ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Сборник трудов
1966 г. Института математики СО АН СССР Выпуск 2I

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ГРАНИЦ ОБЛАСТЕЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ НУЛЕВОГО РЕШЕНИЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Е.Н.Жуков

К определению границ областей неустойчивости сводятся многие задачи прикладной математики. В частности, возбуждение параметрона связано с неустойчивостью нулевого решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений [I].

В статье рассматривается один из методов построения границ областей неустойчивости нулевого решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающей работу однодоменного пленочного параметрона [I],[2]. Выведены необходимые условия для точек границ областей неустойчивости. Показано, что эти условия выполняются на семействах ветвей L_j^a и L_j^b ($j=1,2$) в плоскости двух параметров (остальные параметры фиксированы). Некоторые ветви или участки ветвей принадлежат границам областей неустойчивости. Даны критерии выбора из семейств L_j^a и L_j^b тех ветвей, которые принадлежат границам областей неустойчивости. При построении ветвей из L_j^a и L_j^b в отличие от метода, изложенного в [I], не нужно решать систему дифференциальных уравнений, что значительно сокращает объем вычислений.

§ I. Постановка задачи

Параметрон математически описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений [I].

$$\left.\begin{aligned} &\lambda \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{2}\, Sin\,2\varphi - (h_0 + h_1 Sin\,2t) Sin\,\varphi + h_{xe} Cos\,\varphi, \\ &\frac{du}{dt} = -\delta u + \delta h_{xe}, \\ &\sigma \frac{dh_{xe}}{dt} = -u - \rho h_{xe} + \frac{\varkappa}{\lambda} Cos\,\varphi \left[\frac{1}{2} Sin\,2\varphi + (h_0 + h_1 Sin\,2t) Sin\,\varphi - h_{xe} Cos\,\varphi\right] \end{aligned}\right\} \quad (I.I)$$

Возбуждается параметрон малым сигналом. В [I] показано, что его возбуждение от малого сигнала возможно лишь в том случае, если нулевое решение линейной системы:

$$\begin{aligned} &\varphi' = \frac{h_{xe}}{\lambda} - (h + \mu\, Sin\,2t)\varphi, \\ &u' = -\delta u + \delta h_{xe}, \\ &h'_{xe} = -\frac{1}{\sigma} u - \left(\frac{\rho}{\sigma} + \frac{\varkappa}{\lambda\sigma}\right) h_{xe} + \frac{\varkappa}{\sigma}(h + \mu\, Sin\,2t)\varphi, \end{aligned} \quad (I.2)$$

где

$$h = \frac{h_0 + 1}{\lambda}, \qquad \mu = \frac{h_1}{\lambda}$$

неустойчиво. Поэтому важно знать, при каких значениях параметров нулевое решение этой системы неустойчиво. Система (I.2) исключением h_{xe} и u приводится к уравнению

$$\varphi''' + (c_1 + \mu\, Sin\,2t)\varphi'' + (c_2 + 4\mu\, cos\,2t + \mu\eta\, Sin\,2t)\varphi' + \left[c_3 + \mu(\varepsilon - 4) Sin\,2t + 2\mu\eta\, Cos\,2t\right]\varphi = 0. \quad (I.3)$$

Здесь приняты обозначения:

$$c_1 = h + \nu + \eta; \quad c_2 = h\eta + \varepsilon + \delta\nu; \quad c_3 = h\varepsilon; \quad h = \frac{\rho + \delta\sigma}{\sigma}; \quad \nu = \frac{\varkappa}{\lambda\sigma}; \quad \varepsilon = \frac{\delta(\rho+1)}{\sigma}$$

$$\varepsilon > 0;\ \delta > 0;\ \sigma > 0;\ \nu > 0;\ \eta > 0;\ h > 0.$$

В дальнейшем вместо системы (I.2) рассматривается уравнение (I.3).

