ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ
1968 г. Выпуск 31

УДК 681.142.019.3.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ СТОИМОСТИ ОДНОРОДНЫХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

В.Г. Хорошевский

В работе предпринята попытка установить взаимосвязь между надежностью и стоимостью одно[illegible]дных универсальных вычислительных систем (УВС) [1].

1. Функции стоимости

Пусть c_1 и c_2 - соответственно стоимость эксплуатации элементарной машины (ЭМ) и стоимость содержания восстанавливающего устройства в единицу времени. $\mathcal{N}$ и $\mathcal{M}$ - соответственно среднее число отказавших ЭМ и среднее число свободных восстанавливающих устройств в стационарном режиме.

Рассмотрим функцию стоимости $\gamma(m)=c_1\cdot\mathcal{N}+$ $+c_2\cdot\mathcal{M}$, где m - число устройств в восстанавливающей системе. $\gamma(m)$ является полной средней стоимостью простоя ЭМ за счет отказов и простоя восстанавливающих устройств из-за отсутствия достаточного количества отказавших ЭМ в единицу времени.

Если известны вероятности P_i [2] того, что в стационарном режиме $i\in E$ машин исправно, где $E=\{0,1,2,\ldots,N\}$, N - число машин в УВС, то

$$\gamma(m)=c_1\sum_{i=0}^{N}(N-i)\cdot P_i+c_2\sum_{i=N-m}^{N}(m+i-N)\cdot P_i\,. \tag{1.1}$$

Минимизация функции стоимости обычно производится численным методом или путем моделирования [3].

Интерес представляет сумма всех издержек в единицу времени при эксплуатации УВС $\gamma'(m)=c_1\mathcal{N}+c_2 m$. Для однородных УВС справедливо неравенство $\lambda<\mu$, где λ - интенсивность потока отказов в ЭМ, μ - интенсивность потока восстановлений в восстанавливающем устройстве. Поэтому при $m\to N$ $\gamma'(m)\approx c_2 m$.

Для однородных УВС высокой производительности [I],используя результаты [4], можно получить, что

$$\gamma(m)=\frac{N\lambda}{\lambda+\mu}c_1+\frac{m\mu-(N-m)\lambda}{\lambda+\mu}c_2, \text{ если } m>\frac{N\lambda}{\mu+\lambda},$$

$$\gamma(m)=\frac{N\lambda-m\mu}{\lambda}c_1, \qquad \text{если } m\leqslant\frac{N\lambda}{\mu+\lambda}.$$

2. Полный ожидаемый доход

Введем следующие обозначения:

$\varkappa_{ij}$ - интенсивность перехода системы из состояния i в состояние j , $i\neq j$, $i,j\in E$;

$$\varkappa_{ii}=-\sum_{\substack{j\neq i\\ i,j\in E}}\varkappa_{ij};$$

d_{ij} - доход, приносимый системой при переходе из состояния i в состояние j, $i\neq j$, $i,j\in E$;

d_{ii} - доход, приносимый УВС за единицу времени в течение времени её пребывания в состоянии $i\in E$;

$D_i(t)$ - п о л н ы й о ж и д а е м ы й д о х о д, который принесет система за время t , если она начинает функционировать с i -го состояния, $i\in E$.

Полные ожидаемые доходы $D_i(t), i\in E$, удовлетворяют системе уравнений [5]

$$D_i'(t)=d_i+\sum_{j\in E}\varkappa_{ij}D_j(t), \tag{2.I}$$

где

$$d_i=d_{ii}+\sum_{\substack{j\neq i\\ i,j\in E}}\varkappa_{ij}d_{ij}. \tag{2.2}$$

Кроме того, для вычислительных систем

$$D_i(0)=0, \quad i\in E. \tag{2.3}$$

Решение системы (2.I) при начальных условиях (2.3) не вызывает принципиальных трудностей.

Выпишем величины d_{ii} , d_{ij} , $\varkappa_{ij}$, $i,j\in E$, для однородных универсальных вычислительных систем.

$$d_{ii}=i\cdot c_1-\Delta(m-N+i)\cdot[m-(N-i)]c_2,$$

где

$$\Delta(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x\geqslant 0,\\ 0, & \text{если } x<0.\end{cases}$$

Пусть c_3 - средняя стоимость запасных деталей (модулей,ячеек и т.д.), расходуемых при восстановлении одной отказавшей машины. Тогда $d_{ij}=-\Delta(j-i)\cdot(j-i)\cdot c_3$.

