ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ
1969 г. Выпуск 38

УДК 519.95

АНАЛИЗ НАДЕЖНОСТИ ИСТИННОСТНЫХ ЛОГИЧЕСКИХ СЕТЕЙ, РЕАЛИЗОВАННЫХ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СРЕДЕ

Л.И. Макаров, Ю.В. Мерекин

В работе [I] рассмотрены некоторые алгоритмы отображения логических сетей в вычислительные среды (ВС). Результатом применения этих алгоритмов является программа M_L, соответствующая исходной логической сети L. Ниже предлагаются методы анализа надежности программы ВС, соответствующих истинностным логическим сетям [2] . Эти методы позволяют при некоторых ограничениях на типы отказов элементов ВС или на типы ВС свести анализ надежности программ ВС к анализу надежности эквивалентных логических сетей.

Методика получения эквивалентных логических сетей заключается в том, что ненадежные элементы ВС заменяются фиктивными схемами.

В данной работе используются понятия и обозначения, введенные в работах [I], [3].

I. Характеристики надежности

Пусть дана программа M_L, соответствующая логической сети L, реализующей булеву функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Входы тех элементов ВС, на которые подаются входные переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ будем называть входами программы M_L, а выход элемента ВС, с которого снимается выходная переменная

$z=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, - выходом программы M_L . Предположим, что состояние i-го входа ($i=1,2,\ldots,n$) программы M_L есть случайная величина $x_i \in \{0,1\}$, распределение вероятностей которой задано: $\mathcal{P}(x_i=0)=q_{x_i}$, $\mathcal{P}(x_i=1)=p_{x_i}$, и все x_i независимы в совокупности.

Каждый элемент ВС можно представить состоящим из двух подэлементов (рис.I): подэлемента настройки (ПН) и функционального подэлемента (ПФ); ($\tilde{y}_н$ -входы настройки, $\tilde{y}$ -информационные входы, $\tilde{z}$ - выходы элемента ВС). ПН настраивает ПФ на выполнение одной из функций базиса $B_{ВС}$, а ПФ выполняет эту функцию, т.е. число различных состояний ПН равно числу функций базиса $B_{ВС}$. Пронумеруем состояния ПН от I до k .

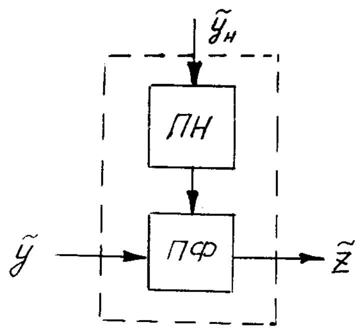

Рис.I.

Пусть номер состояния ПН произвольного элемента ВС есть случайная величина с заданным распределением условных вероятностей : $\mathcal{P}(j/i)$; $i=1,2,\ldots,k$; $j=1,2,\ldots,k$, причем

$$\sum_j \mathcal{P}(j/i)=1.$$

Тогда под о т к а з о м ПН этого элемента будем понимать событие, состоящее в том, что ПН находится в данный момент времени в состоянии j , отличном от начального i -го состояния ПН, задаваемого исходной программой M_L .Очевидно, что при идеальной работе ПН $\mathcal{P}(i/i)=1$. Предположим, что вероятность пребывания ПН каждого элемента ВС в произвольный момент времени в j -м состоянии зависит только от начального i -го состояния ПН этого элемента.

Пусть ПН некоторого элемента ВС находится в i -м состоянии и ПФ этого элемента выполняет соответствующую функцию $f_i \in B_{ВС}$. Тогда под о т к а з о м П Ф данного элемента ВС будем понимать событие, состоящее в том, что выход ПФ имеет состояние,противоположное состоянию выхода при идеальной работе ПФ хотя бы для одного набора значений входных переменных. Обозначим вероятность отказа ПФ, выполняющего функцию $f_i \in B_{ВС}$ через $\mathcal{P}_{f_i}$. Под о т к а з о м элемента ВС будем понимать событие, состоящее в том, что выход элемента ВС имеет состояние,противоположное состоянию выхода при идеальной работе элемента хотя бы для одного

набора значений входных переменных. Предполагаем, что отказы элементов ВС независимы в совокупности.

Под о ш и б к о й программы M_L будем понимать событие, состоящее в том, что выход программы M_L имеет состояние, противоположное состоянию выхода при идеальной работе всех элементов программы.

Под н а д е ж н о с т ь ю программы M_L будем понимать вероятность безошибочной работы программы M_L в течение заданного времени T_0 .