Уравнение (I.3) заменой

$$\varphi(t) = y(t)\, e^{-\frac{c_1 t}{3}}$$

приводится к более удобному для исследования уравнению:

$$y''' + y''\mu\, Sin\,2t + (\rho + 4\mu\, Cos\,2t - \mu\eta\, Sin\,2t)y' + \left[q + \mu(\varepsilon - 4) Sin\,2t + 2\mu\eta\, Cos\,2t\right]y = 0, \quad (I.4)$$

где

$$\rho = c_2 - \frac{c_1}{3}, \qquad q = c_3 + \frac{2c_1^3}{27} - \frac{c_1 c_2}{3}.$$

§ 2. Необходимые условия для определения границ областей неустойчивости

I. Пусть $y_1(t), y_2(t), y_3(t)$ – система независимых решений уравнения (I.4), соответствующая единичной матрице начальных условий. Тогда уравнение

$$\begin{vmatrix} y_1(\pi) - \xi & y_1'(\pi) & y_1''(\pi) \\ y_2(\pi) & y_2'(\pi) - \xi & y_2''(\pi) \\ y_3(\pi) & y_3'(\pi) & y_3''(\pi) - \xi \end{vmatrix} = 0$$

будет характеристическим для уравнения (I.4) [3]. Раскрывая определитель и применяя формулу Остроградского-Лиувилля [4]

$$W(\pi) = \begin{vmatrix} y_1(\pi) & y_1'(\pi) & y_1''(\pi) \\ y_2(\pi) & y_2'(\pi) & y_2''(\pi) \\ y_3(\pi) & y_3'(\pi) & y_3''(\pi) \end{vmatrix} = W(0)\, e^{-\mu\int_0^{\pi} Sin\,2t\,dt} = 1,$$

получаем

$$\xi^3 - a\xi^2 + b\xi - 1 = 0, \quad (2.I)$$

где

$$a = y_1(\pi) + y_2'(\pi) + y_3''(\pi),$$

$$b = y_1(\pi)y_2'(\pi) + y_2'(\pi)y_3''(\pi) + y_1(\pi)y_3''(\pi) - y_1'(\pi)y_2(\pi) - y_3'(\pi)y_2''(\pi) - y_1''(\pi)y_3(\pi).$$

Фундаментальная система уравнения (I.4) имеет вид [3]:

$$y_i(t)=P_i(t)e^{\alpha_i t} \quad (i=1,2,3),$$

где $P_i(t)$ - полиномы относительно t степени $0,1$ или 2 с π - периодическими коэффициентами;

$$\alpha_i=\frac{1}{\pi}\ln\xi_i;$$

ξ_i - корень характеристического уравнения (2.I).

Фундаментальной системой уравнения (I.3) будет, следовательно, система функций:

$$\varphi_i(t)=P_i(t)e^{(\alpha_i-\frac{c_1}{3})t} \quad (i=1,2,3). \tag{2.2}$$

Из общего вида фундаментальной системы (2.2) следует, что нулевое решение уравнения (I.3) будет асимптотически устойчиво, если

$$Re\,\alpha_i<\frac{c_1}{3} \quad (|\xi_i(h,\mu)|<e^{\frac{c_1\pi}{3}}) \tag{2.3}$$

для всех $i=1,2,3$;
и неустойчиво, если

$$Re\,\alpha_i>\frac{c_1}{3} \quad (|\xi_i(h,\mu)|>e^{\frac{c_1\pi}{3}}) \tag{2.4}$$

хотя бы для одного i = I,2,3.

В дальнейшем под переменными параметрами понимаются параметры μ и h, остальные параметры фиксируются. Под плоскостью Ω понимается плоскость переменных h и μ.

Определим область асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (I.3) как множество таких точек плоскости Ω, в достаточно малой окрестности которых нулевое решение уравнения (I.3) асимптотически устойчиво. Область неустойчивости нулевого решения уравнения (I.3) будем понимать как множество таких точек плоскости Ω, в достаточно малой окрестности которых нулевое решение уравнения (I.3) неустойчиво. Границу области неустойчивости определим как множество таких точек плоскости Ω, в сколь угодно малой окрестности которых есть как точки, принадлежащие области асимптотической устойчивости, так и области неустойчивости.

