ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Сборник трудов
Института математики СО АН СССР

1966 г. Выпуск 23

# НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ НАДЕЖНОСТИ ОДНОРОДНЫХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

В.Г. Хорошевский

Рассматриваются основные характеристики надежности как элементарной машины( ЭМ ), так и однородной универсальной вычислительной системы (УВС) [1] с резервом и восстановлением. В качестве примера приведены характеристики надежности для машины "Минск-2" и УВС "Минск-222" [2] и [3].

## § I. Надежность элементарной машины универсальной вычислительной системы

Под надежностью некоторого устройства понимают способность его выполнять заданные функции в определенных условиях и в определенном промежутке времени. [4].

$I^0$. Функцией надежности называется

$$r(t) = P\{\xi > t\},$$

где $\xi$ - случайная величина, обозначающая момент возникновения первого отказа в работе устройства при заданных условиях эксплуатации;

$P\{\xi > t\}$ – вероятность появления события $\xi > t$, при котором первый отказ произойдет вне промежутка времени $(0, t]$.

Функция $r(t)$ обладает следующими свойствами:

1. $r(0) = 1$;
2. $r(+\infty) = 0$;
3. $r(t_2) \leq r(t_1)$ для $t_1 \leq t_2$, т.е. $r(t)$ – невозрастающая функция;
4. $r(t)$ может иметь не более чем счетное множество скачков;
5. $r(t)$ непрерывна справа при $t > 0$, т.е.

$$\lim_{\substack{\delta \to 0 \\ \delta > 0}} r(t+\delta) = r(t+0).$$

Функцией ненадежности некоторого устройства называется

$$Q(t) = 1 - r(t) = P\{0 < \xi \leq t\},$$

где $0 < \xi \leq t$ – событие, при котором первый отказ в работе устройства произойдет в промежутке времени $(0, t]$.

$Q(t)$ обладает следующими свойствами:

1. $Q(0) = 0$;
2. $Q(+\infty) = 1$;
3. $Q(t_1) \leq Q(t_2)$ для $t_1 \leq t_2$, т.е. $Q(t)$ – неубывающая функция;
4. $Q(t)$ может иметь не более чем счетное множество скачков;
5. $Q(t)$ непрерывна справа при $t > 0$.

Для практического определения $Q(t)$ пользуются формулой:

$$Q(t) \approx \tilde{Q}(t) = \frac{n(t)}{N_0},$$

где $N_0$ – число устройств в начале испытаний,
$n(t)$ – число отказавших устройств в промежутке времени $(0, t]$.



2°. Частотой отказов называется

$$q(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = -\frac{dr(t)}{dt}.$$

Для практического определения $q(t)$ пользуются формулой:

$$q(t) \approx \tilde{q}(t) = \frac{n(t)}{N_0 \Delta t},$$

где $n(t)$ – число отказавших устройств в промежутке времени $(t, t+\Delta t]$.

3°. Среднее время исправной работы выражается формулой:

$$Mt = \int_0^\infty t\,dQ(t) = -\int_0^\infty t\,dr(t) = \int_0^\infty r(t)\,dt = \int_0^\infty t\,q(t)\,dt.$$

$Mt$ практически вычисляется по формуле:

$$Mt \approx \tilde{M}t = \frac{1}{N_0}\sum_{i=1}^{N_0} t_i,$$

где $t_i$ – время исправной работы $i$ устройства.

4°. Интенсивностью отказов (лямбда-характеристикой) называется функция

$$\lambda(t) = \frac{Q'(t)}{1-Q(t)} = -\frac{r'(t)}{r(t)} = \frac{q(t)}{r(t)}. \qquad (1)$$

На практике для определения $\lambda(t)$ пользуются формулой

$$\lambda(t) \approx \tilde{\lambda}(t) = \frac{n(t)}{N(t)\Delta t}.$$

Здесь

$$N(t) = \frac{N+N'}{2},$$

где $N$ – число исправно работающих устройств в момент времени $t$;
$N'$ – число исправно работающих устройств в момент времени $t+\Delta t$.

Если выражение (I) проинтегрировать в пределах от 0 до $t$, то получим, что

$$r(t)=e^{-\int_0^t \lambda(\tau)d\tau},$$

а при $\lambda = const$,

$$r(t)=e^{-\lambda t}.$$

Из определения $Mt$ следует, что

$$Mt=\int_0^\infty e^{-\int_0^t\lambda(\tau)d\tau}\cdot dt; \qquad Mt/_{\lambda=const}=\int_0^\infty e^{-\lambda t}dt=\frac{1}{\lambda}.$$

Таким образом, при $\lambda=const$ функция надежности равна

$$r(t)=e^{-\lambda t}=e^{-\frac{t}{Mt}}.$$

5⁰. **Функцией восстановимости** некоторого устройства называется

$$u(t)=P\{0<\eta\le t\},$$

где $\eta$ – случайная величина, являющаяся моментом восстановления отказавшего устройства.

$u(t)$ – обладает следующими свойствами:

I. $u(0)=0$;

2. $u(+\infty)=1$;

3. $u(t_1)\le u(t_2)$ для $t_1\le t_2$;

4. $u(t)$ может иметь не более чем счетное множество скачков;

5. $u(t)$ непрерывна слева при $t>0$.

**Функцией невосстановимости** некоторого устройства называется

$$v(t)=1-u(t)=P\{\eta>t\}.$$

Для практического определения $u(t)$ можно пользоваться формулой

$$u(t)\approx \tilde u(t)=\frac{m(t)}{M_0},$$



где $M_0$ – число отказавших устройств в начале восстановления,

$m(t)$ – число восстановленных устройств в промежутке времени $(0,t]$.

По аналогии с $q(t)$, $Mt$, $\lambda(t)$ можно ввести частоту восстановлений, среднее время восстановления $\bar t$, интенсивность восстановлений $\mu(t)$.

