ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Сборник трудов
1967 г. Института математики СО АН СССР Выпуск 27

ОПТИМИЗАЦИЯ ПОРОГОВОГО ЭЛЕМЕНТА В СТАТИЧЕСКОМ РЕЖИМЕ

В.К. Королёв, Г.Н. Буслаева

В статье рассматривается статический режим работы порогового элемента. Часть его параметров задана в некоторых пределах, другая часть неизвестна. Строится область работоспособности в пространстве неизвестных параметров. Ставится задача минимизации этой области и выбора таких значений неизвестных параметров, чтобы "рабочая точка" была наиболее удалена от границ. Отыскивается локальный минимум функции, определяющей меру области работоспособности. Задача решается численно на ЭЦВМ "М-20" градиентным методом.

I. Физическая постановка задачи

Описание порогового элемента приведено в [I]. На рис. I и 2 изображены две эквивалентные схемы, соответствующие закрытому и открытому состояниям элемента в статическом режиме.

Число входов n и величина порога γ фиксированы. Значения сопротивлений R и R_1 неизвестны. Остальные параметры: τ_1, τ_2, τ_δ, $\mathcal{T}_\upsilon$, $\mathcal{I}_{K_0}$, $\mathcal{I}_\delta$, e_1, e_2, e_δ, E_1 и E_2 – могут изменяться в пределах, определяемых допусками:

$$\tau_1' \leq \tau_1 \leq \tau_2'', \ldots, E_2' \leq E_2 \leq E_2''. \qquad \text{(I)}$$

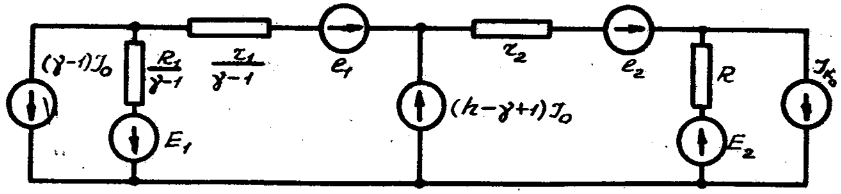

Рис.I.

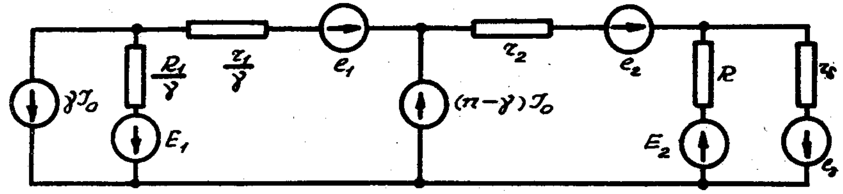

Рис. 2.

На выходные переменные элемента накладываются следующие условия работоспособности: I) в закрытом состоянии напряжение на выходе не должно быть отрицательным, 2) в открытом - ток на выходе не должен быть меньше некоторой заданной величины J_δ.

Эти два условия и законы Кирхгофа для схем рис. I и 2 приводят к соотношениям:

$$R_1 \geqslant \frac{a_1 R + b_1}{c_1 R + d_1} \equiv \varphi_1(R), \tag{2}$$

$$R_1 \leqslant \frac{a_2 R + b_2}{c_2 R + d_2} \equiv \varphi_2(R), \tag{3}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
a_1 &= (\gamma-1)(E_1-e_1-e_2)+[r_1+(\gamma-1)r_2]J_{K_0}-(n-\gamma+1)J_0 r_1,\\
b_1 &= -[r_1+(\gamma-1)r_2]E_2,\\
c_1 &= (n-2\gamma+2)J_0-J_{K_0},\\
d_1 &= E_2,\\
a_2 &= \gamma[E_1-e_1-e_2-e_\delta-(r_2+r_\delta)J_\delta]-[J_\delta+(n-\gamma)J_0]r_1,\\
b_2 &= -(r_1+\gamma r_2)(E_2+e_\delta+J_\delta r_\delta),\\
c_2 &= J_\delta+(n-2\gamma)J_0,\\
d_2 &= E_2+e_\delta+J_\delta r_\delta
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Неравенства (2), (3) в плоскости (R, R_1) определяют некоторую область D - область работоспособности элемента (рис. 3). Границами этой области служат гиперболы, зависящие от параметров $r_1, \ldots, E_2$ и изменяющиеся с изменением последних в их области задания (I).