2. Если в некоторой точке (h_k,μ_k) плоскости Ω хотя бы для одного действительного корня уравнения (2.I)

выполняется неравенство

$$|\xi_j(h_k,\mu_k)|<e^{-\frac{2c_1\pi}{3}} \tag{2.5}$$

или

$$|\xi_j(h_k,\mu_k)|>e^{\frac{c_1\pi}{3}}, \tag{2.6}$$

то точка (h_k,μ_k) принадлежит области неустойчивости.

Действительно, так как в каждой точке плоскости Ω существует, по крайней мере, один действительный корень уравнения (2.I), то на всей плоскости Ω определена хотя бы одна действительная функция $\xi=\xi_j(h,\mu)$. В силу теоремы о непрерывной зависимости решений дифференциального уравнения от параметров коэффициенты уравнения (2.I), а вместе с ними и функция $\xi=\xi_j(h,\mu)$, непрерывны по h и μ. Поэтому, если в некоторой точке (h_k,μ_k) выполняется неравенство (2.5) или (2.6), то оно выполняется и в окрестности этой точки. Если в окрестности точки (h_k,μ_k) выполняется неравенство (2.6), точка (h_k,μ_k) принадлежит области неустойчивости. Пусть для корня $\xi_1(h,\mu)$ выполняется неравенство (2.5). Тогда

$$|\xi_2(h_k,\mu_k)|\cdot|\xi_3(h_k,\mu_k)|=\frac{1}{|\xi_1(h_k,\mu_k)|}>e^{\frac{2c_1\pi}{3}}$$

и хотя бы один из корней $\xi_2(h,\mu)$ и $\xi_3(h,\mu)$ удовлетворяет в окрестности точки (h_k,μ_k) неравенству (2.4), то есть точка (h_k,μ_k) принадлежит области неустойчивости.

Подобные же рассуждения приводят к выводу:

Если в некоторой точке (h_k,μ_k) плоскости Ω для всех действительных корней уравнения (2.I) выполняются неравенства:

$$e^{-\frac{2c_1\pi}{3}}<|\xi_j(h_k,\mu_k)|<e^{\frac{c_1\pi}{3}},$$

то точка (h_k,μ_k) принадлежит области асимптотической устойчивости.

3. Точка границы области неустойчивости не принадлежит ни области неустойчивости, ни области асимптотической устойчивости. Поэтому на основании пункта 2 можно утверждать:

если точка (h_k,μ_k) принадлежит границе области неустойчивости, то хотя бы для одного действительного корня в этой точке выполняется равенство:

$$|\xi_j(h_\kappa,\mu_\kappa)| = e^{\frac{c_1\pi}{3}} \tag{2.7}$$

или

$$|\xi_j(h_\kappa,\mu_\kappa)| = e^{-\frac{2c_1\pi}{3}}. \tag{2.8}$$

Пусть $\xi_j(h,\mu)$ – действительный корень уравнения (2.I). Если $\xi_j(h,\mu)>0$, то существует, по крайней мере, одно действительное решение уравнения (I.4), имеющее вид [3]:

$$y(t)=g(t)e^{\frac{t}{\pi}\ln\xi_j},$$

где $g(t)$ - π - периодическая функция.
Если $\xi_j(h,\mu)<0$, то существует решение уравнения (I.4) вида:

$$y(t)=\varphi(t)e^{\frac{t}{2\pi}\ln\xi_j^2},$$

где $\varphi(t)$ – 2π - периодическая функция.
На границе областей неустойчивости должно выполняться хотя бы одно из равенств:

$$\xi_j = e^{\frac{c_1\pi}{3}},$$
$$\xi_j = -e^{\frac{c_1\pi}{3}},$$
$$\xi_j = e^{-\frac{2c_1\pi}{3}},$$
$$\xi_j = -e^{-\frac{2c_1\pi}{3}}$$

В точках границы, следовательно, хотя бы одна из функций

$$\begin{aligned} y_1(t)&=g_1(t)e^{\frac{c_1t}{3}},\\ y(t)&=\varphi_1(t)e^{\frac{c_1t}{3}},\\ y(t)&=g_2(t)e^{-\frac{2c_1t}{3}},\\ y(t)&=\varphi_2(t)e^{-\frac{2c_1t}{3}}, \end{aligned} \tag{2.9}$$

где $g_1(t)$ и $g_2(t)$ – π - периодические, а $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ – 2π – периодические функции, должна быть решением уравнения (I.4).

