

ПРОГРАММИРОВАНИЕ ДЛЯ ПЛОСКОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СРЕДЫ

А.А. Койфман, В.А. Скоробогатов

I^0 . Отвлекаясь от особенностей физической реализации вычислительных сред (ВС) [1], можно дать определение ВС, рассматривая лишь те ее свойства, которые существенны для программирования.

Определим модель ВС над базисом (F, S) , где F — полная система функций алгебры логики и задержка, а S — соединительно полная система функций.

Пусть Z — множество точек, расположенных в узлах бесконечной прямоугольной решетки, узлы которой имеют целочисленные координаты (рис. 1).

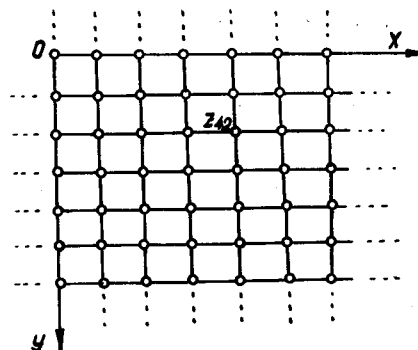


Рис.1.

Две точки $x_{c_1j_1}, x_{c_2j_2}$ назовем соседними, если либо $c_1 = c_2 \pm 1; j_1 = j_2$, либо $c_1 = c_2; j_1 = j_2 \pm 1$.

Рассмотрим симметрический граф $R(x, x \xrightarrow{\varphi} x)$. Множество φ состоит из пар соседних точек. Заметим, что $R = (x, \varphi)$ есть бесконечный плоский топологический граф, все грани которого суть квадраты, а вершины имеют степень четыре. Квадрат, соответствующий некоторой грани графа R , назовем открытым, если ему не принадлежат его вершины и стороны, и замкнутым — в противном случае. Множество сторон и вершин квадрата будем называть его границей. Под элементом модели ВС в дальнейшем понимается замкнутый квадрат. Каждому ребру графа R поставим в соответствие полюс из множества полюсов ВС, при этом каждому замкнутому квадрату будет соответствовать четыре полюса. Полюс может быть либо входом, либо выходом элемента ВС. Будем считать, что для двух смежных элементов ВС один и тот же полюс является входом одного и выходом второго, или наоборот. Скажем, что квадрату можно поставить в соответствие одну функцию из набора $(F; S)$.

Граф R с заданным множеством полюсов ВС и набором функций $(F; S)$ назовем моделью варианта В.С. над базисом $(F; S)$.

Пусть $\mathcal{L}$ — множество логических сетей над базисом F . Программой логической сети $\mathcal{L} \in \mathcal{L}$ для модели ВС будем называть конечный подграф графа R с поставленными в соответствие его граням функциями из $(F; S)$ таким образом, что для каждого элемента логической сети найдется элемент программы с поставленной ему в соответствие функцией элемента логической сети. Каждой связи в логической сети соответствует множество элементов программы, в котором каждому элементу поставлена в соответствие функция из S так, что обеспечивается соединение полюсов в программе В.С., соответствующих соединенным полюсам логической сети.

Пусть дана логическая сеть $\mathcal{L} \in \mathcal{L}$. Примем, что

$$F = \{ \&(3), \&(2), \vee(3), \vee(2), \gamma(1), \delta(1) \},$$

$$S = \{ P, D \}.$$

Логической сети $\mathcal{L}$ поставим в соответствие ориенти-

ванный граф G' следующим образом. х)

Каждый элемент E логической сети $\mathcal{L}$ заменяется вершиной α с i соединенными с ней и направленными к ней дугами (i равно числу входов заменяемого элемента), исходящими из вершин, соответствующих тем элементам, к выходам которых присоединены входы элемента E ; вершине α приписывается символ функции, реализуемой элементом E . Входным и выходным полюсам ставятся в соответствие вершины, которым приписаны символы переменных (входных или выходных).

В графе G' выделим множество вершин, степень которых больше четырех. Произвольную вершину этого множества заменим несколькими вершинами степени ≤ 4 таким образом (рис. 2),

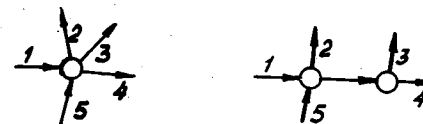


Рис.2.

чтобы все дуги, входящие в исходную вершину, оказались после замены также входящими только в одну из новых вершин, исходящие же дуги могут быть распределены произвольно. Эта замена всегда возможна, так как среди элементов исходной логической сети ни один не имел более трех входов. Вершине, входящие дуги которой соответствуют входящим дугам исходной вершины, припишем прежний символ функции, всем остальным новым вершинам припишем символ соединительной функции P . Эту замену проведем для всех вершин исходного множества.

Пусть граф G , имеющий n вершин и m ребер, задан матрицей смежности $M(G)$. Выберем на плоскости n различных точек по числу вершин в графе, обозначим их через $x_1, \dots, x_n$. Затем в соответствии с $M(G)$ соединим пары (x_i, x_j) так, чтобы дуги не проходили через другие вершины и не сливались друг с другом (пересечения допускаются). Результат

х) Следующий абзац почти дословно совпадает с соответствующим местом статьи О.Б. Лупанова [2].

Используемая терминология теории графов, употребляется далее без ссылок на книгу Бержа [3], откуда она заимствована.

назовем геометрической реализацией данного графа G на плоскости.

Выберем некоторую геометрическую реализацию графа G^1 и заменим в ней все пересечения дуг вершинами, приписав им символ соединительной функции D . В результате получим плоский топологический граф G^2 .

