{\xi_2 \zeta_1 - \xi_1 \zeta_2}{\xi_1 \zeta_2 - \xi_2 \zeta_1} \quad (11)$$

и условия их устойчивости

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 + \zeta_2 &< 0, \\ \xi_1 \zeta_2 - \xi_2 \zeta_1 &> 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Подсчет коэффициентов ξ, ζ, ζ для каждой из указанных областей приводит к следующим результатам.

I область

ξ	ζ
1	$\frac{p_1 q_0}{\theta q_5} \frac{R_K(Sa+Sq)[(q_1 q_4 - 1)(1+R_K(Sa+Sq))+q_4 R_S q_2]}{q_1(1+R_K(Sa+Sq))+R_S Sq} - \frac{q_0}{\theta q_6} \left[\frac{p_1(1+R_K(Sa+Sq))}{1+q_2} + \frac{R_2 Sq}{1+q_2} \right]$
2	0
ζ	ξ
1	$\frac{[Ea(1-\frac{q_4}{1+q_2})+R_K Sa(q_1 q_4 - 1)](1+R_K(Sa+Sq))+q_0}{q_1(1+R_K(Sa+Sq))+R_S Sq} + \frac{q_0}{\theta q_5} \left[\frac{Ea}{1+q_2} - \frac{Sa(p_1 R_K + \frac{R_2}{1+q_2})}{1+q_2} \right]$
2	$-\frac{Ea(1-\frac{q_4}{1+q_2})+R_K Sa(q_1 q_4 - 1)}{q_1(1+R_K(Sa+Sq))+R_S Sq}$

Таблица 9

A	B	C	D	M	N	R
4	$\alpha_{44} \alpha_4$	$\alpha_{42} + \alpha_{44} \beta_4$	$\beta_{41} + \alpha_{44} \zeta_4$	$\beta_{42} + \alpha_{44} \alpha_4$	$\delta_{41} + \alpha_{44} \pi_4$	$\delta_{42} + \alpha_{44} \pi_4$
5	$\alpha_{51} +$ $+\alpha_{53} \alpha_3 +$ $+\alpha_{55} \alpha_5$	$\alpha_{53} \beta_3 +$ $+\alpha_{55} \beta_5$	$\beta_{51} +$ $+\alpha_{53} \zeta_3 +$ $+\alpha_{55} \zeta_5$	$\beta_{52} +$ $+\alpha_{53} \alpha_3 +$ $+\alpha_{55} \alpha_5$	$\delta_{51} +$ $+\alpha_{53} \pi_3 +$ $+\alpha_{55} \pi_5$	$\delta_{52} +$ $+\alpha_{53} \pi_3 +$ $+\alpha_{55} \pi_5$

$$22 = \alpha_{14} \alpha_{25} - \alpha_{24} \alpha_{15}$$

Таблица 10

A	B	C	D	M	N	R
3	$-\frac{\alpha_{35}}{\alpha_{33}} \alpha_5$	$-\frac{\alpha_{35}}{\alpha_{33}} \beta_5$	$-\frac{\alpha_{35}}{\alpha_{33}} \zeta_5$	$-\frac{(\alpha_{35} \alpha_5 + \beta_{32})}{(\alpha_{33} \alpha_5 + \beta_{32})} - \frac{\alpha_{35}}{\alpha_{33}} \pi_5$	$-\frac{\alpha_{35}}{\alpha_{33}} \pi_5$	$-\frac{(\alpha_{35} \pi_5 + \beta_{32})}{(\alpha_{33} \pi_5 + \beta_{32})}$
4	$\frac{\alpha_{21} \alpha_{15} - \alpha_{11} \alpha_{25}}{\alpha_2}$	$\frac{\alpha_{22} \alpha_{15} - \alpha_{12} \alpha_{25}}{\alpha_2}$	$\frac{\beta_{21} \alpha_{15} - \beta_{11} \alpha_{25}}{\alpha_2}$	$\frac{\beta_{22} \alpha_{15} - \beta_{12} \alpha_{25}}{\alpha_2}$	$\frac{\delta_{21} \alpha_{15} - \delta_{11} \alpha_{25}}{\alpha_2}$	$\frac{\delta_{22} \alpha_{15} - \delta_{12} \alpha_{25}}{\alpha_2}$
5	$\frac{\alpha_{11} \alpha_{24} - \alpha_{21} \alpha_{14}}{\alpha_2}$	$\frac{\alpha_{12} \alpha_{24} - \alpha_{22} \alpha_{14}}{\alpha_2}$	$\frac{\beta_{11} \alpha_{24} - \beta_{21} \alpha_{14}}{\alpha_2}$	$\frac{\beta_{12} \alpha_{24} - \beta_{22} \alpha_{14}}{\alpha_2}$	$\frac{\delta_{11} \alpha_{24} - \delta_{21} \alpha_{14}}{\alpha_2}$	$\frac{\delta_{12} \alpha_{24} - \delta_{22} \alpha_{14}}{\alpha_2}$

	ξ	η
1	$-\frac{p_1 q_6}{\theta q_5}$	$\frac{(q_1 q_4 - 1) R_K S_a}{q_1} - \frac{q_6 S_a}{\theta q_5 (1 + R_K S_a)} (p_1 R_K + \frac{R_2}{1 + q_2})$
2	0	$-\frac{q_1 q_4 - 1}{q_1}$

