1968 г. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ Выпуск 30

УДК.518.5

ρ - АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. Панкевич

В работе описывается ρ - алгоритм решения системы нелинейных уравнений методом, предложенным в [I]. Для вывода формул приводятся некоторые сведения из теории интерполяционных многочленов и результаты проведенных числовых экспериментов.

I. Интерполяционные многочлены нескольких переменных. Пусть будет дана система из n +I узлов и соответствующих им значений

$$y_j \equiv (y_{1j}, y_{2j}, \ldots, y_{nj};\ z_j), \quad j=0,1,\ldots,n. \tag{I}$$

Ищем такой многочлен

$$\omega(y) = a_0 + a_1 y_1 + \ldots + a_n y_n, \tag{2}$$

который удовлетворяет условиям

$$\omega(y_j) = a_0 + a_1 y_{1j} + \ldots + a_n y_{nj} = z_j, \quad j=0,1,\ldots,n. \tag{3}$$

Система (3) из n +I линейных уравнений с неизвестными $a_0, a_1, \ldots, a_n$ имеет единственное решение, если ее определитель отличен от нуля. В случае произвольного размещения узлов о значении определителя ничего сказать нельзя.Если же узлами будут точки:

$$\begin{aligned} y_0 &= (y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}), \\ y_i &= (y_{10}, \ldots, y_{i-1,0}, y_{i0}+h_i, y_{i+1,0}, \ldots, y_{n0}), \quad i=1,2,\ldots,n, \end{aligned} \tag{4}$$

(где $h_i > 0$, i =I,2,...,n), то имеет место равенство:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & y_{10} & y_{20} & \cdots & y_{n0} \\ 1 & y_{10}+h_1 & y_{20} & \cdots & y_{n0} \\ 1 & y_{10} & y_{20}+h_2 & \cdots & y_{n0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & y_{10} & y_{20} & \cdots & y_{n0}+h_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} h_i \neq 0. \qquad (5)$$

Специальное расположение узлов (4) обеспечивает единственность решения системы уравнений (3) и тем самым единственность интерполяционного многочлена (2).

Чтобы определить коэффициенты многочлена $a_0, a_1, \ldots, a_n$ воспользуемся методом Крамера. Подставляя вместо столбца единиц в определителе (5) правую сторону равенства (3), получаем:

$$a_0 \cdot D = z_0 \prod_{i=1}^{n} h_i - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{z_i - z_0}{h_i}\, y_{i0} \prod_{i=1}^{n} h_i \right).$$

Значит,

$$a_0 = z_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{z_i - z_0}{h_i} \cdot y_{i0}. \qquad (6)$$

Заменяя очередные столбцы определителя (5) столбцами свободных членов системы (3), получаем

$$a_i = \frac{z_i - z_0}{h_i}, \qquad i = 1,2,\ldots,n. \qquad (7)$$

Тогда многочлен (2) можем записать в виде:

$$\omega(Y) = z_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{z_i - z_0}{h_i} (y_{i0} - y_i). \qquad (8)$$

2. <u>Решение нелинейных уравнений</u>. Дана система из n нелинейных уравнений с n неизвестными:

$$f_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0, \quad i = 1,2,\ldots,n. \qquad (9)$$

Пусть κ -ым приближением решения системы (9) будет:

$$A_0^{(\kappa)} = (y_1^{(\kappa)}, y_2^{(\kappa)}, \ldots, y_n^{(\kappa)}). \qquad (10)$$

Если не для всех i справедливо неравенство

$$|f_i(A_0^{(\kappa)})| < \varepsilon, \qquad (11)$$

где $\varepsilon > 0$ – заданное число, то возьмем еще n вспомогательных точек (4):

$$A_1^{(\kappa)}, A_2^{(\kappa)}, \ldots, A_n^{(\kappa)} \qquad (12)$$

и на них, как на узлах, построим интерполяционные многочлены для всех функций f_i.

