ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ
1969г. Выпуск 33

УДК 519.95

РАСЧЕТ НАДЕЖНОСТИ ЛОГИЧЕСКИХ СЕТЕЙ МЕТОДОМ МОДЕЛИРОВАНИЯ

А.Х. Гиоргадзе, Г.В. Карумидзе

Пусть схемная реализация $L_f(N,\gamma)$ булевой функции $f=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ в базисе γ содержит N элементов. Будем говорить, что элемент i, $i=1,2,\dots,N$, в случае идеального функционирования реализует функцию Φ_0^i и находится в нулевом (начальном) состоянии. Пусть в результате неправильного срабатывания элемент i в каждом такте может реализовать одну из функций $\Phi_1^i,\Phi_2^i,\dots,\Phi_{s_i}^i$ или находиться в состояниях 0,1,2,..., S_i .

Обозначим через $P_{01}, P_{02}, \dots, P_{0s_i}$ вероятности появления событий, приводящих к реализации элементом i функций $\Phi_1^i,\Phi_2^i,\dots,\Phi_{s_i}^i$ или вероятности перехода из состояния 0, соответствующего идеальной работе, в состояния 1,2,..., S_i ,соответствующие ошибке;

$$\sum_{\ell=0}^{s_i} P_{0\ell}=1.$$

Считая, что надежность однотипных элементов одинакова, введем для каждого элемента $j\in\gamma$ стохастическую матрицу A_1^j ,первая строчка которой записывается как $P_{00}^j, P_{01}^j, \dots, P_{0s_j}^j$, а все последующие строчки одинаковы и имеют вид 1,0,...,0 . Матрицы A_1^j описывают ситуацию "сбоя" элемента, то есть если элемент в результате сбоя в некотором такте оказался в состояниях 1,2,..., S_j , то в следующем такте с вероятностью , равной 1, переходит в состояние 0 . Аналогично матрицы

A_2^j, $j \in \gamma$, первые строчки которых есть q^j_{00}, q^j_{01}, ..., $q^j_{0s_j}$, а в последующих строчках $q^j_{\ell\ell}$ =I, ℓ =I,2,..., s_j, описывают "отказ" элемента. И, наконец, стохастические матрицы, на вид которых ограничения не накладываются, описывают общий случай. Мы рассматриваем моделирование матриц вида A_1.

Каждый элемент $i \in L_f(N,\gamma)$ заменим имитирующим элементом, моделирующим функционирование элемента i, подверженного сбоям, следующим образом: построим логическую сеть F_1 с m^i входными двоичными каналами, соответствующими числу входных каналов элемента i, и добавочными ℓ^i каналами, $\ell^i = [\log_2(s_i+1)]$.

Пусть k-й набор (буква α_k) двоичных переменных на добавочных каналах появляется с вероятностью $P_k = P^i_{0j}$, $j = 0,1,2,\dots,s_i$, и при появлении его F_1 реализует функцию P^i_k, $k = 0,1,2,\dots,s_i$. Далее построим устройство, генерирующее буквы α_k с независимыми вероятностями P_k.

Введем определение вероятностного элемента (ВЭ) [I]: ВЭ – устройство с одним входным и одним выходным двоичными каналами, пропускающее входную I на выход с вероятностью P и входной 0 на выход с вероятностью I.

Тактовые сигналы генератора Г (рис.I) через элементы задержек $З_0$, $З_1$, ..., $З_{s_i-1}$ поступают на входы вероятностных элементов ВЭ$_1$, ВЭ$_2$, ..., ВЭ$_{s_i}$.

