

РАСЧЕТ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ИМПУЛЬСНОГО
ТРАНСФОРМАТОРА

В.К.Королев

В настоящей работе на примере одной из радиотехнических схем - схемы импульсного трансформатора (ИТ) - излагается методика расчета оптимальных параметров устройств, описываемых системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. За критерий оптимальности принимается функционал от решения, представляющий квадрат уклонения "выходной" функции от заданной в метрике пространства L_2 .

1. Эквивалентная схема ИТ и описывающие её
дифференциальные уравнения

На рис. 1 приведена эквивалентная схема ИТ, учитывающая индуктивности рассеяния, сопротивления и паразитные емкости обмоток. R_1

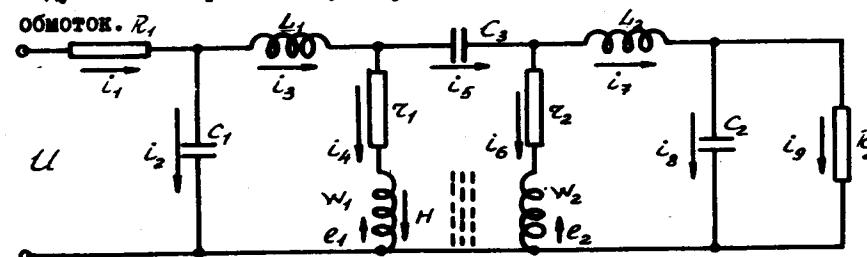


Рис. 1.

Уравнения Кирхгофа и законы электромагнитной индукции приводят к следующей системе уравнений.

Для контуров:

$$\left. \begin{aligned} R_1 i_1 + U_2 &= U, & c_1 \frac{dU_2}{dt} &= i_2, \\ -U_2 + L_1 \frac{di_2}{dt} + r_1 i_4 + e_1 &= 0, & e_1 &= \mu s w_1 \frac{dH}{dt}, \\ -e_1 - r_1 i_4 + U_5 + r_2 i_6 + e_2 &= 0, & e_2 &= \mu s w_2 \frac{dH}{dt}, \\ -e_2 - r_2 i_6 + L_2 \frac{di_3}{dt} + U_8 &= 0, & c_2 \frac{dU_8}{dt} &= i_8, \\ -U_8 + R_2 i_9 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

Для узлов:

$$i_1 = i_2 + i_3, \quad i_3 = i_4 + i_5, \quad i_5 = i_6 + i_7, \quad i_7 = i_8 + i_9. \quad (2)$$

Закон полного тока:

$$\pi d H = w_1 i_4 + w_2 i_6. \quad (3)$$

Здесь S — площадь поперечного сечения сердечника;

d — его средний диаметр;

w_1 и w_2 — числа витков первичной и вторичной обмоток;

μ — магнитная проницаемость сердечника; $\mu = \mu(H)$ аппроксимируется функцией:

$$\mu = \mu_0 e^{-\alpha H} \quad (4)$$

Остальные обозначения приведены на рис. 1.

Индуктивности рассеяния принимаются равными 10% собственных индуктивностей обмоток:

$$L_i = 0,1 \mu s w_i^2 / \pi d.$$

Паразитные емкости считаются постоянными в диапазоне изменения основных параметров схемы (см. п. 2). В качестве входного сигнала берется скачок напряжения в момент $t=0$ с

амплитудой U :

$$U(t) = U \cdot f(t), \quad U(0) = U. \quad (5)$$

Работа схемы рассматривается на конечном интервале времени $0 \leq t \leq T$. Начальные условия нулевые.

2. Постановка задачи оптимизации ИТ

Схему ИТ мы будем оптимизировать по следующим параметрам: характеристикам материала сердечника μ_0 и α ; геометрическим размерам сердечника S и d ; числу витков в первичной и вторичной обмотках w_1 и w_2 .

Основное требование, предъявляемое к работе ИТ, — неискаженная передача сигнала [1]. Пусть нам задана некоторая функция $U^* = U^*(t)$, и мы хотим выбрать параметры $\mu_0, \dots, w_2$ так, чтобы выходная функция $U_8(t)$ минимально отличалась от $U^*(t)$ (см. рис. 2).

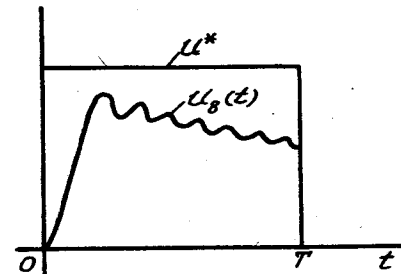


Рис. 2.

