

ИССЛЕДОВАНИЕ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В ЭЛЕМЕНТАХ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Б.М. Фомель

Использование в вычислительной технике параметрических субгармонических колебаний, начало которому положил параметрон Гото, в настоящее время широко распространилось. Создано множество элементов, динамическим признаком состояния которых служит фаза субгармонических колебаний. Это относится и к микроминиатюрным, в частности пленочным элементам вычислительной техники, использующим в качестве стационарных режимов субгармонические колебания.

В нелинейных системах нет принципиального различия между воздействием внешнего периодического возмущения и параметрическим воздействием, поскольку всякий периодический процесс в нелинейной системе сопровождается модуляцией параметров ее нелинейных звеньев. Поэтому под субгармоническими колебаниями будем понимать периодические колебания любой формы, частота которых в целое число раз меньше частоты внешнего воздействия.

Рассмотрим класс динамических элементов вычислительной техники, которые описываются уравнениями второго порядка, содержащими помимо сильно нелинейной функции, ещё и периодическую функцию

$$\ddot{x} + \beta \dot{x} + \phi(x) = f(t), \quad (I)$$

где β - положительный коэффициент,

$\phi(x)$ - нелинейная функция,

$f(t)$ - периодическая функция.

Исследование субгармонических колебаний в системах типа (I) обычно бывает делом аналитических методов теории нелинейных колебаний. Стационарные движения, возможные в системе, изучаются по отдельности, причем всегда задается вид искомого движения в соответствии с видом функции $f(t)$, которая, как правило, является гармонической.

В настоящей работе к изучению систем типа (I) привлекаются качественные методы, позволяющие получить сразу все многообразие движений в исследуемой системе.

Условием применения качественных методов является возможность представления внешнего воздействия $f(t)$ в виде периодической последовательности разнополярных прямоугольных импульсов (рис. I). На время действия каждого импульса исследуемая система, как это обычно принято [1,2], считается автономной.

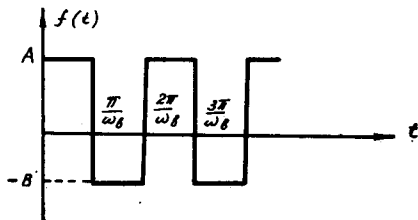


Рис. I. Внешнее воздействие $f(t)$.

Введем функцию

$$\bar{F}(x) = \begin{cases} A - \phi(x) & \text{при } \frac{2i\pi}{\omega_\beta} < t < \frac{(2i+1)\pi}{\omega_\beta}, \\ -B - \phi(x) & \text{при } \frac{(2i+1)\pi}{\omega_\beta} < t < \frac{2(i+1)\pi}{\omega_\beta}, \end{cases} \quad (2)$$

$$i = 0, 1, \dots$$

где A, B - амплитуды разнополярных импульсов,

ω_β - частота внешнего воздействия.

Обозначив $\dot{x} = y$ и учитывая (2), преобразуем уравнение (I) в систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \bar{F}(x) - \beta y \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Координаты равновесных состояний на плоскости (x, y) определяются из уравнений:

$$\left. \begin{aligned} y &= 0, \\ \bar{F}(x) - \beta y &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (4)$$

откуда следует, что состояниями равновесия являются все точки пересечения функции $\bar{F}(x)$ с осью x .

Устойчивость равновесных состояний и характер поведения фазовых траекторий в их окрестности определяются с помощью характеристического уравнения системы (3):

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \bar{F}'_x(x_i) & -(\beta + \lambda) \end{vmatrix} = 0. \quad (5)$$

Нетрудно видеть, что состояние равновесия с координатой x_i будет устойчивым, если

$$\bar{F}'_x(x_i) < 0, \quad (6)$$

причем условие $|\bar{F}'_x(x_i)| < (\frac{\beta}{2})^2$ дает особую точку типа узла, а условие $|\bar{F}'_x(x_i)| > (\frac{\beta}{2})^2$ - особую точку типа фокуса, и неустойчивым, если

$$\bar{F}'_x(x_i) > 0, \quad (7)$$

что соответствует особой точке типа седла.

