В Ы Ч И С Л И Т Е Л Ь Н Ы Е   С И С Т Е М Ы
1968 г. Выпуск 3I

УДК 681.I42.I.0I

НЕКОТОРЫЕ АЛГОРИТМЫ ЛОГИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ НАД БУЛЕВЫМИ МНОЖЕСТВАМИ

М.А.Гогина, Я.В. Ковалин, И.А.Кононенко, Ю.И. Кузякин.

I. Логические операции над множествами булевых функций (картинная логика)

Основные логические процедуры рассмотренного в [I] метода сводятся к многократному использованию логического сложения и умножения, а также обратных им операций над таблицами нескольких уровней. Именно эти операции наиболее легко реализуются методами картинной логики.

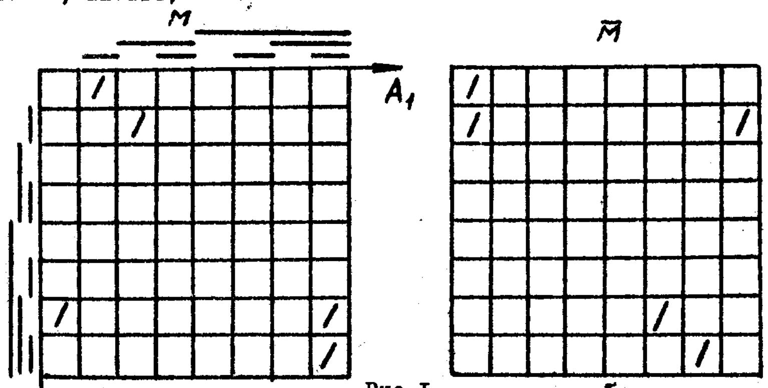
Координатная форма представления функций

Запись булевой функции в канонической форме [I] разбивается на несколько частей: $A_1, A_2, \ldots, A_p$

$$A = \underbrace{010}_{A_4}\ \underbrace{0010}_{A_3}\ \underbrace{110111}_{A_2}\ \underbrace{0111}_{A_1}$$

и в системе координат $A_1, A_2, \ldots, A_p$ представляется одной точкой, что соответствует записи единицы в одну из ячеек p - мерного куба. Для простоты изложения в дальнейшем будем рассматривать двумерную (матричную) форму записи функций. Направление отсчета по осям A_1 и A_2 в оперативной памяти ЦВМ удобно принять так, как показано на рис. Iа, полагая, что отсчет по оси A_1 начинается со старшего разряда непосредственно за знаковым, а направление оси A_2 совпадает с направлением роста

номеров ячеек оперативной памяти. В приведенной на рис. I а матрице записаны пять шестиразрядных функций: 00000I, 00I0I0, II0000, II0III, IIIIII.



а Рис.I. б

Поле матрицы будем делить на столбцы и строки, приписывая им соответствующий номер по осям A_1 и A_2. Все столбцы и строки будем относить к четным или нечетным I-го, 2-го, 3-го, 4-го и т.д. порядков в зависимости от того, содержит I-й, 2-й, 3-й, 4-й и т.д. разряд двоичной формы записи номера столбца (строки) 0 или I. Множество функций в матрице будем обозначать через M, а матрицу, содержащую все инверсии этих функций, - через $\bar{M}$.

Прямые логические операции

А) Операция инвертирования осуществляется одновременно над всеми функциями матрицы M и состоит в развороте её на I80° относительно своего центра (см.рис.Iб). Справедливость этого факта вытекает из принятого способа представления функций.

Б) Под объединением матриц M_1 и M_2 будем понимать образование матрицы M, содержащей все функции матриц M_1 и M_2. $M = M_1 \cup M_2$. Объединение осуществляется путем применения машинной операции "ИЛИ" к одноименным строкам матриц M_1 и M_2.

В) Операция пересечения матриц M_1 и M_2 состоит в выделении всех функций, принадлежащих только обеим матрицам. $M = M_1 \sqcap M_2$.

Осуществляется путем применения машинной операции "И" к одноименным строкам обеих матриц.

Г) Под разностью матриц M_1 и M_2 (операция вычитания) будем понимать матрицу M', содержащую лишь те функции, которые принадлежат матрице M_1 и не принадлежат матрице M_2. $M = M_1 \setminus M_2$. Если все функции матрицы M_2 содержатся в матрице M_1, то для выполнения операции вычитания можно воспользоваться машинной операцией отрицания равнозначности, примененной к одноименным строкам обеих матриц. Отметим, что $(M_1 \cup M_2) \setminus M_2$ не совпадает с M_1.