Этого условия, очевидно, недостаточно, чтобы соответствующая точка плоскости Ω принадлежала границе области неустойчивости.

Наряду с решением (2.9) или (2.I0) в окрестности некоторой точки (h_κ,μ_κ) может существовать решение уравнения (I.4) вида

$$y(t) = g(t)e^{\alpha t}$$

с $\alpha > \frac{c_1}{3}$. Тогда точка (h_κ,μ_κ) будет принадлежать области неустойчивости.

§ 3. Границы областей неустойчивости

I. Функции $g_1(t), g_2(t), \varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ в (2.9) и (2.I0) можно разложить в ряды Фурье:

$$g_j(t)=\sum_{-\infty}^{\infty} c_n^{(j)} e^{2nit},$$
$$\varphi_j(t)=\sum_{-\infty}^{\infty} d_n^{(j)} e^{nit} \quad (j=1 \text{ или } 2).$$

Тогда решения уравнения (I.4) в точках границы можно записать в следующем виде:

$$y_i(t)=\sum_{-\infty}^{\infty} c_n^{(j)} e^{(2ni+\beta_j)t} \tag{3.I}$$

или

$$y_j(t)=\sum_{-\infty}^{\infty} d_n^{(j)} e^{(ni+\beta_j)t}, \tag{3.2}$$

где j = I или 2, $\beta_1=\frac{c_1}{3}$, $\beta_2=-\frac{2c_1}{3}$.
Если подставить в уравнение (I.4) функцию (3.I), а $\sin 2t$ и $\cos 2t$ заменить по формулам Эйлера, то, приравняв коэффициенты при $e^{(2ni+\beta_j)t}$ нулю, получим бесконечную систему линейных уравнений относительно $c_n^{(j)}$:

$$\mu a_n c_{n-1}^{(j)} + c_n^{(j)} - \mu a_n c_{n+1}^{(j)} = 0, \tag{3.3}$$

где

$$n=\infty,\dots,1,0,-1,\dots,-\infty;$$
$$a_n=\frac{{}^aU_nU_n+{}^aV_nV_n+i({}^aV_nU_n-{}^aU_nV_n)}{U_n^2+V_n^2};$$
$$U_n=\beta_j^3-3\beta_j(2n)^2+p\beta_j+q;$$
$$V_n=-(2n)^3+2n(3\beta_j^2+p);$$
$${}^aU_n=2n(\beta_j+\frac{\eta}{2});$$
$${}^aV_n=-2n^2+\frac{1}{2}(\beta_j^2+\eta\beta_j+\varepsilon)$$
$$(j=1 \text{ или } 2).$$

Однородная система уравнений (3.3) будет иметь ненулевое решение, если

$$\Delta^a(h,\mu,\beta_j)=\begin{vmatrix}
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\mu a_n & 1 & -\mu a_n & 0 & \cdots & & \\
0 & \mu a_{n-1} & 1 & -\mu a_{n-1} & \cdots & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \mu a_1 & 1 & -\mu a_1 & 0 & 0 & \cdots \\
\cdots & 0 & \mu a_0 & 1 & -\mu a_0 & 0 & \cdots \\
\cdots & 0 & 0 & \mu a_{-1} & 1 & -\mu a_{-1} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & & \mu a_{-(n-1)} & 1 & -\mu a_{-(n-1)} & 0 & \cdots \\
\cdots & & 0 & \mu a_{-n} & 1 & -\mu a_{-n} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{vmatrix}=0$$

Аналогично получается система уравнений относительно $d_n^{(j)}$

$$\mu b_n d_{n-2}^{(j)}+d_n^{(j)}-\mu b_n d_{n+2}^{(j)}=0, \tag{3.4}$$

где

$$n=\infty,\dots,1,0,-1,\dots,-\infty;$$
$$b_n=\frac{{}^bU_nU_n+{}^bV_nV_n+i({}^bV_nU_n-{}^bU_nV_n)}{U_n^2+V_n^2};$$
$${}^bU_n=n(\beta_j+\frac{\eta}{2});$$
$${}^bV_n=\frac{n^2}{2}-\frac{1}{2}(\beta_j^2+\eta\beta_j+\varepsilon);$$
$$V_n=-n^3+n(3\beta_j^2+p);$$
$$U_n=\beta_j^3+\beta_j(p-3n^2)+q$$
$$(j=1 \text{ или } 2)$$