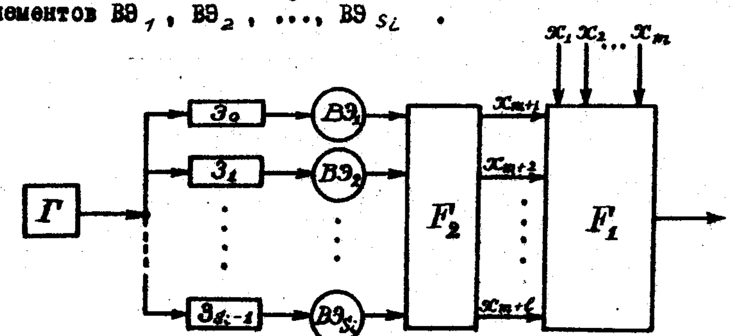

Рис. I.

Каждая $З_j$, j =0,I, ..., s_i -I, сдвигает такт на величину, равную $\frac{j}{s_i-1}$ такта $Г$. Примем за такт имитирующего элемента

$\frac{1}{s_i-1}$ часть такта $Г$ (малый такт). В последующем изложении под тактом исследуемого автомата будем понимать малый такт.

В каждый такт I может появиться на выходе только один ВЭ.

Выберем некоторую кодировку для выходных букв сети F_2 и построим F_2, входными двоичными каналами которой являются выходы ВЭ. Тогда входной алфавит для F_2 состоит из букв

$$E = \{\beta_0 = 00\dots0,\ \beta_1 = 100\dots0,\ \dots,\ \beta_{s_i} = 00\dots1\},$$

соответствующих состояниям 0,I,2,..., s_i. Выходной алфавит сети F_2 состоит из того же самого количества букв, что и входной алфавит. Однако количество выходных двоичных каналов сети F_2 (число двоичных разрядов в изображении кода выходной буквы) необходимо сводить к минимуму.

В I-м такте на входе сети F_2 могут быть буквы β_0 и β_1, во 2-м такте – β_0 и β_2 и т.д. Пусть на выходах ВЭ I появляется с вероятностями $P_k = P^i_{0j}$, k =I,2,..., s_i. Тогда вероятности появления букв α_0, α_1, ..., α_{s_i} равны вероятностям появления букв $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{s_i}$ и равны $1-\sum_{k=1}^{s_i} P_k$, $P_1, P_2, \dots, P_{s_i}$, соответственно.

Таким образом, построенный имитирующий элемент моделирует матрицу типа A_1 со следующим ограничением: сбои, переводящие элемент i из начального состояния в состояние I,2, ..., s_i, могут происходить только через $s_i - 1$ тактов.

Найдем вероятность Q того, что в реальном элементе, подверженном разным типам сбоев, соответствующих состояниям I,2,..., s_i, в течение $s_i - 1 = d$ тактов каждый тип сбоя будет происходить не более одного раза. Число возможных последовательностей событий, таких, что сбои случаются ℓ, $\ell \le d$, раз, причем каждый тип сбоя встречается не более одного раза, равно $(C^\ell_d)^2 \ell!$.

Пусть $P_{min} = min\{P_1, P_2, \dots, P_{s_i}\}$.

Тогда
$$Q > (P_0)^d + (P_{min})^d \sum_{\ell=1}^{d} (C^\ell_d)^2 \ell!\ .$$

При P_0, близких к I, Q достаточно велико. Таким образом, ограничение, накладываемое на выбранный способ моделирования ситуации "сбоя" в элементе (матрица вида A_1), является несущественным в случае, когда моделируемый элемент i обладает высокой степенью надежности.

Замена каждого элемента $L_f(N,\gamma)$ имитирующим элементом с g добавочными входами означает переход от функции $f=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ к функции $\psi=\psi(x_1,x_2,\ldots,x_n,x_{n+1},\ldots,x_{n+g})$, моделирующей f в случае, когда элементы $L_f(N,\gamma)$ подвержены сбоям и вероятности появления сбоев независимы.

Пусть $f=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ описывает некоторую надежностную характеристику системы, допустим, условия правильного функционирования. В задачах анализа надежности систем часто требуется определение вероятности $P(f=1)$ обращения функции $f=f(x_1,\ldots,x_n)$ в единицу, когда заданы независимые вероятности, $P(x_i=1)$ обращения в единицу переменных x_i, $i=1,2,\ldots,n$, [2-4]; или определение $P(\psi=1)$, где ψ моделирует f, [5].