6⁰. Формулы оценок надежности проверялись на практическом материале для электронной вычислительной машины (ЭВМ) "Минск-2". Были получены следующие результаты:

Статистические значения $\tilde Q(t)$ для некоторых $t$ приведены на рис.I. (Они обозначены – "+"). Эти значения хорошо совпадают со значениями функции $Q(t)=1-e^{-\lambda t}$ для $\lambda=0{,}024\frac{I}{24}$.

На этом же рисунке приведены кривая $Q^*(t)=1-e^{-\lambda^* t}$ для $\lambda^*=0{,}0084\frac{I}{24}$ и значения $\tilde Q^*(t)=n^*(t)/N_0$, где $n^*(t)$ – число отказавших ЭВМ в промежутке времени $(0,t]$, причем ЭВМ считалась отказавшей лишь только тогда, когда отказывало хотя бы одно из следующих устройств: арифметическое устройство (АУ), устройство управления (УУ), магнитное оперативное запоминающее устройство (МОЗУ).

Некоторые статистические значения $\tilde q(t)$ приведены на рис.2. Здесь же изображена кривая $q(t)=\lambda e^{-\lambda t}$

$\tilde Mt$ = 42 час. $Mt$ = 4I,7 час. Если считать ЭВМ отказавшей только тогда, когда отказывало хотя бы одно из устройств: АУ, УУ, МОЗУ, то $\tilde Mt^*$ = I20 час, а $Mt^*$ = II9час.

$$Mt=41{,}7\ \text{час}=\frac{1}{0{,}024\ 1/\text{час}}=\frac{1}{\lambda};$$

$$Mt^*=119\ \text{час}=\frac{1}{0{,}0084\ 1/\text{час}}=\frac{1}{\lambda^*}.$$

Значения $u(t)$ приведены на рис.3. Кривая $u(t)=1-e^{-\mu t}$ для $\mu=0{,}7\ \frac{1}{\text{час}}$ также приведена на рис.3.

$$\bar t = 1\ \text{час}\ 26\ \text{мин.} = \frac{1}{0{,}7\ 1/\text{час}}=\frac{1}{\mu}.$$

Для оценки согласованности $\tilde Q(t)$, $\tilde Q^*(t)$, $\tilde U(t)$ соответственно с $Q(t)$, $Q^*(t)$, $U(t)$ для ЭВМ "Минск-2" был использован критерий $\chi^2$ Пирсона [5]. Было установлено, что для ЭВМ "Минск-2" гипотеза об экспоненциальном законе распределения времени исправной работы и времени восстановления не противоречит опытным данным.

Отметим, что аналогичный вывод для ЭВМ "Урал-I" и "БЭСМ-2" сделан в работах [6],[7].

## § 2. Надежность универсальных вычислительных систем с резервом и восстановлением

I°. Для системы устройств с резервом и восстановлением интерес представляют функции: готовности, надежности и восстановимости.

Функцией готовности системы [8] называется

$$S(t)=P\{A(t)\},$$

где $P\{A(t)\}$ - вероятность события $A(t)$, а $A(t)$ есть событие, состоящее в том, что в момент времени $t$ система исправна. $S=\lim\limits_{t\to\infty} S(t)$ называется коэффициентом готовности.

Функцией надежности системы называется

$$R(t)=P\{\xi>t\},$$

где $P\{\xi>t\}$ - вероятность события $\xi>t$, а $\xi$ есть момент возникновения первого отказа всей системы при заданных условиях её эксплуатации.

Функцией восстановимости системы называется

$$U(t)=P\{0<\eta\leq t\},$$

где $P\{0<\eta\leq t\}$ есть вероятность события $0<\eta\leq t$, а $\eta$ есть момент восстановления отказавшей системы.

Имеется общий подход к расчету надежности системы устройств [8], [9], [10], суть которого заключается в следующем.

Задается пространство $E$ состояний $\varepsilon(t)$ данной системы, различающихся с точки зрения исправности устройств. Поскольку в системе отказы устройств и их восстановления происходят в случайные моменты времени, то $\varepsilon(t)$ является случайным процессом.

На пространстве $E$ задается некоторая функция $W(\varepsilon)$.



Эта функция принимает действительные значения и характеризует в определенном смысле производительность системы, находящейся в состоянии $\varepsilon\in E$. Функция $W(\varepsilon)$ называется функцией эффективности.

Если предположить, что распределение вероятностей состояний системы $F(\varepsilon)$ известно, то математическое ожидание $W(\varepsilon)$ равно

$$\bar{W}=MW(\varepsilon)=\int\limits_E W(\varepsilon)dF(\varepsilon).$$

$\bar{W}$ называется оперативной эффективностью, или эффективностью функционирования системы [8].

Задав функцию эффективности следующим образом:

$W(\varepsilon)=1$, если система в момент времени $t$ находится в исправном состоянии, т.е. $\varepsilon(t)\in E_1$, а $E_1\subset E$ является подмножеством состояний, когда система считается исправной;

$W(\varepsilon)=0$, если система в момент времени $t$ находится в состоянии отказа, т.е. $\varepsilon(t)\in E_2$, $E_2\subset E$ является подмножеством состояний, когда система считается отказавшей, причем $E_1\cup E_2=E$,

получим, что

$$\bar{W}=S(t)=P\{W(\varepsilon(t))=1\}.$$

Пусть функция эффективности есть функция от $\gamma$, т.е. $W(\gamma)$, где $\gamma$ является переходом из состояния $\varepsilon_1$ в состояние $\varepsilon_2$. $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$ - любые два состояния из $E$, причем не исключено, что $\varepsilon_1=\varepsilon_2$.