После определения возможного характера стационарных состояний проводится графическое построение функции $\bar{F}(x)$ в обоих вариантах. Поскольку каждый из вариантов функции $\bar{F}(x)$ существует только в определенные интервалы времени, на фазовой плоскости (x, y) строятся два независимых фазовых портрета, которые мгновенно сменяют друг друга в соответствии со сменой знака внешнего воздействия $f(t)$ (рис. I). При смене портретов изображающая точка сохраняет свои координаты. Фазовые траектории доопределяются требованием непрерывности, поэтому наличие точек разрыва первого рода у функции $f(t)$ не имеет значения.

В качестве примера рассмотрим традиционное для теории нелинейных колебаний, но тем не менее до сих пор приносящее пользу в приложениях уравнение Дюффинга, в котором $\phi(x) = \gamma x^3$.

Соответственно

$$F(x) = \begin{cases} A - \gamma x^3 & \text{при } \frac{2i\pi}{\omega\beta} \leq t < \frac{(2i+1)\pi}{\omega\beta}, \\ -B - \gamma x^3 & \text{при } \frac{(2i+1)\pi}{\omega\beta} \leq t < \frac{2(i+1)\pi}{\omega\beta}, \end{cases} \quad (8)$$

$i = 0, 1, \dots$

На рис. 2 представлена функция $F(x)$, причем первый вариант изображен сплошной линией, а второй — пунктирной. Для каждого варианта функции $F(x)$ имеем на фазовой плоскости (x, y) одно устойчивое равновесное состояние $[F'(x_i(x)) < 0$ в точках $F'(x_i) = 0]$, которое в предположении $\beta < 1$ соответствует особой точке типа фокуса.

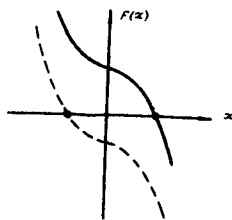


Рис. 2. Функция $F(x)$.

На фазовой плоскости (x, y) имеем наложение двух фазовых портретов (рис. 3а). Штрих-пунктирными линиями обозначены изо-клины горизонтальных ($\frac{dy}{dx} = 0$ или $y = \frac{1}{\beta} F(x)$) и вертикальных ($\frac{dx}{dy} = 0$ или $y = 0$) касательных к фазовым траекториям.

Задавая определенные начальные условия и учитывая, что изображающая точка движется по траекториям каждого фазового портрета в течение только одного полупериода внешнего воздействия, можно получить различные виды стационарных движений в исследуемой системе, например колебания с частотой внешнего воздействия $\omega = \omega\beta$ (рис. 3 б), субгармонические колебания с частотами $\omega = \frac{\omega\beta}{2}$ (рис. 3 в) и $\omega = \frac{\omega\beta}{3}$ (рис. 3 г).