Д) Под прямым произведением матриц M_1 и M_2 понимается матрица M, образованная композицией любых пар элементов матриц M_1 и M_2 по правилу $a R b = c$, где a, b, c –элементы матриц M_1, M_2; M; R –двуместная логическая операция дизъюнкции или конъюнкции.

Прямое произведение матриц M_1 и M_2 находится объединением частных результатов прямого произведения M_1 на каждый из элементов b_i матрицы M_2. Правило определения частных результатов состоит в следующем:

а) если R –операция дизъюнкции, то на первом шаге все четные столбцы матрицы M_1 I-го, 2-го, 3-го, 4-го и т.д. порядков перед занесением в матрицу частного результата последовательно сдвигаются вправо по оси A_1 на I,2,4,8 и т.д. столбцов или же заносятся на свои места в зависимости от того, содержит ли I-й, 2-й, 3-й, 4-й и т.д. разряды двоичного кода номера столбца матрицы M_2, где записан элемент b_i, I или 0; на втором шаге аналогичная операция сдвига вверх по оси A_2 осуществляется над строками матрицы частного результата в зависимости от двоичного кода номера строки матрицы M_2, в которой записан элемент b_i;

б) если R –операция конъюнкции, то на первом шаге все нечетные столбцы матрицы M_1 I-го, 2-го, 3-го, 4-го и т.д. порядков при занесении в матрицу частного результата последовательно сдвигаются влево по оси A_1 на I,2,4,8 и т.д. столбцов или же заносятся на свои места в зависимости от того, содержит ли I-й, 2-й, 3-й, 4-й и т.д. разряды двоичного кода номера столбца матрицы M_2, где записан элемент b_i, I или 0; на втором шаге аналогичная операция сдвига вниз по оси A_2 осуществляется над строками матрицы частного результата в зависимости от двоичного кода номера строки матрицы M_2, в которой записан элемент b_i.

Эти же правила распространяются и на случай многомерного представления булева множества. Так как в ЦВМ нельзя осуществить параллельный сдвиг всех столбцов или строк матрицы, то логические операции над матрицами реализуются построчно. При этом для прямого произведения двух матриц, содержащих по 500 функций, затрачивается порядка 55 тыс. тактов, в то время как эта операция непосредственно над функциями этих матриц при канонической форме записи с последующим упорядочением ре-

зультата потребует не менее 250 млн. машинных тактов при гораздо большей потребности в объеме оперативной памяти.

На рис.2,а,б показана процедура выполнения операции прямого произведения над матрицами M_1 и M_2 для обоих случаев.

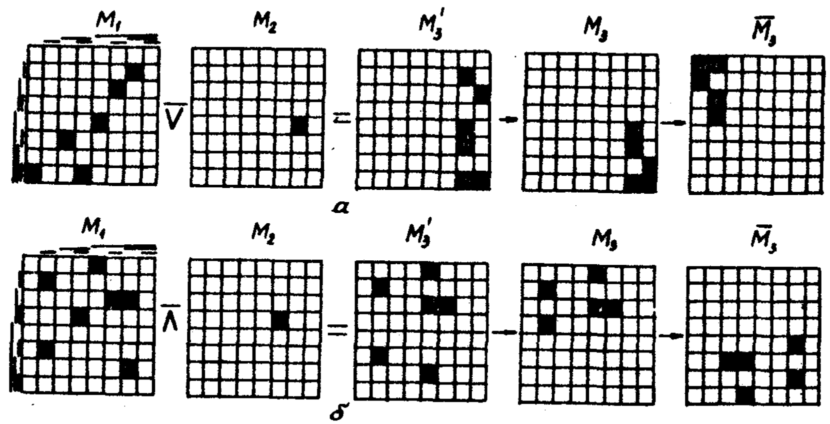


Рис.2

Программа выполнения операции прямого произведения занимает около двухсот ячеек оперативной памяти. При желании экономить память операцию прямого произведения для конъюнктивного случая можно реализовать следующим образом: $M = M_1 \wedge M_2 = \overline{\overline{M}_1 \vee \overline{M}_2}$. Аналогично, импликативную операцию прямого произведения можно записать как $M = M_1 \to M_2 = \overline{M}_1 \vee M_2$.