Если предположить, что распределение вероятностей переходов системы $F(\gamma)$ известно, то математическое ожидание $W(\gamma)$ равно

$$\bar{W}=MW(\gamma)=\int\limits_\Gamma W(\gamma)dF(\gamma),$$

где $\Gamma$ - множество переходов $\gamma$ системы.

Пусть

$W(\gamma)=1$, если в промежутке $(0,t]$ система ни разу не войдет в состояние отказа, т.е. когда $\varepsilon_1(\theta),\varepsilon_2(\theta)\in E_1$ для $0<\theta\leq t$;

$W(\gamma)=0$, если в промежутке $(0,t]$ система хотя бы раз побывает в состоянии отказа, т.е. хотя бы одно из значений $\mathcal{E}_2(\theta)\in E_2$ для $0<\theta\leq t$,

то величина $\bar{W}$ совпадает с $R(t)$.

Наконец, при

$W(\gamma)=1$, если отказавшая система в промежутке $(0,t]$ ни разу не войдет в исправное состояние, т.е. когда $\mathcal{E}_1(\theta)$, $\mathcal{E}_2(\theta)\subset E_2$ для $0<\theta\leq t$;

$W(\gamma)=0$, если отказавшая система в промежутке $(0,t]$ хотя бы раз войдет в исправное состояние, т.е. хотя бы одно из значений $\mathcal{E}_2(\theta)\in E_1$ для $0<\theta\leq t$

величина $\bar{W}$ будет совпадать с функцией невосстановимости системы $V(t)=1-U(t)$.

2°. Пусть УВС состоит из $N$ ЭМ [I], причем $n$ машин относятся к основным, а $N-n$ машин образуют горячий резерв [II]. Отказавшая ЭМ восстанавливается в ремонтирующем устройстве.

Требуется найти оценки для функций: готовности, надежности, восстановимости.

В дальнейшем будем предполагать, что время восстановления распределено по экспоненциальному закону, т.е. вероятность того, что ЭМ за время $t$ не будет восстановлена, равна

$$\vartheta(t)=e^{-\mu t}.$$

Будем предполагать, что поток отказов, появляющихся в любой машине, является пуассоновским, т.е. вероятность появления $k$ отказов за время $t$ равна

$$\pi_k(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$$

и не зависит от потока отказов в других машинах. Таким образом, предполагается, что поток отказов в каждой машине является простейшим [I2].

Пространство состояний для УВС $E=\{0,1,2,\dots,N\}$.

Пусть $\mathcal{E}(t)$ означает число исправных ЭМ в системе в момент времени $t$. Естественно считать, что система исправна в момент времени $t$, если $\mathcal{E}(t)$ принимает одно из значений $\{n,n+1,\dots,N\}$. $\mathcal{E}(t)$ - случайный марковский процесс [I2]

3°. Если $P_k(t)$ - вероятность того, что УВС в момент времени $t$ находится в состоянии $k$, т.е. $\mathcal{E}(t)=k$, то



функция готовности системы равна

$$S(t)=\sum_{k=n}^{N}P_k(t).$$

Наиболее просто находится коэффициент готовности

$$S=\lim_{t\to\infty}S(t).$$

Согласно теореме Маркова [I2], для любого $k$ $(0\leq k\leq N)$ существует предел

$$\lim_{t\to\infty}P_k(t)=P_k.$$

Тогда коэффициент готовности

$$S=\sum_{k=n}^{N}P_k.$$

Заметим, что $S$ является также средним относительным временем пребывания системы в исправном состоянии. Это следует из того, что $P_k$ является средним относительным временем пребывания системы в состоянии $k$ [I2].

Для определения величин $P_k$ воспользуемся методом Эрланга [I2].

Случай I. Имеется одно восстанавливающее устройство, функция надежного которого тождественно равна I, и ремонт производится в порядке очередности.

Обозначим через $\tau$ промежуток времени бесконечно малой длины, $O(\tau)$ - всякую бесконечно малую порядка выше $\tau$. Знак $\approx$ между двумя величинами будем употреблять тогда, когда их разность есть величина вида $O(\tau)$.

Поскольку $\mathcal{E}(t)$ - марковский случайный процесс, то вероятность появления по меньшей мере одного отказа в ЭМ за промежуток $\tau$ есть величина $\approx\lambda\tau$, а вероятность появления более одного отказа - величина вида $O(\tau)$. Очевидно, что вероятность появления одного отказа в $k$ машинах за промежуток времени $\tau$ есть величина $\approx k\lambda\tau$.

С другой стороны, если в данный момент ЭМ неисправна, то вероятность того, что ЭМ будет неисправна еще не менее $\tau$ единиц времени, равна $e^{-\mu\tau}$, а вероятность того, что ЭМ за время $\tau$ будет восстановлена, равна $1-e^{-\mu\tau}\approx\mu\tau$.

Обозначим через $P_{ik}(\tau)$ вероятность того, что система, находящаяся в некоторый момент времени $t$ в состоянии $\mathcal{E}(t)=i$, перейдет по истечении времени $\tau$ в состояние $\mathcal{E}(t+\tau)=k$.

Найдем асимптотические выражения для данных вероятностей при $\tau \to 0$.

Очевидно, что $P_{ik}(\tau) \approx 0$ при $|i-k|>1$;

$$P_{k,k+1}(\tau) \approx \mu\tau \quad \text{при} \quad 0 \le k < N;$$

$$P_{k,k-1}(\tau) \approx k\lambda\tau \quad \text{при} \quad 0 < k \le N.$$

Откуда следует, что

$$P_{kk}(\tau) \approx 1 - P_{k,k+1}(\tau) - P_{k,k-1}(\tau), \qquad 0 \le k \le N,$$

или

$$P_{00}(\tau) \approx 1 - \mu\tau;$$
$$P_{kk}(\tau) \approx 1 - \mu\tau - k\lambda\tau, \qquad 1 \le k \le N-1;$$
$$P_{NN}(\tau) \approx 1 - N\lambda\tau.$$

Для марковского процесса

$$P_k(t+\tau) = \sum_{i=0}^{N} P_i(t) \cdot P_{ik}(\tau) \qquad (2)$$

при $t \ge 0$.