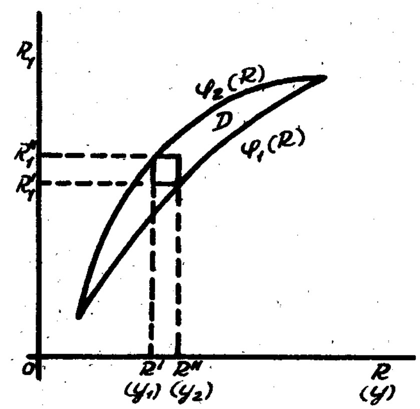

Рис. 3.

Требуется:

I) определить такую (наихудшую) комбинацию параметров $r_1, \ldots, E_2$, удовлетворяющих ограничениям (I), чтобы область работоспособности D была минимальной;

2) внутри области D выбрать "рабочую точку" (оптимальные значения $\hat{R}$ и $\hat{R}_1$) так, чтобы она была наиболее удалена от границ области.

Из физических соображений ясно, что при всех других значениях параметров $r_1, \ldots, E_2$ из (I) область D будет не уже минимальной и "рабочая точка" будет оставаться в области работоспособности элемента.

При решении задач I) и 2) одновременно определяются и допуски $\Delta\hat{R}$ и $\Delta\hat{R}_1$, при которых точка $(\hat{R}\pm\Delta\hat{R}, \hat{R}_1\pm\Delta\hat{R}_1)$ принадлежит минимальной области D.

Заметим, что предлагаемый ниже метод формально может показаться похожим на известные методы расчета на "наихудший случай" (см., например, "Метод обобщенного разброса" [3]). Однако здесь оптимизации подлежит с а м а о б л а с т ь р а б о т о с п о с о б н о с т и, и в ней уже оптимальным образом выбираются неизвестные параметры.

2. Математическая постановка задачи

Введем обозначения:

$$x_1 = r_1, \ldots, x_{11} = E_2, \quad y = R.$$

Область ограничений (I) в пространстве $(x_1, \ldots, x_{11})$ представляет собой II-мерный параллелепипед X :

$$X = \{x \mid x = (x_1, \ldots, x_{11}), x'_1 \leqslant x_1 \leqslant x''_1, \ldots, x'_{11} \leqslant x_{11} \leqslant x''_{11}\}. \quad (5)$$

За меру области D примем площадь максимального вписанного в неё квадрата со сторонами, параллельными координатным осям. Положение этого квадрата определяется двумя координатами: y_1 и y_2 (см. рис. 3).

Оптимизируемую функцию будем строить в два этапа.

I э т а п. Зафиксировав $x \in X$, мы тем самым фиксируем границы области D .

Найдем максимум площади (или, что то же, максимум стороны) вписанного в D квадрата:

$$max\{\psi \mid \psi = \psi(y_1, y_2) \equiv y_2 - y_1\} \quad (6)$$

при условии:

$$\Phi(y_1, y_2) \equiv \varphi_2(y_1) - \varphi_1(y_2) - (y_2 - y_1) = 0, \quad (7)$$

означающем равенство сторон квадрата и принадлежность двух его вершин кривым $\varphi_1(y)$ и $\varphi_2(y)$.

Для решения задачи (6), (7) на условный экстремум составим функцию Лагранжа $\psi + \lambda\Phi$ и приравняем нулю частные производные этой функции по y_1, y_2 и λ .