Методы расчета $P(f=1)$ требуют преобразования f к форме, в которой замещение логических аргументов числовыми позволяет проводить машинный расчет [2, 3]. Следует отметить, что, как правило, искомая форма бывает значительно сложнее самой функции. Кроме того, в случае большого числа аргументов машинный расчет ограничен объемом памяти [6].

В подобных случаях вероятностные расчеты возможно проводить с помощью моделирования:

1. Определяются матрицы A_1^d для элементов $L_f(N,\gamma)$.
2. Каждый элемент $i\in L_f(N,\gamma)$ заменяется имитирующим элементом.
3. Строится схема, реализующая функцию f.
4. На ВЭ устанавливаются вероятности, соответствующие матрицам A_1^d.
5. Устанавливаются вероятности $P(x_i=1)$ на основных входных каналах, $i=1,2,\ldots,n$.
6. Проводятся статистические вычисления искомых величин.

Собственные сбои в схемах, реализующих имитирующие элементы и моделирующую функцию ψ, вносят погрешность в вычисления, проводимые на модели. Поэтому при моделировании на ненадежных элементах следует выбрать такую частоту генератора (ν), чтобы за среднее время τ до первого собственного сбоя модели имитировать достаточное количество сбоев, необходимое для определения искомых вероятностных характеристик моделируемой функции f.

Для системы из N элементов

$$\tau \geq \int_0^\infty e^{-\lambda N t}\,dt=\frac{1}{\lambda N},$$

где λ - опасность сбоя элемента. Пусть M - число испытаний, необходимых для статистических вычислений. Тогда $\nu=M\lambda N$.

Найдем математическое ожидание величины M. Пусть m - число испытаний, при которых испытываемая функция f обращается в ноль и $P(f=0)=\lim\limits_{M\to\infty}\frac{m}{M}$ - величина, достаточно малая по сравнению с I. Запишем относительную погрешность ε при определении математического ожидания $P(f=0)$:

$$\varepsilon=\eta\sqrt{\frac{D}{M}}\cdot\frac{M}{m},$$

где $\sqrt{\frac{D}{M}}$ - среднее квадратическое отклонение оценки;

η - степень достоверности.

Для рассматриваемого случая $D=P(f=0)\cdot P(f=1)\approx P(f=0)$. Тогда $\varepsilon=\eta\sqrt{\frac{1}{m}}$. Определяя m через выбранные η и ε, найдем математическое ожидание числа испытаний $\bar M$, при которых осуществляется m событий, обращающих функцию f в 0. Обозначим через τ вероятность появления таких событий. Тогда вероятность того, что m событий закончатся в i-м испытании есть:

$$C_{i-1}^{m}\tau^{m}(1-\tau)^{i-m},\quad m\le i,$$

и

$$\bar M=\sum_{i=m}^{\infty} i\,C_{i-1}^{m-1}\tau^{m}(1-\tau)^{i-m}=\tau^{m}(1-\tau)^{-m}\sum_{i=m}^{\infty} i\,C_{i-1}^{m-1}(1-\tau)^{i}.$$

Производная $\Phi(x)=\sum C_{i-1}^{m-1}\left[(1-\tau)x\right]^{i}$ в $x=1$ совпадает с $\sum\limits_{i=m}^{\infty} i\,C_{i-1}^{m-1}(1-\tau)^{i}$.