и необходимое условие существования ненулевого решения системы уравнений (3.4):

$$\Delta^b(h,\beta_j,\mu)=\begin{vmatrix}
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\mu b_n & 0 & 1 & 0 & -\mu b_n & \cdots & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \mu b_1 & 0 & 1 & 0 & -\mu b_1 & 0 & 0 & \cdots \\
\cdots & 0 & \mu b_0 & 0 & 1 & 0 & -\mu b_0 & 0 & \cdots \\
\cdots & 0 & 0 & \mu b_{-1} & 0 & 1 & 0 & -\mu b_{-1} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & & & & \mu b_{-n} & 0 & 1 & 0 & -\mu b_{-n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{vmatrix}=0$$

Можно показать [5], что определители $\Delta^a(h,\mu,\beta_j)$ и $\Delta^b(h,\mu,b_j)$ сходятся, если сходятся ряды

$$\sum_{-\infty}^{\infty}|a_n|\,|a_{n-1}| \tag{3.5}$$

и

$$\sum_{-\infty}^{\infty}|b_n|\,|b_{n-2}|. \tag{3.6}$$

Легко проверить, что, начиная с некотор.. $|n|=n_0$,

$$|a_n|<\frac{1}{|n|},$$
$$|b_n|<\frac{1}{|n|}$$

и

$$\sum_{-\infty}^{\infty}|a_n|\cdot|a_{n-1}|<2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)},$$
$$\sum_{-\infty}^{\infty}|b_n|\cdot|b_{n-2}|<2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n(n-2)},$$

то есть ряды (3.5) и (3.6) сходятся.

Бесконечные определители $\Delta^a(h,\mu,\beta_j)$ и $\Delta^b(h,\mu,b_j)$ любой точностью можно заменить конечными $\Delta^a_{n,-n}(h,\mu,\beta_j)$ и $\Delta^b_{n,-n}(h,\mu,b_j)$ и считать, что точки границы области неустойчивости удовлетворяют уравнениям:

$$\Delta^a_{n,-n}(h,\mu,\beta_j)=0 \tag{3.7}$$

или

$$\Delta^b_{n,-n}(h,\mu,\beta_j)=0 \quad (j=1 \text{ или } 2). \tag{3.8}$$

2. Каждый из определителей $\Delta^a_{n,-n}(h,\mu,\beta_j)$ и $\Delta^b_{n,-n}(h,\mu,\beta_j)$ есть полином степени n относительно μ^2 с действительными коэффициентами. Пусть $\mu^2=y$

$$\Delta^a_{n,-n}(h,y,\beta_j)=A_0(h,\beta_j)y^n+A_1(h,\beta_j)y^{n-1}+\ldots+A_n(h,\beta_j), \qquad (3.9)$$

$$\Delta^b_{n,-n}(h,y,\beta_j)=B_0(h,\beta_j)y^n+B_1(h,\beta_j)y^{n-1}+\ldots+B_n(h,\beta_j). \qquad (3.10)$$

Коэффициенты $A_\ell(h,\beta_j)$ и $B_\ell(h,\beta_j)$ $(\ell=1,2,\ldots,n,\ j=1$ или $2)$ непрерывны всюду, кроме полюсов $a_n(h)$ и $b_n(h)$. Из (3.3) и (3.4) следует, что полюса $a_n(h)$ совпадают с решением системы уравнений:

$$\begin{aligned} &\beta_j^3-3\beta_j(2n)^2+p\beta_j+q=0, \\ &-(2n)^3+2n\,(3\beta_j^2+p)=0, \end{aligned} \qquad (3.11)$$

а полюса $b_n(h)$ - с решением системы уравнений:

$$\begin{aligned} &\beta_j^3-3\beta_j n^2+p\beta_j+q=0, \\ &-n^3+n\,(3\beta_j^2+p)=0. \end{aligned} \qquad (3.12)$$

Выразив β_j, p и q через $h,\delta,\sigma,\nu,\eta,\varepsilon$, можно убедиться в том, что при положительных $h,\delta,\sigma,\nu,\eta,\varepsilon$ системы уравнений (3.11) и (3.12) несовместны, поэтому во всей рассматриваемой области параметров функции $A_\ell(h,\beta_j)$ и $B_\ell(h,\beta_j)$ непрерывны.