На практике обычно в качестве характеристики отказов элементов используют λ -характеристику, представляющую собой среднее количество отказов элемента в единицу времени. Если отказы распределены во времени равномерно, то связь между λ -характеристикой элемента и вероятностью $\mathcal{P}_э$ хотя бы одного отказа элемента в течение времени T дается формулой:

$$\mathcal{P}_э = 1-e^{-\lambda T}.$$

2. Общий метод расчета надежности

Пусть дана программа M_L , соответствующая исходной логической сети (ИЛС) L , реализующей булеву функцию:

$$\varphi = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Для получения числовой оценки надежности программы M_L , элементы которой подвержены случайным отказам, заменим каждый элемент $m_i \in$ ВС некоторой фиктивной идеальной схемой, дополнительные входы $y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_t}$ которой позволяют имитировать отказы реального элемента ВС. Будем рассматривать только такие ВС, в которых из-за отказов элемента ВС не могут появиться неправильные петли [2]. Тогда ВС можно представить эквивалентной логической сетью (ЭЛС), которая на выходе программы M_L реализует некоторую булеву функцию:

$$\psi = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m),$$

где $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\} = \{y_{1_1}, y_{1_2}, \ldots, y_{1_t}, y_{2_1}, y_{2_2}, \ldots, y_{2_t}, \ldots, y_{N_1}, y_{N_2}, \ldots, y_{N_t}\}$,

N - число элементов ВС.

На некоторых наборах значений аргументов $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ функция ψ полностью совпадает с функцией φ ,а на других-совпадает не полностью.Тогда,согласно принятому выше,мерой надежности программы M_L будет служить вероятность $\mathcal{P}(\varphi\psi \vee \bar{\varphi}\bar{\psi}=1)$ совпадения значений функций φ и ψ при случайных значениях независимых аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m$.

Рассмотрим методику построения фиктивной схемы и способ нахождения значений вероятностей $\mathcal{P}(y_i = 1)$, $i=1,2,\dots,m$, для фиктивных аргументов, имитирующих случайные отказы элементов ВС.

Допустим, что в некотором элементе ВС, реализующем при идеальной работе функцию $f_0=f_0(z_1,z_2,\dots,z_k)$, могут иметь место S различных неисправностей:

$$A_1, A_2, \dots, A_S, \qquad (\mathrm{I})$$

причем элемент реализует соответственно функции

$$f_1, f_2, \dots, f_S. \qquad (2)$$

Всегда имеется возможность задать все S неисправностей так, чтобы они были альтернативны. Тогда события A_0 (элемент исправен), $A_1, A_2, \dots, A_S$ несовместны и представляют собой полную систему событий.

Каждому из событий $A_0, A_1, A_2, \dots, A_S$ поставим во взаимно однозначное соответствие одну или несколько конъюнкций вида:

$$y_{i_1}^{\sigma_{i_1}} \,\&\, y_{i_2}^{\sigma_{i_2}} \,\&\, \dots \,\&\, y_{i_t}^{\sigma_{i_t}}, \quad t \ge \,]\log_2(S+1)[\,, \qquad (3)$$

где y_{i_j} $(j=1,2,\dots,t)$ – случайные независимые в совокупности величины.

Фиктивная схема (рис.2) строится таким образом, чтобы для набора $(\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \dots, \sigma_{i_t})$ функция $\psi_0=\psi_0(z_1,z_2,\dots,z_k,\sigma_{i_1},\sigma_{i_2},\dots,\sigma_{i_t})$ совпадала с той из функций (2) или f_0, для которой на данном наборе $(\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \dots, \sigma_{i_t})$ обращаются в единицу соответствующие конъюнкции (3).

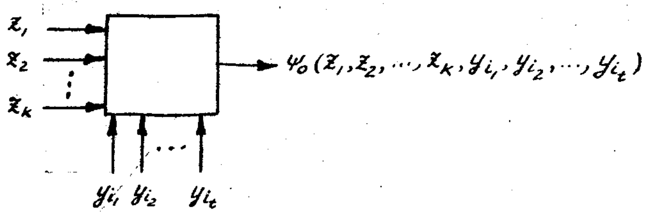

Рис.2.

При заданных вероятностях событий (I): $\mathcal{P}(A_1)=\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}(A_2)=\mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}(A_S)=\mathcal{P}_S$ вероятности обращения в единицу аргументов $y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_t}$: $\mathcal{P}(y_{i_1}=1)=\mathcal{P}_{i_1}$, $\mathcal{P}(y_{i_2}=1)=\mathcal{P}_{i_2}, \dots, \mathcal{P}(y_{i_t}=1)=\mathcal{P}_{i_t}$ находятся как корни системы уравнения:

$$\sum \mathcal{P}_{A_1} = \mathcal{P}_1,$$
$$\sum \mathcal{P}_{A_2} = \mathcal{P}_2, \qquad (4)$$
$$\dots\dots\dots$$
$$\sum \mathcal{P}_{A_S} = \mathcal{P}_S,$$

где $\sum \mathcal{P}_{A_j}$ – арифметическая форма [4] дизъюнкции элементарных конъюнкций вида (3), поставленных в соответствие событию: A_j, $j=1,2,\dots,S$.