$\varkappa_{ij}=0$ при $|i-j|>1$,

$\varkappa_{i,i-1}=i\lambda$ при $0\leqslant i\leqslant N$,

$$\varkappa_{ii}=\begin{cases}-i\lambda-m\mu & \text{при } 0\leqslant i\leqslant(N-m),\\ -i\lambda-(N-i)\mu & \text{при } (N-m)<i\leqslant N.\end{cases}$$

$$\varkappa_{i,i+1}=\begin{cases}m\mu & \text{при } 0\leqslant i\leqslant(N-m),\\ (N-i)\mu & \text{при } (N-m)<i\leqslant N,\end{cases}$$

Для эргодических марковских процессов полные ожидаемые доходы для больших значений t (в стационарном режиме) определяются по следующей формуле [5]:

$$D_i(t)=g\cdot t+D_i, \quad i\in E, \tag{2.4}$$

где g - средний доход, приносимый при длительной работе УВС в единицу времени, называемый п р и б ы л ь ю, а D_i - веса. Заметим, что с ростом t значение $D_i(t), i\in E$, определяется в основном членом $g\cdot t$.

Возникает задача организации такого обслуживания однородной УВС, при котором полный ожидаемый доход максимален.Решению этой задачи посвящен следующий параграф.

3. Максимальная прибыль

Рассмотрим два варианта организации восстановительных работ в однородной УВС.

Вариант I. Если восстанавливающее устройство (бригада обслуживания машин) не используется для ремонта машины в данный момент времени, то оно обязательно используется для других целей, то есть не простаивает.

Будем говорить, что используется стратегия обслуживания с номером $m_i\in E_i$, $E_i=\{0,1,2,\ldots,(N-i)\}$, если для УВС, находящейся в состоянии $i\in E$, имеется m_i восстанавливающих устройств. $m_i(t)$ - номер m_i стратегии в момент времени t - назовем р е ш е н и е м в состоянии $i\in E$, если он выбран по какому-либо критерию. Если этот же номер выбран для достаточно больших t , то $m_i\in E_i$ назовем решением в состоянии $i\in E$ в стационарном режиме. Вектор $\vec{M}=\{m_i\}, m_i\in E_i, i\in E$ назовем в е к т о р - р е ш е н и е м в стационарном режиме.

О п т и м а л ь н ы м в е к т о р - р е ш е н и е м назовем такое вектор-решение в стационарном режиме

$$\vec{M}^*=\{m_i^*\}, m_i^*\in E_i, i\in E, \tag{3.I}$$

при котором прибыль, приносимая однородной УВС, максимальна.

Наша задача найти оптимальное вектор-решение.

Приведем алгоритм для отыскания оптимального вектор-решения (3.I), в основу которого положен итерационный метод Р.Ховарда [5].

Алгоритм I

I. Операция определения весов.

Используя интенсивности переходов $\varkappa_{ij}^{m_i'}$ и нормы выручек $d_i^{m_i'}$ для данного вектор-решения $\vec{M}'=\{m_i'\}$, $m_i' \in E_i$, найти относительные веса $D_j^{\vec{M}'}$ и прибыль $g^{\vec{M}'}$ из системы уравнений

$$g^{\vec{M}'}=d_i^{m_i'}+\sum_{j=0}^{N} \varkappa_{ij}^{m_i'} \cdot D_j^{\vec{M}'}, \tag{3.2}$$

положив $D_0^{\vec{M}'}=0$; $i,j \in E$.

Перейти к выполнению операции 2.

2. Операция улучшения решения.

Для каждого состояния $i \in E$, используя относительные веса $D_i^{\vec{M}'}$ предыдущего вектор-решения $\vec{M}'$, найти номер $m_i \in E_i$ стратегии, которая максимизирует выражение

$$d_i^{m_i}+\sum_{j=0}^{N} \varkappa_{ij}^{m_i} \cdot D_j^{\vec{M}'}. \tag{3.3}$$

$$\vec{M}=\{m_i\},\ m_i \in E_i,$$

принять за новое вектор-решение. После чего перейти к выполнению операции 3.

3. Операция проверки оптимальности вектор-решения.

Сравнить вектор-решение данной итерации с вектор-решением предшествующей итерации, то есть $\vec{M}$ с $\vec{M}'$. Если $\vec{M}$ и $\vec{M}'$ совпадают, то вектор-решение M принять за оптимальное, то есть положить $\vec{M}^*=\vec{M}$, в противном случае положить $\vec{M}'=\vec{M}$, то есть $d_i^{m_i'}$ заменить на $d_i^{m_i}$, а $\varkappa_{ij}^{m_i'}$ – на $\varkappa_{ij}^{m_i}$, и перейти к выполнению операции I.

Заметим, что если алгоритм начинается с выполнения операции 2 при $D_i=0$, $i \in E$, то в качестве начального выбирается вектор-решение, которое максимизирует (2.2).

Вариант 2. Если восстанавливающее устройство не используется в данный момент времени для восстановления отказавшей ЭМ, то оно простаивает.

Будем говорить, что применяется стратегия обслуживания с номером $m \in E$, если для вычислительной системы имеется m восстанавливающих устройств.

Если по какому-либо критерию выбран номер стратегии $m' \in E$, то m' называется решением.

Оптимальным решением называется такое решение $m^* \in E$, при котором прибыль g, приносимая однородной УВС, максимальна. Необходимо найти оптимальное решение.