Из (8) получим:

$$\omega_j^{(\kappa)}(Y) = f_j(A_0^{(\kappa)}) - \sum_{i=1}^{n} \frac{f_j(A_i^{(\kappa)}) - f_j(A_0^{(\kappa)})}{h_i} (y_{i0}^{(\kappa)} - y_i), \quad j = 1,2,\ldots,n. \qquad (13)$$

Будем считать κ +1-ым приближением решения системы нелинейных уравнений:

$$\omega_j^{(\kappa)}(Y) = 0, \qquad y = 1,2,\ldots,n. \qquad (14)$$

Решая эту систему, получаем [1]:

$$y_\ell^{(\kappa+1)} \equiv y_\ell = y_\ell^{(\kappa)} - z_\ell^{(\kappa)} h_\ell^{(\kappa)} / \alpha^{(\kappa)}, \quad \ell = 1,2,\ldots,n, \qquad (15)$$

где $z_\ell^{(\kappa)}$ есть ℓ -ая компонента решения вспомогательной системы линейных уравнений:

$$\sum_{m=1}^{n} f_i(A_m^{(\kappa)}) \cdot z_m = f_i(A_0^{(\kappa)}), \quad i = 1,2,\ldots,n, \qquad (16)$$

и

$$\alpha^{(\kappa)} = 1 - \sum_{m=1}^{n} z_m^{(\kappa)}. \qquad (17)$$

Если таким образом полученное приближение нас не удовлетворяет, уменьшаем числа $h_i^{(\kappa)}$:

$$h_i^{(\kappa+1)} = h_i^{(\kappa)} \beta, \quad \text{где } 0 < \beta < 1, \qquad (18)$$

и повторяем вычисления. Для простоты можно принять $h_i^{(\kappa)} = h^{(\kappa)}$ ($i = 1,2,\ldots,n$).

3. <u>Числовой пример.</u> В.А. Матвеев в [2] описал модификацию метода наискорейшего спуска, которая в некотором случае в точности совпадает с процессом Ньютона. Этим методом (дальше М – метод) решает он следующую систему уравнений:

$$f_1(y_1, y_2) \equiv y_1^2 + y_2^2 - 1 = 0,$$
$$f_2(y_1, y_2) \equiv 0{,}75 \cdot y_1^2 - y_2 + 0{,}9 = 0.$$

Эта система имеет два вещественных решения, а в точке (–0,5084, 0,8740) имеет "яму" – определитель матрицы Якоби данной системы в этой точке обращается в нуль.

С помощью предлагаемого метода (дальше П-метод) проводился итерационный процесс при начальных значениях переменных [2], довольно далеких от предполагаемого решения. В табл. 1 показаны результаты расчета для начальных значений: 1) (–0,4 – 0,1), 2) (–0,1, 0,8), 3 и 4) (–0,5084, 0,8740). Для сравнения даются результаты, полученные М-методом.

В первом случае нужная точность достигнута М-методом на четвертом приближении, П-методом – на седьмом. Во 2-ом случае вычисления М-методом не привели к положительному результату, 23-е приближение попало в "яму", П-методом на седьмом шагу получено значение второго из вещественных решений данной системы. В случае 3-ем и 4-ом вычисления начались с "ямы", М-метод в этом случае не работает, с помощью П-метода мы получили оба решения данной системы при разных значениях β на 12-ом и 16-ом шагах.

Как видно из формул (16) и (17), чтобы процесс был опреде-

Таблица I

№	Начальные приближения	М-метод		П-метод			
		А	Б	h	β	А	Б
I	−0,4 −0,I	4	−0,98I7 +0,I904	0,I	0,I	7	−0,98I7 0,I904
2	−0,I 0,8	2I	−0,5083 0,8742	0,6	0,I	7	+0,3570 0,934I
3	−0,5084 0,8740			0,I	0,5	I2	−0,98I7 0,I904
4	−0,5084 0,8740			0,I	0,9	I6	0,3570 0,934I

А – № конечного приближения, Б – значение приближения с № А.