При этом на параметры схемы наложены двусторонние ограничения:

$$\left. \begin{aligned} \mu_0' &\leq \mu_0 \leq \mu_0'', \\ \dots &\dots \dots \\ w_2' &\leq w_2 \leq w_2'' \end{aligned} \right\}. \quad (6)$$

За меру отклонения U_8 от U^* примем квадрат расстояния в пространстве L_2 :

$$\int_0^T [U_8(t, \mu_0, \dots, w_2) - U^*(t)]^2 dt = F(\mu_0, \dots, w_2). \quad (7)$$

Таким образом, мы приходим к задаче нелинейного программирования: найти минимум функции (7) при наличии ограничений на переменные (6).

Характерной особенностью задачи (6), (7) является, во-первых, простота ограничений и, во-вторых, сложность функции цели, которую мы можем определять только численно интегрированием системы дифференциальных уравнений для каждой точки $(\mu_0, \dots, w_2)$ пространства параметров.

Ввиду этой последней трудности, мы будем отыскивать лишь локальный минимум функции F , расположенный в "области влияния" исходной точки $(\mu_0^0, \dots, w_2^0)$.

3. Исходная система уравнений, вычисление градиента функции цели и система уравнений в вариациях

В дальнейшем используется безразмерная форма переменных. Введем следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= R_1, & x_1 &= \mu_0, & y_1 &= u_2, & z_1 &= i_6 \\ \alpha_2 &= \alpha_1, & x_2 &= v, & y_2 &= i_3, & z_2 &= i_4 \\ \alpha_3 &= \alpha_2, & x_3 &= s, & y_3 &= H, & z_3 &= i_6 \\ \alpha_4 &= c_1, & x_4 &= d, & y_4 &= i_7, & z_4 &= e^{-\gamma H} \\ \alpha_5 &= c_3, & x_5 &= w_1, & y_5 &= u_5, & & \\ \alpha_6 &= c_2, & x_6 &= w_2, & y_6 &= u_8, & & \\ \alpha_7 &= R_2, & & & & & & \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Тогда ограничения (6) принимают вид:

$$x_j' \leq x_j \leq x_j'', \quad j=1, \dots, 6. \quad (9)$$

Систему уравнений (I) - (3) приведём к виду:

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \frac{x_5}{x_6 - x_5} (y_4 - y_2) + \frac{y_1 x_4}{x_6 - x_5} y_3, \\ z_2 &= y_2 - y_4 - z_1, \\ z_3 &= y_4 + z_1, \\ z_4 &= e^{-x_2 y_3}, \\ \alpha_4 \frac{dy_1}{dt} &= \frac{u - y_1}{\alpha_1} - y_2, \\ \frac{10 \pi x_1 x_3 x_5^2}{x_4} \frac{dy_2}{dt} &= y_1 - \alpha_2 z_2 - \frac{x_5}{x_6 - x_5} (-y_5 + \alpha_2 z_2 - \alpha_3 z_1), \\ x_1 x_3 (x_6 - x_5) z_4 \frac{dy_3}{dt} &= -y_5 + \alpha_2 z_2 - \alpha_3 z_1, \\ \frac{10 \pi x_1 x_3 x_6^2}{x_4} \frac{dy_4}{dt} &= \frac{x_6}{x_6 - x_5} (-y_5 + \alpha_2 z_2 - \alpha_3 z_1) - y_6 + \alpha_3 z_1, \\ \alpha_5 \frac{dy_5}{dt} &= z_3, \\ \alpha_6 \frac{dy_6}{dt} &= y_4 - \frac{y_6}{\alpha_7}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Начальные условия: $y_1(0) = \dots = y_6(0) = 0$. Для облегчения дальнейших выкладок "конечные" переменные $z_1, \dots, z_4$ не исключаем из системы дифференциальных уравнений.

Введем в рассмотрение еще одну функцию y_0 , определяемую дифференциальным уравнением

$$\frac{dy_0}{dt} = (y_6 - u^*)^2 \quad (11)$$

с начальным условием $y_0(t=0) = 0$.

Тогда, как легко видеть, значение функции цели для значений вектора параметров $x = (x_1, \dots, x_6)$ получается в результате интегрирования системы (10), (11), а именно:

$$F(x) = y_0(t=T). \quad (12)$$

Правые части системы уравнений (10) - (11) - аналитические функции своих аргументов, причем ограничения на параметры x_j таковы, что $x_4 \neq 0$ и $x_5 \neq x_6$ и при ограниченном y_3 функция z_4 не обращается в нуль.