	ζ
1	$\frac{R_K S_a}{q_1 (1 + R_K S_a)} \left[\varepsilon_a \left(1 - \frac{q_4}{1 + q_2}\right) + R_K S_a (q_1 q_4 - 1) \right] + \frac{q_6 [\varepsilon_a - S_a (p_1 R_K + \frac{R_2}{1 + q_2})]}{\theta q_5 (1 + q_2)}$
2	$-\frac{\varepsilon_a \left(1 - \frac{q_4}{1 + q_2}\right) + R_K S_a (q_1 q_4 - 1)}{q_1 (1 + R_K S_a)}$

	ξ	η	ζ
1	$-\frac{p_1 q_6}{\theta q_5}$	0	$\frac{q_6 \varepsilon_a}{\theta q_5 (1 + q_2)}$
2	0	$-\frac{q_1 q_4 - 1}{q_1}$	$-\frac{\varepsilon_a \left(1 - \frac{q_4}{1 + q_2}\right)}{q_1}$

	ξ	η
1	$-\frac{p_1 q_6}{\theta q_5}$	0
2	$-\frac{S_a}{q_1} \left[R_K (q_1 q_4 - 1) + R_1 (q_4 - 1) - \frac{p_1 q_6 (R_1 + q_1 R_K)}{\theta q_5} \right]$	$-\frac{q_1 q_4 - 1}{q_1}$

	ζ
1	$\frac{q_6 \varepsilon_a}{\theta (1 + q_2) q_5 (1 + R_K S_a)} - \frac{p_1 q_6 R_K S_a}{\theta q_5 (1 + R_K S_a)}$
2	$\frac{\varepsilon_a \left[1 - \frac{q_4}{1 + q_2} + \frac{q_6 S_a (R_1 + q_1 R_K)}{\theta q_5 (1 + q_2) (1 + R_K S_a)}\right]}{q_1} - \frac{S_a \left[R_K (q_1 q_4 - 1) + R_1 (q_4 - 1) - \frac{p_1 q_6 R_K S_a (R_1 + q_1 R_K)}{\theta q_5 (1 + q_2) (1 + R_K S_a)} \right]}{q_1}$

	ξ	η
1	$-\frac{q_6 [p_1 (1 + R_K (S_a + S_g)) + p_2 R_1 S_g]}{\theta [q_5 (1 + R_K (S_a + S_g)) + R_1 S_g]}$	0
2	$-\frac{(q_1 q_4 - 1) R_K (S_a + S_g) - R_1 S_a (q_4 - 1)}{q_1} - \frac{q_1 R_K (S_a + S_g) + R_1 S_a [p_1 (1 + R_K (S_a + S_g)) + p_2 R_1 S_g]}{\theta [q_5 (1 + R_K (S_a + S_g)) + R_1 S_g]}$	$\frac{q_1 q_4 - 1}{q_1}$

	ζ
1	$\frac{q_6 \varepsilon_a}{\theta (1 + q_2) [q_5 (1 + R_K (S_a + S_g)) + R_1 S_g]} - \frac{p_1 q_6 R_K S_a}{\theta [q_5 (1 + R_K (S_a + S_g)) + R_1 S_g]}$
2	$-\frac{\varepsilon_a \left(1 - \frac{q_4}{1 + q_2}\right)}{q_1} - \frac{S_a [R_K (q_1 q_4 - 1) + R_1 (q_4 - 1)]}{q_1} - \frac{q_1 R_K (S_a + S_g) + R_1 S_a}{\theta [q_5 (1 + R_K (S_a + S_g)) + R_1 S_g]} \left(\frac{\varepsilon_a}{1 + q_2} - p_1 R_K S_g \right)$

Здесь введены дополнительные обозначения :

$$\rho_1 = \frac{q_5}{q_6} (1 + q_3 - \frac{q_2}{1+q_2}) - q_3,$$

$$\rho_2 = \frac{1}{q_6} (1 + q_3 - \frac{q_2}{1+q_2}).$$

Зная коэффициенты системы (10) для каждой области существования "медленных" движений, можно определить всю совокупность фазовых траекторий, соответствующих "медленным" движениям, а также подсчитать время движения по этим траекториям при любых начальных условиях. По формулам (11) был проведен расчет координат состояний равновесия, который привел к следующему результату: при отсутствии сигнала на входе в зависимости от сочетания параметров равновесные состояния располагаются либо в 8, либо в 9 областях. Это означает, что предоставленная самой себе система приходит к единственному состоянию равновесия, при котором первая лампа открыта, а вторая - закрыта.

Предположим, что коротким импульсом мы перебросили хронотрон в другое состояние, когда первая лампа закрыта, а вторая - открыта. Другими словами, на фазовой плоскости x_1, x_2 начальные условия заданы в области I (или 4). Тогда изображающая точка, двигаясь по траектории "медленного" движения к равновесному состоянию, расположенному в области 9 (или 8), выйдет на границу областей I и 2 (или 4 и 5), по траектории "быстрого" движения перейдет в область 9 (или 8) и затем снова по траектории "медленного" движения придет к равновесному состоянию. Так как часто подробности "быстрого" движения не представляют интереса, то достаточно знать начальную и конечную точки этого скачка, который, как было установлено ранее, происходит в гиперплоскостях $x_4 = X_4$ и $x_5 = X_5$. Условие скачка, связывающее начальную и конечную точки "быстрого" движения, выводится из первых двух уравнений системы (5):