Обратные логические операции

Операция, обратная прямому произведению матриц M_1 и M_2 (факторизация), состоит в восстановлении одного из сомножителей (M_1) по результату прямого произведения (M) и второму сомножителю (M_2). Восстановленный сомножитель (M_1) будет содержать все возможные функции, которые, будучи объединены операцией прямого произведения с функциями второго сомножителя (M_2), образуют исходный результат (M).

Алгоритм выполнения операции факторизации в некотором смысле обратен алгоритму прямого произведения и состоит в объединении частных результатов операции восстановления матрицы M_1 по каждому из элементов b_i матрицы M_2. Правило же определения частных результатов таково:

а) если R -операция дизъюнкции, то на первом шаге все нечетные строки матрицы M I-го, 2-го, 3-го, 4-го и т.д. порядков перед занесением в матрицу частного результата дополнительно сдвигаются вниз по оси A_2 на I,2,4,8 и т.д.строк или же заносятся на свои места в зависимости от того, содержит ли I-й,2-й,3-й,4-й и т.д. разряды двоичного кода номера строки матрицы M_2, где записан элемент b_i, I или 0; на втором шаге аналогичная операция сдвига влево по оси A_1 осуществляется над столбцами матрицы частного результата в зависимости от двоичного кода номера столбца матрицы M_2, в которой записан элемент b_i;

б) если R -операция конъюнкции, то на первом шаге все четные строки матрицы M I-го, 2-го, 3-го,4-го и т.д. порядков перед занесением в матрицу частного результата дополнительно сдвигаются вниз по оси A_2 на I,2,4,8 и т.д. строк или же заносятся на свои места в зависимости от того, содержит ли I-й,2-й,3-й, 4-й и т.д. разряды двоичного кода номера строки матрицы M_2, где записан элемент b_i, I или 0; на втором шаге аналогичная операция сдвига столбцов вправо по оси A_1 осуществляется над столбцами матрицы частного результата в зависимости от двоичного кода номера столбца матрицы M_2, в которой записан элемент b_i.

2. Λ -операторы

Для удобства записи алгоритмов синтеза [I] на языке ЛЯПАС [2] были разработаны Λ -операторы, реализующие логические операции над множествами булевых функций. Большинство Λ -операторов предназначено для работы с комплексами одинаковой мощности, представляющими собой матричную форму записи множеств булевых функций.

Объединение комплексов

Операторы "объединение" ($\# \; 200 \, \alpha\beta\gamma \, //$) и ($\# \; 207 \alpha\beta //$) реализуют логическую операцию объединения двух булевых множеств $\gamma = \alpha \cup \beta$, где i -ый элемент комплекса γ представляет собой дизъюнкцию i -ых элементов комплексов α и β.

В операторе ($\# \; 207 \, \alpha\beta //$) засылка результата производится в комплекс β $\alpha \cup \beta \Rightarrow \beta$.

<u>Объединение</u> $\alpha\kappa+, \beta\kappa+, \gamma\kappa \, /-, \alpha/(\alpha\beta\gamma)$

200 [illegible]

§ I $\overset{0a}{\alpha_a} \vee \beta_a \Rightarrow \gamma_a \;\; \Delta a - B_\alpha \multimap 1.$

<u>Объединение</u> $\alpha\kappa+, \beta\kappa \, /-, \alpha/(\alpha\beta)$

207 [illegible]

§ I $\overset{0a}{\alpha_a} \vee \beta_a \Rightarrow \beta_a \;\; \Delta a - B_\alpha \multimap 1.$

Пересечение комплексов

Операторы "пересечение" ($\# \; 20I \, \alpha\beta\gamma //$) и ($\# \; 2I0 \, \alpha\beta //$) реализуют логическую операцию пересечения двух булевых множеств $\gamma = \alpha \cap \beta$, где i -ый элемент комплекса γ представляет собой конъюнкцию i -ых элементов комплексов α и β.

В операторе ($\# \; 2I0 \, \alpha\beta //$) засылка результата производится в комплекс β $\alpha \cap \beta \Rightarrow \beta$.