Уравнения (3.7) и (3.8) определяют на плоскости Ω семейства L^a_j и L^b_j ветвей $y^a_\ell(h,\beta_j)$ и $y^b_\ell(h,\beta_j)$. При непрерывных $A_\ell(h,\beta_j)$ и $B_\ell(h,\beta_j)$ функций $y^a_\ell(h,\beta_j)$ и $y^b_\ell(h,\beta_j)$ будут непрерывны всюду, кроме точек, в которых первые коэффициенты в (3.9) и (3.10) обращаются в нуль.

Вблизи этих точек некоторые из функций $y^a_\ell(h,\beta_j)$ и $y^b_\ell(h,\beta_j)$ могут быть неограничены.

Граница области неустойчивости состоит из ветвей $y^a_\ell(h,\beta_j)$ и $y^b_\ell(h,\beta_j)$. Поскольку не все эти ветви принадлежали границе, то нужно из семейств L^a_j и L^b_j выделить те ветви, которые образуют границу области неустойчивости.

3. Определим область H как множество таких точек плоскости Ω, которые можно соединить с осью h непрерывной конечной линией, не пересекающей ни одной ветви семейств L^a_j и L^b_j.

Областью V назовем множество таких точек, для которых такой линии не существует. Области H и V могут быть и неодносвязными.

Границу Γ области V определим как множество таких точек плоскости Ω, в сколь угодно малой окрестности которых есть как точки, принадлежащие области V, так и точки, принадлежащие области H. Точки границы Γ не будем относить ни к области V, ни к области H. Граница Γ состоит, очевидно, из ветвей семейств L^a_j и L^b_j. Так как при $\mu=0$ нулевое решение уравнения (1.3) асимптотически устойчиво, то на оси выполняются неравенства (2.3), то есть ни одна из ветвей семейств L^a_j и L^b_j не пересекает ось h и ось h целиком лежит в области H.

Покажем, что *точки области H принадлежат области асимптотической устойчивости.*

Действительно, пусть $(h_s,\mu_s)\in H$ и (h_s,μ_s) не принадлежит области асимптотической устойчивости. Тогда в этой точке существует хотя бы один корень уравнения (2.1) такой, что

$$|\xi_k(h_s,\mu_s)|\geq e^{\frac{c_1\pi}{3}}.$$

Точку (h_s,μ_s) можно соединить линией ℓ с осью h так, что она не пересечёт ни одной ветви семейств L^a_j и L^b_j. Так как на оси h выполняются неравенства (2.3), то хотя бы для одного действительного корня уравнения (2.1) в некоторой точке $(h_\ell,\mu_\ell)\in\ell$ выполнится равенство (2.7). Но тогда точка (h_ℓ,μ_ℓ) будет принадлежать некоторой ветви семейств L^a_j или L^b_j, что противоречит определению области H.

Аналогично доказывается следующее утверждение: *если в области V нет ветвей семейств L^a_j и L^b_j, то область V совпадает с областью неустойчивости.*

4. Для точек границы Γ справедливо утверждение: *точки границы Γ принадлежат границе области неустойчивости.*

Пусть $(h_k,\mu_k)\in\Gamma$. В сколь угодно малой окрестности Δ этой точки есть точки, принадлежащие области V. Пусть $(h_s,\mu_s)\in\Delta$ и $(h_s,\mu_s)\in V$. Тогда любая линия, соединяющая точку (h_s,μ_s) с осью h пересечёт границу Γ. Выберем в точке (h_κ,μ_κ) такое направление s , чтобы

$$\left.\frac{\partial|\xi_j(h,\mu)|}{\partial s}\right|_{\substack{h=h_\kappa\\ \mu=\mu_\kappa}}=0 \text{ для всех } j = 1,2,3.$$