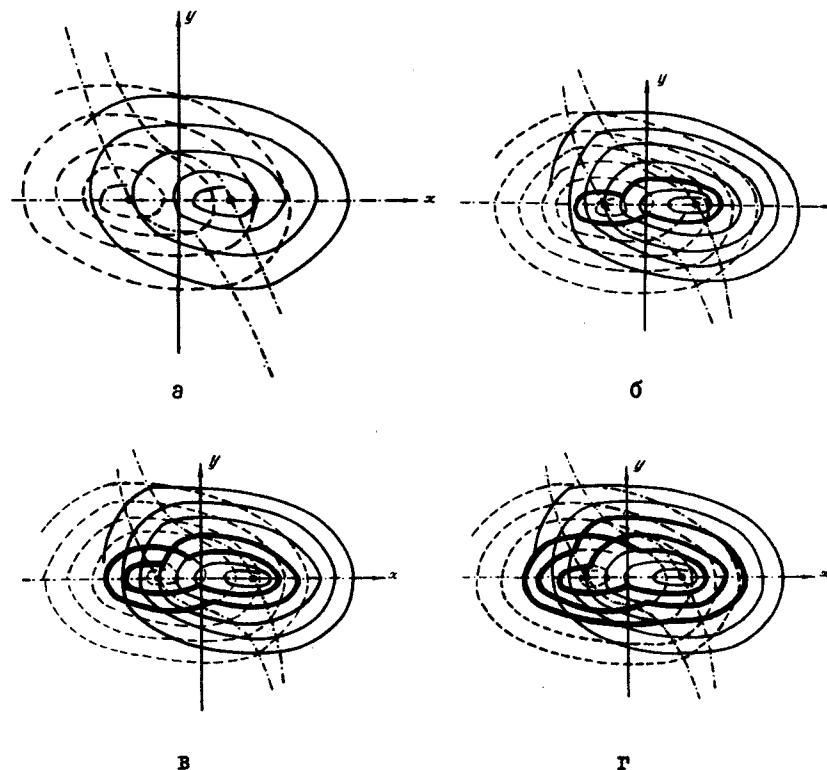


Рис. 3. Фазовая плоскость x, y :

а) наложение двух фазовых портретов; б) вынужденные колебания; в) вторая субгармоника; г) третья субгармоника.

Применим изложенный выше метод к однодоменной модели ферромагнитной пленки, построенной на основе уравнения Ландау-Лифшица-Гильберта, которое описывает движение магнитного момента в ферромагнетике [3]:

$$\kappa^2 \ddot{x} + \beta \kappa \dot{x} + \frac{1}{2} \sin 2x + f(t) \sin(x - \theta_0) = 0, \quad (9)$$

где x — угол поворота магнитного момента во внешнем поле; κ, β, θ_0 — параметры пленки; $f(t)$ — внешнее поле, меняющееся по тому же закону, что и функция, представленная на рис. 1.

По аналогии с предыдущим строим функцию:

$$\bar{F}(x) = \begin{cases} -\left[\frac{\sin 2x}{2n^2} + \frac{A}{n^2} \sin(x - \theta_0)\right] & \text{при } \frac{2i\pi}{\omega_0} \leq t < \frac{(2i+1)\pi}{\omega_0}, \\ -\left[\frac{\sin 2x}{2n^2} - \frac{B}{n^2} \sin(x - \theta_0)\right] & \text{при } \frac{(2i+1)\pi}{\omega_0} \leq t < \frac{2(i+1)\pi}{\omega_0}, \end{cases} \quad (10)$$

$$i = 0, 1, \dots$$

Обозначая $\dot{x} = y$, преобразуем уравнение (9) с учетом (10) в систему:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \bar{F}(x) - \frac{\beta}{n} y \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Нетрудно видеть, что все равновесные состояния системы (11) располагаются на оси x и являются точками пересечения функции $\bar{F}(x)$ с осью x .

Устойчивость равновесных состояний x_i и тип соответствующих им особых точек на плоскости (x, y) определим по знаку корней характеристического уравнения системы (11).

Основными элементами фазового портрета, кроме особых точек, будут в данном случае и сепаратрисы, уравнения которых в малой окрестности седла можно определить с помощью линейного однородного преобразования [1], примененного к системе (11).

На рис. 4а представлены оба варианта функции $\bar{F}(x)$, первый вариант изображен сплошной линией, второй — пунктирной. На фазовой плоскости (x, y) каждому из вариантов функции $\bar{F}(x)$ соответствует свой набор особенностей (рис. 4б), причем фокусы отмечены кружками, а в малой окрестности седла показан ход сепаратрис.

Из рассмотрения фазовой плоскости следует, что в изучаемой системе возможны три типа стационарных режимов.

1. Многоустойчивый режим, когда система обладает дискретным рядом устойчивых состояний равновесия. Режим осуществляется при постоянном внешнем воздействии. Перевод системы из одного устойчивого состояния в другое может быть осуществлен сменой знака и подбором амплитуды внешнего поля.

2. Перисидический режим, когда частота стационарных колебаний совпадает с частотой переменного внешнего поля (рис. 4в). Режим всегда может быть осуществлен при частоте внешнего воздействия, большей некоторой критической величины ($\omega_0 > \omega_{кр}$).