$$\begin{aligned} \alpha_{11} x_1^* + \alpha_{12} x_2^* + \beta_{11} f(x_1^* + 1) + \beta_{12} f(x_2^* + 1) + \gamma_{11} f(x_1^*) + \gamma_{12} f(x_2^*) = \\ = \alpha_{11} x_1^H + \alpha_{12} x_2^H + \beta_{11} f(x_1^H + 1) + \beta_{12} f(x_2^H + 1) + \gamma_{11} f(x_1^H) + \gamma_{12} f(x_2^H); \quad (13) \\ \alpha_{21} x_1^* + \alpha_{22} x_2^* + \beta_{21} f(x_1^* + 1) + \beta_{22} f(x_2^* + 1) + \gamma_{21} f(x_1^*) + \gamma_{22} f(x_2^*) = \\ = \alpha_{21} x_1^H + \alpha_{22} x_2^H + \beta_{21} f(x_1^H + 1) + \beta_{22} f(x_2^H + 1) + \gamma_{21} f(x_1^H) + \gamma_{22} f(x_2^H), \end{aligned}$$

где (x_1^H, x_2^H) - координаты начальных точек "быстрого" движения, геометрическим местом которых являются полупрямые A и B (рис. 4); (x_1^*, x_2^*) - координаты конечных точек, которые могут располагаться в областях I, 4, 8, 9.

Найдем геометрическое место конечных точек "быстрых" движений. Предварительно разделим условия (13) на два: первое - для скачков, начальные точки которых лежат на полупрямой $A(x_2^H = -1)$ (рис. 4):

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} x_1^* + (\alpha_{12} + \beta_{12}) x_2^* + \gamma_{12} f(x_2^*) &= (\alpha_{11} + \beta_{11}) x_1^H - \alpha_{12} + \gamma_{11} f(x_1^H) \\ \alpha_{21} x_1^* + (\alpha_{22} + \beta_{22}) x_2^* + \gamma_{22} f(x_2^*) &= (\alpha_{21} + \beta_{21}) x_1^H - \alpha_{22} + \gamma_{21} f(x_1^H) \end{aligned} \right\}; \quad (13a)$$

второе - для скачков, начальные точки которых лежат на полупрямой $B(x_1^H = -1)$ (рис. 4):

$$\left. \begin{aligned} (\alpha_{11} + \beta_{11}) x_1^* + \alpha_{12} x_2^* + \gamma_{11} f(x_1^*) &= -\alpha_{11} + (\alpha_{12} + \beta_{12}) x_2^H + \gamma_{12} f(x_2^H) \\ (\alpha_{21} + \beta_{21}) x_1^* + \alpha_{22} x_2^* + \gamma_{21} f(x_1^*) &= -\alpha_{21} + (\alpha_{22} + \beta_{22}) x_2^H + \gamma_{22} f(x_2^H) \end{aligned} \right\}; \quad (13b)$$

Далее, из (13a) находим, что если выполняется неравенство

$$x_1^H < \frac{(\alpha_{22})_{8,9}}{(\alpha_{21} + \beta_{21})_{1,4}},$$

то конечная точка лежит в области 4 ($x_2^* < 0$), в противном случае - в области I ($x_2^* > 0$). Соответственно, из (13b) следует, что при

$$x_2^* < \frac{(\alpha_{11})_{1,4}}{(\alpha_{12} + \beta_{12})_{8,9}}$$

конечная точка попадает в область 8 ($x_1^* < 0$), а при

$$x_2^* > \frac{(\alpha_{11})_{1,4}}{(\alpha_{12} + \beta_{12})_{8,9}}$$

- в область 9 ($x_1^* > 0$).

(Индексы I, 4, 8, 9 при круглых скобках означают номера областей, для которых нужно брать значения коэффициентов).

Наконец, пользуясь полученными неравенствами и разрешая (13a) и (13b) относительно x_2^* как функции x_1^* , для любой пары областей находим геометрическое место конечных точек, которое представлено графически на рис. 4 в виде штрихпунктирных линий в областях I, 4, 8, 9.

Область 7 ($x_1 < -1, x_2 < -1$), в которой обе лампы закрыты, не может содержать конечных точек "быстрого" движения. В этом легко убедиться, подставив координаты любой точки из любой области в условие скачка (13).

Теперь можно рассмотреть, как под влиянием внешнего воздействия в фазовом пространстве системы конструируются замкнутые траектории, составленные из чередующихся кусков траекторий "медленного" и "быстрого" движений и соответствующие искомым разрывным колебаниям. На сетку первой лампы хронотрона подаются отрицательные импульсы ступенчатой формы (рис. 5).

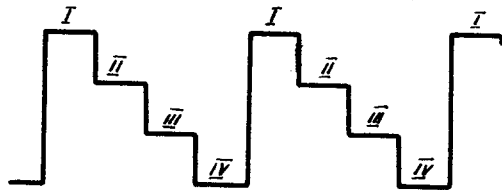


Рис. 5. Тактовые импульсы.

Будем считать, что на время действия каждой ступеньки система остается автономной, а в уравнения (10) вносится соответствующая поправка:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \xi_1(x_1 + Z) + \eta_1 x_2 + \zeta_1 \\ \dot{x}_2 &= \xi_2 x_1 + \eta_2 x_2 + \zeta_2 \end{aligned} \right\}, \quad (14)$$

где Z — амплитуда ступеньки.