Подставляя в (2) асимптотические оценки для $P_{ik}(\tau)$ ($i,k = 0,1,2,\ldots,N$) и переходя к пределу при $\tau \to 0$ $(t=const)$, получаем

$$\left.\begin{aligned} &P_0'(t) = -\mu P_0(t) + \lambda P_1(t); \\ &P_k'(t) = \mu P_{k-1}(t) - (\mu + k\lambda) P_k(t) + (k+1)\lambda P_{k+1}(t), \quad 0<k<N \\ &P_N'(t) = \mu P_{N-1}(t) - N\lambda P_N(t). \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Система $N+1$ уравнений (3) с $N+1$ неизвестными функциями $P_k(t)$ ($k = 0,1,2,\ldots,N$) является системой Эрланга.

$$\lim_{t\to\infty} P_k'(t) = 0.$$



Тогда в стационарном (установившемся) режиме получается следующая система уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &-\mu P_0 + \lambda P_1 = 0; \\ &\mu P_{k-1} - (\mu + k\lambda) P_k + (k+1)\lambda P_{k+1}, \quad 0<k<N; \\ &\mu P_{N-1} - N\lambda P_N = 0. \end{aligned}\right\} (4)$$

Кроме того, справедливо нормировочное условие

$$\sum_{k=0}^{N} P_k = 1 .$$

Если обозначить $\mu P_{k-1} - k\lambda P_k = Z_k$, $1 \le k \le N$, то систему (4) можно записать в виде:

$$Z_1 = 0; \quad Z_k - Z_{k+1} = 0, \quad 0<k<N, \quad Z_N = 0,$$

откуда

$$Z_k = 0,$$

$$P_k = \frac{1}{k}\,\frac{\mu}{\lambda}\,P_{k-1} = \frac{1}{k}\,\alpha \cdot P_{k-1}, \qquad 1 \le k \le N,$$

где $\alpha = \mu/\lambda$ и, следовательно,

$$P_k = \frac{\alpha^k}{k!} P_0 = \frac{\alpha^k}{k!} \left[\sum_{\ell=0}^{N} \frac{\alpha^\ell}{\ell!}\right]^{-1},$$

что следует из условия нормировки.

Если перейти к пределу при $N \to \infty$, то получим

$$P_k = \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha},$$

т.е. распределение Пуассона.

Следовательно, коэффициент готовности равен

$$S = \sum_{k=n}^{N} \frac{\alpha^k}{k!} \left[\sum_{\ell=0}^{N} \frac{\alpha^\ell}{\ell!}\right]^{-1}.$$

Случай 2. Имеется $N$ одинаковых восстанавливающих устройств, причем функция надежности каждого тождественно равна I. Каждая отказавшая ЭМ восстанавливается в своем восстанавливающем устройстве независимо от других машин системы.

Аналогичные рассуждения, как и в случае I, для стационарного режима приводят к следующей системе уравнений:

$$
\left.\begin{aligned}
&-N\mu P_0+\lambda P_1=0;\\
&[N-(k-1)]\mu P_{k-1}-[(N-k)\mu+k\lambda]P_k+(k+1)\lambda P_{k+1}=0;\\
&\qquad\qquad 0<k<N;\\
&\mu P_{N-1}-N\lambda P_N=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(5)
$$

Кроме того, имеет место условие нормировки

$$\sum_{k=0}^{N}P_k=1.$$

Решив систему (5) с учетом условия нормировки, получим, что

$$P_k=\binom{N}{k}\alpha^k\left[\sum_{\ell=0}^{N}\binom{N}{\ell}\alpha^\ell\right]=\binom{N}{k}\frac{\alpha^k}{(1+\alpha)^N}.$$

Следовательно, коэффициент готовности для случая 2 равен

$$S=1-\frac{1}{(1+\alpha)^{N-n+1}}.$$

$4^0$. Обозначим через $P_k\{\xi>t\}$ условную вероятность события $\xi>t$, предполагая, что система находится в состоянии $k\in E$.

Из определения функции надежности и по формуле полной вероятности получаем

$$R(t)=P\{\xi>t\}=\sum_{k=0}^{N}P_kP_k\{\xi>t\},$$

или, $R(t)=\sum_{k=n}^{N}P_kP_k\{\xi>t\}$, так как считается, что $P_k\{\xi>t\}=0$ при $k<n$ и $t\geq 0$.

Величины $P_k$ известны. Остается определить величины $P_k\{\xi>t\}$ для $n\leq k\leq N$.

Пусть $\Pi_\tau(t)$ ($\tau=0,1,\ldots,k-n$) есть вероятность того, что за время $t$ произойдет ровно $\tau$ отказов, тогда оценка $\tilde{P}_k\{\xi>t\}$ для $P_k\{\xi>t\}$ равна

$$\tilde{P}_k\{\xi>t\}=\sum_{\tau=0}^{k-n}\Pi_\tau(t)\qquad(n\leq k\leq N).$$

Вероятность того, что в $k$ машинах произойдет ровно $\tau$ отказов равна

$$\Pi_\tau(t)=\frac{(k\lambda t)^\tau}{\tau!}e^{-k\lambda t},$$
$$0\leq\tau\leq k-n.$$



Тогда оценка $\tilde{R}(t)$ для функции надежности системы $R(t)$ равна

$$\tilde{R}(t)=\tilde{P}\{\xi>t\}=\sum_{k=n}^{N}P_ke^{-k\lambda t}\sum_{\tau=0}^{k-n}\frac{(k\lambda t)^\tau}{\tau!}.$$