Алгоритм 2

I. Используя интенсивности переходов $\varkappa_{ij}^{m}$ и нормы выручек d_i^m для каждого решения $m \in E$, вычислить прибыль g^m из системы уравнений

$$g^m=d_i^m+\sum_{j=0}^{N} \varkappa_{ij}^{m} \cdot D_j^m,\ i \in E, \tag{3.4}$$

положив $D_0^m=0$.

2. Найти максимум прибыли

$$g^{m^*}=\max_{m \in E}\{g^m\}. \tag{3.5}$$

3. Взять m^* за оптимальное решение.

Заметим, что вычислить вероятности P_i, $i \in E$, [2] проще, чем решить систему уравнений (3.4). Если известны вероятности P_i, $i \in E$, то можно предложить следующий менее трудоемкий алгоритм нахождения оптимального решения.

Алгоритм 3

Используя стационарные вероятности состояний P_i^m и нормы выручек d_i^m для каждого решения $m \in E$, вычислить прибыль по следующей формуле:

$$g^m=\sum_{i=0}^{N} P_i^m d_i^m. \tag{3.6}$$

2. Найти максимум прибыли g^{m^*} (3.5).

3. Взять m^* за оптимальное решение.

Заметим, что если (3.4) умножить на P_i^m и просуммировать по $i \in E$, то получим также (3.6).

4. Примеры однородных универсальных вычислительных систем

Рассмотрим вычислительные системы типа "Минск-222" [6].

Для машины "Минск -2" найдено, что $\lambda = 0,024$ I/час; $\mu = 0,7$ I/час; c_1 = I2-26 руб/час; c_2 = I0-I2 руб/час; c_3 = 65-75 руб. Допустим для определенности, что c_1 =20 руб/час; c_2 = II руб/час; c_3 = 70 руб.

I^0. Воспользовавшись результатами работы [2], можно вычислить функцию стоимости (I.I) для различных N.

На рис. I изображены функции стоимости для систем малой и средней производительности [7], а на рис. 2 – функции стоимости для УВС высокой производительности.

Видно, что для систем малой производительности минимум эксплуатационных расходов достигается при одном восстанавливающем устройстве, а для УВС средней и высокой производительности минимум функций достигается при $m < 0,1N$.

2^0. Вектор полных ожидаемых доходов для невосстанавливаемой системы, у которой $N=2$,

$$\vec{D}(t)=\{D_0(t), D_1(t), D_2(t)\}, \qquad (4.I)$$

где $D_0(t)=-2c_1\cdot t_1$, $D_1(t)=\frac{2c_1}{\lambda}-2c_1\cdot t-\frac{2c_1}{\lambda}e^{-\lambda t}$,

$$D_2(t)=\frac{4c_1}{\lambda}-2c_1\cdot t-\frac{4c_1}{\lambda}e^{-\lambda t}.$$

Вектор-функция (4.I) для УВС "Минск-222" представлена на рис. 3.

Первая действующая система "Минск-222" состояла из двух ЭМ ($N = 2$) и имела одну бригаду обслуживания ($m =$ I). Расчет показывает, что для этой системы

$$D_0(t) = -252,9+23,7\cdot t+252,9\cdot e^{-0,736t}+75,3\cdot t\cdot e^{-0,736t},$$

$$D_1(t) = -94,1+23,7\cdot t+94,1\cdot e^{-0,736t}-3,5\cdot t\cdot e^{-0,736t},$$

$$D_2(t) = 8,3+23,7\cdot t-8,3\cdot e^{-0,736t}-0,6\cdot t\cdot e^{-0,736t}$$

Функции $D_i(t)$, $i\in\{0,I,2\}$, представлены на рис. 3.

Видно, что независимо от начального состояния, УВС "Минск-222" при $m = 0$ будет приносить в среднем (–40) рублей за один час, а при $m =$ I – (+23,5) рубля в час, когда $t\to\infty$. Величины (–40) руб/час и 23,5 руб/час и является прибылью g.

Таким образом, при больших значениях t, функции $D_i(t)$ могут быть записаны в виде (2.4).

3^0. Найдем оптимальное вектор-решение (3.I) для системы "Минск-222", $N = 2$. В таблице I приведены стратегии, интенсивности переходов и нормы выручек для любого состояния $i\in E$ рассматриваемой системы.

I. Выберем в качестве исходного решение, которое максимизирует норму выручки для каждого состояния $i\in E$.

$$\vec{M}' = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad K = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0,024 & -0,024 & 0 \\ 0 & 0,048 & -0,048 \end{Vmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{Vmatrix} -40 \\ 0 \\ 40 \end{Vmatrix}.$$

2. Уравнения для определения весов (3.2) имеют вид:

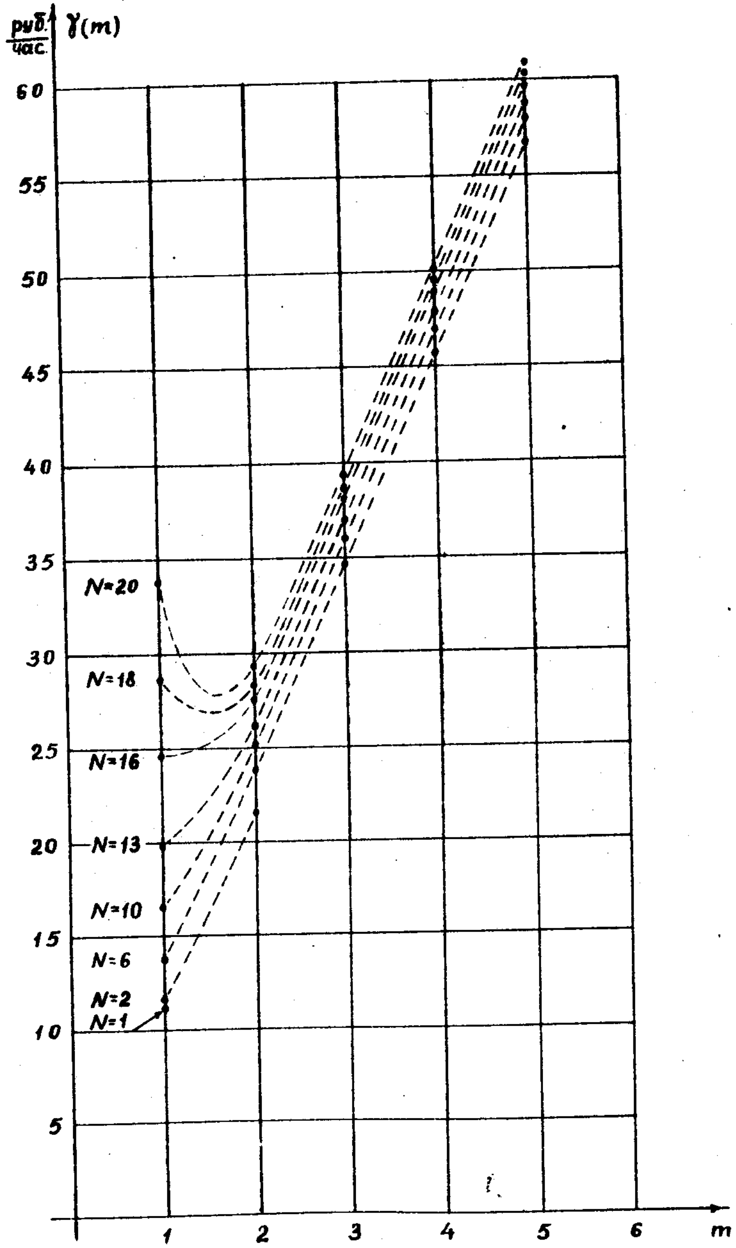
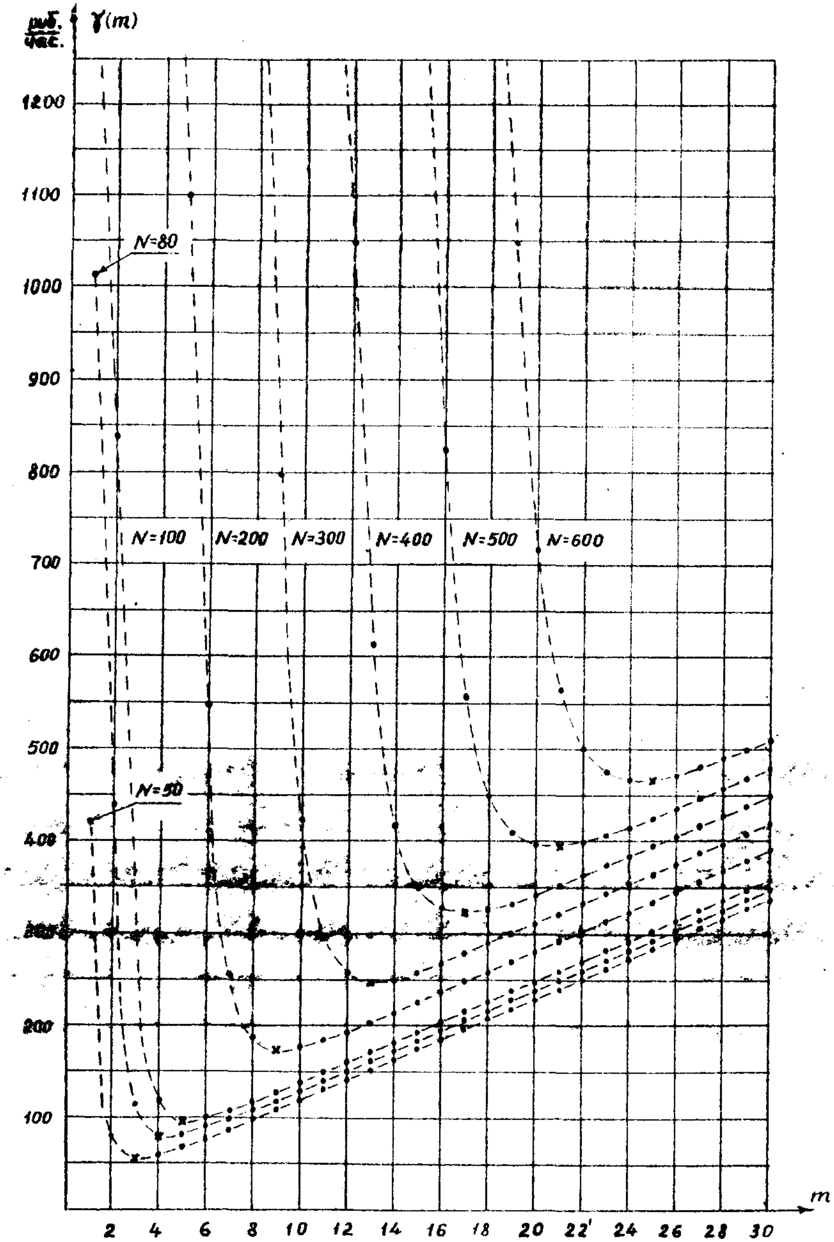