Оставаясь на плоскости x_1, x_2 , указанную поправку можно истолковать как изменение координат равновесного состояния для данной области. На рис. 6 показано два ряда равновесных состояний, пронумерованных соответственно ступенькам входного импульса. Определение координат равновесных состояний здесь проведено для двух областей: 4 ($x_1 < -1; 0 > x_2 > -1$) и

8 ($0 > x_1 > -1; x_2 < -1$). В 9 области расположен ряд устойчивых особых точек для траекторий, проходящих в 4 области, а в 8, 5 и 2 областях — для траекторий, проходящих в 8 области. Выясним направления касательных к интегральным кривым в узловых особых точках плоскости x_1, x_2 . В областях 1, 4, 8, 9 фазовые траектории "медленных" движений описываются уравнениями типа (10). Введем замену переменных:

$$\left. \begin{aligned} u &= a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 \\ v &= a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 \end{aligned} \right\}, \quad (15)$$

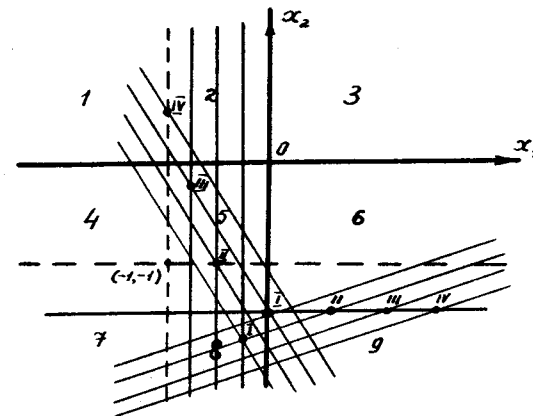


Рис. 6. Равновесные состояния для областей 4 и 8 на плоскости x_1, x_2 .

с целью получить уравнения (10) в канонической форме:

$$\frac{du}{dt} = \lambda_1 u, \quad \frac{dv}{dt} = \lambda_2 v, \quad (16)$$

где λ_1 и λ_2 — корни характеристического уравнения системы (10).

Дифференцируем уравнения (15):

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= a_1 \frac{dx_1}{dt} + b_1 \frac{dx_2}{dt}, \\ \frac{dv}{dt} &= a_2 \frac{dx_1}{dt} + b_2 \frac{dx_2}{dt}, \end{aligned}$$

и подставляем в (16) с учетом (10)

$$a_1(\xi_1 x_1 + \eta_1 x_2 + \zeta_1) + b_1(\xi_2 x_1 + \eta_2 x_2 + \zeta_2) = \lambda_1(a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1),$$

$$a_2(\xi_1 x_1 + \eta_1 x_2 + \zeta_1) + b_2(\xi_2 x_1 + \eta_2 x_2 + \zeta_2) = \lambda_2(a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2).$$

Сравнивая коэффициенты при x_1 и x_2 , а также свободные члены, получаем:

$$\left. \begin{aligned} a_1(\xi_1 - \lambda_1) + b_1 \xi_2 &= 0; \\ a_1 \eta_1 + b_1(\eta_2 - \lambda_1) &= 0; \\ a_1 \zeta_1 + b_1 \zeta_2 - \lambda_1 c_1 &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (17a)$$

$$\left. \begin{aligned} a_2(\xi_1 - \lambda_2) + b_2 \xi_2 &= 0; \\ a_2 \eta_1 + b_2(\eta_2 - \lambda_2) &= 0; \\ a_2 \xi_1 + b_2 \xi_2 - \lambda_2 c_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (I76)$$

Уравнения (I7a) и (I76) дают для a_1, b_1, c_1 и a_2, b_2, c_2 решения, не равные тождественно нулю, только в том случае, если λ_1 и λ_2 являются корнями уравнения:

$$\begin{vmatrix} \xi_1 - \lambda & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

т.е. корнями характеристического уравнения системы (I0).

Однородные уравнения (I7a) и (I76) определяют лишь отношение неизвестных:

$$\left. \begin{aligned} \frac{a_1}{b_1} &= \frac{\xi_2}{\lambda_1 - \xi_1} = \frac{\lambda_1 - \eta_2}{\eta_1}, \\ \frac{c_1}{b_1} &= \frac{1}{\lambda_1} \left[\xi_2 + \xi_1 \frac{\xi_2}{\lambda_1 - \xi_1} \right] = \frac{1}{\lambda_1} \left[\xi_2 + \xi_1 \frac{\lambda_1 - \eta_2}{\eta_1} \right], \\ \frac{a_2}{b_2} &= \frac{\xi_2}{\lambda_2 - \xi_1} = \frac{\lambda_2 - \eta_2}{\eta_1}, \\ \frac{c_2}{b_2} &= \frac{1}{\lambda_2} \left[\xi_2 + \xi_1 \frac{\xi_2}{\lambda_2 - \xi_1} \right] = \frac{1}{\lambda_2} \left[\xi_2 + \xi_1 \frac{\lambda_2 - \eta_2}{\eta_1} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (I8)$$

Поскольку в особой точке типа узла корни характеристического уравнения не равны между собой, то и соответствующие отношения (I8) не равны между собой и, следовательно, детерминант

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Отличие от нуля этого детерминанта обеспечивает возможность разрешения уравнений (I5) относительно x_1 и x_2 и гарантирует взаимную однозначность преобразования переменных.

Уравнения (I6), преобразованные к виду

$$\frac{d\sigma}{du} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{\sigma}{u},$$

дают решение

$$\sigma = C u^{\lambda_2/\lambda_1},$$

где C - постоянная интегрирования. Для устойчивого узла $|\lambda_2| > |\lambda_1|$, поэтому на плоскости (u, σ) имеем семейство парабол (рис. 7). Направление движения изображающей точки по

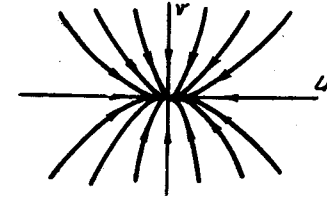


Рис. 7. Интегральные кривые в окрестности узла на плоскости u, σ .