Случай 1.

$$\tilde{R}(t)=\sum_{k=n}^{N}\frac{\alpha^k}{k!}\sum_{\tau=0}^{k-n}\frac{(k\lambda t)^\tau}{\tau!}e^{-k\lambda t}\left[\sum_{\ell=0}^{N}\frac{\alpha^\ell}{\ell!}\right]^{-1}.$$

Случай 2.

$$\tilde{R}(t)=\sum_{k=n}^{N}\binom{N}{k}\alpha^k\sum_{\tau=0}^{k-n}\frac{(k\lambda t)^\tau}{\tau!}e^{-k\lambda t}(1+\alpha)^{-N}.$$

$5^0$. Обозначим через $P_k\{\eta>t\}$ условную вероятность события $\eta>t$, предположив, что система находится в состоянии $k\in E$.

Из определения функции невосстановимости и из формулы полной вероятности получаем

$$V(t)=1-U(t)=P\{\eta>t\}=\sum_{k=0}^{N}P_kP_k\{\eta>t\}.$$

Поскольку считается, что $P_k\{\eta>t\}=0$ при $t\geq 0$, $k=n,n+1,\ldots,N$, то

$$V(t)=\sum_{k=0}^{n-1}P_kP_k\{\eta>t\}.$$

Необходимо найти величины $P_k\{\eta>t\}$ для $k=0,1,\ldots,n-1$.

Пусть $U_\tau(t)$ ($\tau=0,1,2,\ldots,n-k-1$) есть вероятность того, что за время $t$ произойдет ровно $\tau$ восстановлений ЭМ, тогда оценкой $\tilde{V}(t)$ для $V(t)$ будет

$$\tilde{V}(t)=\tilde{P}\{\eta>t\}=\sum_{k=0}^{n-1}P_k\sum_{\tau=0}^{n-k-1}U_\tau(t).$$

Случай 1. Как уже отмечалось, вероятность того, что отказавшая ЭМ за время $t$ не будет восстановлена, равна $v(t)$. Тогда

$$U_\tau(t)=\frac{(\mu t)^\tau}{\tau!}e^{-\mu t}\qquad(\tau=0,1,2,\ldots,n-k-1)$$

и, следовательно, оценка для функции невосстановимости УВС равна

$$\tilde{V}(t)=\sum_{\kappa=0}^{n-1}\frac{\alpha^{\kappa}}{\kappa!}\sum_{\tau=0}^{n-\kappa-1}\frac{(\mu t)^{\tau}}{\tau!}e^{-\mu t}\left[\sum_{\ell=0}^{N}\frac{\alpha^{\ell}}{\ell!}\right]^{-1}.$$

Случай 2. Вероятность того, что не произойдет ни одного восстановления за время $t$ после того, как будет исправно лишь $\kappa$ ЭМ, равна $(e^{-\mu t})^{N-\kappa}=e^{-(N-\kappa)\mu t}$. Поэтому величины

$$U_{\tau}(t)=\frac{[(N-\kappa)\mu t]^{\tau}}{\tau!}e^{-(N-\kappa)\mu t},$$

где $\tau=0,1,2,\ldots,n-\kappa-1$, а оценка для функции невосстановимости

$$\tilde{V}(t)=\sum_{\kappa=0}^{n-1}\binom{N}{\kappa}\alpha^{\kappa}\sum_{\tau=0}^{n-\kappa-1}\frac{[(N-\kappa)\mu t]^{\tau}}{\tau!}e^{-(N-\kappa)\mu t}\cdot(1+\alpha)^{-N}.$$

$6^{0}$. Коэффициент готовности и оценки функций надежности и восстановимости были рассчитаны для УВС "Минск-222" при $N$=10.

Значения $P_{\kappa}$ для 1-го случая (имеется одно восстанавливающее устройство) приведены на рис.4 в виде точек, помеченных ( $\times$ ), а для 2-го случая (имеется 10 восстанавливающих устройств) приведены там же в виде точек, помеченных ( $\cdot$ ).

Для УВС "Минск-222" без резерва ( $N=n=1$ ) были получены следующие результаты.

1) Коэффициент готовности для 1-го случая $S$ = 0,671, а для 2-го случая $S$ = 0,712.

2) Оценка $\tilde{R}(t)$ для 1-го случая приведена на рис.5 в виде кривой,на которой нанесены точки ( $\times$ ), а для 2-го случая - в виде кривой, на которой нанесены точки ( $\cdot$ )

3) Оценка для функции восстановимости изображена на рис.6 кривой с точками ($\times$) для 1-го случая и кривой с точками ($\cdot$) для 2-го случая.

Для УВС "Минск-222" с резервом $N-n=2$ ( $N=10, n=8$) были получены следующие результаты:

1) Коэффициент готовности для 1-го случая $S$ = 0,974, а для 2-го - $S$ = 0,996.

2) Оценки $\tilde{R}(t)$ для обоих случаев приведены на рис.7.

3) Оценки для функций восстановимости приведены на рис.8.



Из приведенных результатов видно, что $N$ восстанавливающих устройств дают несущественный эффект по сравнению со случаем, когда имеется одно восстанавливающее устройство; резерв в системе "Минск-222" более чем из двух машин при $N$=10 неэффективен.