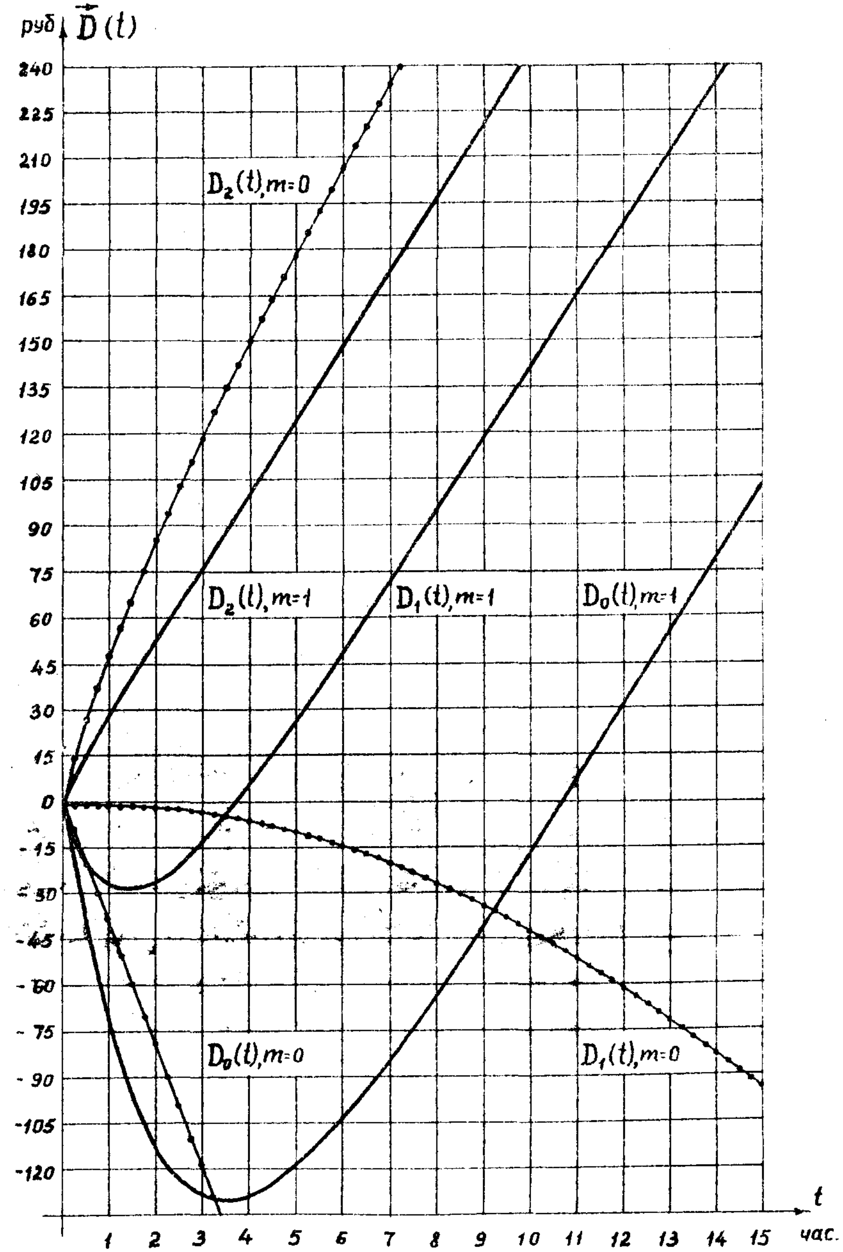