В плоском топологическом графе будем называть граничными дугами все дуги, которым инцидентна бесконечная грань. Совокупность граничных дуг назовем границей плоского топологического графа. Вершины, которым инцидентны граничные дуги, назовем граничными вершинами, остальные вершины будем называть внутренними.

Все висячие вершины графа G^2 объединим в одну, разместив ее вне границы (на бесконечной грани), и обозначим через A_0 . В графе G^2 всегда есть, по крайней мере, две висячие вершины, соответствующие входному и выходному полюсам исходной логической сети.

Все вершины графа G^2 , степень которых меньше четырех, соединим одним или несколькими ребрами с вершиной A_0 так, чтобы степень их повысилась до четырех. При этом потребуем, чтобы новые ребра не проходили через существующие вершины, не сливались с существующими дугами (ребрами). Все пересечения новых ребер с дугами (или ребрами) заменим вершинами, приписав им символ соединительной функции D . В результате получим плоский топологический граф G^3 , все вершины которого, за исключением A_0 , имеют степень 4.

Построим граф G^{3*} , двойственный графу G^3 , потребовав, чтобы вершина A_0 графа G^3 осталась на бесконечной грани графа G^{3*} . Граф G^{3*} — конечный плоский топологический граф, все конечные грани которого есть четырехугольники.

2⁰. Пусть $G_1(X, \Gamma_1)$ — антисимметрический граф, а $G_2(X, \Gamma_2)$ — симметрический граф. Граф $G(X, \Gamma)$ назовем смешанным графом, если $[(x, y) \in \Gamma_1] \vee [(x, y) \in \Gamma_2] \Rightarrow (x, y) \in \Gamma$. В дальнейшем, если это не искажает смысла, и ребра и дуги смешанного графа будем называть ребрами.

Рассмотрим смешанный конечный плоский топологический односвязный граф G^{4*} , все грани которого являются четырехугольниками, все внутренние вершины имеют степень четыре, все граничные вершины имеют степень не больше четырех, каждой гра-

ни поставлена в соответствие некоторая функция из набора $(F; S)$.

Будем говорить, что в графе G^{4*} дуге, инцидентной двум смежным граням, соответствует полюс, являющийся входным для одной грани и выходным — для другой. Для конкретности будем, например, считать, что полюс является выходным для грани, расположенной справа от дуги. Ребру в графе G^{4*} полюс не соответствует.

Определим отображение графа G^{4*} на часть графа R . Граням, ребрам, вершинам графа G^{4*} поставим в соответствие открытые квадраты, ребра, вершины графа R следующим образом.

Выберем произвольно грань q_1 графа G^{4*} и поставим ей в соответствие некоторый открытый квадрат Q_1 графа R . Выберем одно из ребер (u_1) края грани q_1 и поставим ему в соответствие некоторое ребро $(2u_1)$ графа R из границы квадрата Q_1 . Выберем в графе G^{4*} и графе R некоторое направление обхода и последовательно, начиная с u_1 и $2u_1$, каждому ребру u_i края грани q_1 поставим в соответствие ребро $2u_i$ границы квадрата Q_1 . Каждой из граней графа G^{4*} , смежных с q_1 , поставим в соответствие один из открытых квадратов графа R , смежных с Q_1 так, чтобы образы элементов, инцидентных в графе G^{4*} , были инцидентны в графе R . Взяв далее одну из смежных с q_1 граней (q_2) и её образ в графе R , найдем в графе R образы ребер из края грани q_2 и образы смежных с q_2 граней и т.д.

Рассмотрим множество граничных вершин и ребер в графе G^{4*} . Любой граничной вершине инцидентны точно два граничных ребра, а любое граничное ребро инцидентно двум граничным вершинам. Произвольно выбрав некоторую граничную вершину α_0 , инцидентное ей ребро u_0 и т.д., можно однозначно определить циклическую последовательность

$$\alpha_0^i, u_0, \alpha_1^j, u_1, \dots, \alpha_{n-1}^k, u_{n-1}, \alpha_0^i$$

граничных ребер и вершин, в которой каждое ребро u_i инцидентно вершинам α_i и α_{i+1} . Верхние индексы α_i^j соответствуют степени вершины α_i .

Каждое ребро образа графа G^{4*} в графе R параллельно одной из осей координат (x или y). Параллельность или перпендикулярность двух смежных дуг зависит от степени инцидентной им общей вершины. Смежные граничные ребра с общей вершиной степени 3 параллельны одной и той же оси координат, а смежные граничные ребра с общей вершиной степени 2 или 4 вз-

имно перпендикулярны. Нетрудно приписать всем граничным ребрам индекс координаты, обозначающий параллельность той или иной оси координат, предположив, например, что u_0 параллельно оси x .

Примем, что вершина α_0 лежит в начале координат. Тогда вершина α_i имеет приращение одной из координат (в зависимости от индекса координаты ребра u_0) по сравнению с вершиной α_0 . Заметим теперь, что пара вершин одинаковых степеней (2,2 или 4,4), между которыми расположены только вершины степени 3, меняет знак приращения одной из координат. Расставив знаки приращения у индексов координат последовательности граничных ребер и вершин, получим последовательность, которую будем называть *характеристической последовательностью* графа G^{4*} . Например, последовательности граничных вершин графа G^{4*} (рис. 3)

$$\alpha_0^2 u_0 \alpha_1^2 u_1 \alpha_2^4 u_2 \alpha_3^3 u_3 \dots \alpha_{20}^3 u_{20} \alpha_{21}^3 u_{21} \alpha_0^2$$

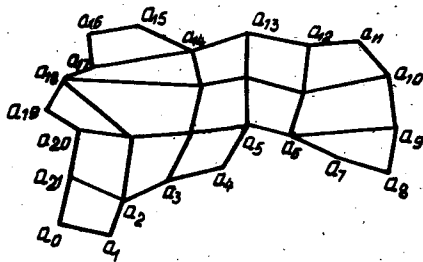


Рис.3.