Исключив λ , получим соотношение:

$$\frac{a_1 d_1 - b_1 c_1}{(c_1 y_2 + d_1)^2} = \frac{a_2 d_2 - b_2 c_2}{(c_2 y_1 + d_2)^2} \quad , \quad (8)$$

которое геометрически означает параллельность касательных к кривым $\varphi_1(y)$ и $\varphi_2(y)$ в точках y_2 и y_1 соответственно. Это условие можно усмотреть и непосредственно, так как в случае непараллельности касательных вписанный в D квадрат можно было бы увеличить.

Из уравнений (7) , (8) с учетом (2), (3) получим соотношения для определения y_1 и y_2 :

$$\left.\begin{aligned} & A y_2^2 + B y_2 + C = 0, \\ & y_1 = \frac{k(c_1 y_2 + d_1) - d_2}{c_2}, \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

где

$$\left.\begin{aligned} & k = \sqrt{\frac{a_2 d_2 - b_2 c_2}{a_1 d_1 - b_1 c_1}}, \\ & A = k c_1 (c_2 - k c_1), \\ & B = k(a_1 c_2 - a_2 c_1 + c_1 d_2 + c_2 d_1 - 2k c_1 d_1), \\ & C = a_2 d_2 - b_2 c_2 - k(a_2 d_1 - b_1 c_2) + k d_1 (d_2 - k d_1). \end{aligned}\right\} \quad (I0)$$

Здесь везде при извлечении корней знаки берутся так, чтобы попасть на ветви гипербол, расположенные в первом квадранте.

II э т а п. Будем минимизировать полученный квадрат, а значит, и саму область D по параметрам x_j :

$$min\{\mathcal{F}(x) \mid \mathcal{F}(x) = \varphi_2[y_1(x)] - \varphi_1[y_2(x)]\}, \quad (II)$$

где y_1, y_2, φ_1 и φ_2 определяются коэффициентами гипербол $a_1, b_1, \ldots, d_2$, зависящими от x .

Таким образом, мы получаем з а д а ч у н е л и н е й н о г о п р о г р а м м и р о в а н и я:

Минимизировать нелинейную функцию $\mathcal{F}(x)$ при двусторонних ограничениях на переменные: $x' \leqslant x \leqslant x''$.

Поскольку исследовать выпуклость функции $\mathcal{F}(x)$ весьма затруднительно, ограничимся отысканием локального минимума этой функции, отправляясь от заданной допустимой точки x^0 .

3. Метод решения задачи

Для минимизации функции $\mathcal{F}(x)$ в области (5) используется градиентный метод с зигзагообразным движением вдоль ограничений [2].

Так как функция $\mathcal{F}$ сложным образом зависит от x , то применяется некий аналог метода последовательных приближений: на ($\kappa+1$)-м шаге минимизации для значений x^{κ} вычисляются величины $a_1, b_1, \dots, d_2, y_1$ и y_2. Затем y_1 и y_2 фиксируются, $grad\,\mathcal{F}$ вычисляется при фиксированных y_1, y_2 и делается шаг в направлении $-grad\,\mathcal{F}$:

$$x_j^{\kappa+1} = x_j^{\kappa} - h\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, n. \tag{12}$$

Затем снова вычисляются $a_1, b_1, \dots, d_2$, y_1 и y_2 и $grad\,\mathcal{F}$ определяется при фиксированных y_1 и y_2 и так далее.

Геометрически это означает, что мы фиксируем ширину κ -го квадрата и уменьшаем его высоту. Затем для новых значений x по формулам (4) мы получаем новые гиперболы и из соотношений (9)–(10) вычисляем координаты ($\kappa+1$)-го квадрата, который оказывается меньше κ -го. Снова фиксируем его ширину и уменьшаем высоту и так далее.