Обозначим $(1-\tau)x$ через q и $i-m$ через k. В результате простых преобразований получим

$$\varphi(x)=\frac{q^{m}}{(m-1)!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+m-1)!}{k!}q^{k}.$$

Легко проверить, что функция $F(q)=\frac{(m-1)!}{(q-1)^{m}}$, разложенная в ряд Тейлора, в $q=0$ почленно совпадает с $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(k+m-1)!}{k!}q^{k}$ для четных m. Подставляя $F(q)$ в $\Phi(x)$, определяя $\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{x=1}$ и умножая результат на $\tau^{m}(1-\tau)^{-m}$, находим $\bar M=\frac{m}{\tau}$

и частоту генератора Γ выбираем из условия

$$\nu = \frac{N \lambda m}{\tau} .$$

Величина $\tau \geq \sum_{\ell=1}^{S_i} P_\ell^i$, где $P_\ell^i = P_{o\ell}$ – вероятности перехода элемента $i \in L_f(N, \gamma)$ из начального состояния в состояние сбоя. Поэтому

$$\nu = \frac{N \lambda m}{\sum_{\ell=1}^{S_i} P_\ell^i} .$$

В заключение рассмотрим один из возможных способов построения ВЭ (рис.2): (I) – генератор шумового напряжения, амплитуда которого H распределена по нормальному закону; (2) – выпрямляющее устройство. На выходе (2) шумовое напряжение подчиняется нормальному распределению модуля H . На входы схемы совпадения (3) поступает $y = |H|$ и сигналы тактового генератора. На выходе схемы совпадения амплитуда сигнала распределена как модуль нормальной случайной величины. Ограничение (4) амплитуды сигнала на выходе схемы совпадения позволяет устанавливать требуемую вероятность P появления сигнала на выходе ВЭ. Действительно, пусть плотность распределения $y = |H|$ задана

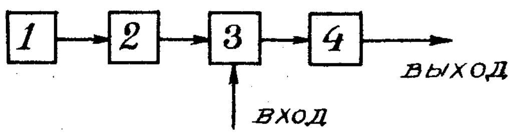

Рис. 2.

$$\Phi(y) = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) .$$

Вероятность превышения случайной величины y заданного порога ограничения y_o есть

$$P = вер.(y \geq y_o) = 1 - вер.(y \leq y_o) = 1 - \int_0^{y_o} \Phi(y) dy .$$

Задаваясь требуемой вероятностью P, можно определить y_o . Подстановка $y = \sigma x$ дает:

$$P = 1 - 2\int_0^{\frac{y_o}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

или $$P = 1 - 2\left[\int_{\infty}^{\frac{y_o}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx - \frac{1}{2}\right] =$$

$$= 2\left[1 - \int_{-\infty}^{\frac{y_o}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx\right] .$$

$\frac{y_o}{\sigma}$ определяется из таблицы функции Лапласа.

Л И Т Е Р А Т У Р А

I. В.В. ЧАВЧАНИДЗЕ, Г.В. КАРУМИДЗЕ, А.Х. ГИОРГАДЗЕ и др. Авторское свидетельство № I68525, Бюллетень изобретений и товарных знаков, I965г, №4.

2. С.В. МАКАРОВ. Вероятностные расчеты однотактных схем.-Вычислительные системы,Новосибирск,I962,вып.4.

3. Ю.В. МЕРЕКИН. Решение задач вероятностного расчета однотактных схем методом ортогонализации.- Вычислительные системы,Новосибирск,I963,вып.5.

4. В.Д. МАЛЮГИН. Один метод расчета надежности однотактных схем.-Вычислительные системы,Новосибирск,I964,вып.I3.

5. М.К. ЧИРКОВ. О надежности логических переключательных схем. -Вычислительная техника и вопросы программирования , вып.2,I963,стр.89-96.

6. Ю.В. МЕРЕКИН, С.В. МАКАРОВ, В.А. КОНДРАШОВ, В.А. ОСИПОВ , А.В. ФИЛАТОВ. Логико-вероятностные методы анализа структурной надежности. Отчет по теме А-ХХП-I228, (Ин-т математики,Сиб,отд.АН СССР).

Поступила в редакцию
I5.IУ.I968г.