Это сделать можно для всех точек плоскости Ω , за исключением тех, в которых

$$|\xi_j(h,\mu)| = e^{\frac{c_1\pi}{3}};$$
$$\frac{\partial|\xi_j(h,\mu)|}{dh} = 0; \tag{3.13}$$
$$\frac{\partial|\xi_j(h,\mu)|}{\partial\mu} = 0.$$

Можно показать, что (3.13) выполняется лишь в изолированных точках. Их можно исключать из рассмотрения, взяв вместо точки (h_κ,μ_κ) сколь угодно близкую к ней точку.

Выберем линию ℓ , соединяющую точку (h_s,μ_s) с осью h так, что ℓ проходит через точку (h_κ,μ_κ) в направлении s и не пересекает больше ни одной ветви семейств L_j^a и L_j^b .

Так как $\frac{\partial|\xi_j|}{\partial s}\neq 0$ в точке (h_κ,μ_κ) для всех j , то найдётся хотя бы один корень $\xi_p(h,\mu)$ уравнения (2.1), который, пересекая границу Γ вдоль линии ℓ , будет либо увеличиваться, если в точке (h_κ,μ_κ) он удовлетворяет равенству (2.7), либо уменьшаться, если $\xi_p(h,\mu)$ в этой точке удовлетворяет равенству (2.8). И в этом и в другом случае в точке (h_s,μ_s) существует хотя бы один корень уравнения (2.1) такой, что выполняется неравенство (2.4) (§ 2 пункт 2).

В сколь угодно малой окрестности Δ точки $(h_\kappa,\mu_\kappa)\in\Gamma$ есть, следовательно, точки, принадлежащие области неустойчивости, и, точки, принадлежащие области асимптотической устойчивости, то есть точки границы Γ принадлежат границе области неустойчивости.

5. Пусть ветви $y_1(h), y_2(h), y_3(h),\ldots,y_k(h)$ лежат внутри области V и разбивают её на подобласти

$$\Phi_1,\Phi_2,\ldots,\Phi_s \tag{3.14}$$

так, что ни в одной из этих подобластей нет ветвей семейств L_j^a и L_j^b . Покажем, что **если хотя бы одна точка из Φ_ℓ принадлежит области неустойчивости, то и все точки из Φ_ℓ принадлежат области неустойчивости. Если хотя бы одна точка из Φ_ℓ принадлежит области асимптотической устойчивости, то и все точки из Φ_ℓ принадлежат области асимптотической устойчивости.**

Действительно, пусть в Φ_ℓ есть точка (h_p,μ_p), принадлежащая области неустойчивости, и точка (h_q,μ_q) , принадлежащая области асимптотической устойчивости.

Точки (h_p,μ_p) и (h_q,μ_q) можно соединить конечной, непрерывной линией ℓ , которая не пересечёт ни одной ветви из L_j^a и L_j^b .

Найдётся действительный корень уравнения (2.1) $\xi_s(h,\mu)$ такой, что модуль его вдоль линии ℓ принимает все значения от $A<e^{\frac{c_1\pi}{3}}$ до $B>e^{\frac{c_1\pi}{3}}$. На линии ℓ , следовательно, должна существовать точка (h_e,μ_e), в которой

$$|\xi_s(h_e,\mu_e)| = e^{\frac{c_1\pi}{3}},$$

то есть точка некоторой ветви из семейств L_j^a или L_j^b , чего не может быть по предложению.

Из доказанного следует, что если граница Γ хотя бы частично совпадает с границей подобласти Φ_z , то все точки подобласти Φ_z принадлежат области неустойчивости.

Если же подобласть Φ_z содержится вместе со своей границей в области V , то для того, чтобы установить принадлежат ли точки из Φ_z области неустойчивости или области асимптотической устойчивости, нужно проверить это для одной точки из Φ_z . Это можно сделать, например, методом, изложенным в [1].