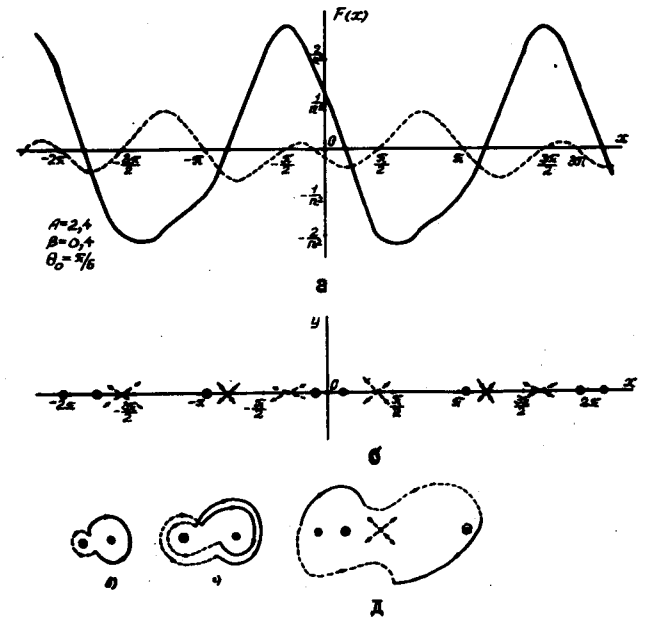


Рис. 4. Фазовый портрет однодоменной модели ферромагнитной пленки:

- а) функция $F(x)$; б) наборы особых точек на плоскости x, y ; в) вынужденные колебания; г) субгармонические колебания первого вида; д) субгармонические колебания второго вида.

3. Субгармонические колебания, которые возбуждаются при частотах, меньших некоторой критической частоты ($\omega_0 < \omega_{кр}$), и являются наиболее интересным стационарным режимом в пленке. Субгармонические колебания с частотой $\omega = \frac{\omega_0}{2}$ могут быть различных видов, например, такие, как в уравнении Дюффинга (рис. 4г), или близкие по форме к гармоническим колебаниям (рис. 4д). Возможно возбуждение субгармоник и более высоких порядков.

Приведенный выше метод особенно полезен на первых этапах исследования нелинейной системы. Для более подробного

изучения параметров субгармонических колебаний удобно использовать вычислительные машины, так как решения, полученные с помощью фазовой плоскости, можно принять за стандартные. Такое совместное теоретическое и машинное исследование проведено для уравнения типа (I) при

$$\sigma(x) = \alpha x^3 - \beta x, \quad (I2)$$

где α, β - положительные коэффициенты.

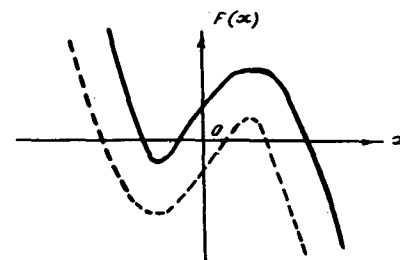
Как и прежде, начинаем с построения функции:

$$\bar{F}(x) = \begin{cases} A - \alpha x^3 + \beta x & \text{при } \frac{2i\pi}{\omega_0} \leq t < \frac{(2i+1)\pi}{\omega_0}, \\ -B - \alpha x^3 + \beta x & \text{при } \frac{(2i+1)\pi}{\omega_0} \leq t < \frac{2(i+1)\pi}{\omega_0}, \end{cases} \quad (I3)$$

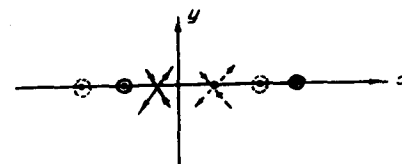
$$i = 0, 1, \dots$$

На рис. 5а изображены оба варианта функции $\bar{F}(x)$, а на рис. 5б - соответствующие каждому варианту наборы особых точек, состоящих в данном случае из одного седла и двух фокусов. Координаты и устойчивость равновесных состояний, а также типы особых точек определены по уравнениям (4) и (5).