фазовым траекториям определяется, как это следует из уравнений (I6), знаками корней λ_1 и λ_2 . Оси координат ($u=0$, $\sigma=0$) являются касательными к интегральным кривым в особой точке. Переходя на плоскость (x_1, x_2) на основании (I5), получаем уравнения этих касательных:

$$\left. \begin{aligned} a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 &= 0 \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Учитывая соотношения (I8), получаем:

$$\begin{aligned} x_2 &= -\frac{\lambda_1 - \eta_2}{\eta_1} x_1 - \frac{1}{\lambda_1} \left[\xi_2 + \xi_1 \frac{\lambda_1 - \eta_2}{\eta_1} \right] \quad (u=0); \\ x_2 &= -\frac{\xi_2}{\lambda_2 - \xi_1} x_1 - \frac{1}{\lambda_2} \left[\xi_2 + \xi_1 \frac{\xi_2}{\lambda_2 - \xi_1} \right] \quad (\sigma=0). \end{aligned} \quad (21)$$

Применительно к области 4 на плоскости (x_1, x_2) выражения (21) приобретают вид:

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= -\frac{\xi_1 - \eta_2}{\eta_1} x_1 - \frac{1}{\xi_1} \left[\xi_2 + \xi_1 \frac{\xi_1 - \eta_2}{\eta_1} \right] \\ x_2 &= -\frac{\xi_2}{\eta_2} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

а в области 8

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -\frac{\xi_1}{\xi_1} \\ x_2 &= -\frac{\xi_2}{\eta_2 - \xi_1} x_1 - \frac{1}{\eta_2} \left[\xi_2 + \xi_1 \frac{\xi_2}{\eta_2 - \xi_1} \right] \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Сами интегральные кривые для указанных областей изображены соответственно на рис. 8а и б.

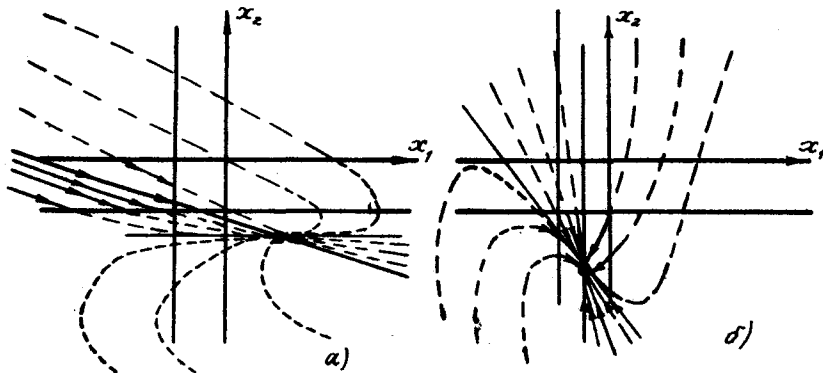


Рис. 8. Фазовые траектории в окрестностях равновесных состояний:

а) фазовые траектории в области 4; б) фазовые траектории в области 8.

Полученное распределение равновесных состояний с учетом характера фазовых траекторий в окрестности каждого из них позволяет реализовать в фазовом пространстве системы дискретный ряд замкнутых траекторий, соответствующих разрывным периодическим колебаниям в хронотроне. Проекция двух таких замкнутых траекторий на плоскость x_1, x_2 , составленных из кусков траекторий "медленных" и "быстрых" движений, представлены на рис. 9, причем сплошные линии изображают траектории "медленных" движений, а пунктирные — "быстрых".

§ 3. Расчет режимов работы

Проведенное исследование общей структуры фазового портрета хронотрона может служить основой, во-первых, для конструирования в системе стационарных режимов заданного вида, и во-вторых, для решения ряда частных задач расчетного характера, как например, расчет параметров задающих импульсов или определение формы напряжения в различных узлах схемы.