6. По описанному методу была составлена программа. Коэффициенты полиномов (3.9) и (3.10) с ростом n достаточно быстро убывают, поэтому коэффициентами при старших степенях можно пренебречь.

В программе рассматривались лишь полиномы третьей степени:

$$A_{n-3}(h,\beta_j)y^3+A_{n-2}(h,\beta_j)y^2+A_{n-1}(h,\beta_j)y+A_n(h,\beta_j)=0 \tag{3.15}$$

и

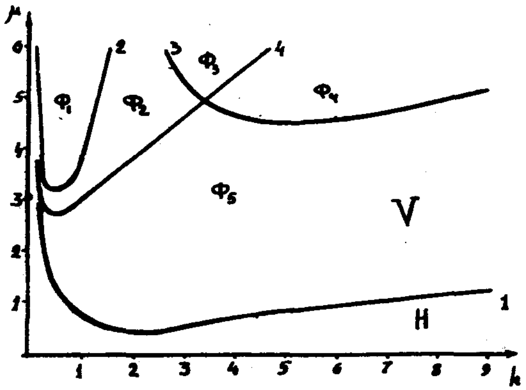
$$B_{n-3}(h,\beta_j)y^3+B_{n-2}(h,\beta_j)y^2+B_{n-1}(h,\beta_j)y+B_n(h,\beta_j)=0. \tag{3.16}$$

Ветви уравнений (3.15) и (3.16), просчитанные для значений параметров

$$\delta=1,\ \varepsilon=1,\ \rho=0{,}2,\ \frac{\varkappa}{\lambda}=0{,}2,$$

$$0<h\leq 9,\quad 0<\mu<6,$$

показаны на рисунке.



Кривая I является границей области V и принадлежит границе области неустойчивости (п. 4). Кривые 2, 3 и 4 лежат в области V, разбивая её на подобласти

$$\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3,\Phi_4 \text{ и } \Phi_5. \tag{3.17}$$

Часть границы подобласти Φ_5 (кривая I) совпадает с границей области V. Следовательно, точки подобласти Φ_5 принадлежат области неустойчивости (п. 5).

В каждой из подобластей (3.17) было выбрано по одной точке. Вычисления, проводившиеся по методу, изложенному в [I], показали, что эти точки, а вместе с ними и все точки подобластей (3.17), принадлежат области неустойчивости. Таким образом, область V совпадает с областью неустойчивости, а область H – с областью асимптотической устойчивости. Кривая I будет границей области неустойчивости. Из изложенного метода следует, что для построения семейств ветвей L_j^a и L_j^b достаточно найти для

каждого фиксированного $h=h_k$ действительные положительные корни полиномов $\Delta^a_{n_1-n}(h,\mu)$ и $\Delta^b_{n_1-n}(h,\mu)$. Поэтому алгоритм построения семейств $\mathcal{L}_j^a$ и $\mathcal{L}_j^b$ удобно реализуется на вычислительной машине, но существенно зависит от вида определителей $\Delta^a(h,\mu)$ и $\Delta^b(h,\mu)$. Выбор из этих семейств ветвей, принадлежащих границам областей неустойчивости, в свою очередь, зависит от порядка исследуемого дифференциального уравнения. Всё это сужает класс дифференциальных уравнений, к которым описанный метод может быть эффективно применён. Тем не менее, можно ожидать, что распространение этого метода на дифференциальные уравнения более высоких порядков может дать положительный результат.

Литература

1. А.Н. Сычёв. О некоторых случаях возбуждения параметрона. (Данный сборник, стр. 47-56).
2. В.Л. Дятлов. Об уравнениях, описывающих процессы в ферромагнитных плёнках. - Вычислительные системы, Новосибирск, 1962 г., вып. 2, стр. 3-15.
3. И.Г. Малкин. Теория устойчивости движения. М., ГИТТЛ, 1952 г., стр. 184-292.
4. Н.М. Матвеев. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Изд-во "Высшая школа", 1963 г., стр. 370-392.
5. Э.Т. Уиттекер и Дж.Ватсон. Курс современного анализа. М., ГИФМЛ, 1962 г., ч. I, стр. 48-57.

Поступила в редакцию
6.III.1966 г.