1969 г. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ Выпуск 33

УДК 519.95

О РАСПОЗНАВАНИИ ИЗОМОРФИЗМА НЕОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФОВ

В.А. Скоробогатов

До сих пор не известно удовлетворительное решение задачи получения алгоритма, вычисляющего, являются ли два графа изоморфными или нет. Естественно, в силу конечности графов, такой алгоритм существует, но не известно, можно ли указать алгоритм, существенно отличный от перебора.

При решении вопросов распознавания изоморфизма графов важны не только поиск алгоритма распознавания, отличного от перебора, но и поиск путей сокращения перебора.

В работе описан один подход к построению практических алгоритмов распознавания изоморфизма неориентированных графов на основе их предварительного анализа.

Пусть $G=(X,\Gamma)$ и $H=(Z,D)$ – неографы порядка n, без петель и кратных ребер, вершины которых произвольно перенумерованы натуральными числами от I до n.

По определению, G и H изоморфны $(G\simeq H)$, если между нумерациями их вершин можно установить взаимно однозначное соответствие, сохраняющее отношение смежности.

Пусть $\hat{G}(G_1)=\{G_i=(X_i,\Gamma_i)\}$, $i=1,2,\dots,k$, – разложение графа $G=(X,\Gamma)$ на подграфы $G_i=(X_i,\Gamma_i)$ относительно некоторого подграфа $G_1=(X_1,\Gamma_1)$ такое, что любое X_i состоит из тех и только тех вершин, которые смежны с некоторыми вершинами из X_{i-1}, а Γ_i – множество ребер графа G, концами которых являются вершины из X_i.

Очевидно, для любого такого разлож[illegible]ни[illegible]ет справедливо

$$\bigcup_{i=1}^{k} X_i=X; \quad X_i\cap X_{i+1}=\varnothing; \quad i=1,\dots,k-1.$$

Пусть $G_{i,i+1}=G_i\cup G_{i+1}\cup R_{i,i+1}$.

Граф $R_{i,i+1}=(X_i\cup X_{i+1},\ \Gamma_{i,i+1}/X_i\leftrightarrow X_{i+1})$ назовем разрезом.

Числа $n_i=|X_i|$ и $u_i=|\Gamma_{i,i+1}|$ назовем соответственно n-сечением и u-сечением.

Очевидно, каждому разложению $\hat{G}(G_1)$ можно поставить в соответствие набор сечений

$$\bar{\lambda}(n,u)=(n_1,n_2,\dots,n_k,u_1,\dots,u_{k-1}).$$

Назовем его $\bar{\lambda}(n,u)$ – вектором.

Будем говорить, что множество векторов

$$\bar{\lambda}_1(1,u),\ \bar{\lambda}_2(1,u),\dots,\bar{\lambda}_n(1,u),$$

соответствующих разложениям относительно каждой из вершин графа, т.е. $\hat{G}(X_1)$, $\hat{G}(X_2),\dots,\hat{G}(X_n)$, образует матрицу $\bar{\Lambda}(n,u)=\{\bar{\lambda}_i(1,u)\}$, $i=1,\dots,n$. Совпадающие векторы в матрице $\bar{\Lambda}(1,u)$ будем называть тождественными.

Строки $\bar{\Lambda}(1,u)$ упорядочим по убыванию их длины и убыванию чисел в строке так, чтобы первая строка имела наибольшую длину. Изменим соответственно нумерацию строк матрицы и вершин графа. Полученную матрицу и соответствующую нумерацию вершин назовем каноническими.

Любые две матрицы, полученные одна из другой перестановкой строк, назовем изоморфными.

Пусть $\hat{G}(X)=(X,G_2,\dots,G_k)$ и $\hat{H}(Z)=(Z,H_2,\dots,H_k)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Два разложения $\hat{G}(X)$ и $\hat{H}(Z)$ изоморфны, если существует последовательность подстановок

$t_1\in T_1$ на X_2, $t_2\in T_2$ на X_3, ..., $t_{k-1}\in T_{k-1}$ на X_k

такая, что подграфы

$$G_{12}t_1,\ G_{123}t_2,\dots,G_{12,\dots,k}t_{k-1}$$

переходят соответственно в подграфы

$$H_{12}=(Z\cup Z_2,\ D_2\subset D),\ H_{123},\dots,H_{12\dots k}.$$

Очевидно, что графы G и H изоморфны тогда и только тогда, когда для некоторого $\hat{G}(X)$ существует изоморфное ему $\hat{H}(Z)$.

Действительно, если $G\simeq H$, то вершины графов могут быть так перенумерованы, что при совмещении одноименных вершин каждому ребру из G будет соответствовать единственное ребро из H, и наоборот. Значит, для всякого разложения $\hat{G}(X)$ найдется изоморфное ему $\hat{H}(Z)$.

Если же нашлась пара изоморфных разложений $\hat{G}(X)$ и $\hat{H}(Z)$, то это означает, что граф G может быть переведен в граф H последовательностью подстановок $t_1, t_2, \dots, t_k$, следовательно, $G \simeq H$. Очевидно, что если $G \simeq H$, то их канонические матрицы $\bar{\Lambda}_G^k$ и $\bar{\Lambda}_H^k$ совпадают.

Обратное утверждение не доказано, т.е. не известно, следует ли из изоморфизма матриц $\bar{\Lambda}_G, \bar{\Lambda}_H$ изоморфизм графов G, H.

Если это окажется так, то проблема распознавания изоморфизма неориентированных графов может быть решена без перебора.

Поскольку доказательства достаточности условия изоморфизма матриц для изоморфизма графов нет, то распознавание изоморфизма графов можно проводить с некоторым перебором, который на каждом шаге определяется мощностью множества вершин i-го подграфа. Откуда следует, что наибольшее число подстановок, которые необходимо проверить для установления изоморфизма двух графов, не более $\varphi(n)$,

где
$$\varphi(n) \le \rho \prod_{i=1}^{k} n_i!\ , \quad \rho \le n .$$
Здесь ρ - число строк матрицы, изоморфных выбранной строке.

Алгоритм распознавания изоморфизма

Для данных G и H находим $\bar{\Lambda}_G$ и $\bar{\Lambda}_H$ и их канонические формы. Проверяем, совпадают ли они, если нет, то $G \neq H$, если да, то выбираем вектор с минимальным значением $\prod_{i=1}^{k} n_i!$.

Строим для этого вектора разложение $\hat{G}(x)$.

Строим последовательно, начиная с первого, разложения $\hat{H}(z)$, соответствующие векторам $\bar{\lambda}_H(1,u)$, тождественным вектору $\bar{\lambda}_G(1,u)$. Пусть число таких разложений равно ρ.

Пары разложений $\hat{G}(x)$, $\hat{H}(z)$ проверяем на изоморфизм.

Если ни одной пары изоморфных разбиений не нашлось, то $G \neq H$.

Поступила в редакцию
10.XI.1968 г.