При выходе из допустимой области X возвращение в неё осуществляется по направлению S:

$$S = -\sum_j grad\, x_j^{\alpha}$$

для тех ограничений $x_j = x_j^{\alpha}$ $(\alpha = {}', {}'')$, которые оказались нарушенными.

Критерием оптимальности является выполнение одного из неравенств:

$$|grad\,\mathcal{F}| \leqslant \varepsilon_1 \tag{14}$$

– для внутреннего минимума,

$$1 - \frac{|(grad\,\mathcal{F}, S)|}{|grad\,\mathcal{F}|\,|S|} \leqslant \varepsilon_2 \tag{15}$$

– для граничного, где векторы $grad\,\mathcal{F}$ и S коллинеарны.

Компоненты вектора $grad\,\mathcal{F}$ в исходных переменных $\tau_1, \dots, E_2$ вычисляются по следующим формулам:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \tau_1} &= -\frac{[\mathcal{J}_\delta + (n-\gamma)\mathcal{J}_0]y_1 + (\mathcal{J}_\delta\tau_\delta + e_\delta + E_2)}{c_2y_1 + d_2} - \\
&\quad - \frac{E_2 - [\mathcal{J}_{\kappa_0} - (n-\gamma+1)\mathcal{J}_0]y_2}{c_1y_2 + d_1}; \\
\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \tau_2} &= -\frac{\gamma[\mathcal{J}_\delta y_1 + (\mathcal{J}_\delta\tau_\delta + e_\delta + E_2)]}{c_2y_1 + d_2} - \frac{(\gamma-1)(\mathcal{J}_{\kappa_0}y_1 - E_2)}{c_1y_2 + d_1}; \\
\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \tau_\delta} &= -\frac{[\gamma\mathcal{J}_\delta y_1 + \mathcal{J}_\delta(\tau_1 + \gamma\tau_2)](c_2y_1 + d_2) + \mathcal{J}_\delta(a_2y_1 + b_2)}{(c_2y_1 + d_2)^2}; \\
\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathcal{J}_0} &= +\frac{(n-\gamma+1)\tau_1y_2(c_1y_2 + d_1) + (n-2\gamma+2)y_2(a_1y_2 + b_1)}{(c_1y_2 + d_1)^2} - \\
&\quad - \frac{(n-\gamma)\tau_1y_1(c_2y_1 + d_2) + (n-2\gamma)y_1(a_2y_1 + b_2)}{(c_2y_1 + d_2)^2}; \\
\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathcal{J}_{\kappa_0}} &= -\frac{[\tau_1 + (\gamma-1)\tau_2]y_2(c_1y_2 + d_1) + y_2(a_1y_2 + b_1)}{(c_1y_2 + d_1)^2}; \\
\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathcal{J}_\delta} &= -\frac{\{[\tau_1 + \gamma(\tau_2 + \tau_\delta)]y_1 + (\tau_1 + \gamma\tau_2)\tau_\delta\}(c_2y_1 + d_2) + (y_1 + \tau_\delta)(a_2y_1 + b_2)}{(c_2y_1 + d_2)^2}; \\
\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial e_1} &= \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial e_2} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial E_1} = -\frac{\gamma y_1}{c_2y_1 + d_2} + \frac{(\gamma-1)y_2}{c_1y_2 + d_1}; \\
\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial e_\delta} &= -\frac{[\gamma y_1 + (\tau_1 + \gamma\tau_2)](c_2y_1 + d_2) + (a_2y_1 + b_2)}{(c_2y_1 + d_2)^2}; \\
\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial E_2} &= -\frac{(\tau_1 + \gamma\tau_2)(c_2y_1 + d_2) + (a_2y_1 + b_2)}{(c_2y_1 + d_2)^2} + \\
&\quad + \frac{[\tau_1 + (\gamma-1)\tau_2](c_1y_2 + d_1) + (a_1y_2 + b_1)}{(c_1y_2 + d_1)^2}.
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

4. Числовой пример

Программа оптимизации порогового элемента составлена для ЭЦВМ "М-20".