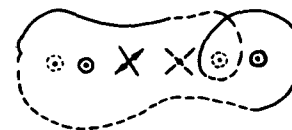
Анализируя фазовую плоскость (рис. 5б) с учетом опыта предыдущих рассмотрений, приходим к выводу, что в системе возможны, по крайней мере, два вида субгармонических колебаний. Замкнутая траектория одного вида может состоять из кусков траекторий, проходящих в окрестности двух соседних фокусов (аналогично изображенным на рис. 3в или 4г), а другого вида - может охватить два крайних фокуса (рис. 5в). Проверка этих предположений была проведена на аналоговой машине ИПТ-5, работавшей с набором нелинейных блоков (ННБ). Результаты снимались с экрана осциллографа, проградуированного в координатах фазовой плоскости (x, y) и снабженного метками времени.



а



б



в

Рис. 5. Фазовый портрет элемента с нелинейностью $\sigma(x) = \alpha x^3 - \beta x$:
а) функция $F(x)$; б) наборы особых точек на плоскости x, y ; в) субгармонические колебания.

Прежде всего снимался ход сепаратрис в большой окрестности седел для обоих вариантов функции $\bar{F}(x)$ (рис. 6).

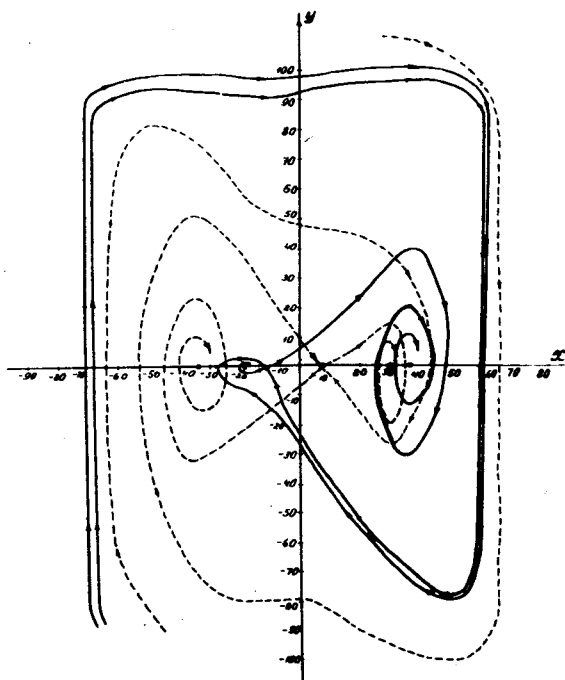
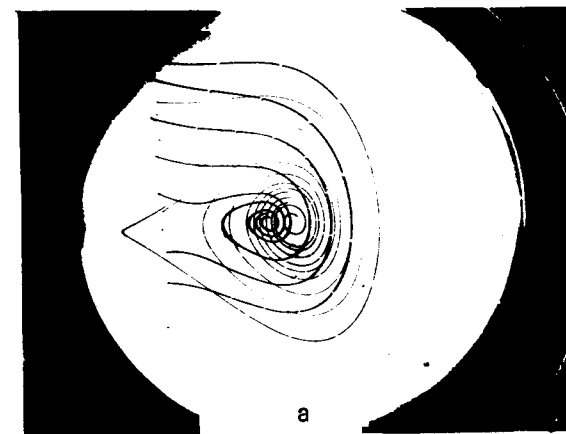
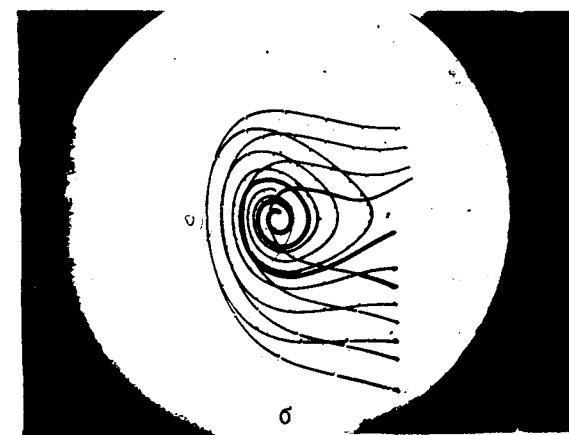


Рис. 6. Сепаратрисы седел на плоскости x, y .