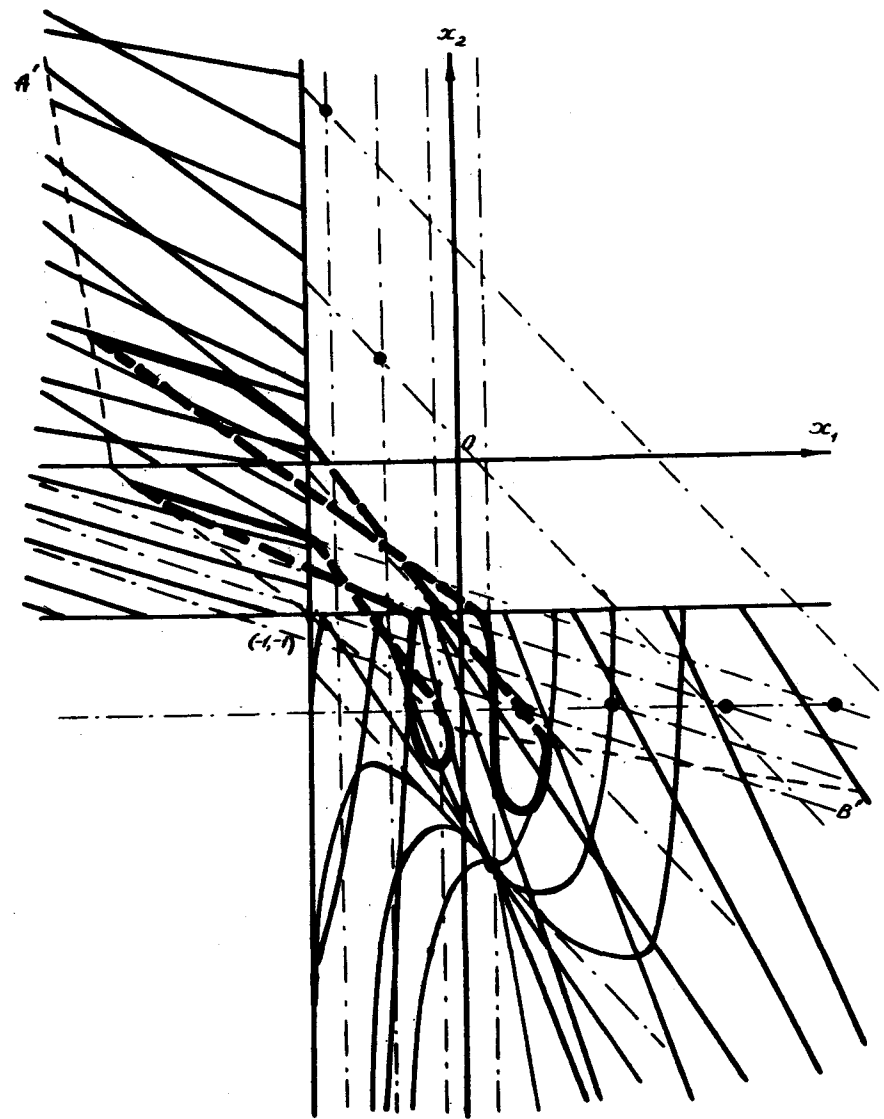


Рис. 9. Замкнутые фазовые траектории, соответствующие устойчивым периодическим процессам в хронотроне.

а) Определение формы напряжения в узлах схемы

Поставим задачу-найти форму напряжения u_1 на емкости C_1 в тот полупериод колебаний, когда лампа $\Lambda 1$ открыта, а лампа $\Lambda 2$ закрыта. Для этого необходимо спроектировать фазовое подпространство "медленных" движений на плоскость x_1, x_4 и учесть, что в интересующий нас полупериод колебаний функции

$$f(x_2) = f(x_2 + 1) = 0 \quad (24)$$

$$f(x_1 + 1) = x_1 + 1$$

и переменная x_1 меняется либо в пределах $-1 < x_1 < 0$, если схема работает в режиме без сеточных токов, либо $x_1 \gg 0$, если имеются сеточные токи.

Однозначность искомой проекции следует из неравенства нулю соответствующих функциональных определителей.

Подставляя (24) в систему (5), имеем:

$$\left. \begin{aligned} (\alpha_{11} + \beta_{11})x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{14}x_4 + \alpha_{15}x_5 + \delta_{11}f(x_1) + \rho_1 + \beta_{11} &= 0; \\ (\alpha_{21} + \beta_{21})x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{24}x_4 + \alpha_{25}x_5 + \delta_{21}f(x_1) + \rho_2 + \beta_{21} &= 0; \\ \alpha_{33}x_3 + \alpha_{35}x_5 + \rho_3 &= 0; \\ \dot{x}_4 = \beta_{41}x_1 + \alpha_{42}x_2 + \alpha_{44}x_4 + \delta_{41}f(x_1) + \rho_4 + \beta_{41}; \\ \dot{x}_5 = (\alpha_{51} + \beta_{51})x_1 + \alpha_{53}x_3 + \alpha_{55}x_5 + \delta_{51}f(x_1) + \beta_{51}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

После ряда элементарных преобразований приходим к уравнениям на плоскости x_1, x_4 :

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha_{11}^* x_1 + \alpha_{14}^* x_4 + \delta_{11}^* f(x_1) + \rho_1^* \\ \dot{x}_4 &= \alpha_{41}^* x_1 + \alpha_{44}^* x_4 + \delta_{41}^* f(x_1) + \rho_4^* \end{aligned} \right\}, \quad (26)$$

где постоянные коэффициенты определяются из следующих таблиц.

Таблица II

	α^*		δ^*	ρ^*
	I	4		
I	$\frac{\alpha_1 A_4 + \beta_1 A_5}{1 - C f'(x_1)}$	$\frac{\alpha_1 B_4 + \beta_1 B_5}{1 - C f'(x_1)}$	$\frac{\alpha_1 C_4 + \beta_1 C_5}{1 - C f'(x_1)}$	$\frac{\alpha_1 D_1 + \beta_1 D_5}{1 - C f'(x_1)}$
4	A_4	B_4	C_4	D_4