<u>Пересечение</u> $\alpha\kappa+, \beta\kappa+, \gamma\kappa/-, \alpha/(\alpha\beta\gamma)$

20I 034 I

§ I $\overset{0a}{\alpha a} \wedge \beta a \Rightarrow \gamma a \; \Delta a - B\alpha \multimap 1.$

<u>Пересечение</u> $\alpha_\kappa+, \beta\kappa/-, \alpha/(\alpha\beta)$

2I0 033 I

§ I $\overset{0a}{\alpha a} \wedge \beta a \Rightarrow \beta a \, \Delta a - B\alpha \multimap 1.$

Вычитание комплексов

Операторы "вычитание" ($\# \; 202 \alpha\beta\gamma //$) и ($\# \; 2II \alpha\beta //$)реализуют логическую операцию определения разности двух булевых множеств $\gamma = \alpha \setminus \beta$, где i -ый элемент комплекса γ представляет собой отрицание импликации i -ых элементов комплексов α и β.

В операторе ($\# \; 2II \, \alpha\beta //$) засылка результата производится в комплекс β $\alpha \setminus \beta \Rightarrow \beta$.

<u>Вычитание</u> $\alpha\kappa+, \beta\kappa+, \gamma\kappa/-, \alpha/(\alpha\beta\gamma)$

202 036 I

§ I $\overset{0a}{\alpha_a} \neg \vee \beta_a \neg \Rightarrow \gamma_a \;\; \Delta a - B_\alpha \multimap 1.$

<u>Вычитание</u> $\alpha\kappa+, \beta\kappa/-, \alpha/(\alpha\beta)$

2II 035 I

§ I $\overset{0a}{\alpha_a} \neg \vee \beta_a \neg \Rightarrow \beta_a \;\; \Delta a - B_\alpha \multimap 1.$

Инверсия комплекса

Оператор "инверсия" (# 203$\alpha\beta\gamma$//) реализует логическую операцию инвертирования всех функций булева множества и сводится к развороту комплекса на 180^0 относительно своего центра.

Инверсия $\alpha\kappa+, \beta\kappa\ /-, \mathit{в}/(\alpha\beta)$

203 041 I

$oa\ B_\alpha \Rightarrow \mathit{в}\ \bar\Delta\ \mathit{в}$

§ I $\alpha_a \bar{I} \Rightarrow \beta_{\mathit{в}}\ \ \bar\Delta\ \mathit{в}\ \ \Delta a - B_\alpha \multimap 1.$

Прямое произведение комплексов

Операторы "прямое произведение по $\vee$ " (# 204 $\alpha\beta\gamma\delta$ //) и "прямое произведение по $\wedge$ " (# 214 $\alpha\beta\gamma\delta$ //) реализуют логические операции прямого произведения двух булевых множеств, представленных в матричной форме. $\alpha R \beta = \delta$, где α , β - перемножаемые матрицы; R -операция дизъюнкции или конъюнкции; δ - матрица результата; γ - матрица для получения промежуточных (частных) результатов.

Прямое произведение по $\vee$ $\alpha\kappa+, \beta\kappa+, \gamma\kappa, \delta\kappa / \underline{\mathit{в}}, g/(\alpha\underline{a})(\gamma\underline{\mathit{в}})$

204 331 015

$oa\ \ oc\ \ og$

§ I $o\delta_a\ \ \Delta a - B\delta \multimap 1\ oa$

§ 2 $\alpha_g \Rightarrow \underline{a}$

§ 3 $\underline{a}\ \mathcal{X}\ 15\mathit{в}\ \ 37 \Rightarrow d$

§ 4 $\beta a \Rightarrow \gamma_a\ \ \Delta a - B_\beta \multimap 4\ oa$

§ 5 $\mathit{в} \wedge C_d \multimap 7$

§ 6 $\gamma_a \wedge D_c \Rightarrow \underline{\mathit{в}} \oplus \gamma_a \Rightarrow \gamma_a\ \underline{\mathit{в}} > Cd \vee \gamma_a \Rightarrow \gamma_a$
$\Delta a - B\gamma \multimap 6\ oa$

§ 7 $\Delta c\ \bar\Delta d \oplus 32 \mapsto 5\ oc\ \ 37 \Rightarrow d$

§ 10 $g \wedge Cd \multimap 13$

§ 11 oe

§ 12 $\gamma_a \Rightarrow \underline{\mathit{в}}\ \ o\gamma_a\ \ a + Cd \Rightarrow f\ \ \underline{\mathit{в}} \vee \gamma_f \Rightarrow \gamma_f\ \Delta a$
$\Delta e - Cd \multimap 12\ \ a + Cd \Rightarrow a - B\gamma \multimap 11\ oa$

§ 13 $\bar\Delta d\ \ Cd \oplus B_\alpha \mapsto 10$

§ 14 $\gamma_a \vee \delta_a \Rightarrow \delta_a\ \ \Delta a - B\gamma \multimap 14\ \ oa \rightarrow 3$