Рис.I



руб./час.
γ(m)
1200
1100
1000
900
800
700
600
500
400
200
100
N=80
N=50
N=100
N=200
N=300
N=400
N=500
N=600
2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30
m

Рис.2.



руб
$\vec{D}(t)$
240 225 210 195 180 165 150 135 120 105 90 75 60 45 30 15 0 -15 -30 -45 -60 -75 -90 -105 -120
$D_2(t), m=0$
$D_2(t), m=1$
$D_1(t), m=1$
$D_0(t), m=1$
$D_0(t), m=0$
$D_1(t), m=0$
t
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
час.

Рис.3

Т а б л и ц а I

Состояние $i\in E$, $E=\{0,1,2\}$	Стратегия m_i	Интенсивность перехода $\varkappa_{i0}^{m_i}$	$\varkappa_{i1}^{m_i}$	$\varkappa_{i2}^{m_i}$	Норма выручки $d_i^{m_i}$
$i=0$ (обе ЭМ неисправны)	$m_0=0$	0	0	0	- 40
	$m_0=$ I	-0,7	0,7	0	- 89
	$m_0=2$	-I,4	I,4	0	- I38
$i=$ I (одна ЭМ неисправна)	$m_1=0$	0,024	-0,024	0	0
	$m_1=$ I	0,024	-0,724	0,7	- 49
$i=2$ (обе ЭМ исправны)	$m_2=0$	0	0,048	-0,048	40

$$g^{\vec M'} = -40,$$
$$g^{\vec M'} = 0 + 0{,}024\,D_0^{\vec M'} - 0{,}024\,D_1^{\vec M'},$$
$$g^{\vec M'} = 40 + 0 + 0{,}048\,D_1^{\vec M'} - 0{,}048\,D_2^{\vec M'}.$$

Решением последней системы является

$$D_0^{\vec M'}=0,\quad D_1^{\vec M'}=1666{,}7,\quad D_2^{\vec M'}=3333{,}3,\quad g^{\vec M'}=-40.$$

3. Выполним операцию улучшения решения. Воспользовавшись критерием (3.3) имеем:

$$d_0^0+\sum_{j=0}^{2}\varkappa_{0j}^0 D_j^{\vec M'}=-40 \qquad d_1^0+\sum_{j=0}^{2}\varkappa_{1j}^0 D_j^{\vec M'}=-40$$
$$d_0^1+\sum_{j=0}^{2}\varkappa_{0j}^1 D_j^{\vec M'}=1077{,}7 \qquad d_1^1+\sum_{j=0}^{2}\varkappa_{1j}^1 D_j^{\vec M'}=22077{,}4$$
$$d_0^2+\sum_{j=0}^{2}\varkappa_{0j}^2 D_j^{\vec M'}=2195{,}4$$

4. Выбираем в качестве нового решения $\vec M'=\{2,1,0\}$.

5. Решением уравнений (3.2) для вектор-решения $\vec M'$ является

$$D_0^{\vec M'}=0,\quad D_1^{\vec M'}=122{,}7,\quad D_2^{\vec M'}=245,\quad g^{\vec M'}=42.$$

6. Выполняя операции улучшения решения и проверки оптимальности вектор-решения, убеждаемся, что оптимальным решением (3.I) будет $\vec M^*=\{2,\mathrm{I},0\}$.

Таким образом, если в каждом состоянии $i\in E$ будет использовано $m_i=(N-i)$ восстанавливающих устройств, то прибыль $g=42$ руб/час будет максимальной.

Для рассматриваемого варианта организации восстановительных работ в однородной УВС можно сформулировать следующее п р а в и л о : если справедливы неравенства $\lambda<\mu$, $c_1>c_2$, то для обеспечения максимума прибыли, приносимой системой, требуется

для каждого состояния УВС $i\in E$ иметь столько восстанавливающих устройств, сколько отказавших ЭМ, то есть чтобы $m_i^*=(N-i)$.

4°. Найдем оптимальное решение для второго варианта организации восстановительных работ в УВС "Минск-222", $N=2$.

Стратегии m для каждого состояния $i\in E$, $E=\{0,\mathrm{I},2\}$, интенсивности переходов $\varkappa_{ij}^m$, $j\in E$, нормы выручек d_i^m, стационарные вероятности состояний p_i^m приведены в таблице 2.

Т а б л и ц а 2

m	$i\in E$	$\varkappa_{i0}^m$	$\varkappa_{i1}^m$	$\varkappa_{i2}^m$	d_i^m	p_i^m
$m=0$	$i=0$	0	0	0	-40	I
	$i=$ I	0,024	-0,024	0	0	0
	$i=2$	0	0,048	-0,048	40	0
$m=$ I	$i=0$	-0,7	0,7	0	-89	0,002
	$i=$ I	0,027	-0,724	0,7	-49	0,065
	$i=2$	0	0,048	-0,048	29	0,933
$m=2$	$i=0$	-I,4	I,4	0	-I38	0,00I
	$i=$ I	0,024	-0,724	0,7	-60	0,064
	$i=2$	0	0,048	-0,048	I8	0,935

Выпишем решения системы (3.4) для различных стратегий:

$$D_0^0=0,\quad D_1^0=1666{,}7,\quad D_2^0=3333{,}3,\quad g^0=-40;$$
$$D_0^1=0,\quad D_1^1=161{,}5,\quad D_2^1=271,\quad g^1=23{,}7;$$
$$D_0^2=0,\quad D_1^2=107{,}8,\quad D_2^2=216,\quad g^2=12{,}8.$$