соответствует характеристическая последовательность

$$\alpha_0^2 u_0^x \alpha_1^2 u_1^y \alpha_2^4 u_2^x \alpha_3^3 u_3^x \dots \alpha_{20}^3 u_{20}^y \alpha_{21}^3 u_{21}^y \alpha_0^2$$

Расстоянием τ между граничными вершинами α_i, α_j графа G^{4*} назовем число ребер между вершинами α_i и α_j в характеристической последовательности

$$\tau(\alpha_i, \alpha_j) = \min \{ (j-i), n-|j-i| \},$$

где n - число различных вершин в характеристической последовательности.

Расстояние P между вершинами α_i и α_j определим

следующим образом:

$$P(\alpha_i, \alpha_j) = |\Delta x| + |\Delta y|,$$

где Δx и Δy равны соответственно алгебраической сумме числа положительных и отрицательных индексов координат ребер характеристической последовательности между вершинами α_i и α_j .

В образе графа G^{4*} в графе R , $P(\alpha_i, \alpha_j)$ соответствует модулю приращения координат образа вершины α_j относительно образа вершины α_i .

Для любой пары (α_i, α_j) граничных вершин α_i и α_j , очевидно, имеет место:

$$P(\alpha_i, \alpha_j) \leq \tau(\alpha_i, \alpha_j).$$

Граничные дуги графа G^{4*} соответствуют входам и выходам исходной сети. Определим $P(\alpha_i, \alpha_j)$ как число дуг между граничными вершинами α_i и α_j графа G^{4*} .

Границу между вершинами α_i и α_j назовем *правильной*, если

$$P(\alpha_i, \alpha_j) = \tau(\alpha_i, \alpha_j),$$

и *неправильной*, если это равенство не выполняется.

Цепь между двумя вершинами графа R будем называть *кратчайшей*, если нельзя найти другую цепь, соединяющую эти же две вершины, но состоящую из меньшего числа ребер.

Будем говорить, что граница G^{4*} имеет между вершинами α_i, α_j ($i < j$) *простую неправильность*, если

1. $P(\alpha_i, \alpha_j) < \tau(\alpha_i, \alpha_j)$;
2. $P(\alpha_i, \alpha_{j-1}) = \tau(\alpha_i, \alpha_{j-1})$,
3. $P(\alpha_{i+1}, \alpha_j) = \tau(\alpha_{i+1}, \alpha_j)$.

Нетрудно проверить, что отрезок характеристической последовательности, включающий простую неправильность, может быть двух типов:

1. $\dots \alpha_i^x u_{i+1}^2 u_{i+2}^3 u_{i+3}^4 \dots \alpha_{j-2}^3 u_{j-1}^2 u_j^x \dots$,
2. $\dots \alpha_i^x u_{i+1}^4 u_{i+2}^3 u_{i+3}^2 \dots \alpha_{j-2}^3 u_{j-1}^2 u_j^x \dots$.

В первом случае простую неправильность будем называть *простой выпуклостью*, а во втором случае - *простой вогнутостью*.

стью. На рис. 4а,б представлены образы в графе R отрезков характеристических последовательностей, включающих простые неправильности обоих типов.



а

б

Рис.4.

Элементарный цикл в графе R будем считать выпуклым, если для любого отрезка его, проходящего через произвольную пару вершин A_i и A_j и являющегося между этими вершинами кратчайшей цепью, можно найти кратчайшую цепь, проходящую через вершины A_i и A_j , частично (или целиком) лежащую внутри цикла, а частично с ним совпадающую. Очевидно, что элементарный цикл, не имеющий ни одной простой вогнутости, есть выпуклый цикл.

Граф G^{**} , образ которого в графе R есть программа Π некоторой логической сети, естественно назвать прообразом программы Π . Отвлечемся от функционального соответствия графа G^{**} и исходной логической сети. Тогда, очевидно, для того, чтобы граф G^{**} был прообразом некоторой программы Π в графе R , достаточно, чтобы его образ в графе R был ограничен выпуклым циклом и ни одна пара граней не имела образом один и тот же открытый квадрат графа R . На рис. 5 приведен

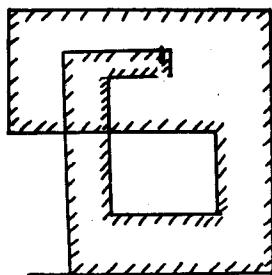


Рис.5.

пример образа графа G^{**} в графе R , не являющегося программой.

ЛЕММА. Если граница графа G^{**} не имеет ни одной простой вогнутости, то ее образ в графе R есть элементарный цикл.

Пусть цикл неэлементарный, тогда некоторая вершина A_i встречается в нем дважды. Сохранив прежний порядок "обхода" границы, выделим новый цикл, начинающийся и кончающийся в вершине A_i . Назовем его циклом A_i . Если он также не является элементарным, то выделим следующий цикл A_k и т.д. Так как граф G^{**} конечен, то на одном из этапов найдется элементарный цикл A_e .

Открытые квадраты, являющиеся образами граней графа G^{**} , инцидентных граничным ребрам, образы которых есть ребра цикла A_e , лежат все вне цикла.

Действительно, они не могут лежать по разные стороны цикла (по условиям отображения), но они не могут лежать и внутри цикла, так как иначе исходный граф разбивался бы на два подграфа, не имеющих ни одного общего ребра (рис. 6).