Таблица I2

	A	B	C	D
4	$\alpha_{21} + \beta_{41}$	$\alpha_{44} + \alpha_{42}\beta_2$	$\delta_{11} + \alpha_{42}C_2$	$\rho_4 + \beta_{41} + \alpha_{42}d_2$
5	$\alpha_{51} + \beta_{51} + \alpha_{53}m$	$\beta_5 m$	$C_5 m$	$\alpha_5 m + \beta_{51} - \frac{\alpha_{53}\rho_3}{\alpha_{33}}$

$$m = \alpha_{55} - \frac{\alpha_{53}\alpha_{35}}{\alpha_{33}}$$

Таблица I3

	a	b	c	d
I	$\frac{\alpha_{14}\alpha_{22} - \alpha_{24}\alpha_{12}}{\delta}$	$\frac{\alpha_{15}\alpha_{22} - \alpha_{25}\alpha_{12}}{\delta}$	$\frac{\delta_{11}\alpha_{22} - \delta_{21}\alpha_{12}}{\delta}$	$\frac{\alpha_{22}(\rho_1 + \beta_{11}) - \alpha_{12}(\rho_2 + \beta_{21})}{\delta}$
2	$\frac{\alpha_{24}(\alpha_{11} + \beta_{11}) - \alpha_{14}(\alpha_{21} + \beta_{21})}{\delta}$	$\frac{\alpha_{14}\alpha_{25} - \alpha_{24}\alpha_{15}}{\delta}$	$\frac{\delta_{11}\alpha_{25} - \delta_{21}\alpha_{15}}{\delta}$	$\frac{\alpha_{25}(\rho_1 + \beta_{11}) - \alpha_{15}(\rho_2 + \beta_{21})}{\delta}$
5	$\frac{-\alpha_{22}(\alpha_{11} + \beta_{11}) + \alpha_{12}(\alpha_{21} + \beta_{21})}{\delta}$	$\frac{\alpha_{14}\alpha_{22} - \alpha_{24}\alpha_{12}}{\delta}$	$\frac{\delta_{11}\alpha_{22} - \delta_{21}\alpha_{12}}{\delta}$	$\frac{\alpha_{22}(\rho_1 + \beta_{11}) - \alpha_{12}(\rho_2 + \beta_{21})}{\delta}$

$$\delta = \alpha_{12}(\alpha_{21} + \beta_{21}) - \alpha_{22}(\alpha_{11} + \beta_{11})$$

$$\delta = \alpha_{22}\alpha_{15} - \alpha_{12}\alpha_{25}$$

Для режима без сеточных токов ($-1 \leq x_1 < 0$) уравнения (26) становятся линейными:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha_{11}^* x_1 + \alpha_{14}^* x_4 + \rho_1^* \\ \dot{x}_4 &= \alpha_{41}^* x_1 + \alpha_{44}^* x_4 + \rho_4^* \end{aligned} \right\}, \quad (27)$$

так же как и для режима с сеточными токами ($x_1 > 0$), только в последнем случае коэффициенты α_{ii}^* и α_{4i}^* заменяются соответственно на суммы коэффициентов $(\alpha_{ii}^* + \delta_{ii}^*)$ и $(\alpha_{4i}^* + \delta_{4i}^*)$.

Простой анализ системы (27) с учетом таблиц I, 2, 3, 4, 5 и таблиц II, I2, I3 показывает, что на фазовой плоскости (x_1, x_2) имеется одна устойчивая особая точка типа узла. Уравнения касательных к интегральным кривым в особой точке могут быть определены с помощью приведенного в предыдущем параграфе линейного неоднородного преобразования координат и для области безсеточных токов имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -\frac{\rho_1^*}{\alpha_{11}^*}, \\ x_2 &= -\frac{\alpha_{41}^*}{\alpha_{44}^* - \alpha_{11}^*} x_1 - \frac{1}{\alpha_{44}^*} \left[\rho_4^* + \rho_1^* \frac{\alpha_{41}^*}{\alpha_{44}^* - \alpha_{11}^*} \right] \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Для области с сеточными токами ($x_1 > 0$) в уравнениях (28) производится указанная выше замена:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -\frac{\rho_1^*}{\alpha_{11}^* + \delta_{11}^*}, \\ x_2 &= -\frac{\alpha_{41}^* + \delta_{41}^*}{\alpha_{44}^* - (\alpha_{11}^* + \delta_{11}^*)} x_1 - \frac{1}{\alpha_{44}^*} \left[\rho_4^* + \rho_1^* \frac{\alpha_{41}^* + \delta_{41}^*}{\alpha_{44}^* - (\alpha_{11}^* + \delta_{11}^*)} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

На рис. 10 представлены фазовые траектории в окрестности особых точек в двух областях. Задавая различные начальные условия, можно получить все возможные формы изменения переменной x_4 или напряжения u_4 .

Аналогичным образом можно найти формы напряжений в любом узле схемы и в любой полупериод колебаний.

б) Расчет амплитуды тактовых импульсов

Число ступенек тактовых импульсов определяется заданным числом устойчивых состояний в хронотроне. Что касается амплитуды каждой ступеньки, то она определяется параметрами схемы, и нахождение ее минимального значения, необходимого для возбуждения многоустойчивого режима в хронотроне, составляет задачу данного параграфа.

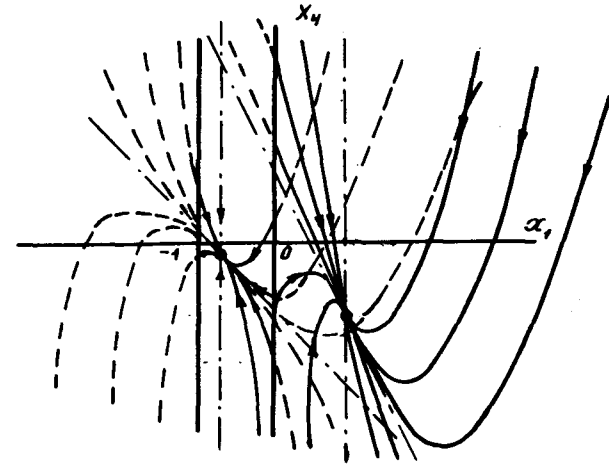


Рис.10. Фазовые траектории на плоскости x_1, x_4 .