Система (10) - (11) в общем виде выглядит так:

$$\left. \begin{aligned} z_\ell &= h_\ell(z, y, x), \quad \ell=1, \dots, 4, \\ \varphi_k(z, x) \frac{dy_k}{dt} &= g_k(z, y, x), \quad y_k(0) = 0, \quad k=0, 1, \dots, 6. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Для применения градиентного метода оптимизации (см. п.4) нужно уметь вычислять компоненты вектора $\text{grad } F$:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial y_0}{\partial x_j}(t=T). \quad (14)$$

Пусть $y(t, x) = (y_0(t, x), y_1(t, x), \dots, y_6(t, x))$ - решение нашей системы. Подставляя его в систему уравнений (10) - (11), получаем систему тождеств. Дифференцируя тождество (11) по x_j , имеем:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial y_0}{\partial x_j} = 2(y_6 - u^*) \frac{\partial y_6}{\partial x_j}. \quad (15)$$

В свою очередь, величина $\frac{\partial y_4}{\partial x_j}$ связана с остальными производными функций z_ℓ и y_k по x_j . Таким образом, наряду с интегрированием исходной системы (13) мы приходим к необходимости интегрировать еще и систему уравнений в вариациях [2], получаемую дифференцированием (13) по x_j :

$$\left. \begin{aligned} z_e^j &= \sum_k \frac{\partial h_e}{\partial z_k} z_k^j + \sum_s \frac{\partial h_e}{\partial y_s} y_s^j + \frac{\partial h_e}{\partial x_j}, \\ \varphi_k \frac{dy_k^j}{dt} &= \sum_k \left(\frac{\partial q_k}{\partial z_k} - \frac{\partial q_k}{\partial z_k} \frac{dy_k}{dt} \right) z_k^j + \sum_s \frac{\partial q_k}{\partial y_s} y_s^j + \frac{\partial q_k}{\partial x_j}, \\ y_k^j(0) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

где

$$z_e^j = \frac{\partial z_e}{\partial x_j}, \quad y_k^j = \frac{\partial y_k}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial q_k}{\partial x_j} = \frac{\partial q_k}{\partial x_j} - \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{dy_k}{dt}. \quad (17)$$

Системы (13) и (16) интегрируются совместно, причем система в вариациях (16) без "возмущающих" членов $\frac{\partial h_e}{\partial x_j}$ и $\frac{\partial q_k}{\partial x_j}$ имеет один и тот же вид для различных j и программируется один раз. Вычисление "возмущающих" членов для каждого j программируется отдельно.

Уравнения в вариациях для системы (10), (11) имеют вид:

$$\begin{aligned} z_1^j &= \frac{x_6}{x_6 - x_5} (y_4^j - y_2^j) + \frac{\pi x_4}{x_6 - x_5} y_3^j, \quad \frac{\partial h_1}{\partial x_4} = \frac{\pi y_3}{x_6 - x_5}; \\ \frac{\partial h_1}{\partial x_5} &= \frac{x_6(y_4 - y_2) + \pi x_4 y_3}{(x_6 - x_5)^2 + (x_6 - x_5)^2}, \\ \frac{\partial h_1}{\partial x_6} &= \frac{x_5(y_4 - y_2) - \pi x_4 y_3}{(x_6 - x_5)^2 - (x_6 - x_5)^2}, \\ z_2^j &= y_2^j - y_4^j - z_1^j, \\ z_3^j &= y_4^j + z_1^j, \\ z_4^j &= -x_2 z_4 y_3^j, \quad \frac{\partial h_4}{\partial x_2} = -y_3 z_4, \\ \frac{dy_6^j}{dt} &= 2(y_6 - u^*) y_6^j, \end{aligned}$$