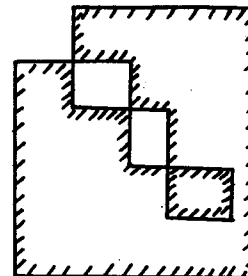


Рис.6.

Покажем теперь, что в цикле A_e всегда можно выделить простую вогнутость.

Действительно, в части границы графа G^{**} , которая соответствует циклу A_e , вершин степени 4 ровно на четыре больше, чем вершин степени 2 (иначе цикл не замкнулся бы). Но тогда в этом отрезке встретится пара вершин степени 4, разделен-

ных только вершинами степени 3, т.е. имеем простую вогнутость.

Таким образом, показано, что цикл элементарный. Из условия леммы вытекает, что он, кроме того, выпуклый.

Из алгоритма отображения графа G^{4*} в граф R видно, что если образ границы графа G^{4*} в графе R есть элементарный цикл, то ни одна пара граней графа G^{4*} не отображается в один и тот же открытый квадрат графа R . Из сказанного выше, а также из леммы следует

ТЕОРЕМА. Если граница графа G^{4*} не имеет ни одной простой вогнутости, то граф G^{4*} есть прообраз программы некоторой логической сети.

В дальнейшем граф G^{4*} , граница которого не имеет ни одной простой вогнутости, будем называть выпуклым.

3°. Покажем теперь, что любой граф G^{3*} можно привести к графу G^{4*} .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Две грани S_1 и S_2 назовем смежными через грань S' тогда, когда 1) S_1 и S_2 смежны; 2) S' и S_2 смежны; 3) грани S' поставлена в соответствие функция из набора $\{S_1, \dots, S_K\}$ такая, что обеспечивается непосредственное соединение ребер u_1 и u_2 , которые принадлежат краю грани S_1 , причем u_1 принадлежит краю грани S_1 , а u_2 принадлежит краю грани S_2 (рис. 7).

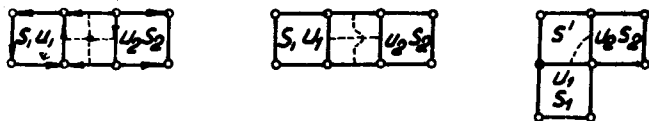


Рис. 7.

Аналогично можно определить грани, смежные через n граней.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Преобразование графа G^{3*} будем называть допустимым в двух случаях:

1. Если при преобразовании не появляются новые грани и сохраняется смежность исходных граней.
2. Если новым граням можно поставить в соответствие функ-

ции из набора $\{S_1, \dots, S_K\}$ такие, что грани, которые были смежными в исходном графе, остаются смежными в полученном графе непосредственно или через новые грани и не образуются новые пары смежных (непосредственно или через новые грани) граней исходного графа.

Разрежем граф G^{3*} на подграфы так, чтобы выполнялись следующие условия:

1. Ни один из подграфов не должен содержать вершин степени, отличной от 4 (кроме граничных).

2. Все подграфы должны быть выпуклыми. Возможность такого разрезания вытекает из того факта, что, по крайней мере, всегда можно разрезать граф на части, содержащие точно по одной грани.

Отметим ребра, вдоль которых проведены разрезы и, далее, будем считать тождественными оба ребра, отнесенные к разным подграфам.

Произвольно выберем подграф, назвав его первым, и отображим в граф R . Возьмем некоторый второй подграф, имеющий с первым по крайней мере одну последовательность тождественных ребер. Склеим одну из пар тождественных ребер (или несколько, если это возможно), т.е. разместим смежные грани в смежных квадратах графа R . Пусть одно из склеиваемых ребер (рис. 8а) параллельно оси x и имеет координату $y = y_0$. Посмотрим теперь, имеет ли хотя бы одно из ребер первого подграфа координату $y < y_0$ или одно из ребер второго подграфа координату $y > y_0$. Если это так, то сдвигаем второй подграф на N квадратов, где $N = (y_0 - y'_{\min}) + (y'_{\max} - y_0)$ (рис. 8б). Здесь и ниже $y'_{\min}$, $y'_{\max}$ означают соответственно минимальную (максимальную) координаты 1 (2) подграфа.

Отмечаем координаты x_1 и x_2 крайних склеенных вершин и координаты $x'_{\max}$ и $x'_{\min}$. Отрезаем часть второго подграфа с координатами $x < x_1$ и сдвигаем на число квадратов $x - x'_{\min}$. Точно так же отрезаем часть второго подграфа с координатами $x > x_2$ и сдвигаем на $x'_{\max} - x_2$ квадратов (рис. 8в).

После этого заполняем часть графа R элементами типа D до приведения подграфа к выпуклому (рис. 8г). Это всегда возможно, так как по крайней мере можно целиком заполнить соединительными элементами типа D все пустые квадраты графа R .

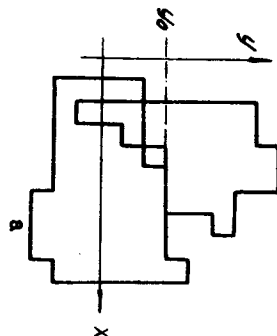
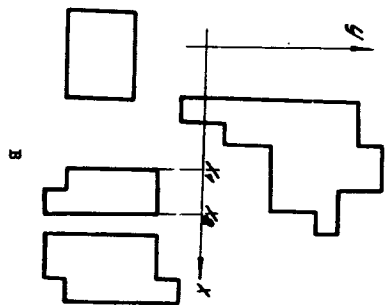
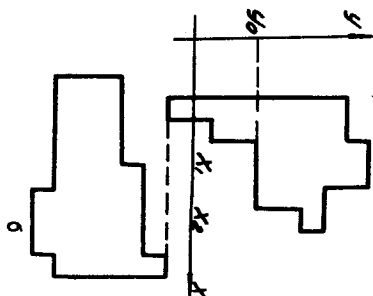
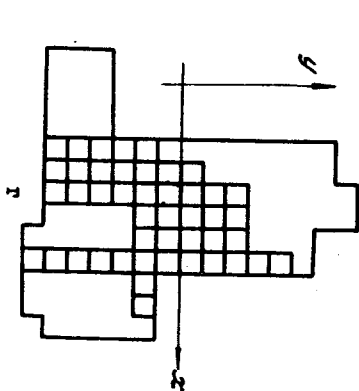


Рис. 8.