В отсутствие тактовых ступенчатых импульсов хронотрон находится в единственном равновесном состоянии, когда лампа Π открыта, а лампа $\Pi 2$ закрыта. Для фазовой плоскости x_1, x_2 это означает, что равновесное состояние находится в области 9 ($x_1 > 0, x_2 < -1$). Воспользовавшись выражением для коэффициентов β_i, η_i, ζ_i в 9 области и формулами (II), получаем:

$$\left. \begin{aligned} x_1^0 &= \frac{\varepsilon_a - \rho_1 (1 + q_2) R_K S_a}{(1 + q_2) [\rho_1 (1 + R_K (S_a + S_g)) + \rho_2 R_1 S_g]}, \\ x_2^0 &= -\frac{(q_1 q_4 - 1) R_K (S_a + S_g) + (q_4 - 1) R_1 S_a}{q_1 q_4 - 1} x_1^0 - \\ &\quad - \frac{\varepsilon_a (1 - \frac{q_4}{1 + q_2}) + S_a [R_K (q_1 q_4 - 1) + R_1 (q_4 - 1)]}{q_1 q_4 - 1}. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

При этом для простоты полагаем $\theta \gg 1$, т.е. считаем фильтр низких частот ($R_4 C_2$) идеальным.

Для возбуждения в хронотроне многоустойчивого режима необходимо, чтобы уже первая ступенька тактового импульса пере-

водила равновесное состояние, по крайней мере, на границу области существования "медленных" движений, т.е. на границу областей 8 и 9 с областями 5 и 6.

Если через z обозначить высоту одной ступеньки тактового импульса, то высказанное требование выразится следующим образом:

$$\text{при } x_1^{o'} = x_1^o - z \quad (31)$$

$$x_2^{o'} \leq -1,$$

где $x_1^{o'}$, $x_2^{o'}$ - координаты равновесного состояния, соответствующего первой ступеньке.

Подставляя (31) в (30), имеем:

$$z \geq \frac{\rho_1 R_k S_a}{\rho_1 (1 + R_k (S_a + S_g)) + \rho_2 R_l S_g} + \frac{E_a}{1 + q_2} \left[\frac{1}{\rho_1 (1 + R_k (S_a + S_g)) + \rho_2 R_l S_g} + \frac{1 + q_2 - q_4}{(q_1 q_4 - 1) R_k (S_a + S_g) + (q_4 - 1) R_l S_a} \right] \quad (32)$$

в) Расчет параметров управляющего импульса

Одним из способов управления хронотроном, т.е. перевода схемы из одного устойчивого периодического режима в другой, может быть подача на вход прямоугольного импульса. Будем называть этот импульс управляющим и обозначать его амплитуду через A_u , а длительность - через τ . Для перевода схемы из состояния, характеризуемого большой длительностью выходного импульса, необходимо, чтобы управляющий импульс был положительным, и соответственно, наоборот.

Рассмотрим последний вариант. Будем полагать, что управление хронотроном осуществляется в тот момент, когда совершаются "медленные" движения в области 8 плоскости x_1, x_2 , причем схема под действием управляющего импульса должна перейти из состояния (x_1^f, x_2^f) в состояние $(x_1^{f+1}, -1)$, откуда совершится скачок в область I или 4.

Достаточно рассмотреть первое уравнение системы (10) (в области 8 $\eta = 0$) с поправкой, внесенной для учета управляющего импульса

$$\dot{x}_1 = \xi_1(x_1 + A_u) + \zeta_1. \quad (33)$$

После интегрирования в пределах по x_1 от x_1^f до x_1^{f+1} и по t от 0 до τ получаем:

$$\tau = \frac{1}{\xi_1} \ln \frac{\xi_1(x_1^{f+1} + A_u) + \zeta_1}{\xi_1(x_1^f + A_u) + \zeta_1}, \quad (34)$$

откуда следует, что импульсы с большей амплитудой могут иметь меньшую длительность.

На рис. II представлена зависимость длительности управляющего импульса τ от амплитуды A_u при фиксированных параметрах схемы, на основе которой можно производить расчет параметров управляющего импульса.

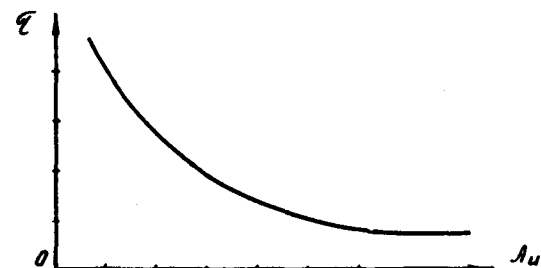


Рис. II

Рис. II. Зависимость длительности управляющего импульса от амплитуды при фиксированных параметрах схемы.

Л и т е р а т у р а

1. В.П. Сигорский, Л.С. Ситников, Л.П. Утяков. Схемы с многими устойчивыми состояниями. Изд-во "Наука" СО АН СССР, 1965.
2. А.Н. Тихонов. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных. - Математический сборник, 1952, т. 31(73), № 3.

3. Л.С. Понтрягин. Асимптотическое поведение решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных.—Известия АН СССР, серия математическая, 1957, т.21, №5, стр.605-626.
4. Е.Ф. Мищенко. Асимптотическое вычисление периодических решений систем дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных. — Известия АН СССР, серия математическая, 1957, т.21, №5, стр.627-654.
5. А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. Теория колебаний. Физматгиз, 1959.

Поступила в редакцию
5.XI.1965 г.