Далее, из отрезков фазовых траекторий с учетом периодической смены знака внешнего воздействия конструировались замкнутые циклы субгармонических колебаний и определялись области начальных условий для их возбуждения. По фотографиям фазовых траекторий с метками времени, проходящих в окрестности фокусов (фото 1а, б), определялся период внешнего воздействия. Ввод этих данных в машину обеспечивал получение на экране осциллографа субгармонических колебаний.



а



б

Фото I. Фазовые траектории в окрестности равновесных состояний: а) первое равновесное состояние; б) второе равновесное состояние.

На фото 2 а,б изображены замкнутые субгармонические циклы, причем внутри первого расположены два соединенных фокуса, как предполагалось на рис. 4г, а внутри второго — все особые точки, как на рис. 5в.

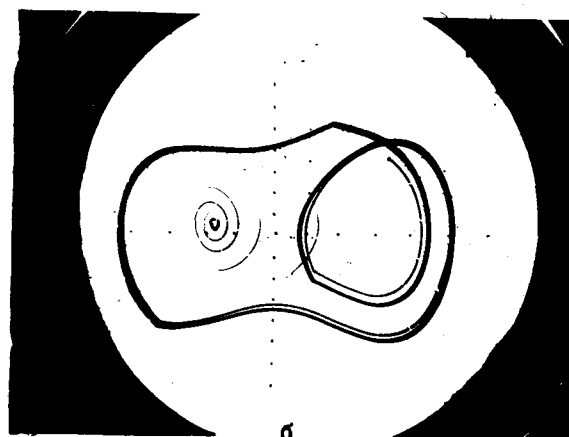
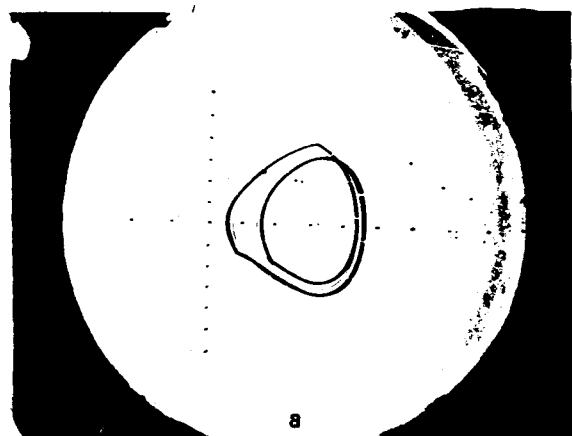


Фото 2. Субгармонические колебания: а) субгармоника первого вида (тонкая линия соответствует синусоидальному внешнему воздействию); б) субгармоника второго вида (тонкая линия соответствует переходному процессу).

Одновременно была проведена проверка сделанного в самом начале предположения относительно вида функции внешнего воздействия $f(t)$. На осциллограмме фото 2а тонкая линия изображает субгармонику, полученную при замене импульсного внешнего воздействия синусоидальным. Близость расположения двух циклов говорит о том, что представление внешнего воздействия $f(t)$ в виде последовательности разнополярных прямоугольных импульсов является вполне оправданным.

Таким образом, приведенный качественный метод исследования субгармонических колебаний по сравнению с известными аналитическими методами имеет те преимущества, что он, во-первых, совершенно не критичен к виду нелинейной функции, входящей в исходное дифференциальное уравнение и, во-вторых, позволяет получить сразу всю совокупность возможных в элементе движений. Метод может быть распространен на широкий класс нелинейных и неавтономных систем, в которых субгармонические колебания являются основным стационарным режимом.

Выражаю благодарность В.А. Костякову, оказавшему существенную помощь при работе на аналоговой машине.

Л и т е р а т у р а

1. А.А.Андронов, А.А.Витт, С.Э.Хайкин. Теория колебаний, Физматгиз, 1959.
2. Н.А.Железцов. Метод точечных преобразований и задача о вынужденных колебаниях осциллятора с "комбинированным" трением, ПММ, 1949, т. XIII, вып. I.
3. В.Л.Дятлов. Об уравнениях, описывающих процессы в ферромагнитных плёнках. — Вычислительные системы, Новосибирск, 1962, вып. 2, стр. 3-15.

Поступила в редакцию
7.XII.1965 г.