с координатами:

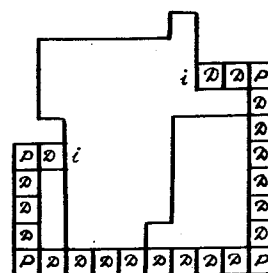
$$y_{\min}^{2'} \leq y \leq y_{\max}^{2'},$$

$$\min(x_{\min}^{1'}, x_{\min}^{2'}) \leq x \leq \max(x_{\max}^{1'}, x_{\max}^{2'}),$$

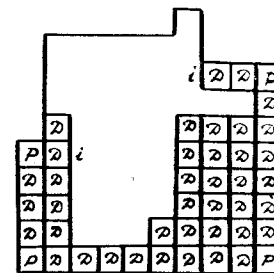
где $x^{2'}$ и $y^{2'}$ - координаты вершин второго подграфа после сдвигов.

Может оказаться, что некоторые из отмеченных ребер перестали быть граничными в новом подграфе. В этом случае отметки ребер исходных подграфов присвоим внешнему ребру полученного подграфа, принадлежащему грани, смежной (через некоторое количество граней) с гранью, которой принадлежало граничное ребро исходного подграфа.

Может оказаться, что полученный подграф имеет некоторое число пар тождественных ребер, т.е. не все тождественные ребра исходных подграфов склеены. Очевидно, для выпуклого подграфа всегда можно найти последовательность квадратов графа такую, что, приписав им значения соединительных функций из набора $\{S_1, \dots, S_k\}$, можно обеспечить смежность (через грани) граней с общим ребром (пример, рис. 9 а, б).



а



б

Рис. 9.

Новый подграф легко приводится к выпуклому заполнением пустых квадратов соединительными элементами типа D .

Примем теперь новый подграф за первый и начнем склеивать с ним следующий подграф.

Процесс конечен, ввиду конечности исходного графа G^{3*} . Таким образом, очевидно, что любой граф G^{3*} приводится к выпуклому графу G^{4*} .

4⁰. Возможен и другой подход к преобразованию графа G^{3*} в граф G^{4*} . Он заключается в том, что к вершинам, степень которых отлична от четырех (за исключением граничных вершин), применяются конкретные преобразования повышения или понижения степени.

Введем соединительный элемент τ - симметрический четырехполюсник с полюсами $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, отождествления которых могут производиться в соответствии с подстановками

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_4 & \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. В графе G^{3*} (рис. 10) произвольно выбо-

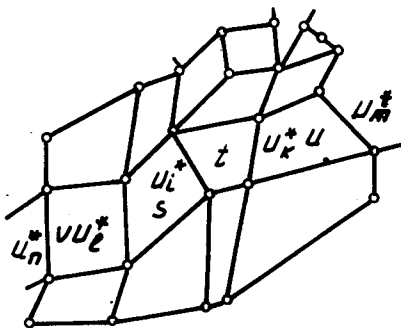


Рис. 10.

рем две смежные грани S и t с общей дугой u_i^* . Из краев этих граней выберем соответственно дуги u_k^* и u_e^* , не смежные с u_i^* . Выберем грани u и v , имеющие соответственно с гранями S и t общие дуги u_k^* и u_e^* . Выберем для граней u и v дуги u_m^* и u_n^* , которые являются частями их краёв и не смежны соответственно с u_k^* и u_e^* . Продолжим выбор новых граней и дуг с каждой стороной до тех пор, пока не встретим какую-нибудь дугу во второй раз или пока с обеих сторон не пересечем внешнюю дугу. Полученную совокупность граней $\dots, v, S, t, u, \dots$ назовем коридором.

СВОЙСТВО 1. Для каждой грани (за исключением бесконечной), входящей в коридор, всегда найдутся две смежные грани, входящие в тот же коридор. [Очевидно].

СВОЙСТВО 2. Коридор может самопересекаться, но не может

иметь раздвоений, т.е. если некоторая грань принадлежит коридору, то либо две, либо все четыре дуги, принадлежащие краю грани, пересекаются этим коридором.

[Из 4-угольности граней.]

СВОЙСТВО 3. В графе G^{3*} любой коридор замкнут по крайней мере через бесконечную грань.

[Из свойств 1, 2.]

СВОЙСТВО 4. Смежность графа G^{3*} не нарушается, если на всех дугах, пересекаемых некоторым коридором, поставим по вершине и соединим их последовательно между собой дугами, которым присвоим направления дуг одной из сторон коридора; граням того из двух полученных коридоров, который имеет одно направление дуги, поставим в соответствие элемент D , а граням второго коридора оставим значения граней прежнего коридора.

Граф G^{3*} можно привести к графу G^{4*} при помощи преобразований повышения и понижения степеней некоторых вершин.

а) Преобразование F , $[d(\alpha_i^*) < 4]$, позволяющее повысить степень внутренней вершины (см. рис. 11).