$$a_4 \frac{dy_1^j}{dt} = -\frac{y_1^j}{a_1} - y_2^j,$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{10\pi x_1 x_3 x_6^2}{x_4} \frac{dy_1^j}{dt} &= y_1^j - a_2 z_2^j - \frac{x_6}{x_6 - x_5} (y_5^j + a_2 z_2^j - a_3 z_1^j), \quad \frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial x_1} = -\frac{10\pi x_1 x_6^2}{x_4} \frac{dy_1}{dt}, \\ \frac{\partial \tilde{q}_2}{\partial x_3} &= \frac{10\pi x_1 x_6^2}{x_4} \frac{dy_2}{dt}, \\ \frac{\partial \tilde{q}_2}{\partial x_4} &= \frac{10\pi x_1 x_3 x_5}{x_4^2} \frac{dy_2}{dt}, \\ \frac{\partial \tilde{q}_2}{\partial x_5} &= -\frac{20\pi x_1 x_3 x_5}{x_4} \frac{dy_2}{dt}, \\ \frac{\partial \tilde{q}_2}{\partial x_6} &= \frac{x_5}{x_6(x_6 - x_5)} (y_5^j + a_2 z_2^j - a_3 z_1^j), \\ \frac{\partial \tilde{q}_2}{\partial x_1} &= -x_5(x_6 - x_5) z_4 \frac{dy_2}{dt}, \\ \frac{\partial \tilde{q}_3}{\partial x_3} &= -x_7(x_6 - x_5) z_4 \frac{dy_2}{dt}, \\ \frac{\partial \tilde{q}_3}{\partial x_5} &= x_1 x_3 z_4 \frac{dy_2}{dt}, \\ \frac{\partial \tilde{q}_3}{\partial x_6} &= -x_1 x_3 z_4 \frac{dy_2}{dt}, \\ \frac{10\pi x_1 x_3 x_6^2}{x_4} \frac{dy_1^j}{dt} &= y_1^j + a_3 z_1^j + \frac{x_6}{x_6 - x_5} (y_5^j + a_2 z_2^j - a_3 z_1^j), \quad \frac{\partial \tilde{q}_4}{\partial x_1} = -\frac{10\pi x_1 x_6^2}{x_4} \frac{dy_4}{dt}, \\ \frac{\partial \tilde{q}_4}{\partial x_3} &= -\frac{10\pi x_1 x_6^2}{x_4} \frac{dy_4}{dt}, \\ \frac{\partial \tilde{q}_4}{\partial x_4} &= \frac{10\pi x_1 x_3 x_6^2}{x_4} \frac{dy_4}{dt}, \\ \frac{\partial \tilde{q}_4}{\partial x_5} &= \frac{x_6}{x_6(x_6 - x_5)} (y_5^j + a_2 z_2^j - a_3 z_1^j), \\ \frac{\partial \tilde{q}_4}{\partial x_6} &= -\frac{20\pi x_1 x_3 x_6}{x_4} \frac{dy_4}{dt} - \frac{x_6}{x_6(x_6 - x_5)} (y_5^j + a_2 z_2^j - a_3 z_1^j), \\ a_5 \frac{dy_5^j}{dt} &= z_3^j, \\ a_6 \frac{dy_6^j}{dt} &= y_4^j - \frac{y_6^j}{a_7}, \quad y_0^j(0) = y_1^j(0) = \dots = y_6^j(0) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

4. Метод решения оптимальной задачи

Для нахождения локального минимума функции $F(x)$ в области (9) применяется одна из модификаций градиентного метода ([3], гл. 13).

Процесс начинается с заданной допустимой точки x^0 . Допустим, что мы уже сделали K итераций, т.е. определили точки $x^1, x^2, \dots, x^K$. В точке x^K вычисляем вектор $\text{grad } F^K$ и делаем шаг в направлении, противоположном этому вектору:

$$x_j^{K+1} = x_j^K - h \frac{\partial F^K}{\partial x_j}. \quad (19)$$

При этом проверяется условие:

$$F^{K+1} < F^K. \quad (20)$$

Если это условие не выполнено, шаг h делится пополам и вычисление x_j^{K+1} и F^{K+1} повторяется; если выполнено (20), x^{K+1} становится новой итерационной точкой. Одновременно проверяется условие:

$$|\text{grad } F^K| \leq \epsilon_1, \quad (21)$$

выполнение которого означает достижение внутреннего минимума.

Если нарушаются ограничения (9), то проверяется условие коллинеарности векторов $\text{grad } F^K$ и нормали к ограничению S :

$$1 - \frac{|\langle \text{grad } F^K, S \rangle|}{|\text{grad } F^K| |S|} \leq \epsilon_2. \quad (22)$$

В случае выполнения этого условия достигается граничный минимум, а при невыполнении производятся следующие действия:

1) фиксируется переменная x_{j^*} , по которой нарушено ограничение:

$$x_{j^*}^{K+1} = \begin{cases} x_{j^*}' & \text{если нарушено левое ограничение,} \\ x_{j^*}'' & \text{если нарушено правое ограничение;} \end{cases} \quad (23)$$

2) в программе убирается вычисление $\frac{\partial F}{\partial x_{j^*}}$;

3) дальнейшее движение к минимуму происходит в пространстве меньшей размерности.

5. Числовой пример

Программа для численного счета на ЭЦВМ "М-20" составлена В.А. Коваленко.

