1968 г. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ Выпуск 30

УДК.518.5

К РЕШЕНИЮ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ВС

Н.Н. Миренков

Рассматривается модификация метода Зейделя, которая предусматривает параллельное выполнение операций.

I. В [I,2] рассматривается решение системы линейных уравнений $X=BX+G$ методом последовательных приближений: $X^{(k)}=BX^{(k-1)}+G$ при $X^{(0)}=G$, где B - матрица, X и G - n-мерные векторы. Предполагается, что число машин ℓ много меньше числа уравнений n. В каждой машине S хранятся τ строк матрицы B и соответствующие компоненты вектора G, а также вычисляются и хранятся до следующего приближения компоненты вектора $X^{(k)}$. Для первых m машин, где $0 \le m \le \ell-1$ – остаток от деления n на ℓ, $\tau=\left[\frac{n}{\ell}\right]+1$, для всех остальных $\tau=\left[\frac{n}{\ell}\right]$. Вектор $X^{(k-1)}$ хранится в оперативной памяти каждой машины. Такое распределение информации позволяет параллельно вычислять ℓ компонент вектора $X^{(k)}$. Однако данный прием не охватывает класс методов, типичным представителем которого является метод Зейделя.

Метод Зейделя отличается от простой итерации тем, что, найдя какое-то приближение для компоненты вектора, мы сразу же используем его для отыскания следующей компоненты. Если исходное уравнение имеет вид $Ax=b$, то вычисления ведутся по формуле:

$$X_i^{(k+1)}=-\sum_{j=1}^{i-1}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}X_j^{(k+1)}-\sum_{j=i+1}^{n}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}X_j^{(k)}+\frac{b_i}{a_{ii}}, \tag{I}$$

которая не позволяет реализовать параллельное выполнение операции методом, описанным в [I,2]. Покажем, как можно видоизменить данный метод, чтобы избежать указанную трудность.

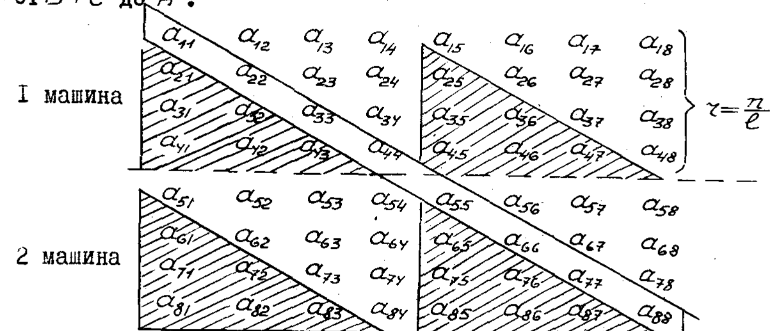
2. Пусть требуется решить систему линейных уравнений:

$$AX=b$$

на ВС с числом машин ℓ. Представим матрицу A в виде суммы трех матриц (Для случая 2 машин см. рисунок):

$$A=B+C+D, \tag{2}$$

где B - диагональная матрица, в матрице C равны нулю элементы, лежащие вне заштрихованных треугольников, а матрица D дополняет $B+C$ до A.



Теперь осуществляем итерационный процесс по формуле:

$$(B+C)X^{(k+1)}+DX^{(k)}=b. \tag{3}$$

Если разрешить (3) относительно $X_i^{(k+1)}$, то получим:

$$X_i^{(k+1)}=-\frac{1}{a_{ii}}\left[\sum_{k=0}^{\ell}\left(\sum_{j=\tau k+1}^{\tau(k-S+1)+i-1}a_{ij}X_j^{(k+1)}+\sum_{\substack{j=\tau(k-S+1)+i\\(j\neq i)}}^{\tau(k+1)}a_{ij}X_j^{(k)}\right)-b_i\right], \tag{4}$$

где $\tau=\frac{n}{\ell}$, а S - номер машины, в которой находится i-я строка матрицы A. Записав (3) в виде:

$$X^{(k+1)}=-(B+C)^{-1}DX^{(k)}+(B+C)^{-1}b, \tag{5}$$

заметим, что для сходимости метода необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы $-(B+C)^{-1}D$ были по модулю меньше единицы.