На рис.9 приведена зависимость от $N$ коэффициента готовности для УВС "Минск-222" без резерва (функция $S(N)$ ).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Э.В. Евреинов, Ю.Г. Косарев. Однородные универсальные вычислительные системы. Новосибирск, "Наука", Сибирское отделение ( в печати).
2. Э.В. Евреинов, Г.П. Лопато. Универсальная вычислительная система "Минск-222". (Данный сборник, стр.13-20).
3. Г.П. Лопато, А.И. Василевский, В.Я.Пыхтин, Б.А.Сидристый, В.Г. Хорошевский. Системное устройство элементарной машины вычислительной системы "Минск-222" (Данный сборник, стр. 35-68).
4. А.М. Половко. Основы теории надежности. М, "Наука", 1964.
5. Ван-дер-Варден. Математическая статистика. М., ИЛ, 1960.
6. Н.П. Загуменов, Г.Б. Коробкин, Г.Л. Пучков, О.В. Щербаков. Экспериментальное исследование потока отказов и закона восстановления ЦВМ. - Вопросы радиоэлектроники. Серия УП: Электронная вычислительная техника, 1964, вып.6, стр.3-11.
7. О.В. Щербаков. Математические вопросы оценки надежности цифровых вычислительных машин. - Кибернетику на службу коммунизму, М.-Л., "Энергия", 1964, т.2, стр. 218-227.
8. Б.Р. Левин, И.А. Ушаков. Некоторые аспекты современного состояния проблемы надежности. - Радиотехника, 1965, т.20, № 4, стр. 3-20.
9. Ю.К. Беляев. Линейчатые марковские процессы и их приложение к задачам теории надежности. -Труды VI Всесоюзного совещания по теории вероятностей и математической статистике 1960 года. Вильнюс. Гос. изд. политич. и научной лит. Литовской ССР, 1962, стр. 309-323.

10. Ю.К. Беляев, В.А. Волконский. Л.Х. Соколовский. Оценка надежности системы приборов с учетом резервирования и восстановления. - Вопросы радиоэлектроники. Серия УП: Электронная вычислительная техника, 1962, вып.I, стр.3-20.

11. М.А. Синица. Резервирование радиоэлектронной аппаратуры. - Радиоэлектронная промышленность, 1958, № 5, стр. 10-65.

12. А.Я. Хинчин. Работы по математической теории массового обслуживания. М., Физматгиз, 1963.

Поступила в редакцию
15.I.1966 г.

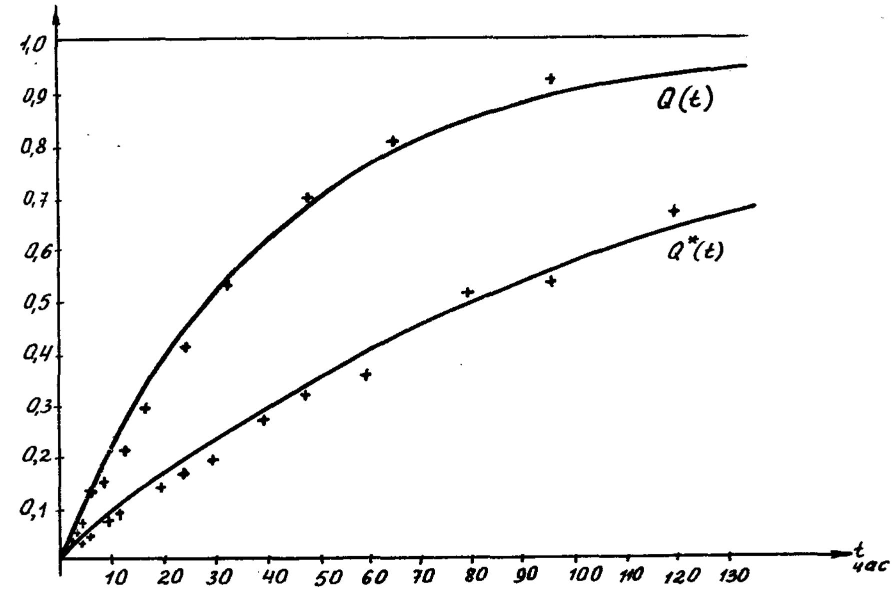


Рис. 1.

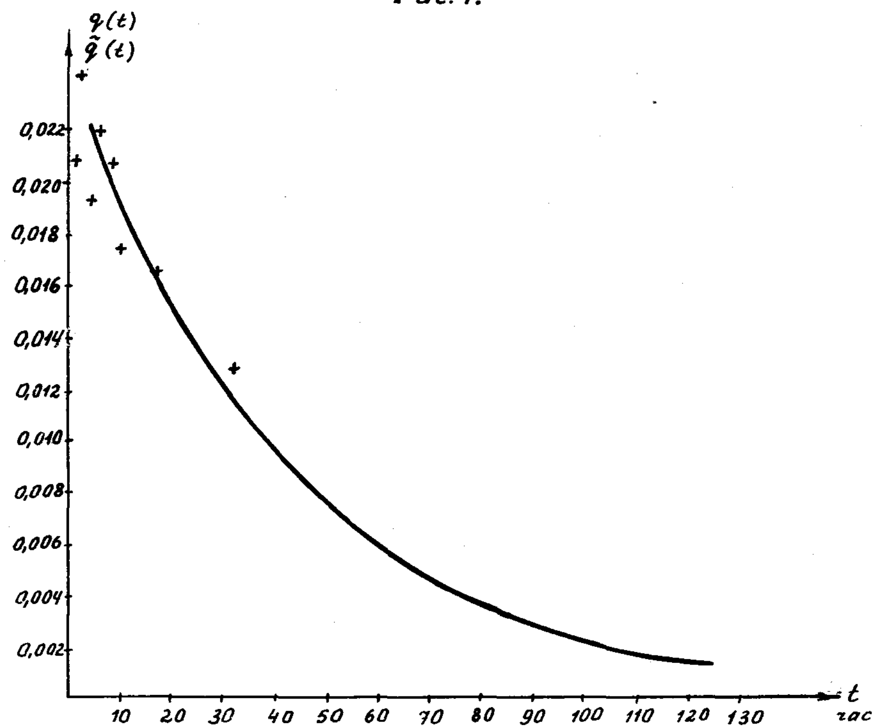


Рис. 2.