Таблица 2

№	Начальные приближения	h	Конечные приближения		Причина перерыва вычислений	Добавочные приближения	
			№	значение		№	значение
I	−0,4 0,2	0,I	8	−0,98I69 0,I9053	$\alpha = 0$	3	−0,98I70 0,I9042
2	−0,I 0,2	0,I	8	−0,98I69 0,I9053	$\alpha = 0$	3	−0,98I70 0,I9042
3	+I,3 −0,3	0,I	8	0,3564I 0,93439	$\lvert F \rvert = 0$	3	0,35697 0,934II
4	−0,7 −0,2	0,6	9	0,35I98 0,93325	$\lvert F \rvert = 0$	4	0,35697 0,934II

$\beta = 0{,}I$

ленным, необходимы однозначность решения вспомогательной системы линейных уравнений ($\lvert f \rvert \neq 0$) и чтобы сумма координат этого решения не равнялась единице ($\alpha \neq 0$).

В проведенных экспериментах (табл. 2) случалось, что $\lvert f \rvert = 0$ (варианты 3 и 4) или $\alpha = 0$ (варианты 2 и I), но тогда, как правило, полученное приближение было довольно близко к точному решению. Чтобы избежать неопределенности, приходилось принимать h_i равным начальному, и после 3–4 добавочных приближений была достигнута требуемая точность.

4. ρ**-алгоритм П-метода.** Пользуясь ρ-языком, предложенным в [3], П-метод можно записать в виде следующего ρ-алгоритма:

$$\dot{H}_1 \dot{A}_2 \dot{P}_3 \dot{P}_4 \dot{H}_5 \dot{A}_6 \dot{P}_7 \dot{A}_8 \dot{P}_9 \dot{A}_{10} \dot{H}_{11} \dot{P}_{12} \dot{П}_{13} \dot{Я}_{14} \dot{Я}_{15}$$

$\dot{H}_1$ – задание начального приближения;

$\dot{A}_2$ – вычисление значений левых сторон решаемой системы;

$\dot{P}_3$ – условный переход: если полученные значения слишком большие (нет решения) останов $\dot{Я}_{15}$;

$\dot{P}_4$ – условный переход: если достигнута требуемая точность, выдача результатов (на нулевом шаге переход к $\dot{H}_5$, на остальных – к $\dot{A}_6$);

$\dot{H}_5$ – задание начальных значений h_i;

$\dot{A}_6$ – вычисление значений левых сторон во всех вспомогательных точках или "заполнение" матрицы f;

$\dot{P}_7$ – условный переход: $\lvert f \rvert = 0$, переход к начальным значениям h_i;

$\dot{A}_8$ – решение системы линейных уравнений;

$\dot{P}_9$ – условный переход: если $\alpha = 0$, переход к начальным значениям h_i;

$\dot{A}_{10}$ – вычисление нового приближения решаемой системы нелинейных уравнений;

$\dot{H}_{11}$ – определение новых значений h_i;

$\dot{P}_{12}$ – переход к вычислению значений левых сторон для полученных приближений;

$\dot{П}_{13}$ – выдача результатов;

$\dot{Я}_{14}$ – останов машины.

Литература

I. В. Панкевич. О некотором методе решения систем нелинейных уравнений.-Сборник трудов симпозиума"Вычисл.системы",Изд-во"Наука",Сибирское отделение,Новосибирск,I967,I02-I08.

2. В.А. Матвеев. Метод приближенного решения систем нелинейных уравнений. Журнал "Вычисл. матем. и матем. физика", I964 г., 4, № 6, 983-994.

3. Э.В. Евреинов, Ю.Г. Косарев. Матричный ρ-язык для описания параллельных алгоритмов. - "Вычислительные системы", Изд-во "Наука", Сибирское отделение, Новосибирск, I965, вып. I7, стр. I00-I05.

Варшавский университет

Поступила в редакцию 20.IУ.I966 г.