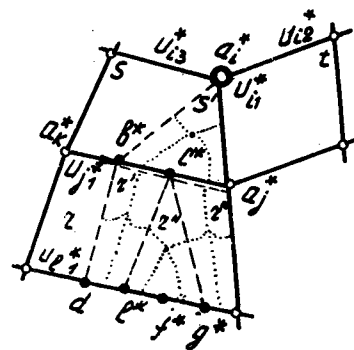


Рис. 11.

Пусть в графе G^{3*} нашлась вершина α_i^* , имеющая степень $d(\alpha_i^*) = 3$ ^х). Это означает, что данной вершине инцидентны три дуги, скажем, $u_{i_1}^*$, $u_{i_2}^*$, $u_{i_3}^*$. Из этих трех дуг произвольно выберем любую, например, $u_{i_1}^*$. Дуга $u_{i_1}^*$ является общей для двух граней, например, S и t , а также инцидентна вершине $\alpha_j^* \neq \alpha_i^*$. Выберем любую из этих граней, на-

^х) Для вершины $\alpha_i^* = 2$ преобразование F , делается аналогично.

пример S . Грань S имеет дугу U_j^* , инцидентную вершинам α_j^* и α_k^* . На этой дуге поставим точку b^* и соединим её с вершиной α_k^* . Точка b^* делит дугу U_j^* на две части: $(\alpha_k^* b^*)$ и $(b^* \alpha_j^*)$. Первой части $(\alpha_k^* b^*)$ присвоим название $U_{j_1}^*$ (с сохранением прежней ориентации), а на второй поставим точку c^* , которая опять разделит дугу $(b^* \alpha_j^*)$ на $(b^* c^*)$ и $(c^* \alpha_j^*)$.

После этих операций получим, что грань S разделится на две грани S и S' , причем обе грани являются четырехугольниками. Новые вершины b^* и c^* имеют степени $d(b^*)=3$ и $d(c^*)=2$, а степень $d(\alpha_k^*)=4$. Если вершины b^* и c^* оказались граничными, то процесс окончен. Пусть вершины b^* и c^* оказались внутренними, тогда получится шестигульная грань, смежная старой S . Чтобы устранить её, выберем грань τ такую, которая имеет общие дуги $U_{j_1}^*$, $(b^* c^*)$, $(c^* \alpha_k^*)$ с гранью S , и на дуге, противоположной бывшей дуге U_j^* (пусть это U_e^*), поставим четыре точки d^* , e^* , f^* , g^* . После соответствующих соединений получим дуги $(b^* d^*)$, $(c^* e^*)$, $(c^* g^*)$, $U_{e_1}^* = (\dots d^*)(d^* c^*)$, $(e^* f^*)$, $(f^* g^*)$, $(g^* \dots)$ и грани τ , τ' , τ'' , τ''' . При этом все грани четырехугольны, и вновь полученные вершины имеют степени $d(e^*)=4$, $d(b^*)=4$, $d(d^*)=d(e^*)=3$, $d(f^*)=2$, $d(g^*)=3$. После этого проверяем, не содержит ли край грани τ граничную дугу, если да, то процесс окончен, если нет, то продолжается дальше аналогично. Легко заметить, что грани S , τ , ... составляют коридор, проходящий через дугу U_{i_0} . Если коридор не замкнут, то процесс конечен. Следовательно, степень любой вершины может быть повышена на единицу, если хотя бы через одну из инцидентных ей дуг проходит незамкнутый коридор.

Заметим, что преобразование F_1 является допустимым, так как граней, смежных с исходными (за исключением бесконечной грани), не возникает и полученные новые грани не нарушают смежности старых граней. [Очевидно].

б) Преобразование $F_2 [d(\alpha_i) = 5]$, позволяющее понизить степень внутренней вершины (см. рис. 12).

Пусть в графе G^{3*} нашла вершина α_i^* , имеющая степень 5. Это означает, что данной вершине инцидентны пять дуг: $U_{i_1}^*$, $U_{i_2}^*$, $U_{i_3}^*$, $U_{i_4}^*$, $U_{i_5}^*$. Выберем произвольную первую $U_{i_1}^*$ и поставим на ней точку b^* . Точку b^* соединим с двумя вершинами α и ℓ , которые смежны с вершиной α_i^* и входят в края граней S и t , имеющих общую дугу $U_{i_1}^*$.

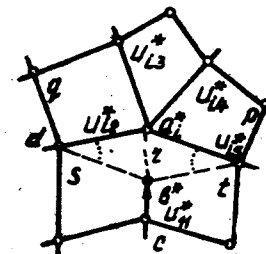


Рис. 12.

Точка b^* разделила прежнюю дугу $U_{i_1}^*$ на две части: $(\alpha_i^* b^*)$ и $(b^* \ell)$. Первую устраним (тем самым понизим степень вершины α_i^*), а второй присвоим наименование исходной дуги, т.е. $U_{i_1}^*$, с сохранением прежней ориентации. Соединив точки b^* с α и b^* с ℓ , получим дуги $(b^* \alpha)$, $(b^* \ell)$ и, следовательно, новую грань τ , которая так же, как и оставшиеся части старых граней, является четырехугольником. Оставшимся частям старых граней присвоим названия соответствующих им старых граней. Преобразование F_2 порождает новую вершину, которая имеет степень 3 и увеличивает степени смежных с ней вершин на единицу.

Новой грани τ поставим в соответствие элемент $\tau \in F_2$. F_2 является допустимым преобразованием потому, что грани S и t остаются смежными между собой (так как у них сохранилась общая дуга) и остаются смежными через грань τ со своими прежними соседями q и p . При этом новых смежных граней не образуется.

в) Преобразование $F_3 [d(\alpha_i^*) > 4]$, позволяющее понизить степень граничной вершины.