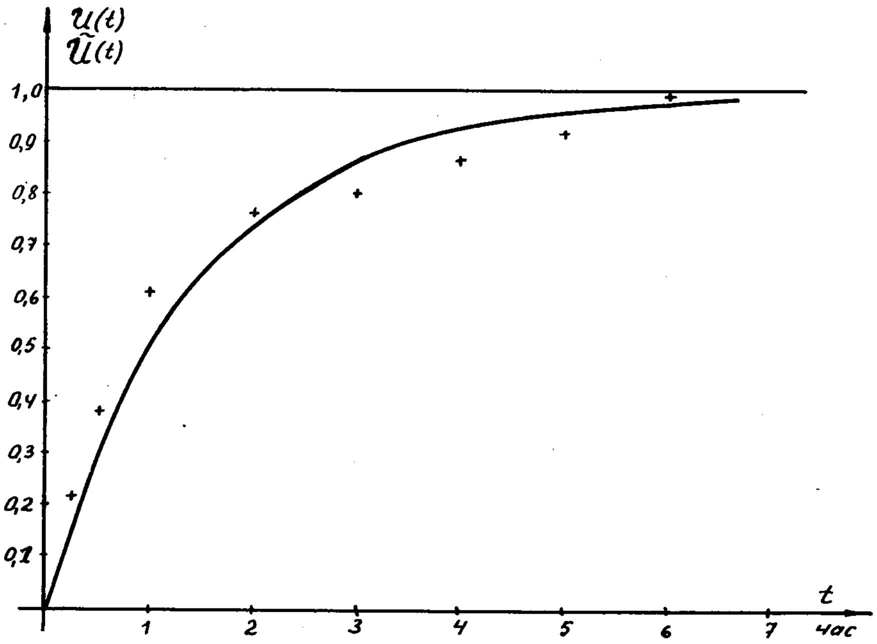


Рис.3.



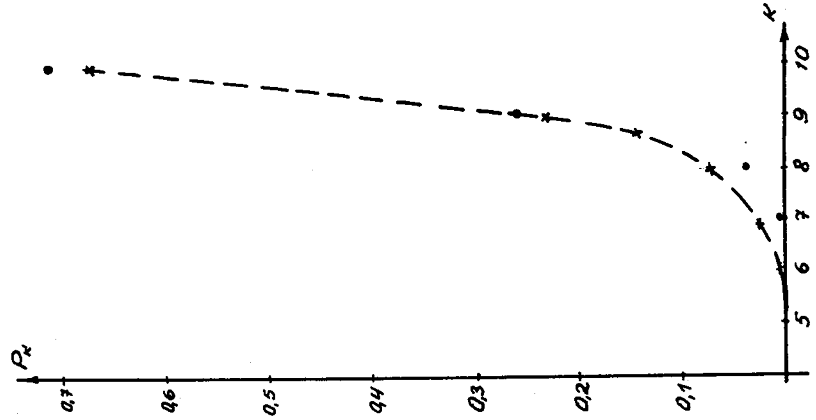


Рис. 4.

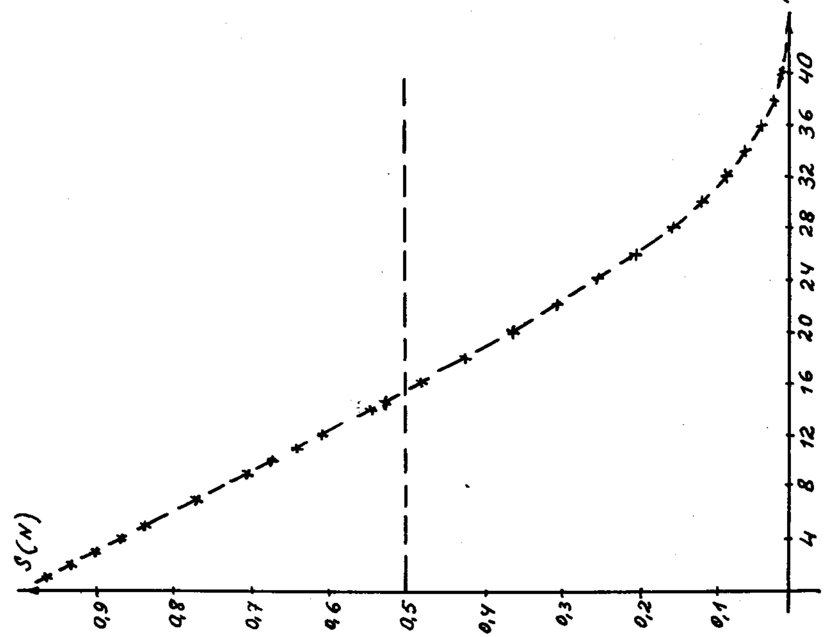


Рис. 9.