Рассмотрим метод построения системы (4), при котором все её корни принадлежат интервалу (0,I). Положим $t=S$. Соответствие между множествами событий (I) и элементарных конъюнкций вида (3) устанавливается по следующему правилу:

$$A_1 \longleftrightarrow y_{i_1} y_{i_2},$$
$$A_2 \longleftrightarrow y_{i_1} \bar y_{i_2},$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$A_j \longleftrightarrow y_{i_j} y_{i_{j+1}} \bar y_{i_1} \bar y_{i_3} \cdots \bar y_{i_{j-2}} \text{ для нечетных } j \le t,$$

причем для $j=t$ $y_{i_{j+1}}=1$ и для $k>j-2$ $\bar y_{i_k}=1$;

$$A_j \longleftrightarrow y_{i_{j-1}} \bar y_{i_j} \bar y_{i_1} \bar y_{i_3} \cdots \bar y_{i_{j-3}} \text{ для четных } j \le t,$$

причем для $k>j-3$ $\bar y_{i_k}=1$.

Тогда, очевидно, $A_0 \longleftrightarrow \bar y_{i_1} \bar y_{i_3} \cdots \bar y_{i_\tau}$,

где $\tau = \begin{cases} t & \text{при нечетном } t, \\ t-1 & \text{при четном } t. \end{cases}$

Легко показать, что система уравнений (4), построенная по предложенным выше соответствиям, имеет корни вида:

$$\mathcal{P}_{i_1} = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2,$$
$$\mathcal{P}_{i_2} = \frac{\mathcal{P}_1}{\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2},$$
$$\mathcal{P}_{i_3} = \frac{\mathcal{P}_3 + \mathcal{P}_4}{1-(\mathcal{P}_1+\mathcal{P}_2)},$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\mathcal{P}_{i_j} = \frac{\mathcal{P}_j + \mathcal{P}_{j+1}}{1-\sum_{k=1}^{j-1}\mathcal{P}_k} \text{ для нечетных } 1 \le j \le t,$$

причем для $j=t$ $\mathcal{P}_{j+1}=0$ и для $j=1$ $\sum_{k=1}^{j-1}\mathcal{P}_k=0$;

$$\mathcal{P}_{i_j} = \frac{\mathcal{P}_{j-1}}{\mathcal{P}_{j-1}+\mathcal{P}_j} \text{ для четных } j \le t.$$

Рассмотрим методику построения фиктивной схемы на примере. Пусть ПН элемента ВС может находиться в состояниях A_0, A_1, A_2 с вероятностями $\mathcal{P}_{00}$, $\mathcal{P}_{01}$, $\mathcal{P}_{02}$, а его ПФ соответственно выполняет функции f_0, f_1, f_2. Кроме того, пусть при выполнении ПФ функции f_1 возможны отказы двух типов: S_1, S_2, где событие S_1 представляет собой появление на выходе элемента состояния "I", а событие S_2 – состояния "0" с соответствующими вероятностями $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ (в этом случае $\mathcal{P}_{f_1} = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2$). Событиям A_1, A_2, A_0 поставим в соответствие конъюнкции $y_1 y_2$, $y_1\bar{y}_2$, $\bar{y}_1$, а событиям S_1, S_2, S_0 (правильное выполнение функции f_1) конъюнкции $y_1' y_2'$, $y_1'\bar{y}_2'$, $\bar{y}_1'$. Тогда

$$\mathcal{P}(y_1=1)=\mathcal{P}_{01}+\mathcal{P}_{02}, \quad \mathcal{P}(y_1'=1)=\mathcal{P}_1+\mathcal{P}_2,$$

$$\mathcal{P}(y_2=1)=\frac{\mathcal{P}_{01}}{\mathcal{P}_{01}+\mathcal{P}_{02}}, \quad \mathcal{P}(y_2'=1)=\frac{\mathcal{P}_1}{\mathcal{P}_1+\mathcal{P}_2}$$

и $$\psi_0 = f_0\bar{y}_1 \vee (f_1\bar{y}_1' \vee 1\cdot y_1' y_2' \vee 0\cdot y_1'\bar{y}_2') y_1 y_2 \vee f_2 y_1\bar{y}_2 =$$

$$= f_0\bar{y}_1 \vee f_1\bar{y}_1' y_1 y_2 \vee y_1' y_2' y_1 y_2 \vee f_2 y_1 \bar{y}_2 .$$

3. Приближенный метод расчета

Вычислительные трудности описанного выше метода расчета, возникающие при решении практических задач, вынуждают вводить ограничения на возможные отказы элементов ВС и использовать приближенные методы расчета.