В качестве примера приведем результаты расчета для одного из вариантов.

Исходные данные:

$n = 2\gamma = 4$,

$r_1 = 40 \pm 20$ (ом),

$r_2 = r_\delta = 100 \pm 20$ (ом),

$\mathcal{J}_0 = \mathcal{J}_{k_0} = 30.10^{-6} \pm 20.10^{-6}$ (а),

$\mathcal{J}_\delta = 10^{-3} \pm 0{,}4.10^{-3}$ (а),

$e_1 = 0{,}2 \pm 0{,}05$ (в),

$e_2 = 0{,}6 \pm 0{,}15$ (в),

$e_\delta = 0{,}3 \pm 0{,}07$ (в),

$E_1 = E_2 = 12{,}6 \pm 0{,}3$ (в),

$\varepsilon_1 = 10^{-6}$,

$\varepsilon_2 = 10^{-2}$.

Полученные оптимальные значения для R, R_1 и их допусков: $\hat{R} = 3700$ ом, $\hat{R}_1 = 3600$ ом, $\Delta\hat{R} = \Delta\hat{R}_1 = 264$ ома.

Оптимальные значения параметров $r_1, r_2, r_\delta, e_1, e_2, e_\delta$, E_1 и E_2 несущественно изменились от своих исходных значений; для параметров $\mathcal{J}_0$, $\mathcal{J}_{k_0}$ и $\mathcal{J}_\delta$ оптимальные значения близки к граничным: $\hat{\mathcal{J}}_0 = 10{,}164 \cdot 10^{-6}$ а, $\hat{\mathcal{J}}_{k_0} = 49{,}894 \cdot 10^{-6}$ а, $\hat{\mathcal{J}}_\delta = 1{,}3999 \cdot 10^{-3}$ а.

На рис. 4 изображены исходная (I) и оптимальная (II) области работоспособности элемента и вписанные в них максимальные квадраты.

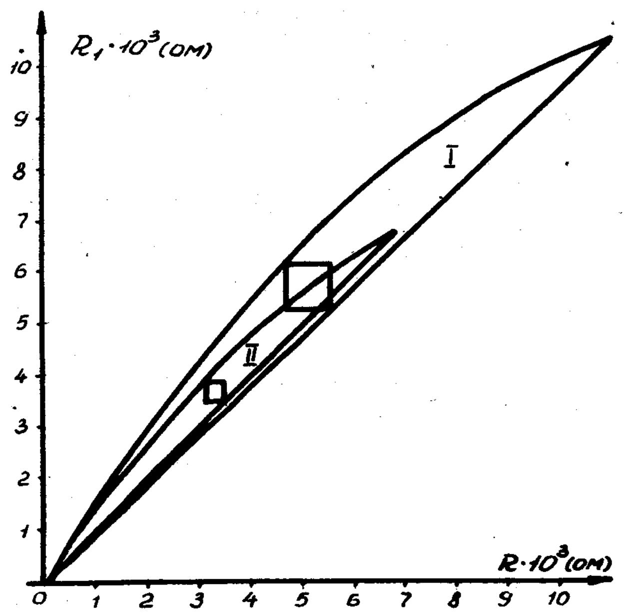

Рис. 4.

Задача предложена А.И. Мишиным.

Л и т е р а т у р а

1. А.И. Мишин. Расчет и применение диодно-транзисторного порогового элемента в цифровых устройствах. — Полупроводниковые элементы в вычислительной технике, М., 1965, стр. 77-94.
2. Б.М. Каган и Т.М. Тер-Микаэлян. Решение инженерных задач на ЦВМ. М.-Л., "Энергия", 1964.
3. К.А. Иыуду. Оптимизация устройств автоматики по критерию надежности. М.-Л., "Энергия", 1966.

Поступила в редакцию
5/VI-1965г.