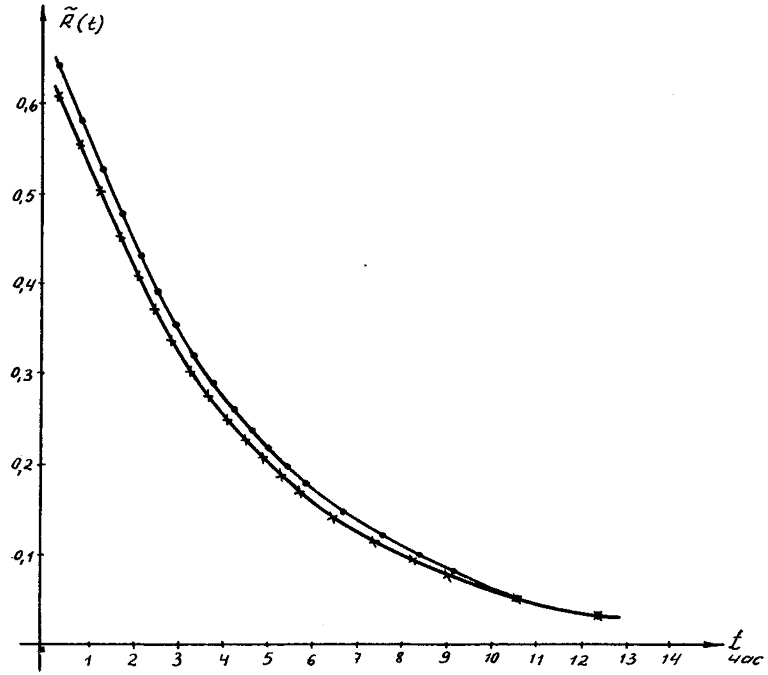


Рис.5.

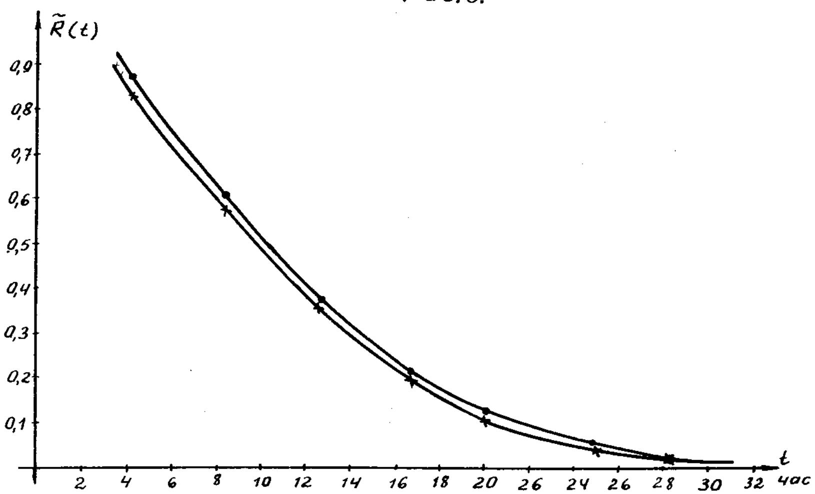


Рис.7.

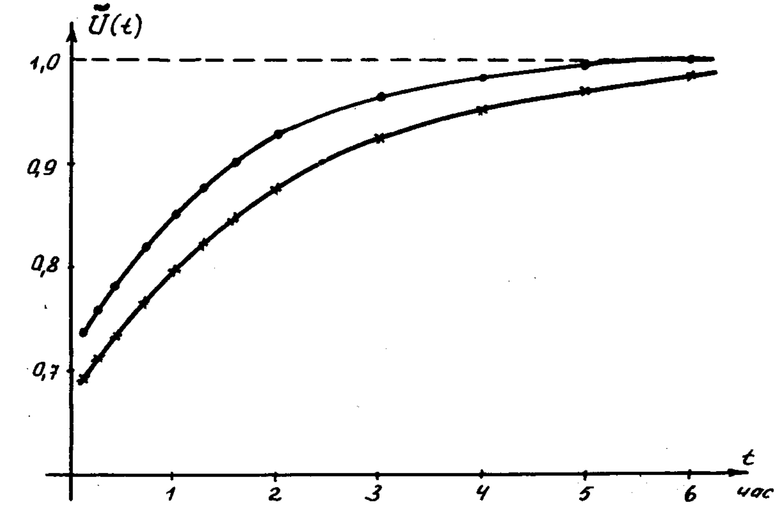


Рис. 6.

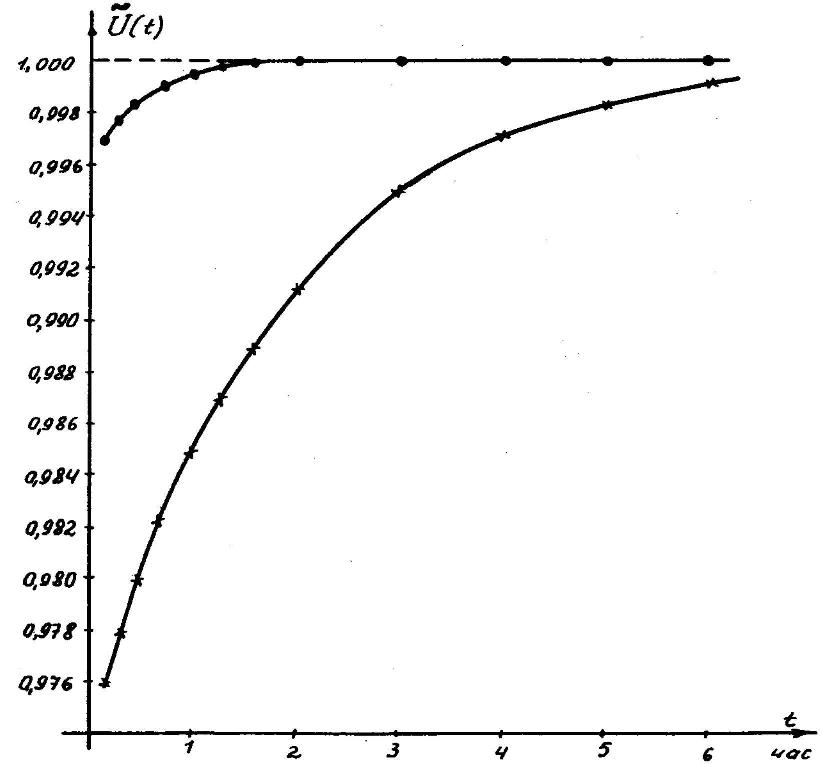


Рис. 8.