Ниж приводятся результаты счета для одного из вариантов.

Исходные данные в безразмерной форме:

$$\left. \begin{aligned} u &= 1; \\ \alpha_1 &= 0,204; \\ \alpha_2 &= 0,157 \cdot 10^{-3}; \\ \alpha_3 &= 0,785 \cdot 10^{-4}; \\ \alpha_4 &= 1; \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \alpha_5 &= 1,5; \\ \alpha_6 &= 6,1; \\ \alpha_7 &= 0,4; \\ \epsilon_1 &= 0,1 \cdot 10^{-2}; \\ \epsilon_2 &= 0,1. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Ограничения на оптимизируемые параметры:

$$\left. \begin{aligned} 0,56 \leq x_1 \leq 1,6; \\ 0,62 \cdot 10^{-1} \leq x_2 \leq 0,2; \\ 0,8 \cdot 10^{-2} \leq x_3 \leq 0,26 \cdot 10^{-1}; \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} 0,667 \leq x_4 \leq 1,3; \\ 25 \leq x_5 \leq 35; \\ 12 \leq x_6 \leq 18. \end{aligned} \right\}$$

Исходная допустимая точка:

$$\left. \begin{aligned} x_1^0 &= 1; \\ x_2^0 &= 0,123; \\ x_3^0 &= 0,166 \cdot 10^{-1}; \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} x_4^0 &= 1; \\ x_5^0 &= 30; \\ x_6^0 &= 15. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Значения физических параметров, соответствующих безразмерным (24), (25):

$$\left. \begin{aligned} u &= 10 \text{ в}; \\ R_1 &= 260 \text{ ом}; \\ \tau_1 &= 0,2 \text{ омс}; \\ \tau_2 &= 0,1 \text{ омс}; \\ C_1 &= 10^{-11} \text{ ф}; \\ C_3 &= 1,5 \cdot 10^{-11} \text{ ф}; \\ C_2 &= 6,1 \cdot 10^{-11} \text{ ф}; \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} R_2 &= 510 \text{ ом}; \\ \mu_0 &= 0,18 \cdot 10^{-2} \frac{\text{ом} \cdot \text{сек}}{\text{м}}; \\ \nu &= 0,19 \cdot 10^{-1} \frac{\text{ом} \cdot \text{м}}{\text{в}}; \\ S &= 10^{-5} \text{ м}^2; \\ \alpha &= 9 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \\ \omega_1 &= 30; \\ \omega_2 &= 15. \end{aligned} \right\}$$

Интервал времени $T = 10^{-6}$ сек.

Значения функции цели и градиента в исходной точке:

$$F^0 = 3,046; \quad |\text{grad } F^0| = 19,6.$$

Оптимальные значения параметров (по x_1 - внутренний минимум; по x_3, x_5 - левая граница, по x_2, x_4, x_6 - правая):

$$\left. \begin{aligned} \hat{x}_1 &= 1,098, \\ \hat{x}_3 &= 0,8 \cdot 10^{-2}, \\ \hat{x}_5 &= 25, \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \hat{x}_2 &= 0,2, \\ \hat{x}_4 &= 1,3, \\ \hat{x}_6 &= 18. \end{aligned} \right\}$$

В оптимальной точке:

$$\hat{E} = 1,47; \quad |\text{grad} \hat{E}| = 0,6 \cdot 10^{-4}.$$

На рис. 3 приведены выходные функции u_T в исходной (I) и оптимальной (II) точках.

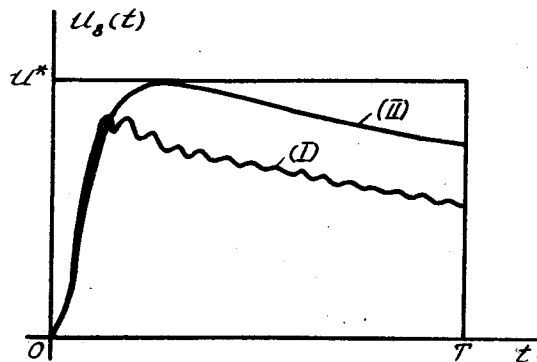


Рис. 3.

Л и т е р а т у р а

1. Я.С. Ицхоки. Импульсные устройства. "Сов. радио", 1959.
2. Л.С. Понтрягин. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., "Физматгиз", 1961.
3. Б.М. Каган и Т.М. Тер-Микаэлян. Решение инженерных задач на ЦВМ. М.-Л., "Энергия", 1964.

Поступила в редакцию
10/VII-1966г.