Покажем, следуя [3], что если

$$\sum_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{n}|a_{ij}|<a_{ii} \quad (i=1,2,\dots,n), \tag{6}$$

то наш метод дает более быструю сходимость, чем простая итерация. Для простой итерации имеет место соотношение

$$\|X-X^{(k+1)}\|_1 \le \mu \|X-X^{(k)}\|_1, \tag{7}$$

где

$$\mu=\max_i\sum_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{n}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|<1.$$

В то же время, если ввести обозначения

$$\sum_{k=0}^{\ell-1}\sum_{j=\tau k+1}^{\tau(k-S+1)+i-1}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|=\beta_i, \quad \sum_{k=0}^{\ell-1}\sum_{j=\tau(k-S+1)+i}^{\tau(k+1)}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|=\gamma_i, \quad \max\frac{\gamma_i}{1-\beta_i}=\mu^1, \tag{8}$$

где τ и S определяются, как и в (4), то для разности между точным решением X и $(k+1)$-м приближением, полученным по нашему методу, получим оценку

$$\|X_i - X_i^{(k+1)}\|_1 \leq \beta_i \| X - X^{(k+1)}\|_1 + \gamma_i \|X - X^{(k)}\|_1$$

и

$$\|X_i - X^{(k+1)}\|_1 \leq \mu^1 \| X - X^{(k)} \|_1 \qquad (9)$$

Но

$$\sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| = \beta_i + \gamma_i \leq \mu < 1. \qquad (10)$$

Тогда $\beta_i + \gamma_i - \frac{\gamma_i}{1-\beta_i} = \frac{\beta_i(1-\beta_i-\gamma_i)}{1-\beta_i} \geq 0$, отсюда

$$\mu = \max_i(\beta_i + \gamma_i) \geq \max \frac{\gamma_i}{1-\beta_i} = \mu^1.$$

Таким образом, видно, что в рассмотренных выше случаях наш метод ведет себя так же, как и метод Зейделя. Что касается сравнения скоростей сходимости, то все зависит от вида матрицы. Так, например, если $\max \frac{\gamma_i}{1-\beta_i}$ достигается при $i=1$, то скорости сходимости методов одинаковы; если максимальные $\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|$ попадают в "заштрихованные треугольники", находящиеся выше главной диагонали, то преимущество будет у предложенного метода. Для улучшения сходимости рассматриваемого метода можно переставлять строки матрицы так, чтобы максимальные значения $\sum_{\substack{j=1 \\ (j\neq i)}}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|$ $(i=1,2,\dots,n)$ оказывались в нижних строках каждой машины.

Чтобы найти одну компоненту вектора $X^{(k+1)}$ в (4), нужно выполнить $n-1$ операций умножения и $n-1$ операций сложения. Это займет на " Минске-222 " не менее $t_1 = 450(n - 1)$ мксек. Чтобы каждая машина переслала вычисленную в ней компоненту во все остальные машины, нужно $t_2 = 100 \cdot \ell$ мксек. Так как $\ell << n$, то $t_2/t_1 << 1$, то есть, если мы, вычислив компоненту вектора, информируем сразу об этом все другие машины, то это не потребует существенных затрат времени. Поэтому реализация рассматриваемого метода на ВС теперь проста и осуществляется подобно методу в [1,2].

Если же вид матрицы A таков, что метод Зейделя дает более быструю сходимость, то параллельное выполнение операций можно организовать при вычислении сумм в (1), распределив матрицу между машинами по столбцам.

В заключение заметим, что аналогичным образом можно модифицировать многие релаксационные методы, которые используют только что вычисленную компоненту вектора для отыскания следующей.

Литература

1. Э.В. Евреинов, Ю.Г. Косарев. Однородные универсальные вычислительные системы высокой производительности. Изд-во "Наука", Сиб. отд., 1966.
2. Л.В. Головяшкина, Ю.Г. Косарев. Программа решения системы линейных уравнений на ВС "Минск-222". - Вычислительные системы, Новосибирск, Изд-во "Наука", Сиб.отд., 1967.
3. И.С. Березин, Н.П. Жидков. Методы вычислений. М., Физматгиз, 1962, т. 2, гл. 6.

Поступила в редакцию
15.IУ.1968 г.