Пусть в графе G^{3*} (рис. 13) среди множества граничных вершин нашла вершина α_i^* , имеющая степень 5. В этом случае имеем пять дуг, инцидентных вершине α_i^* : $U_{i_1}^*$, $U_{i_2}^*$, ..., $U_{i_5}^*$, причем две из пяти граничные, в данном случае это $U_{i_1}^*$ и $U_{i_5}^*$. Выберем произвольно одну из них, например $U_{i_1}^*$. Поставим на ней точку b^* , которая разделит дугу $U_{i_1}^*$ на две части: $(\alpha_i^* b^*)$ и $(b^* \alpha_k^*)$. Первой присвоим старое обозначение и сохраним ориентацию, второй части присвоим новое обозначение и оставим ее неориентированной. Выбранная дуга $U_{i_1}^*$ при-

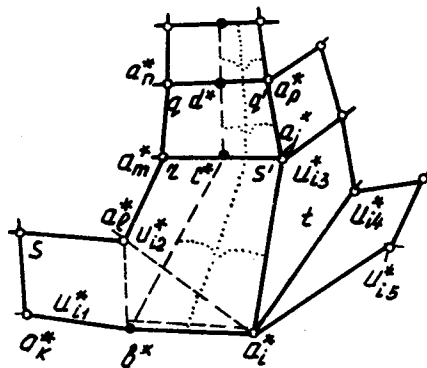


Рис.13.

надлежала краю грани S . Выберем грань, смежную с S . Тогда для граней S и τ дуга U_{i2}^* будет общей. Соединим точку b^* с граничной вершиной дуги U_{i2}^* , а именно с a_e^* . Получим новую дугу $(b^*a_e^*)$ и новую грань, которой присвоим старое обозначение. Краем грани S будут служить новые дуги U_{i1}^* , $(b^*a_e^*)$ и две старые дуги. Устраним дугу U_{i2}^* . При этом получим, что отношение смежности граней не изменилось, но грань τ стала пятиугольником. Превратим её в два четырехугольника. Для этого поставим точку c^* на дуге, которая была противоположной дуге U_{i2}^* в старой грани τ , и соединим точки b^* и c^* . При этом дуга $(a_m^*a_j^*)$ разделится на две части: $(a_m^*c^*)$ и $(c^*a_j^*)$. Первой части присвоим старое обозначение с сохранением ориентации. Пятиугольная грань τ разделится на две четырехугольные грани. Одной из них, смежной с гранью S , присвоим старое обозначение τ , а оставшейся — обозначение S' . Если дуга $(a_m^*a_j^*)$ — граничная, то на этом процесс заканчивается, если же дуга $(a_m^*a_j^*)$ — внутренняя, то легко видеть, что грань, смежная со старой гранью τ , станет пятиугольной. Тогда на дуге, противоположной $(a_m^*a_j^*)$, выберем точку d^* и соединим с c^* . Получим дугу (c^*d^*) , которая разобьет пятиугольную грань τ на две четырехугольные τ' и τ'' . Наименование τ' присваивается той грани, которая смежна с гранью τ , и т.д.

Для вновь полученных граней S, τ, τ' отношение смежности сохранится, если вновь полученным граням S', τ', τ'' поставит

в соответствие соединительные функции типа D . Таким образом, можно считать, что новый граф получен из старого путем допустимого преобразования. Легко заметить, что F_3 можно применить к вершине с любой степенью $d > 5$.

г) Преобразование $F[\chi(\alpha_i^*) > 4]$, позволяющее понизить степень внутренней вершины (см. рис. 14).

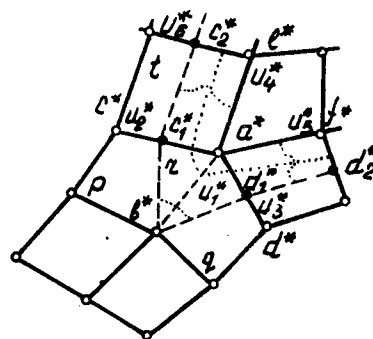


Рис.14.

Пусть в графе G^{3*} имеется вершина a^* со степенью 5. Из смежных с ней вершин b^*, c^*, d^*, e^*, f^* произвольно выберем одну, например b^* . Из инцидентных вершине a^* дуг $U_1^*, \dots, U_5^*$ выберем две такие (U_2^* и U_3^*), которые являются частью краев смежных граней P и Q с общей дугой U_1^* . На дугах U_2^* и U_3^* поставим точки c_1^* и d_1^* , соответственно.

Для грани t , имеющей с P общую дугу U_2^* , найдем дугу U_6^* , являющуюся частью края грани t , и поставим на ней точку c_2^* . Поставим точки на всех дугах, пересекаемых начинающейся с грани t частью того коридора, который проходит по направлению от грани P к грани t . Аналогично поступим с частью коридора, проходящего от грани Q к S до пересечения с граничной дугой. Соединим вершину b^* с точками c_1^* и d_1^* дугами $(b^*c_1^*)$ и $(b^*d_1^*)$, присвоив им ориентацию дуги U_1^* . Соединим точку c_1^* с точкой c_2^* дугой, которой присвоим ориентацию дуги, инцидентной вершине a^* и не смежной с дугой $(c_1^*c_2^*)$. Соединим точку c_2^* с последующей и т.д. То же самое сделаем для точек $d_1^*, d_2^*, \dots$. Образовавшимся парам дуг $(a^*c_1^*), (c_1^*c^*), (a^*d_1^*), (d_1^*d^*)$ присвоим

ориентацию старых дуг, соответственно $(\alpha^* C^*)$, $(\alpha^* d^*)$ Дугу $\mathcal{U}_i^*$ устраним. Полученной новой четырехугольной грани τ поставим в соответствие элемент $\mathcal{T}$. Новым граням с одинаковой ориентацией несмежных ребер поставим в соответствие элементы $\mathcal{D}$, а оставшимся граням присвоим значения соответствовавших им старых граней.