Будем характеризовать исправность ℓ-го элемента ВС $(\ell=1,2,\dots,N)$ булевой переменной $\alpha_\ell^{\sigma_\ell}$, причем $\alpha_\ell=1$ при отказе элемента ВС, $\bar{\alpha}_\ell=1$ при исправной работе. Тогда вероятность пребывания ВС в некотором состоянии $(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_N)$ находится, как вероятность обращения в единицу элементарной конъюнкции $\alpha_1^{\sigma_1} \,\&\, \alpha_2^{\sigma_2} \,\&\, \cdots \,\&\, \alpha_N^{\sigma_N}$:

$$\mathcal{P}_{\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_N} = \mathcal{P}(\alpha_1^{\sigma_1} \,\&\, \alpha_2^{\sigma_2} \,\&\, \dots \,\&\, \alpha_N^{\sigma_N}=1) = \prod_{\ell=1}^{N} \mathcal{P}(\alpha_\ell^{\sigma_\ell}=1), \qquad (5)$$

где $\mathcal{P}(\alpha_\ell=1)$ – вероятность возникновения отказа в ℓ-м элементе ВС.

Если ВС находится в некотором состоянии $(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_N)$, то, заменяя все ℓ-элементы ВС, для которых $\sigma_\ell=1$, "схемами отказов", получим ЭЛС $L(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_N)$ для данного состояния ВС. "Схема отказа" элемента строится аналогично фиктивной схеме элемента, но для системы событий $A_1, A_2, \dots, A_S$, которая приводится к полной системе путем замены вероятности $\mathcal{P}_j$ события A_j на вероятность $\mathcal{P}_j' = \frac{\mathcal{P}_j}{1-\mathcal{P}_0}$, $j=1,2,\dots,S$. Обозначим событие, в котором отсутствует ошибка на выходе ВС для состояния $(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_N)$ через $\bar{E}(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_N)$.

Тогда $\mathcal{P}(\bar{E}(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_N)) = \mathcal{P}(\varphi\cdot\psi_{\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_N} \vee \bar{\varphi}\bar{\psi}_{\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_N}=1)$,

где φ – функция, реализуемая ИЛС L, а $\psi_{\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_N}$ – функция, реализуемая ЭЛС $L(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_N)$. Выражение

$$\sum_{(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_N)} \mathcal{P}_{\sigma_1\sigma_2,\dots,\sigma_N} \cdot \mathcal{P}(\bar{E}(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_N)) \qquad (6)$$

есть безусловная вероятность отсутствия ошибки на выходе ВС, или, в нашем понимании, численная оценка надежности.

При достаточно высокой надежности элементов ВС выражение (5) стремится к нулю с увеличением количества одновременных отказов элементов, поэтому вычисление суммы (6) возможно проводить не по всем состояниям ВС, а только по наиболее вероятным. Очевидно, что это дает $\underset{\sim}{\mathcal{P}}$ – нижнюю оценку надежности программы M_L. Для получения верхней оценки $\tilde{\mathcal{P}}$ необходимо вычислить вероятность $\mathcal{P}_{ост}$ пребывания ВС в остальных состояниях и полученную величину прибавить к нижней оценке, т. е. $\tilde{\mathcal{P}} = \underset{\sim}{\mathcal{P}} + \mathcal{P}_{ост}$. Отсюда следует, что по заданной точности Δ вычисления надежности программы M_L можно установить те состояния $(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_N)$ ВС, для которых $\mathcal{P}_{ост} = 1-\sum \mathcal{P}_{\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_N} \le \Delta$, и вычисление надежности проводить только по этим состояниям.

Л И Т Е Р А Т У Р А

I. Л.И.МАКАРОВ, В.А.СКОРОБОГАТОВ. Некоторые алгоритмы отображения логических сетей в E_n-среде. Труды I Всесоюзной конференции по вычислительным системам, вып.3, Новосибирск. 1968 .

2. И.Е.КОБРИНСКИЙ, Б.А.ТРАХТЕНБРОТ. Введение в теорию конечных автоматов, ФМ, 1962.

3. Ю.В.МЕРЕКИН. Решение задач вероятностного расчета однотактных схем методом ортогонализации. Вычислительные системы, Новосибирск, 1963, вып.5.

4. Ю.В.МЕРЕКИН. Арифметические формы записи булевых выражений и их применение для расчета надежности схем. Вычислительные системы, Новосибирск, 1963, вып. 7.

Поступила в редакцию
20.IX.1968 г.