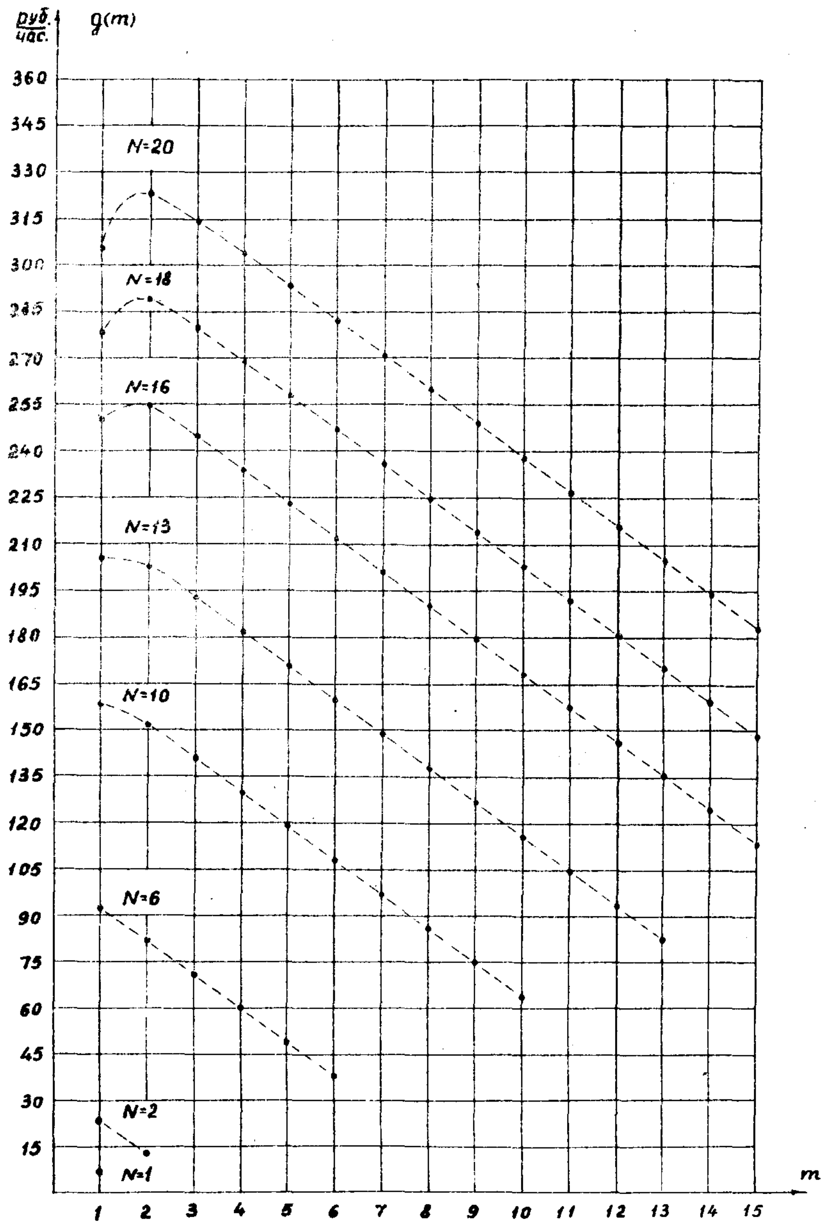
Используя критерий (3.5) замечаем, что

$$g^{m^*}=max\{g^0=-40,\ g^1=23{,}7,\ g^2=12{,}8\}=g^1.$$

Таким образом, оптимальным решением для данного варианта организации восстановительных работ в системе "Минск-222" $(N=2)$ будет $m^*=$ I. Если мы воспользуемся для расчета $g^m, m\in E$, формулой (3.6), то получим то же оптимальное решение $m^*=$ I.