Легко заметить, что смежность при преобразовании F_4 не нарушается.

В результате однократного применения преобразования F_4 понижается на единицу степень выбранной вершины, повышается на I степень одной из смежных вершин и появляется некоторое число вершин степени 4. Преобразование F_4 проводилось для вершины степени 5, для вершин $d(\alpha_j) > 5$ оно проводится аналогично. Последовательно применяя преобразования F_4 и соответствующим образом выбирая смежные вершины, можно понизить степень выбранной вершины за счет вершины степени 3 или граничной вершины.

Достаточность набора преобразований F_1, F_2, F_3, F_4 для приведения произвольного графа G^{3*} к графу G^{4*} в данной работе не рассматривается.

Полученный в результате преобразований $F_1, \dots, F_4$ граф G^{4*} не обязательно является выпуклым. Для приведения его к выпуклому можно применять основанный на приводимой выше теореме алгоритм.

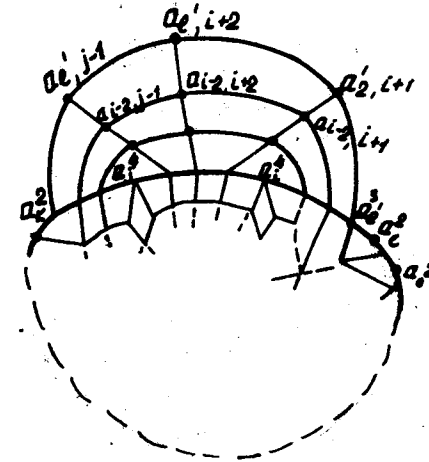
Пусть дан некоторый граф G^{4*} и построена его характеристическая последовательность, начинающаяся с вершины α_0^e . Найдем ближайшую к α_0^e пару вершин степени 4, разделенных, быть может, только вершинами степени 3, т.е. простую вогнутость. Если такой пары нет, то согласно теореме граф G^{4*} есть программа, реализуемая в среде.

Пусть найдется пара вершин α_{i-1}^4 и α_{j+1}^4 ($j > i$), между которыми имеется простая вогнутость. Тогда выберем ближайшую к α_{j+1}^4 вершину α_k^e , у которой $k > j$, $\beta \neq 3$.

Если $\beta = 2$, то простую вогнутость $(\alpha_{i-1}^4, \alpha_{j+1}^4)$ можно устранить. Выберем ближайшую к α_i^4 вершину α_e^e , удовлетворяющую условию $e < i$. Сравним $\tau(\alpha_j^4 \alpha_k^e)$ и $\tau(\alpha_i^4 \alpha_e^e)$. Пусть $\tau(\alpha_j^4 \alpha_k^e) \leq \tau(\alpha_i^4 \alpha_e^e)$. Вычислим $P(\alpha_k^e \alpha_e^e)$ и $P(\alpha_k^e \alpha_{e'}^e)$, где вершина $\alpha_{e'}^e$ такова, что

$$\tau(\alpha_j^4 \alpha_k^e) = \tau(\alpha_i^4 \alpha_{e'}^e); \quad e' < i, \quad e' > e.$$

Предположим, что $P(\alpha_k^e \alpha_e^e) \geq P(\alpha_k^e \alpha_{e'}^e)$. В этом случае достроим граф G^{4*} (пример, рис. 15), приписывая новым граням значения функций из набора $\{S_1, \dots, S_k\}$ и новым дугам направления информационного обмена так, чтобы смежность граней исходного графа G^{4*} (через грани) с бесконечной гранью не нарушилась. Это всегда возможно, так как $P(\alpha_k^e \alpha_e^e) \geq P(\alpha_k^e \alpha_{e'}^e)$. Если же $P(\alpha_k^e \alpha_e^e) < P(\alpha_k^e \alpha_{e'}^e)$, то необходимо расширить простую вогнутость $\alpha_{j+1}^4, \alpha_{i-1}^4$. Для этого достаточно в коридоре, проходящем, например, через ребро $(\alpha_j^4 \alpha_{j+1}^4)$, построить $P(\alpha_k^e \alpha_e^e) - P(\alpha_k^e \alpha_{e'}^e)$ коридоров из соединительных элементов типа $\mathcal{D}$.



тельность графа и начинать поиск очередной простой вогнутости с вершины α_0^2 .

Если при достроении графа степень вершины α_0^2 была повышена на единицу, то за исходную вершину характеристической последовательности примем ближайшую к α_0^2 вершину α_m^2 .

В силу конечности числа простых вогнутостей, данный алгоритм позволяет ликвидировать все простые вогнутости графа G^{3*} , т.е. привести его к программе.

В ы в о д ы

1. Произвольной логической сети можно поставить в соответствие плоский топологический граф G^{3*} , все грани которого есть четырехугольники.

2. Доказана возможность построения по произвольному связанному графу G^{3*} программы настройки вычислительной среды.

3. Приведены преобразования графа G^{3*} , позволяющие получить программу настройки вычислительной среды.

Л и т е р а т у р а

1. Э.В. Евреинов. Теоретические основы построения универсальных вычислительных сред. - Вычислительные системы, Новосибирск, 1965 г., вып. 16, стр. 3-72.
2. О.Б. Лупанов. О синтезе некоторых классов управляющих систем. - Проблемы кибернетики, 1963 г., вып. 10, стр. 63-97.
3. К. Берх. Теория графов и ее применения. ИЛ, 1962.