§ 15 $\Delta g - B\alpha \multimap 2.$

Прямое произведение по $\wedge$ $\alpha\kappa+, \beta\kappa+, \gamma\kappa; \delta\kappa / \underline{\mathit{в}}, g/(\alpha\underline{a})(\gamma\underline{\mathit{в}})$

214 332 15

$oa\ \ oc\ \ og$

§ 1 $o\delta_a\ \ \Delta a - B\delta \multimap 1\ oa$

§ 2 $\alpha_g \Rightarrow \underline{a}$

§ 3 $\underline{a}\ \mathcal{X}\ 15\mathit{в}\ \ 37 \Rightarrow d$

§ 4 $\beta_a \Rightarrow \gamma_a\ \ \Delta a - B_\beta \multimap 4\ oa$

§ 5 $\mathit{в} \wedge C_d \mapsto 7$

§ 6 $\gamma_a \wedge E_c \Rightarrow \underline{\mathit{в}} \oplus \gamma_a \Rightarrow \gamma_a\ \underline{\mathit{в}} < Cd \vee \gamma_a \Rightarrow \gamma_a$
$\Delta a - B\gamma \multimap 6\ oa$

§ 7 $\Delta c\ \bar\Delta d \oplus 32 \mapsto 5\ \ oc\ 37 \Rightarrow d$

§ 10 $g \wedge Cd \mapsto 13\ \ \ B\gamma \Rightarrow a$

§ 11 oe

§ 12 $\bar\Delta a\ \ \gamma_a \Rightarrow \underline{\mathit{в}}\ \ o\gamma_a\ \ a - Cd \Rightarrow f\ \underline{\mathit{в}} \vee \gamma_f \Rightarrow \gamma_f$
$\Delta e - Cd \multimap 12\ \ \ a - Cd \Rightarrow a \mapsto 11\ oa$

§ 13 $\bar\Delta d\ Cd \oplus B_\alpha \mapsto 10$

§ 14 $\gamma_a \vee \delta_a \Rightarrow \delta_\alpha\ \ \Delta a - B\gamma \multimap 14\ \ oa \rightarrow 3$

§ 15 $\Delta g - B\alpha \multimap 2.$

Факторизация

Операторы "факторизация по $\vee$ " (# 216 $\alpha\beta\gamma\delta$ //) и "факторизация по $\wedge$ "(# 217 $\alpha\beta\gamma\delta$ //) реализуют логические операции определения фактор-множества множества β по отношению к δ, если $\delta R \beta = \alpha$. Здесь R -операция дизъюнкции или конъюнкции, γ - матрица для получения промежуточных результатов.

Факторизация по $\vee$ $\alpha\kappa+, \beta\kappa+, \gamma\kappa, \delta\kappa / \underline{a}, g / (\alpha\ \underline{a})$

216 304 15

$oa\ \ og$

§ 1 $o\delta_a\ \ \Delta a - B\delta \multimap 1\ \ oa$

§ 2 $\alpha_g \Rightarrow \underline{a}$

§ 3 $\underline{a}\ \mathcal{X}\ 15\mathit{в}\ \ 37 \Rightarrow d$

§ 4 $\beta a \Rightarrow \gamma_a\ \ \Delta a - B_\beta \multimap 4\ oa\ \ oc$

§ 5 $\mathit{в} \wedge Cd \multimap 7$

§ 6 $\gamma_a \wedge E_c < Cd \vee \gamma_a \Rightarrow \gamma_a\ \ \Delta a - B\gamma \multimap 6\ oa$

§ 7 $\Delta c\ \bar\Delta d \oplus 32 \mapsto 5\ \ 37 \Rightarrow d$

§ 10 $g \wedge Cd \multimap 13\ \ \ B\gamma \Rightarrow a$

§ 11 oe

§ 12 $\bar\Delta a\ \ - Cd \Rightarrow f\ \ \gamma_a \vee \gamma_f \Rightarrow \gamma_f\ \Delta e - Cd \multimap 12$
$a - Cd \Rightarrow a \mapsto 11$

§ 13 $\bar{\Delta} d\ Cd\ \oplus B_\alpha \vdash 10\ oa$
§ 14 $\gamma_a \vee \delta_a \Rightarrow \delta_a\ \ \Delta a - B\gamma \circ\!\!\rightarrow 14\ \ oa \rightarrow 3$
§ 15 $\Delta g - B_\alpha \circ\!\!\rightarrow 2.$