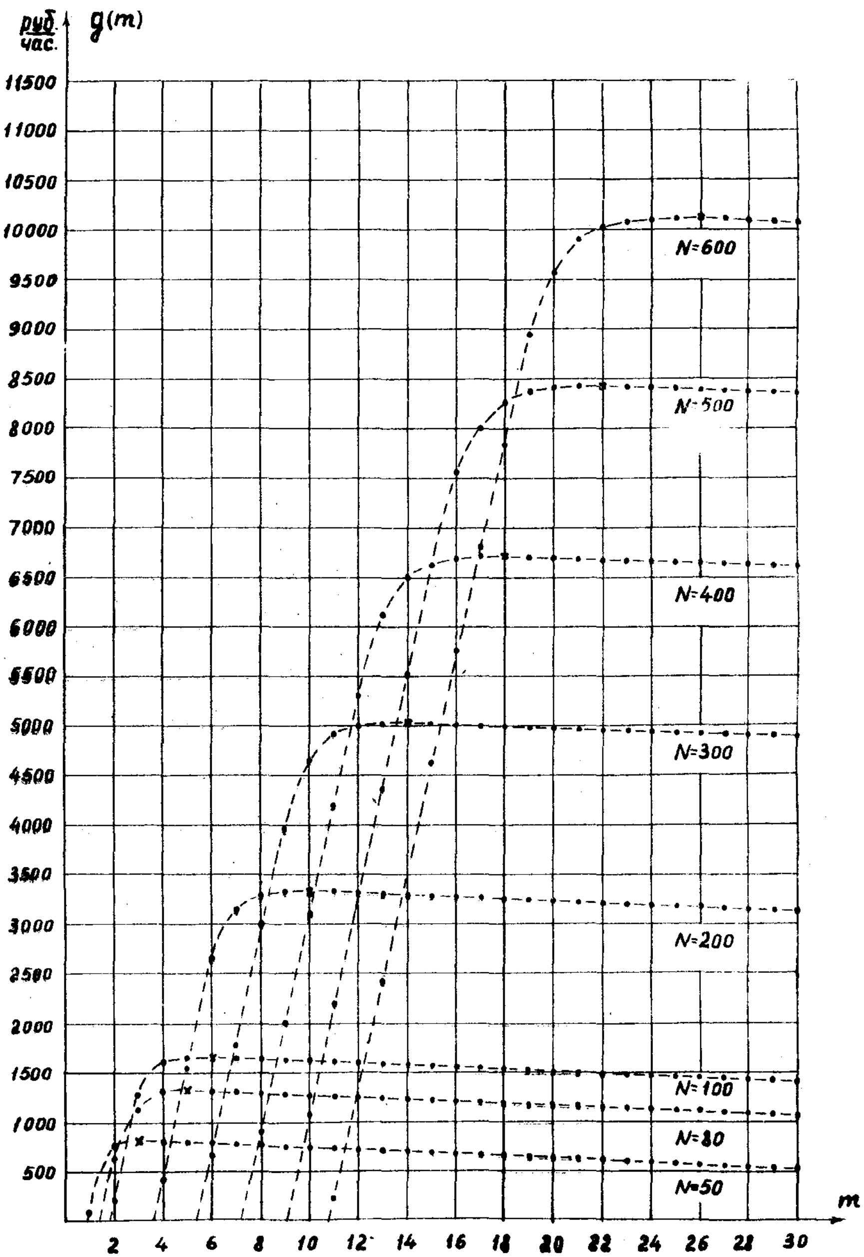
5°. Зависимость прибыли от числа восстанавливающих устройств, функция $g(m)$, для однородных УВС малой и средней производительности изображена на рис. 4, а для систем высокой производительности – на рис. 5.

Расчеты показывают, что для сосредоточенных [I] систем малой производительности в случае второго варианта организации восстановительных работ максимум прибыли обеспечивается при одном восстанавливающем устройстве, $m^*=$ I, а для систем средней и высокой производительности – при $m^*\leq 0{,}1N$. Кроме того, для



руб./час.
g(m)
360
345
330
315
300
285
270
255
240
225
210
195
180
165
150
135
120
105
90
75
60
45
30
15
N=20
N=18
N=16
N=13
N=10
N=6
N=2
N=1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
m

Рис.4.



руб./час.
g(m)
11500
11000
10500
10000
9500
9000
8500
8000
7500
7000
6500
6000
5500
5000
4500
4000
3500
3000
2500
2000
1500
1000
500
N=600
N=500
N=400
N=300
N=200
N=100
N=80
N=50
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
26
28
30
m

Рис.5

систем высокой производительности при увеличении числа ЭМ в системе, $N \to \infty$, отношение оптимального решения к числу ЭМ падает, $\frac{m^*}{N} \to 0$.

Результаты данной работы позволяют сделать следующий вывод: однородные универсальные вычислительные системы с точки зрения надежности и стоимости систем являются перспективным направлением в вычислительной технике.

Литература

1. Э.В. Евреинов, Ю.Г. Косарев. Однородные универсальные вычислительные системы высокой производительности. Новосибирск, Изд-во "Наука", Сибирское отделение, 1966.
2. В.Г. Хорошевский. Некоторые вопросы анализа и синтеза однородных универсальных вычислительных систем с избыточностью. - Изв. АН СССР, Техническая киоернетика, в печати.
3. А. Кофман, Р. Крюон. Массовое обслуживание. М., Изд-во "Мир", 1965.
4. В.Г. Хорошевский. Живучие однородные универсальные вычислительные системы. - Вычислительные системы, Новосибирск, Изд-во "Наука", Сиоирское отделение, в печати.
5. Р.А. Ховард. Динамическое программирование и марковские процессы. М., Изд-во "Сов. радио", 1964.
6. Э.В. Евреинов, Г.П. Лопато. Универсальная вычислительная система "Минск-222". - Вычислительные системы, Новосибирск, Изд-во "Наука", Сибирское отделение, 1966, вып. 23, стр. 13-20.
7. Э.В. Евреинов. Вычислительные системы малой и средней производительности. - Вычислительные системы, Новосибирск, Изд-во "Наука", Сибирское отделение, 1966, вып. 23, стр. 5-12.

Поступила в редакцию
18.III.1967 г.