Факторизация по Λ. $\alpha\kappa+, \beta\kappa+, \gamma\kappa, \delta\kappa\ /\underline{a}, g/(\alpha\underline{a})$
217 304 15

$oa\ og$
§ 1 $o\delta_a\ \ \Delta a - B\delta \circ\!\!\rightarrow 1\ oa$
§ 2 $\alpha_g \Rightarrow \underline{a}$
§ 3 $\underline{a}\ æ\ 15\ b\ \ 37 \Rightarrow d$
§ 4 $\beta_a \Rightarrow \gamma_a\ \ \Delta a - B_\beta \circ\!\!\rightarrow 4\ \ oa\ oc$
§ 5 $b \wedge Cd \vdash 7$
§ 6 $\gamma_a \wedge D_c > Cd \vee \gamma_a \Rightarrow \gamma_a\ \ \Delta a - B\gamma \circ\!\!\rightarrow 6\ oa$
§ 7 $\Delta c\ \ \bar{\Delta} d \oplus 32 \vdash 5\ \ 37 \Rightarrow d$
§ 10 $g \wedge Cd \vdash 13$
§ 11 oe
§ 12 $a + Cd \Rightarrow f\ \ \gamma_a \vee \gamma_f \Rightarrow \gamma_f\ \ \Delta a\ \ \Delta e - Cd \circ\!\!\rightarrow 12$
$a + Cd \Rightarrow a - B\gamma \circ\!\!\rightarrow 11\ oa$
§ 13 $\bar{\Delta} d\ \ Cd\ \oplus B_\alpha \vdash 10$
§ 14 $\gamma_a \vee \delta_a \Rightarrow \delta_a\ \ \Delta a - B\gamma \circ\!\!\rightarrow 14\ \ oa \rightarrow 3$
§ 15 $\Delta g - B_\alpha \circ\!\!\rightarrow 2.$

Выбор очередного элемента

Оператор "выборка" ($\#222\ \alpha\beta\gamma\delta$ //) реализует операцию извлечения из матрицы α по заданным координатам очередного элемента из булева множества, представленного в матричной форме.

Выборка $\alpha\kappa+, \beta и, \gamma и, \delta и\ /-, b/$
222 100 4

$o\delta$
§ 1 $\beta > 5 \Rightarrow a < 5\ \oplus \beta + 1 \Rightarrow b$
§ 2 $\alpha_a < b \circ\!\!\rightarrow 3 \vdash +b \Rightarrow \gamma$
$a < 5 \vee \gamma \Rightarrow \gamma \rightarrow 4$
§ 3 $ob\ \Delta a - B_\alpha \circ\!\!\rightarrow 2\ \ oa\ \Delta\delta - 2 \circ\!\!\rightarrow 2$
§ 4 .

Вероятностная выборка элемента

Оператор "вероятностная выборка" ($\#230\ \alpha\beta$ //) реализует операцию равновероятного извлечения любого элемента множества булевых функций, представленного в матричной форме.

Вероятностная выборка $\alpha\kappa+, \beta и\ /-, h/$
230 137 5

$oa \Rightarrow b \Rightarrow e \Rightarrow f \Rightarrow g\ \bar{o} h$
§ 1 $\alpha_a \nabla + b \Rightarrow b\ \Delta a - B_\alpha \circ\!\!\rightarrow 1\ \ \ \underline{я} \Rightarrow c : b \Rightarrow d$
§ 2 $\alpha_e \Rightarrow \kappa$
§ 3 $\kappa < f \Rightarrow \kappa \circ\!\!\rightarrow 4 \vdash +1 \Rightarrow f + g \Rightarrow g\ \Delta h - d$
$\circ\!\!\rightarrow 3 \rightarrow 5$
§ 4 $of \Rightarrow g\ \Delta e - B_\alpha \circ\!\!\rightarrow 2$
§ 5 $\bar{\Delta} g\ e < 5 \vee g \Rightarrow \beta.$

Литература

1. В.П. Чистов. Синтез комбинационных схем с минимальной глубиной преобразования. - Настоящий сборник, стр.55-71.
2. А.Д. Закревский. Описание языка ЛЯПАС. В сб. "Логический язык для представления алгоритмов синтеза релейных устройств", Москва, Изд-во "Наука", 1966.

Поступила в редакцию
1/VIII-1967 г.